**Télécom Physique Strasbourg** **EP012M87**
**Traitement du Signal Aléatoire**

# TP 1. Traitement des signaux aléatoires : signaux aléatoires sinusoïdaux et bruits

---

**Objectifs :**

Ce TP a pour objectif d'étudier les propriétés élémentaires de quelques signaux aléatoires simples (sinusoïdes à phase, fréquence ou amplitude aléatoires) ainsi que du bruit blanc.

Le TP comporte des calculs théoriques en relation avec le cours ou les TD (à préparer avant la séance) ainsi que des simulations sous Matlab.

A l'issue de ce TP vous devez savoir :
— créer un vecteur de temps contenant le bon nombre de points, à la bonne fréquence d'échantillonnage,
— générer correctement un signal aléatoire sinusoïdal, en identifiant la variable aléatoire et son impact sur les différentes réalisations de ce signal aléatoire,
— générer correctement des réalisations d'un bruit blanc gaussien à la moyenne et la variance désirées.
— l'importance de l'hypothèse d'ergodicité lorsque l'on traite des signaux dans la pratique.

**Références :**

Cours de traitement du signal 1A.
Cours de traitement des signaux aléatoires 2A, parties 1,2 et 3.

## Indications Matlab

- La fonction `rand` permet de créer une séquence de variables aléatoires distribuées suivant une loi uniforme.
- La fonction `randn` permet de créer une séquence de variables aléatoires distribuées suivant une loi normale.
- La syntaxe `0:(N-1)` permet de créer un vecteur de N échantillons allant de 0 à N-1 avec un pas de 1.

## 1 Simulation de réalisations de signaux aléatoires élémentaires

Pour tous les signaux, on considére une fréquence d'échantillonnage de $f_e = 1$ kHz et $N = 1000$ le nombre de points du signal.

1. Sinusoïde d'amplitude aléatoire.

$$X(t,\omega) \; = \; A(\omega)\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

avec $A(\omega)$ une variable aléatoire de distribution uniforme sur $[1, 4]$, $f_0 = 4\text{Hz}$, $\phi = 0$.
Simuler des réalisations de ce signal aléatoire. Qu'observe-t-on ?

2. Sinusoïde à fréquence aléatoire.

$$X(t, \omega) \;=\; a\cos(2\pi F_0(\omega)t + \phi)$$

avec $F_0(\omega)$ une variable aléatoire de distribution uniforme sur $[1, 10]$, $\phi = 0$, $a = 1$.
Simuler des réalisations de ce signal aléatoire. Qu'observe-t-on ?

3. Sinusoïde à phase aléatoire.

$$X(t, \omega) \;=\; a\cos(2\pi f_0 t + \Phi(\omega))$$

avec $\Phi(\omega)$ une variable aléatoire de distribution uniforme sur $[0, 2\pi]$, $a = 1$, $f_0 = 4\text{Hz}$.
Simuler des réalisations de ce signal aléatoire. Qu'observe-t-on ?

## 2 Etude de la sinusoïde à phase aléatoire

*Cours/TD : revoir le TD No 1 TS 2A.*

On considère le signal aléatoire à temps continu défini par :

$$X(t, \omega) \;=\; a\cos(2\pi f_0 t \;+\; \Phi(\omega))$$

où $a = 1$ et $f_0 = 4\text{Hz}$ sont des constantes et $\Phi(\omega)$ est une variable aléatoire équirépartie sur $[0, 2\pi]$.

1. Pour $t$ fixé rappeler l'expression théorique de la densité de probabilité de la variable aléatoire $X(t, \omega)$.

   Engendrer 10000 réalisations de ce signal, chaque réalisation étant composée de 1000 échantillons sur l'intervalle temporel $[0s, 1s]$.
   - Quelle est la période d'échantillonnage $T_e$ de ce signal ?
   - On stockera les 10000 réalisations dans une matrice de taille $10000 \times 1000$ où chaque ligne correspond à une réalisation du signal $X(t, \omega)$.

   Construire l'histogramme des valeurs du signal $X(t, \omega)$ à un instant t que vous choisirez (utiliser la fonction `histogram` avec 50 intervalles). Comparer avec la densité de probabilité théorique calculée en TD 1. Vous pouvez afficher par dessus l'histogramme la courbe théorique obtenue en TD. Vous utiliserez alors l'argument 'Normalization' qui permet de préciser quel type de normalisation de l'histogramme utiliser.

2. Rappeler les valeurs théoriques de $\mathbb{E}[X(t, \omega)]$ (moyenne statistique) et $\overline{X(t, \omega)}$ (moyenne temporelle) pour ce signal.

   Estimer les valeurs de ces deux moyennes à l'aide des réalisations générées dans la question 1.

3. Rappeler les expressions théoriques des fonctions d'autocorrélation statistiques et temporelles $\mathbb{E}[X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)]$ et $\overline{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)}$.

   Estimer la fonction d'autocorrélation temporelle à partir d'une réalisation du signal (on utilisera la fonction `xcorr` en précisant l'option `'unbiased'`). Comparer avec l'expression théorique.

   Pour afficher la courbe théorique sur la même figure que l'estimation renvoyée par `'xcorr'`, il faut récupérer le vecteur de retards `'lags'` renvoyé par `'xcorr'`. Attention, ce vecteur de retard est exprimé en échantillons numériques, pas en temps. Quelle opération doit-on faire pour passer du vecteur des retards en échantillons au vecteur des retards exprimés en secondes ?

## 3 Etude du bruit blanc

On se propose d'étudier ici quelques propriétés simples du bruit blanc gaussien discret $X(n, \omega)$ (supposé ergodique).
Engendrer 10000 réalisations de 1000 échantillons d'un bruit blanc gaussien centré discret de variance $\sigma^2 = 4$.

1. Rappeler l'expression de la densité d'ordre 1 d'un tel bruit.

   Construire l'histogramme des valeurs du bruit $X(n, \omega)$ à l'instant $n = 3$ (utiliser la fonction `histogram` avec 50 intervalles). Comparer avec la densité de probabilité théorique.

2. Quel sont les moyennes statistique et temporelle théoriques de ce bruit ? Les estimer à partir de 10000 réalisations (moyenne statistique), 1000 échantillons dans le temps (moyenne temporelle).

3. Quelle est l'expression théorique de la fonction d'autocorrélation statistique et temporelle de ce bruit ?

   Estimer la fonction d'autocorrélation statistique $R_X(k)$ du bruit en utilisant la fonction `xcorr`. En quoi l'hypothèse d'ergodicité intervient-elle ici ? En utilisant la doc de la fonction `xcorr`, afficher la version biaisée (`'biased'`) et non biaisée (`'unbiased'`) de $R_X(k)$. Qu'est-ce qui les distingue ? Observer les résultats obtenus, comparer avec l'expression théorique et commenter.