Martha Pinzón
Univ. del Valle 

TEOREMA: Si $f$ es un polinomio de grado $n$ $(n \geq 1)$ de coeficientes reales y $z$ es una raíz compleja de $f$ entonces su conjugada $\bar{z}$ también es raíz de $f$.

D// Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , $a_i \in \mathbb{R}$ , $i = 0, \dots n$
como $z$ es raíz de $f$, $f(z)=0$, luego
$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$
Tomando conjugado a ambos lados, se tiene

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0} = \overline{0}$$
$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0$$
$$\overline{a_n}\, \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\, \overline{z^{n-1}} + \dots \overline{a_1}\, \overline{z} + \overline{a_0} = 0$$
$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0 \quad (\text{Pues } \overline{a_i} = a_i \text{ ya que } a_i \text{ es real})$$
$$a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0 \quad (\text{puesto } \overline{z^n} = (\bar{z})^n)$$
$$f(\bar{z}) = 0.$$
Así, $\bar{z}$ también es raíz de $f$.

Como consecuencia de este teorema se tiene el siguiente corolario.

Corolario: Si $f$ es un polinomio de grado $n$ $(n \geq 1)$, con coeficientes reales, entonces $f$ se puede expresar como producto de factores lineales de la forma $(px+q)$, $p, q \in \mathbb{R}$ y/o factores cuadráticos irreducibles en $\mathbb{R}$, de la forma $(ax^2+bx+c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

El siguiente teorema permite hallar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros

TEOREMA: Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado $n$ $(n \geq 1)$, con coeficientes enteros y $p/q$ es una raíz de $f$, entonces $p$ es un divisor de $a_0$ y $q$ es un divisor de $a_n$.

Ejemplos: 1) Halle el ~~residuo~~ de dividir el polinomio $f(x) = x^{100} - 2x^{40} + 3x^2 - 6$ entre $g(x) = (x-1)$.

2) a) Encuentre un polinomio de grado 4 con coeficientes reales que tenga entre sus raíces a $2, -2, 1-2i$

b). Halle un polinomio de grado 3 con coeficientes reales, que tenga entre sus raíces a $4$ y $2+3i$, y cuya gráfica pase por el punto $(1,-2)$.

3). factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$

S/ 1). Por el Teorema del residuo, el residuo de dividir $f(x)$ entre $x-1$, es igual a $f(1)$, Luego
$f(1) = (1)^{100} - 2(1)^{40} + 3(1)^2 - 6 = 1 - 2 + 3 - 6 = -4.$

2) a) Por el Teorema del factor, como $2$ y $-2$ son raíces del polinomio buscado $p(x)$, $(x-2)$ y $(x-(-2))$ son factores del polinomio.
Por ser un polinomio de coeficientes reales y tener a $1-2i$ entre sus raíces. también tiene su conjugada $1+2i$. Así $P(x)$ tiene entre sus factores a $(x-(1-2i))$ y a $(x-(1+2i))$.

Así, $p(x) = a\,(x-2)(x+2)(x-(1-2i))(x-(1+2i))$, $a \in \mathbb{R}$.
de donde $P(x) = a\,(x-2)(x+2)((x-1)-2i)((x-1)+2i)$

$$P(x) = a(x^2-4)((x-1)^2-(2i)^2)$$
$$= a(x^2-4)(x^2-2x+1+4)$$
$$= a(x^2-4)(x^2-2x+5)$$
$$P(x) = a(x^4-2x^3+x^2+8x-20). \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior es una familia de polinomios que satisfacen las propiedades enunciadas.
Para obtener una solución particular, damos valores al número $a$ en $\mathbb{R}$.
Ej. Si $a=1$, $P(x) = x^4-2x^3+x^2+8x-20$ es uno de los polinomios que cumple las condiciones dadas.

b) Como el polinomio buscado tiene coeficientes reales y $2+3i$ es raíz, entonces $2-3i$ también es raíz. Y por tener a $4$ entre sus raíces, $P(x)$ se puede escribir como

$$P(x) = a(x-4)(x-(2+3i))(x-(2-3i)), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$P(x) = a(x-4)((x-2)+3i)((x-2)-3i)$$
$$P(x) = a(x-4)((x-2)^2+9)$$

De otro lado por pasar la gráfica de $P$ por el punto $(1,-2)$, se cumple $P(1)=-2$. Esta condición permite encontrar la solución particular.

$$P(1)=-2 \rightarrow \quad -2 = a(1-4)((1-2)^2+9)$$
$$-2 = -3a(10)$$
$$a = \frac{2}{30} = 1/15.$$

Así, $P(x) = \frac{1}{15}(x-4)((x-2)^2+9) = \frac{1}{15}(x^3-8x^2+29x-52)$

3) a) Para factorizar el polinomio $p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x$ lo podemos hacer por agrupación. En efecto,

$$p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x$$
$$= (3x^4 - 2x^3) + (-6x^2 + 4x)$$
$$= x^3(3x-2) - 2x(3x-2)$$

$$P(x) = (x^3 - 2x)(3x-2).$$ Factorización tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$.

$$P(x) = x(x^2-2)(3x-2).$$
$$= x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(3x-2).$$

b) Para factorizar el polinomio $p(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$ lo hacemos buscando raíces racionales.

Sea $p$: Divisores de $-18$ $= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$
$q$: Divisores de $1$. $= \{\pm 1\}$.

posibles raíces racionales

$$p/q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$$

Si el polinomio $P(x)$ tiene raíces racionales están en la lista anterior. Ahora se revisan dichos valores para encontrarlas.

Con $1$ y $-1$ se puede evaluar directamente en $P(x)$, pues es sencillo. Así,

$$P(1) = (1)^4 - (1)^3 + 7(1)^2 - 9(1) - 18$$
$$= 1 - 1 + 7 - 9 - 18$$
$$= -20.$$

$$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 7(-1)^2 - 9(-1) - 18$$
$$= 1 + 1 + 7 + 9 - 18$$
$$= 0.$$

Como $-1$ es una raíz de $P$, $(x+1)$ es un factor. para hallar el cociente de $P(x)$ entre $x+1$.

Se puede dividir $P(x)$ entre $x+1$ ó usar la división sintética. Ésta sólo puede usarse para dividir un polinomio $p(x)$ entre otro pero lineal del tipo $(x-c)$.
Se procede de la siguiente forma.

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$
$g(x) = x - c$.

Se toman los coeficientes de $p(x)$ y el número $c$.
Se organizan de la siguiente manera.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ c & \vdots & & & & \\ \hline & a_n & & & & \end{array}$$

Se considera el término $a_n$, se multiplica por $c$ y luego el resultado se escribe debajo de $a_{n-1}$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ c & & a_n c & & & \\ \hline & a_n & & & & \end{array}$$

Se suman los términos $a_{n-1} + a_n c$ y se escribe enseguida de $a_n$. Vuelve y de nuevo se multiplica este número por $c$ y se escribe debajo del término $a_{n-2}$ y se procede análogamente hasta escribir el último término debajo de $a_0$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ c & & a_n c & c a_{n-1} + c^2 a_n & & & \\ \hline & a_n & a_{n-1} + c a_n & a_{n-2} + c a_{n-1} + c^2 a_n & \cdots & & \end{array}$$

Los números $a_n$, $a_{n-1} + c a_n$, ... son los coeficientes del cociente en forma descendente.

En el ejemplo, $p(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18$
$g(x) = x+1$. Usamos división sintética para hallar $\frac{p(x)}{g(x)}$

En este caso $c = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 7 & -9 & -18 \\ -1 & & -1 & 2 & -9 & 18 \\ \hline & 1 & -2 & 9 & -18 & 0. \end{array}$$

El último término es el residuo de la división

Así, $p(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = (x^3 - 2x^2 + 9x - 18)(x+1)$

Ensayamos de nuevo con $-1$, para ver si de nuevo es raíz. Se usan los nuevos coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 9 & -18 \\ -1 & & -1 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & 12 & -30. \end{array} \longrightarrow \text{ No es raíz.}$$

Ensayamos con otros valores. Ej $c = -2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 9 & -18 \\ -2 & & -2 & 8 & -34 \\ \hline & 1 & -4 & 17 & -52 \neq 0 \end{array} \quad \text{No es raíz.}$$

$c = 2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 9 & -18 \\ 2 & & 2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}$$

2 es raíz, luego $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = (x-2)(x^2+9)$.

Así, $p(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18 = (x^3 - 2x^2 + 9x - 18)(x+1)$
$(x^2+9)(x-2)(x+1)$.

Factorización en $\mathbb{R}$, $p(x) = (x+1)(x-2)(x^2+9)$
Factorización en $\mathbb{C}$. $p(x) = (x+1)(x-2)(x+3i)(x-3i)$

FUNCIONES RACIONALES: Una función es racional, si es el cociente de dos polinomios. $f = p/q$, $q \neq 0$. Tiene dominio todo $x \in \mathbb{R}$ excepto los ceros de $q(x)$.