

Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Ecuaciones lineales no homogéneas

Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces

Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y. \quad (1)$$

Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y. \quad (1)$$

Teorema: (Principio de superposición) Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuaciones

$$L(y_1) = g_1 \quad \text{y} \quad L(y_2) = g_2. \quad (2)$$

Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y. \quad (1)$$

Teorema: (Principio de superposición) Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuaciones

$$L(y_1) = g_1 \quad \text{y} \quad L(y_2) = g_2. \quad (2)$$

Entonces la combinación lineal $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, con C_1, C_2 constantes es solución de

$$L(y) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x).$$

Lo anterior se sigue de

Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y. \quad (1)$$

Teorema: (Principio de superposición) Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuaciones

$$L(y_1) = g_1 \quad \text{y} \quad L(y_2) = g_2. \quad (2)$$

Entonces la combinación lineal $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, con C_1, C_2 constantes es solución de

$$L(y) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x).$$

Lo anterior se sigue de

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2)$$

Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y. \quad (1)$$

Teorema: (Principio de superposición) Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuaciones

$$L(y_1) = g_1 \quad \text{y} \quad L(y_2) = g_2. \quad (2)$$

Entonces la combinación lineal $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, con C_1, C_2 constantes es solución de

$$L(y) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x).$$

Lo anterior se sigue de

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2)$$

Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y. \quad (1)$$

Teorema: (Principio de superposición) Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuaciones

$$L(y_1) = g_1 \quad \text{y} \quad L(y_2) = g_2. \quad (2)$$

Entonces la combinación lineal $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, con C_1, C_2 constantes es solución de

$$L(y) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x).$$

Lo anterior se sigue de

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) = C_1 g_1 + C_2 g_2. \quad (3)$$

Una consecuencia es que tenemos lo mismo para m funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ soluciones de la ecuaciones

$$L(y_1) = g_1, L(y_2) = g_2, \dots, \quad L(y_m) = g_m,$$

respectivamente.

Una consecuencia es que tenemos lo mismo para m funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ soluciones de la ecuaciones

$$L(y_1) = g_1, L(y_2) = g_2, \dots, \quad L(y_m) = g_m,$$

respectivamente. En este caso, si C_1, \dots, C_m son constantes

Una consecuencia es que tenemos lo mismo para m funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ soluciones de la ecuaciones

$$L(y_1) = g_1, L(y_2) = g_2, \dots, \quad L(y_m) = g_m,$$

respectivamente. En este caso, si C_1, \dots, C_m son constantes entonces la combinación lineal

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_m y_m(x)$$

es solución de la ecuación

$$L(y) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2 + \dots + C_m g_m(x).$$

Ejemplo

Sea $y_1(x) = e^x$ solución de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 2e^x,$$

Ejemplo

Sea $y_1(x) = e^x$ solución de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 2e^x,$$

y sea $y_2(x) = x$ una solución de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 4x - 4,$$

Ejemplo

Sea $y_1(x) = e^x$ solución de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 2e^x,$$

y sea $y_2(x) = x$ una solución de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 4x - 4,$$

Por el principio de superposición tenemos que

$$y(x) = 2e^x + \frac{x}{2},$$

es solución de

$$2y'' - 4y' + 4y = 4e^x + 2x - 2 \quad (4)$$

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g. \quad (5)$$

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g. \quad (5)$$

Entonces existe una función $y_h(x)$ solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ tal que

$$y_{p_2} = y_h + y_{p_1}$$

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g. \quad (5)$$

Entonces existe una función $y_h(x)$ solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ tal que

$$y_{p_2} = y_h + y_{p_1}$$

Teorema: Sea $y_p(x)$ una solución definida en (a, b) de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (6)$$

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g. \quad (5)$$

Entonces existe una función $y_h(x)$ solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ tal que

$$y_{p_2} = y_h + y_{p_1}$$

Teorema: Sea $y_p(x)$ una solución definida en (a, b) de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (6)$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en (a, b) .

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g. \quad (5)$$

Entonces existe una función $y_h(x)$ solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ tal que

$$y_{p_2} = y_h + y_{p_1}$$

Teorema: Sea $y_p(x)$ una solución definida en (a, b) de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (6)$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en (a, b) . Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes definidas en (a, b)

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g. \quad (5)$$

Entonces existe una función $y_h(x)$ solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ tal que

$$y_{p_2} = y_h + y_{p_1}$$

Teorema: Sea $y_p(x)$ una solución definida en (a, b) de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (6)$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en (a, b) . Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes definidas en (a, b) de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (7)$$

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p1}(x)$ y $y_{p2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g. \quad (5)$$

Entonces existe una función $y_h(x)$ solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ tal que

$$y_{p2} = y_h + y_{p1}$$

Teorema: Sea $y_p(x)$ una solución definida en (a, b) de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (6)$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en (a, b) . Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes definidas en (a, b) de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (7)$$

entonces, toda solución de (7) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p, \quad (8)$$

Teorema: Sean L definido como en (1), y $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ dos soluciones de la ecuación

$$L(y) = g. \quad (5)$$

Entonces existe una función $y_h(x)$ solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$ tal que

$$y_{p_2} = y_h + y_{p_1}$$

Teorema: Sea $y_p(x)$ una solución definida en (a, b) de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (6)$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en (a, b) . Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes definidas en (a, b) de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (7)$$

entonces, toda solución de (7) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p, \quad (8)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

La combinación lineal dada en (8) la llamaremos **solución general** de (6).

La combinación lineal dada en (8) la llamaremos **solución general** de (6).

Para encontrar la solución general de (6) tenemos el siguiente procedimiento:

La combinación lineal dada en (8) la llamaremos **solución general** de (6).

Para encontrar la solución general de (6) tenemos el siguiente procedimiento:

- a) Hallamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:
 $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$

La combinación lineal dada en (8) la llamaremos **solución general** de (6).

Para encontrar la solución general de (6) tenemos el siguiente procedimiento:

- a) Hallamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:
 $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$
- b) Buscamos una solución particular $y_p(x)$ de la no homogénea.

La combinación lineal dada en (8) la llamaremos **solución general** de (6).

Para encontrar la solución general de (6) tenemos el siguiente procedimiento:

- a) Hallamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:
 $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$
- b) Buscamos una solución particular $y_p(x)$ de la no homogénea.
- c) La solución general de la ecuación (6) es la suma de las dos soluciones anteriores: $y(x) = y_h(x) + y_p(x).$

Ejemplo

Encontremos la solución general para la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x}.$$

Ejemplo

Encontremos la solución general para la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x}.$$

Sabemos que una solución particular $y_p = e^{2x}$. Recordando que la ecuación homogénea asociada

Ejemplo

Encontremos la solución general para la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x}.$$

Sabemos que una solución particular $y_p = e^{2x}$. Recordando que la ecuación homogénea asociada tiene ecuación auxiliar asociada

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

con raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde $\alpha = 3$ y $\beta = 2$.

Ejemplo

Encontremos la solución general para la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x}.$$

Sabemos que una solución particular $y_p = e^{2x}$. Recordando que la ecuación homogénea asociada tiene ecuación auxiliar asociada

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

con raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde $\alpha = 3$ y $\beta = 2$.

Por tanto, la solución homogénea es

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \sin(2x).$$

Ejemplo

Encontremos la solución general para la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 5e^{2x}.$$

Sabemos que una solución particular $y_p = e^{2x}$. Recordando que la ecuación homogénea asociada tiene ecuación auxiliar asociada

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

con raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde $\alpha = 3$ y $\beta = 2$.

Por tanto, la solución homogénea es

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \sen(2x).$$

Concluimos que la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{3x} \cos(2x) + C_2 e^{3x} \sen(2x) + e^{2x}.$$

Método de los coeficientes indeterminados

Supongamos que tenemos una ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

con el término no homogéneo $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno o suma finita de estas.

Método de los coeficientes indeterminados

Supongamos que tenemos una ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

con el término no homogéneo $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno o suma finita de estas.

Este método consiste en hacer una suposición inicial para la solución particular con coeficientes sin especificar.

Método de los coeficientes indeterminados

Supongamos que tenemos una ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

con el término no homogéneo $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno o suma finita de estas.

Este método consiste en hacer una suposición inicial para la solución particular con coeficientes sin especificar.

La expresión supuesta se sustituye en la ecuación diferencial y se intenta determinar los coeficientes. Si no es posible determinarlos significa que no es válida la solución propuesta y debemos, por tanto, modificar la suposición inicial.

Método de los coeficientes indeterminados

Supongamos que tenemos una ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

con el término no homogéneo $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno o suma finita de estas.

Este método consiste en hacer una suposición inicial para la solución particular con coeficientes sin especificar.

La expresión supuesta se sustituye en la ecuación diferencial y se intenta determinar los coeficientes. Si no es posible determinarlos significa que no es válida la solución propuesta y debemos, por tanto, modificar la suposición inicial.

La limitación del método es que sólo suele funcionar bien con las ecuaciones con coeficientes constantes y cuando el término no homogéneo tiene la forma indicada.

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = x + 2.$$

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}.$$

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' - y = \cos x$$

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' = 3$$

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' = 3$$

En este caso el término no homogéneo $g(x) = 3$

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' = 3$$

En este caso el término no homogéneo $g(x) = 3$ hace parte de la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y'' - y' = 0.$$

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' = 3$$

En este caso el término no homogéneo $g(x) = 3$ hace parte de la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y'' - y' = 0.$$

Por tanto, buscábamos soluciones de la forma

$$y = Cx$$

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' = 3$$

En este caso el término no homogéneo $g(x) = 3$ hace parte de la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y'' - y' = 0.$$

Por tanto, buscábamos soluciones de la forma

$$y = Cx$$

y no de la forma

$$y = C,$$

Ejemplo

Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' = 3$$

En este caso el término no homogéneo $g(x) = 3$ hace parte de la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y'' - y' = 0.$$

Por tanto, buscábamos soluciones de la forma

$$y = Cx$$

y no de la forma

$$y = C,$$

y encontramos la solución

$$y_p = -3x.$$

Método de coeficientes indeterminados

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta lo anterior,

Método de coeficientes indeterminados

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta lo anterior, es decir, si el término inicial y_p candidato a solución es solución de la ecuación homogénea asociada

Método de coeficientes indeterminados

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta lo anterior, es decir, si el término inicial y_p candidato a solución es solución de la ecuación homogénea asociada tendremos que cambiarlo por $x^h y_p$,

Método de coeficientes indeterminados

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta lo anterior, es decir, si el término inicial y_p candidato a solución es solución de la ecuación homogénea asociada tendremos que cambiarlo por $x^h y_p$, donde h el menor entero no negativo tal que ningún término de la expresión $x^h y_p$ sea solución de la ecuación homogénea.

Método de coeficientes indeterminados

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta lo anterior, es decir, si el término inicial y_p candidato a solución es solución de la ecuación homogénea asociada tendremos que cambiarlo por $x^h y_p$, donde h el menor entero no negativo tal que ningún término de la expresión $x^h y_p$ sea solución de la ecuación homogénea.

Consideremos la ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (9)$$

Método de coeficientes indeterminados

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta lo anterior, es decir, si el término inicial y_p candidato a solución es solución de la ecuación homogénea asociada tendremos que cambiarlo por $x^h y_p$, donde h el menor entero no negativo tal que ningún término de la expresión $x^h y_p$ sea solución de la ecuación homogénea.

Consideremos la ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (9)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Método de coeficientes indeterminados

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta lo anterior, es decir, si el término inicial y_p candidato a solución es solución de la ecuación homogénea asociada tendremos que cambiarlo por $x^h y_p$, donde h el menor entero no negativo tal que ningún término de la expresión $x^h y_p$ sea solución de la ecuación homogénea.

Consideremos la ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (9)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y el término no homogéneo $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno, o productos y suma finita de estas.

Método de coeficientes indeterminados

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta lo anterior, es decir, si el término inicial y_p candidato a solución es solución de la ecuación homogénea asociada tendremos que cambiarlo por $x^h y_p$, donde h el menor entero no negativo tal que ningún término de la expresión $x^h y_p$ sea solución de la ecuación homogénea.

Consideremos la ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (9)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y el término no homogéneo $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno, o productos y suma finita de estas.

Consideraremos los siguientes casos que corresponden al método de coeficientes indeterminados.

El término no homogéneo es un polinomio de grado n de la forma

$$g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

El término no homogéneo es un polinomio de grado n de la forma

$$g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

En este caso asumimos que la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0) x^h,$$

Caso I

El término no homogéneo es un polinomio de grado n de la forma

$$g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

En este caso asumimos que la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0) x^h,$$

donde A_0, A_1, \dots, A_n son desconocidos

Caso I

El término no homogéneo es un polinomio de grado n de la forma

$$g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

En este caso asumimos que la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0) x^h,$$

donde A_0, A_1, \dots, A_n son desconocidos y h es la multiplicidad de $r = 0$ en la ecuación auxiliar asociada a la ecuación homogénea.

Caso II

El término no homogéneo es una función de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0).$$

Caso II

El término no homogéneo es una función de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0).$$

En este caso asumimos que la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)x^h,$$

Caso II

El término no homogéneo es una función de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0).$$

En este caso asumimos que la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)x^h,$$

donde A_0, A_1, \dots, A_n son desconocidos

Caso II

El término no homogéneo es una función de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0).$$

En este caso asumimos que la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)x^h,$$

donde A_0, A_1, \dots, A_n son desconocidos y h es la multiplicidad de la raíz α

Caso II

El término no homogéneo es una función de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0).$$

En este caso asumimos que la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)x^h,$$

donde A_0, A_1, \dots, A_n son desconocidos y h es la multiplicidad de la raíz α de la ecuación auxiliar asociada a la ecuación homogénea.

Caso III

El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios,

Caso III

El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios, es decir, el término no homogéneo es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)),$$

Caso III

El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios, es decir, el término no homogéneo es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)),$$

donde P_k y Q_l son polinomios de grado k y l , respectivamente

Caso III

El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios, es decir, el término no homogéneo es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)),$$

donde P_k y Q_l son polinomios de grado k y l , respectivamente. En este caso asumimos que la solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(P_N(x)\cos(\beta x) + Q_N(x)\sin(\beta x))x^h,$$

Caso III

El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios, es decir, el término no homogéneo es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)),$$

donde P_k y Q_l son polinomios de grado k y l , respectivamente. En este caso asumimos que la solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(P_N(x)\cos(\beta x) + Q_N(x)\sin(\beta x))x^h,$$

donde polinomios de grado $N = \max\{k, l\}$ y con coeficientes a determinar para cada uno de ellos

Caso III

El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios, es decir, el término no homogéneo es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)),$$

donde P_k y Q_l son polinomios de grado k y l , respectivamente. En este caso asumimos que la solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(P_N(x)\cos(\beta x) + Q_N(x)\sin(\beta x))x^h,$$

donde polinomios de grado $N = \max\{k, l\}$ y con coeficientes a determinar para cada uno de ellos y h es la multiplicidad de la raíz $\alpha \pm \beta i$

Caso III

El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios, es decir, el término no homogéneo es de la forma

$$g(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)),$$

donde P_k y Q_l son polinomios de grado k y l , respectivamente. En este caso asumimos que la solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(P_N(x)\cos(\beta x) + Q_N(x)\sin(\beta x))x^h,$$

donde polinomios de grado $N = \max\{k, l\}$ y con coeficientes a determinar para cada uno de ellos y h es la multiplicidad de la raíz $\alpha \pm \beta i$ de la ecuación auxiliar asociada a la ecuación homogénea.

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = x^2.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = x^2.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$ tiene soluciones $r_1 = -3$ y $r_2 = 1$,

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = x^2.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$ tiene soluciones $r_1 = -3$ y $r_2 = 1$, por tanto

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = x^2.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = x^2.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r + 2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$,

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = x^2.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r + 2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$, por tanto

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)x$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = xe^x.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$ tiene soluciones $r_1 = -3$ y $r_2 = 1$.

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$ tiene soluciones $r_1 = -3$ y $r_2 = 1$. Dado que el término $\alpha = 1$ de la exponencial coincide con la raíz $r_2 = 1$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$ tiene soluciones $r_1 = -3$ y $r_2 = 1$. Dado que el término $\alpha = 1$ de la exponencial coincide con la raíz $r_2 = 1$ tenemos que

$$y_p = e^x(Ax + B)x$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r + 2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$,

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r + 2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$, por tanto

$$y_p = e^x(Ax + B)$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x).$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x).$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$ tiene soluciones $r_1 = -3$ y $r_2 = 1$,

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x).$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0$ tiene soluciones $r_1 = -3$ y $r_2 = 1$, por tanto

$$y_p = ((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\operatorname{sen} 2x)e^{2x}$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r + 2 = 0$ tiene soluciones complejas $-1 + i$ y $-1 - i$,

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r + 2 = 0$ tiene soluciones complejas $-1 + i$ y $-1 - i$, por tanto

$$y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 - 2r + 2 = 0$ tiene soluciones complejas $1 + i$ y $1 - i$,

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 - 2r + 2 = 0$ tiene soluciones complejas $1 + i$ y $1 - i$, por tanto

$$y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)x$$