Martha Pinzón 14
Univ del Valle

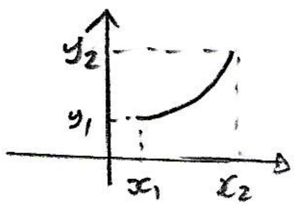
Función Creciente y Decreciente

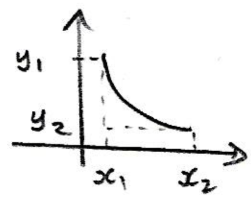
Sea f una función definida en un dominio D.

Se dice:

i) f es creciente en D, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $x_1, x_2 \in D$.
(A medida que x aumenta, los valores de y aumentan)

ii) f es decreciente en D si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $x_1, x_2 \in D$.
(A medida que x aumenta, los valores de y disminuyen)



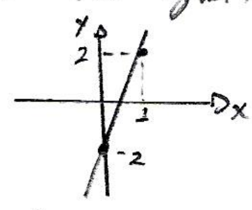


Ejemplo: Determine si las funciones dadas son crecientes ó decrecientes. $f(x) = 4x-2$, $g(x) = 2x^2+1$

S//

i) $f(x) = 4x-2$.

Claramente se observa revisando la gráfica que f es una función creciente.



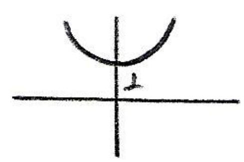
Usando la definición verificamos que f es creciente.

Sean $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$, entonces

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2$$
$$4x_1 - 2 < 4x_2 - 2$$
$$f(x_1) < f(x_2).$$ luego f es creciente.

ii) $g(x) = 2x^2+1$.

La gráfica es una parábola



g es creciente en $[0, \infty)$,
decreciente en $(-\infty, 0]$.

veamos en $(-\infty,0]$.

Sean $x_1, x_2 \leq 0$, $\quad x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \geq 0$ $\quad$ Multiplicando Término a Término.

$x_1 < x_2 \leq 0$

Por tanto $\quad 2x_1^2 > 2x_2^2$

$\Rightarrow 2x_1^2 + 1 > 2x_2^2 + 1.$

$\Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

luego g es decreciente en $(-\infty, 0]$

Análogamente se muestra que g es creciente en $[0, \infty)$.

Una función es monótona si es creciente ó decreciente en todo su dominio. Así, podemos afirmar que la función f del ejemplo es monótona, mientras que g no.

Veremos que las funciones pueden clasificarse según su comportamiento.

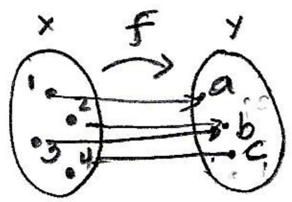
Funciones Inyectivas y Sobreyectivas

Def: Una función es Sobreyectiva si el rango coincide con el codominio $(R_f = C_f)$

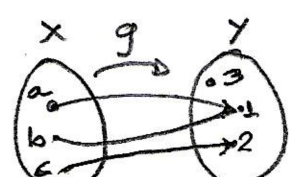
(Recuerde que lo que se cumple es $R_f \subseteq C_f$)

simbólicamente:

$$f \text{ es sobre} \Leftrightarrow \forall y \in C_f, \exists x \in D_f \text{ tal que } f(x) = y.$$



f es sobre



g no es sobre

Veamos como el codominio de una función no interviene en la igualdad de funciones.

DEF: Dos funciones son iguales si tienen igual dominio e iguales Imágenes.

$$f = g \Leftrightarrow D_f = D_g \wedge f(x) = g(x)$$

Ej: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \to x^2$.

observe $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Además $f(x) = x^2 = g(x)$. Por tanto $f = g$. El codominio no importa, luego la sobreyectividad en una función tiene sentido sólo si se menciona el codominio de la función. Así toda función se puede considerar sobreyectiva, si se trabaja sobre su rango.

DEF: Una función f es inyectiva si elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas en el rango.

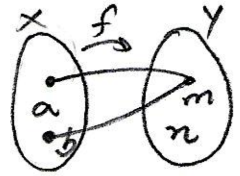
$$f \text{ es inyectiva ó } 1\text{-}1 \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Lo cual es equivalente a decir

$$f \text{ es iny ó } 1\text{-}1 \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(En lógica la Implicación $p \Rightarrow q$ es equivalente a la contra-recíproca $\sim q \Rightarrow \sim p$). De ahí la equivalencia anterior.

La situación del diagrama no puede suceder



f es función, pero no es 1-1.

Ejemplo: Determine si las funciones dadas son 1-1 o no.

i) $f(x) = x^2 - 3$ ii) $f(x) = 4 + \sqrt{2x-6}$.

S// i) $f(x) = x^2 - 3$. $D_f = \mathbb{R}$.

Como $f(1) = 1 - 3 = -2 = f(-1)$, f no es 1-1.

Se exhibió un contraejemplo.

Si usamos la definición se tiene:

Sean $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

Entonces:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 \cancel{-3} = x_2^2 \cancel{-3}$$

$$x_1^2 = x_2^2$$ Tomando raíz a ambos lados

$$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$$

$$|x_1| = |x_2| \rightarrow x_1 = x_2 \text{ ó } x_1 = -x_2$$

lo cuál muestra que f no es 1-1.

ii) $f(x) = 4 + \sqrt{2x-6}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 6 \geq 0\} = [3, \infty)$

Sean $x_1, x_2 \in D_f$ tq $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$\cancel{4} + \sqrt{2x_1 - 6} = \cancel{4} + \sqrt{2x_2 - 6}$$

$$\sqrt{2x_1 - 6} = \sqrt{2x_2 - 6}.$$ elevando al cuadrado

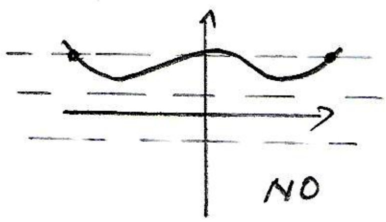
$$2x_1 - 6 = 2x_2 - 6$$

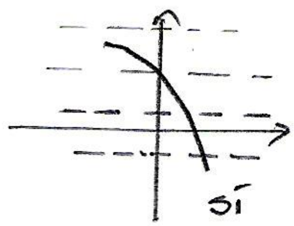
$$2x_1 = 2x_2 \rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore f \text{ es } 1\text{-}1.$$

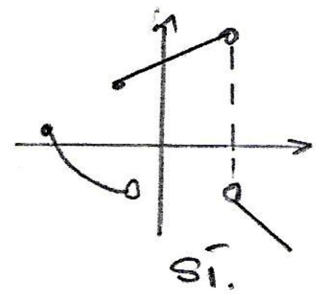
Existe un criterio geométrico que permite identificar si una función es inyectiva.

Criterio de la línea horizontal

Una función es inyectiva ó 1-1, si toda recta horizontal corta la gráfica de la función a lo más en un punto.

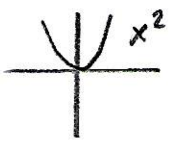


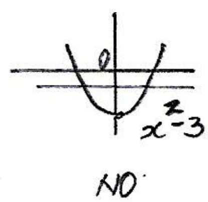




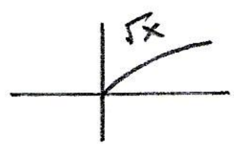
En el ejemplo anterior

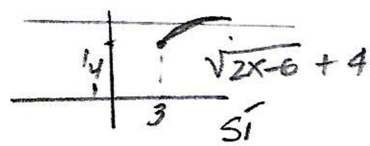
$f(x) = x^2 - 3$





$f(x) = 4 + \sqrt{2x-6}$





Otro argumento que permite determinar si una función es 1-1 es:

" Si f es una función monótona entonces es inyectiva"

Def: Si una función es inyectiva y sobreyectiva entonces es Biyectiva.

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Las funciones pueden combinarse mediante las operaciones suma, resta, producto, cociente y formar nuevas funciones.

Como se definen?

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) g(x), \quad D_{fg} = D_f \cap D_g$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad D_{f/g} = D_f \cap D_g, \; g(x) \neq 0$$

ej: Sean $f(x) = x-1$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x-1}$.

Halle $(f+g)(x)$, $(f \cdot h)(x)$.

S//

$f(x) = x-1 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x-1 + \frac{x+1}{x} = \frac{x^2 - x + x + 1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(El dominio se obtuvo de la intersección de los dominios no de la expresión, aunque coincidan).

$$(f \cdot h)(x) = f(x) h(x) = (x-1) \frac{1}{(x-1)} = 1.$$

$$D_{f \cdot h} = D_f \cap D_h = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Si el dominio se tomara de la expresión se afirmaría que el dominio es $\mathbb{R}$, lo cuál es incorrecto.