$$f(x) = x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2 = (x^2-9)(x^2+9)$$
$$= (x-3)(x+3)(x^2+9).$$

Esto nos muestra que las raíces de $f(x)$ son $c=-3$, $c=3$.

Vamos a hablar un poco de los números complejos.

Números Complejos:

Los números complejos surgen por la necesidad de dar solución a ecuaciones del tipo $x^2+a=0$ con $a>0$. Cuando $a=1$, se tiene la ecuación $x^2+1=0$. Se define el número i como aquél número que soluciona dicha ecuación, es decir i es tal que $i^2=-1$. Con este número se forman los complejos sumando a cualquier real a, múltiplos del complejo i. Así, se define $\mathbb{C} = \{a+bi \,/\, a,b \in \mathbb{R},\ i^2=-1\}$

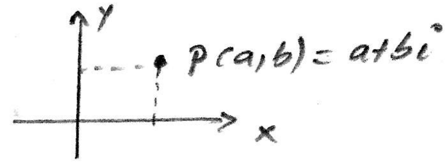
a se conoce como la parte real y b como parte imaginaria.

Veamos cómo operar con complejos.

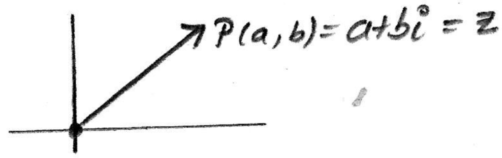
Suma: $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

Producto: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i$

Se puede probar que existe una correspondencia biunívoca entre parejas de números reales y números complejos, de tal forma que a cada pareja (a,b) le asocia el complejo $(a+bi)$ y viceversa. A cada complejo $a+bi$, le corresponde la pareja de números reales (a,b).



Esta correspondencia permite hablar de la representación geométrica de un número complejo. El complejo $a+bi$ se representa geométricamente por la flecha que une el origen con el punto $P(a,b)$.



<u>Módulo</u>: Se define el módulo del complejo z, como la longitud de la flecha. Se denota por $\|z\|$.
Así si $z = a+bi$ entonces $\|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

<u>Observe</u>: que si z es un número real, es decir $b=0$
$z = a+0i$, el módulo coincide con el valor absoluto.
$\|z\| = \|a\| = |a|$

De otro lado se puede observar que en los complejos hay estructura algebraica, pero no hay estructura de orden como sí la hay en $\mathbb{R}$, pues si en $\mathbb{C}$ existiera orden, todo cuadrado sería mayor o igual que cero, lo cual no sucede, pues $i^2 = -1 < 0$

<u>Conjugado</u>: Si $z = a+bi$ es un complejo, se define su conjugado, como el complejo $\bar{z}$ donde $\bar{z} = a-bi$.

Propiedades del conjugado

Sean z, w números complejos. Entonces:

i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

ii) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

iii) $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$, $w \neq 0$.

ejemplo: Sean $z = 1-2i$ $w = 3+i$. Halle:

$z - 3w$, $(z+1)(w)$, z/w.

S// $z - 3w = (1-2i) - 3(3+i) = (1-2i) + (-9-3i) = -8-5i$

$(z-1)w = (1-2i-1)w = -2i(3+i) = -6i - 2i^2 = 2-6i$

$$z/w = \frac{1-2i}{3+i} = \frac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-i-6i+2i^2}{9-i^2} = \frac{1-7i}{10}$$

Qué sucede con el producto de un complejo y su conjugado, es decir $z\bar{z}$. Veamos:

$z = a+bi$, ent $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

$z\bar{z}$ es un número real. (Esa es la razón por la que en un cociente el denominador se multiplica por el conjugado.

El siguiente teorema es un teorema de Gran importancia

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio de grado n $(n \geq 1)$ con coeficientes complejos, tiene al menos un cero complejo (el cero puede ser real)

D// Que es la matemática de courant.

El teorema tiene unas consecuencias.

Consecuencia 1: Si f es un polinomio de grado n, $n \geq 1$ con coeficientes complejos, entonces f tiene exactamente n ceros complejos.

D/ por el T.F.A., como el polinomio es de coeficientes complejos, existe $c_1 \in \mathbb{C}$ tq $f(x) = c(x-c_1)q_1(x)$

$gr\ q(x) = n-1.$

De nuevo aplicando el teorema a $q_1(x)$ existe $c_2 \in \mathbb{C}$ tq

$$f(x) = c(x-c_1)(x-c_2)q_2(x), \quad gr\ q_2(x) = n-2$$

Siguiendo el proceso se llega a que existen $c_1, c_2, c_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(x) = c(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n), \quad c \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto $c_1, c_2, \ldots c_n$ son n ceros complejos del polinomio $f(x)$.

Consecuencia 2: Si f es un polinomio de grado n, con $n \geq 1$ de coeficientes reales, entonces f tiene máximo n raíces reales.

ej: el polinomio $f(x) = x^4 - 16$ tiene exactamente 4 raíces complejas y máximo 4 raíces reales.

En efecto, $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2-4)(x^2+4)$

$$= (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$= (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$$

f tiene 2 raíces reales $-2, 2$ y 4 raíces complejas $-2, 2, -2i, 2i$