Diferenciales

Profesoras: Martha Pinzón y Daniela Vásquez

0.1. Incrementos y diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función. Si la variable x varia de x_1 a x_2, el incremento en x denotado por Δx, es $\Delta x = x_2 - x_1$. Cuando la variable x cambia, la variable dependiente y también cambia. El incremento en y correspondiente al incremento Δx se denota por Δy, así

Δf:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

En general, dada $y = f(x)$ si la variable x tiene un incremento Δx, entonces el incremento en y, Δy, es

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

Ejemplo 0.1.1 *Sea $f(x) = -2x^2 + 7$. Si x cambia de 3 a $3,25$ halle Δx. Use Δx para calcular Δy.*

Solución: El incremento en x, $\Delta x = x_2 - x_1 = 3,25 - 3 = 0,25$.

Ahora el incremento en y es

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \\
&= f(3 + \Delta x) - f(3) \\
&= -2(3 + \Delta x)^2 + 7 - (-11) \\
&= -18 - 12\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 18 \\
&= -2\Delta x(6 + \Delta x)
\end{aligned}$$

La expresión permite calcular Δy para cualquier variación en x, en particular cuando $\Delta x = 0,25$, entonces

$$\Delta y = -2(0,25)(6 + 0,25) = -0,5(6,25) = -3,125$$

Así cuando x varía de 3 a $3,25$, el valor de y disminuye en $3,125$.

Observe que Δy se puede calcular directamente como

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(3,25) - f(3) = -14,125 - (-11) = -3,125.$$

La derivada de una función f se puede escribir en términos de incrementos Δx y Δy. En efecto,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Geométricamente el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente de la recta secante determinada por los puntos $P(x, f(x))$ y $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$.

Ahora, si $\Delta x \approx 0$ entonces $f'(x) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, es decir, $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ cuando $\Delta x \approx 0$. La expresión $f'(x)\Delta x$ se conoce con un nombre especial.

Definición 0.1.1 *Sea $y = f(x)$ una función derivable y Δx un incremento en x. Se define:*

1. *La diferencial de la variable independiente x, denotada por dx, como $dx = \Delta x$.*
2. *La diferencial de la variable dependiente y, dy, como $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.*

Por otro lado, si el diferencial en x es distinto de 0 ($dx \neq 0$), entonces

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

.

De acuerdo a lo anterior, si $\Delta x \approx 0$ entonces $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$. La aproximación se puede apreciar en la figura siguiente

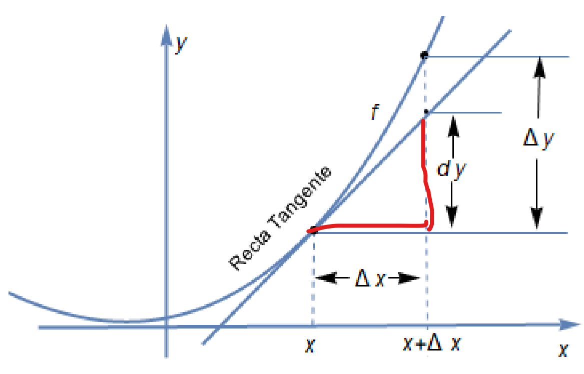

Figura 1: Diferencial

Mientras Δy indica el cambio preciso en y desde x a $x+\Delta x$, dy da el cambio de y si la gráfica f desde x hasta $x+\Delta x$ hubiese tenido pendiente constante $f'(x)$. La diferencia entre Δy y dy es la separación vertical entre la gráfica de f y la recta tangente en $x+\Delta x$.

Entre menos curva es la gráfica de la función, mayor es la precisión del diferencial.

Por otra parte, como $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$ entonces

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \tag{1}$$

es decir,

$$\boxed{f(x + dx) \approx f(x) + dy}$$

Ejemplo 0.1.2 *Sea* $f(x) = -2x^2 + 7$. *Use el diferencial* dy *para estimar* Δy, *cuando* x *varía de* 3 *a* $3,25$.

Solución: Por lo visto anteriormente,

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx = -4xdx$$

Como $dx = \Delta x = 0,25$, entonces $dy = -4(3)(0,25) = -3$. En el ejemplo resuelto anteriormente vimos que $\Delta y = -3,125$, lo cual muestra una buena aproximación de Δy, con una diferencia del valor real y de la aproximación de $0,125$.

Ejemplo 0.1.3 *Use la diferencial para estimar* $\sqrt{102}$.

Solución: Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Se busca el número más cercano a 102 de modo que la raíz sea exacta, este número es 100, así consideramos $x = 100$ y el incremento $\Delta x = 2$.

Ahora, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, luego el diferencial $dy = f'(x)\Delta x = \dfrac{1}{2\sqrt{100}}\,2 = \dfrac{1}{10} = 0,1$. Usando (1)

$$\sqrt{102} \approx \sqrt{100} + 0,1 = 10,1$$

Observe que $(10,1)^2 = 102,01$, lo cual indica una buena aproximación.