

TP 2. Traitement des signaux aléatoires : détection de signaux noyés dans du bruit

Objectifs :

Ce TP a pour objectif d'étudier une technique classique de détection d'un signal bruité : la détection synchrone. La détection synchrone est une technique de traitement du signal utilisée en mesure physique, permettant d'extraire des signaux périodiques, de faible amplitude, noyés dans un bruit important à large bande (bruit blanc), par *intercorrélation temporelle* du signal bruité avec un signal sinusoïdal auxiliaire de fréquence proche de celle de la fréquence du signal à détecter.

Le TP comporte des calculs théoriques en relation avec le cours (à préparer avant la séance) ainsi que des simulations sous Matlab (petits programmes simples à écrire, programmes à "trous").

A l'issue de ce TP vous devez savoir :

- mettre en oeuvre une stratégie utilisant la fonction d'intercorrélation pour détecter un signal noyé dans du bruit en fonction des informations connues ou inconnues sur le signal recherché,
- utiliser correctement les propriétés de la fonction d'intercorrélation pour déterminer le déphasage ou le retard d'un signal noyé dans le bruit,
- tenir compte des limitations imposées par les estimateurs de la fonction d'intercorrélation par rapport à ses propriétés théoriques,
- étudier la robustesse d'une méthode de détection par rapport au niveau de bruit.

Références :

Cours de traitement du signal 1A, partie 2.

Cours de traitement des signaux aléatoires 2A, parties 3 et 4.

Indications Matlab

- La fonction `randn` permet de créer une séquence de variables aléatoires distribuées suivant une loi normale.
- La fonction `xcorr` permet de calculer les valeurs de l'intercorrélation en fonction du décalage (lag).

1 Détection d'un signal périodique $x(t)$ de période connue par intercorrélation avec un signal auxiliaire $z(t)$

On considère un signal $x(t)$ de forme inconnue mais de **fréquence connue** f_0 . Pour les simulations on considérera une sinusoïde :

$$x(t) = a \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

Le signal $x(t)$ est perturbé par un bruit blanc (physique) $b(t)$ gaussien centré de variance finie σ^2 :

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

L'objectif est de détecter la présence (ou l'absence) du signal $x(t)$ dans le bruit à partir du signal observé $y(t)$.

1. Calculer la puissance P_x du signal déterministe $x(t)$. Calculer de même la puissance du bruit P_b . Montrer que le rapport signal à bruit (RSB) s'exprime en dB par :

$$\text{RSB} = 10 \log_{10} \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right).$$

En déduire l'expression de σ en fonction du RSB et de a .

2. *Matlab tp2_0.m (prgm. à trous) :*

On échantillonnera les signaux à $T_e = 1\text{ms}$. Dans les simulations sous Matlab on prendra $a = 1$, $f_0 = 10\text{ Hz}$, $\phi = \pi$ et une durée de 1 s pour tous les signaux.

Engendrer une réalisation de $b(t)$, puis $y(t)$ pour les rapports signal à bruit suivants : 10dB, 0dB, -10dB, -20dB. Afficher les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur la même figure.

3. La détection du signal dans le bruit est réalisée en intercorrélant le signal bruité $y(t)$ avec un signal auxiliaire $z(t)$ de même fréquence f_0 . On prendra pour $z(t)$ une sinusoïde :

$$z(t) = a \sin(2\pi f_1 t)$$

avec $f_1 = f_0$. Remarquer que $y(t)$ et $z(t)$ sont décalés (en raison de la phase ϕ).

Cours : Calculer les expressions théoriques des fonctions d'intercorrélation temporelle dans les cas suivants :

- Signal absent : intercorrélation bruit seul-signal auxiliaire : $Rbz(\tau)$
- Signal présent sans bruit : intercorrélation signal non bruité-signal auxiliaire : $Rxz(\tau)$
- Signal présent dans le bruit : intercorrélation signal bruité-signal auxiliaire : $Ryz(\tau)$.

Matlab tp2_1.m (prgm. à trous) : Simuler et afficher sous Matlab ces différentes fonctions d'intercorrélation pour des RSB de : 10dB, 0dB, -10dB, -20dB. On utilisera la version biaisée ('biased') de l'intercorrélation. Pourquoi fait-on ce choix ? (tester avec la version non biaisée ('unbiased')).

Proposer une méthode de détection de présence du signal dans le bruit (on ne l'implantera pas). Que constate-t-on sur les fonctions d'intercorrélation pour des RSB décroissants ? (comparer aux expressions théoriques).

4. Le maximum de la fonction d'intercorrélation $Ryz(\tau)$ définit le décalage temporel τ_{max} entre les signaux $y(t) = x(t) + b(t)$ et $z(t)$. Calculer la valeur de ce décalage en fonction de la phase (supposée connue) de $y(t)$ (on rappelle que $\phi = \pi$).

Matlab tp2_1.m (prgm. à trous) : déterminer ce décalage à partir de la simulation, en cherchant le maximum de l'intercorrélation. Afficher $y(t)$ et $z(t - \tau_{max})$ sur la même figure.

2 Cas d'un signal périodique bruité de fréquence inconnue

On suppose maintenant que la fréquence du signal périodique $x(t)$ n'est **pas connue**. On se propose de la déterminer, comme précédemment, par intercorrélation avec un signal auxiliaire (sinusoïde de fréquence f_1), en faisant varier f_1 dans un intervalle de valeurs recherchées. L'intercorrélation sera maximale lorsque le signal $z(t)$ aura la même fréquence (et la même phase=décalage) que $x(t)$.

On a donc comme précédemment :

$$x(t) = a \sin(2\pi f_0 t + \phi) \quad \text{signal inconnu} \quad (1)$$

$$y(t) = x(t) + b(t) \quad \text{signal bruité} \quad (2)$$

$$z(t) = a \sin(2\pi f_1 t) \quad \text{signal auxiliaire} \quad (3)$$

$$(4)$$

On prendra à nouveau $a = 1$, $f_0 = 10$ Hz, $\phi = \pi$, $T_e = 1$ ms et on fera varier f_1 .

1. *Matlab* `tp2_2.m` :

Pour les valeurs de f_1 variant dans l'intervalle [1 Hz, 30 Hz] par pas de 0,1 Hz, ce programme affiche sur la même figure :

- le signal auxiliaire $z(t)$
- la superposition du signal bruité $y(t)$ avec $z(t - \tau_{max})$ où τ_{max} est le décalage optimal entre y et z , défini dans la question précédente
- la fonction d'intercorrélation $R_{yz}(\tau)$
- les valeurs du maximum de l'intercorrélation R_{yz} en fonction de f_1 .

Il affiche ensuite la solution optimale (intercorrélation maximale) pour laquelle on a théoriquement $f_1 = f_0$.

Comprendre le fonctionnement de ce programme. Faire des simulations pour les rapports signal à bruit suivants : 10dB, 0dB, -10dB, -20dB, -30dB. Que constate t-on ?

- Relancer le programme `tp2_2.m` en supposant que f_0 est une réalisation d'une variable aléatoire $F_0(\omega)$ uniformément répartie entre 1Hz et 30Hz.

2. *Matlab* `tp2_3.m` : Appliquer la méthode proposée pour déterminer les fréquences des signaux enregistrés dans les fichiers sig6-1.mat, sig6-2.mat et sig6-3.mat (NB. ces signaux sont échantillonnés à $T_e = 10$ ms, de durée 1 s). Ces signaux ont été engendrés par le script `tp2_signaux.m`. Commenter les résultats obtenus.