

Matemáticas Discretas I

Lógica proposicional - Aparato deductivo

Juan Francisco Díaz Frías

Profesor Titular (1993-hoy)
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Edif. B13 - 4009



Universidad del Valle

Noviembre 2021

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 Otras formas de demostración
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 Otras formas de demostración
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 Otras formas de demostración
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 Otras formas de demostración
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 Otras formas de demostración
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Motivación

- Hasta ahora: A es correcto (o válido) si A es una tautología, i.e. la tabla de verdad asociada da V en todas las filas.
- Impráctico, pues el número de filas de la tabla depende exponencialmente del número de variables proposicionales, y el número de columnas depende del número de subexpresiones de la fórmula.
- **Deducir la verdad** en lugar de calcularla. A partir de **axiomas** y de la aplicación de **reglas de inferencia** establecer la **validez** de nuevas fórmulas.
- Notación: $\vdash \alpha$ se leerá como α es un teorema.

Motivación

- Hasta ahora: A es correcto (o válido) si A es una tautología, i.e. la tabla de verdad asociada da V en todas las filas.
- Impráctico, pues el número de filas de la tabla depende exponencialmente del número de variables proposicionales, y el número de columnas depende del número de subexpresiones de la fórmula.
- **Deducir la verdad** en lugar de calcularla. A partir de **axiomas** y de la aplicación de **reglas de inferencia** establecer la **validez** de nuevas fórmulas.
- Notación: $\vdash \alpha$ se leerá como α es un teorema.

Motivación

- Hasta ahora: A es correcto (o válido) si A es una tautología, i.e. la tabla de verdad asociada da V en todas las filas.
- Impráctico, pues el número de filas de la tabla depende exponencialmente del número de variables proposicionales, y el número de columnas depende del número de subexpresiones de la fórmula.
- **Deducir la verdad** en lugar de calcularla. A partir de **axiomas** y de la aplicación de **reglas de inferencia** establecer la **validez** de nuevas fórmulas.
- Notación: $\vdash \alpha$ se leerá como α es un teorema.

Motivación

- Hasta ahora: A es correcto (o válido) si A es una tautología, i.e. la tabla de verdad asociada da V en todas las filas.
- Impráctico, pues el número de filas de la tabla depende exponencialmente del número de variables proposicionales, y el número de columnas depende del número de subexpresiones de la fórmula.
- **Deducir la verdad** en lugar de calcularla. A partir de **axiomas** y de la aplicación de **reglas de inferencia** establecer la **validez** de nuevas fórmulas.
- Notación: $\vdash \alpha$ se leerá como α es un teorema.

Generalidades

- Los **axiomas** en el aparato deductivo de un sistema lógico son **fórmulas válidas** a partir de las cuales se pueden deducir nuevas fórmulas válidas.
- Cualquier fórmula válida puede ser un axioma.
- Los axiomas no se demuestran, pero se justifican. En lógica proposicional, la **justificación** de que una fórmula sea un axioma es su **tabla de verdad**.

Generalidades

- Los **axiomas** en el aparato deductivo de un sistema lógico son **fórmulas válidas** a partir de las cuales se pueden deducir nuevas fórmulas válidas.
- Cualquier fórmula válida puede ser un axioma.
- Los axiomas no se demuestran, pero se justifican. En lógica proposicional, la **justificación** de que una fórmula sea un axioma es su **tabla de verdad**.

Generalidades

- Los **axiomas** en el aparato deductivo de un sistema lógico son **fórmulas válidas** a partir de las cuales se pueden deducir nuevas fórmulas válidas.
- Cualquier fórmula válida puede ser un axioma.
- Los axiomas no se demuestran, pero se justifican. En lógica proposicional, la **justificación** de que una fórmula sea un axioma es su **tabla de verdad**.

Axiomas (Equivalencias)(1)

Verdadero, Falso y doble negación

Regla	Nombre
$\neg\neg p \equiv p$	doble negación
$false \equiv \neg true$	definición de false
$\neg false \equiv true$	negación de false

Axiomas de \wedge

Regla	Nombre
$p \wedge true \equiv p$	identidad de \wedge
$p \wedge false \equiv false$	dominación \wedge
$p \wedge p \equiv p$	idempotencia \wedge
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	conmutatividad \wedge
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	asociatividad \wedge
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	distributividad \wedge sobre \vee
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	de Morgan de \wedge
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	absorción de \wedge sobre \vee
$p \wedge \neg p \equiv false$	contradicción

Axiomas (Equivalencias)(1)

Verdadero, Falso y doble negación

Regla	Nombre
$\neg\neg p \equiv p$	doble negación
$false \equiv \neg true$	definición de false
$\neg false \equiv true$	negación de false

Axiomas de \wedge

Regla	Nombre
$p \wedge true \equiv p$	identidad de \wedge
$p \wedge false \equiv false$	dominación \wedge
$p \wedge p \equiv p$	idempotencia \wedge
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	conmutatividad \wedge
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	asociatividad \wedge
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	distributividad \wedge sobre \vee
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	de Morgan de \wedge
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	absorción de \wedge sobre \vee
$p \wedge \neg p \equiv false$	contradicción

Axiomas (Equivalencias)(2)

Axiomas de \vee

Regla	Nombre
$p \vee \text{false} \equiv p$	identidad \vee
$p \vee \text{true} \equiv \text{true}$	dominación \vee
$p \vee p \equiv p$	idempotencia \vee
$p \vee q \equiv q \vee p$	conmutatividad \vee
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	asociatividad \vee
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributividad \vee sobre \wedge
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	de Morgan \vee
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	absorción \vee sobre \wedge
$p \vee \neg p \equiv \text{true}$	tautología (medio excluido)

Definición de \implies, \oplus, \equiv

Regla	Nombre
$p \implies q \equiv \neg p \vee q$	Definición \implies
$(p \equiv q) \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$	Definición \equiv
$p \oplus q \equiv \neg(p \equiv q)$	Definición \oplus

Axiomas (Equivalencias)(2)

Axiomas de \vee

Regla	Nombre
$p \vee \text{false} \equiv p$	identidad \vee
$p \vee \text{true} \equiv \text{true}$	dominación \vee
$p \vee p \equiv p$	idempotencia \vee
$p \vee q \equiv q \vee p$	conmutatividad \vee
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	asociatividad \vee
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributividad \vee sobre \wedge
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	de Morgan \vee
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	absorción \vee sobre \wedge
$p \vee \neg p \equiv \text{true}$	tautología (medio excluido)

Definición de \implies, \oplus, \equiv

Regla	Nombre
$p \implies q \equiv \neg p \vee q$	Definición \implies
$(p \equiv q) \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$	Definición \equiv
$p \oplus q \equiv \neg(p \equiv q)$	Definición \oplus

Axiomas (Equivalencias)(3)

Más axiomas de \implies y \equiv

Regla	Nombre
$true \equiv (p \equiv p)$	Identidad \equiv
$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$	Conmutatividad \equiv
$((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$	Asociatividad \equiv
$p \implies q \equiv \neg q \implies \neg p$	contrapositiva
$p \vee q \equiv \neg p \implies q$	Definición de \vee con \implies
$p \wedge q \equiv \neg(p \implies \neg q)$	Definición de \wedge con \implies
$\neg(p \implies q) \equiv p \wedge \neg q$	Negación de \implies
$(p \implies q) \wedge (p \implies r) \equiv (p \implies (q \wedge r))$	Distributividad izquierda de \implies sobre \wedge
$(p \implies q) \vee (p \implies r) \equiv (p \implies (q \vee r))$	Distributividad izquierda de \implies sobre \vee
$(p \implies r) \wedge (q \implies r) \equiv (p \vee q) \implies r$	Distributividad derecha de \implies sobre \wedge (note que al distribuir se cambia \wedge por \vee)
$(p \implies r) \vee (q \implies r) \equiv (p \wedge q) \implies r$	Distributividad derecha de \implies sobre \vee (note que al distribuir se cambia \vee por \wedge)
$p \implies (q \implies r) \equiv (p \wedge q) \implies r$	Asociatividad izquierda de \implies (note que al asociar se cambia \implies por \wedge)
$p \equiv q \equiv \neg p \equiv \neg q$	Contrapositiva \equiv
$\neg(p \equiv q) \equiv \neg p \equiv q$	Negación ₁ \equiv
$\neg(p \equiv q) \equiv p \equiv \neg q$	Negación ₂ \equiv
$p \equiv q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	Definición ₃ \equiv
$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	Definición ₂ \oplus

Reglas de inferencia

- Una **regla de inferencia** tiene la forma:

$$\langle \text{Identificador} \rangle \frac{\overbrace{Hip_1, Hip_2, \dots, Hip_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \mid \langle \text{Condiciones} \rangle$$

o

$$Hip_1, Hip_2, \dots, Hip_k \vdash C$$

- Las reglas de inferencia no se demuestran, pero sí se justifican:

$$Hip_1 \wedge Hip_2 \wedge \dots \wedge Hip_k \implies C$$

es una tautología.

- $E[x := p]$ denota reemplazar en E todas las apariciones de x por p .
- Deducir** es aplicar reglas.

Reglas de inferencia

- Una **regla de inferencia** tiene la forma:

$$\langle \text{Identificador} \rangle \frac{\overbrace{Hip_1, Hip_2, \dots, Hip_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \mid \langle \text{Condiciones} \rangle$$

o

$$Hip_1, Hip_2, \dots, Hip_k \vdash C$$

- Las reglas de inferencia no se demuestran, pero sí se justifican:

$$Hip_1 \wedge Hip_2 \wedge \dots \wedge Hip_k \implies C$$

es una tautología.

- $E[x := p]$ denota reemplazar en E todas las apariciones de x por p .
- Deducir** es aplicar reglas.

Reglas de inferencia

- Una **regla de inferencia** tiene la forma:

$$\langle \text{Identificador} \rangle \frac{\overbrace{Hip_1, Hip_2, \dots, Hip_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \mid \langle \text{Condiciones} \rangle$$

o

$$Hip_1, Hip_2, \dots, Hip_k \vdash C$$

- Las reglas de inferencia no se demuestran, pero sí se justifican:

$$Hip_1 \wedge Hip_2 \wedge \dots \wedge Hip_k \implies C$$

es una tautología.

- $E[x := p]$ denota reemplazar en E todas las apariciones de x por p .
- Deducir** es aplicar reglas.

Reglas de inferencia

- Una **regla de inferencia** tiene la forma:

$$\langle \text{Identificador} \rangle \frac{\overbrace{Hip_1, Hip_2, \dots, Hip_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \mid \langle \text{Condiciones} \rangle$$

o

$$Hip_1, Hip_2, \dots, Hip_k \vdash C$$

- Las reglas de inferencia no se demuestran, pero sí se justifican:

$$Hip_1 \wedge Hip_2 \wedge \dots \wedge Hip_k \implies C$$

es una tautología.

- $E[x := p]$ denota reemplazar en E todas las apariciones de x por p .
- Deducir** es aplicar reglas.

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia**
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 Otras formas de demostración
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Reglas ecuacionales

- Las usaremos para demostrar **equivalencias**: $E \equiv F$

- Idea: $E = E_0 \overset{r_1}{\equiv} E_1 \overset{r_2}{\equiv} E_2 \dots \overset{r_{i-1}}{\equiv} E_{i-1} \overset{r_i}{\equiv} E_i \dots \overset{r_k}{\equiv} E_k = F$, donde r_1, \dots, r_k son las reglas usadas para justificar cada una de las equivalencias deducidas.
- Para que se lea fácil la prueba se presentará así:

	Exp.	Regla (razón)
	E_0	
\equiv	E_1	r_1
\equiv	E_2	r_2
\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots
\equiv	E_{i-1}	r_{i-1}
\equiv	E_i	r_i
\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots
\equiv	E_k	r_k

- r_i justifica la equivalencia $E_{i-1} \equiv E_i$. Es un axioma o una regla o, a veces, varias reglas que se pueden aplicar en un paso **sin generar confusión**

Reglas ecuacionales

- Las usaremos para demostrar **equivalencias**: $E \equiv F$

- Idea: $E = E_0 \overset{r_1}{\equiv} E_1 \overset{r_2}{\equiv} E_2 \dots \overset{r_{i-1}}{\equiv} E_{i-1} \overset{r_i}{\equiv} E_i \dots \overset{r_k}{\equiv} E_k = F$, donde r_1, \dots, r_k son las reglas usadas para justificar cada una de las equivalencias deducidas.

- Para que se lea fácil la prueba se presentará así:

	Exp.	Regla (razón)
	E_0	
\equiv	E_1	r_1
\equiv	E_2	r_2
\vdots	\vdots	\vdots
\equiv	E_{i-1}	r_{i-1}
\equiv	E_i	r_i
\vdots	\vdots	\vdots
\equiv	E_k	r_k

- r_i justifica la equivalencia $E_{i-1} \equiv E_i$. Es un axioma o una regla o, a veces, varias reglas que se pueden aplicar en un paso **sin generar confusión**

Reglas ecuacionales (2)

- $\langle \text{Reflexividad-} \equiv \rangle$: $\frac{p \equiv p}{\text{true}}$

- $\langle \text{Simetría-} \equiv \rangle$: $\frac{p \equiv q}{q \equiv p}$

Es la que permite concluir que $E \equiv F$ si

$$F = E_0 \equiv E_1 \equiv \dots \equiv E_k = E$$

- $\langle \text{Transitividad-} \equiv \rangle$: $\frac{p \equiv q, q \equiv r}{p \equiv r}$

Es la que permite concluir que $E \equiv F$ si

$$E = E_0 \equiv E_1 \equiv \dots \equiv E_k = F$$

Reglas ecuacionales (2)

- $\langle \text{Reflexividad-} \equiv \rangle: \frac{p \equiv p}{\text{true}}$
- $\langle \text{Simetría-} \equiv \rangle: \frac{p \equiv q}{q \equiv p}$

Es la que permite concluir que $E \equiv F$ si

$$F = E_0 \equiv E_1 \equiv \dots \equiv E_k = E$$

- $\langle \text{Transitividad-} \equiv \rangle: \frac{p \equiv q, q \equiv r}{p \equiv r}$

Es la que permite concluir que $E \equiv F$ si

$$E = E_0 \equiv E_1 \equiv \dots \equiv E_k = F$$

Reglas ecuacionales (2)

- $\langle \text{Reflexividad-} \equiv \rangle: \frac{p \equiv p}{\text{true}}$
- $\langle \text{Simetría-} \equiv \rangle: \frac{p \equiv q}{q \equiv p}$

Es la que permite concluir que $E \equiv F$ si

$$F = E_0 \equiv E_1 \equiv \dots \equiv E_k = E$$

- $\langle \text{Transitividad-} \equiv \rangle: \frac{p \equiv q, q \equiv r}{p \equiv r}$

Es la que permite concluir que $E \equiv F$ si

$$E = E_0 \equiv E_1 \equiv \dots \equiv E_k = F$$

Regla de sustitución

- $\langle \text{Sustitución} \rangle$: $\frac{E}{E[x:=p]} \mid \begin{array}{l} p: \text{proposición} \\ E: \text{Expresión proposicional} \end{array}$
- Si $E = x \vee (\neg x \wedge \text{true})$ entonces

$$E[x := (q \implies \neg s)] = (q \implies \neg s) \vee (\neg(q \implies \neg s) \wedge \text{true})$$

Regla de sustitución

- $\langle \text{Sustitución} \rangle$: $\frac{E}{E[x:=p]} \mid \begin{array}{l} p: \text{proposición} \\ E: \text{Expresión proposicional} \end{array}$
- Si $E = x \vee (\neg x \wedge \text{true})$ entonces

$$E[x := (q \implies \neg s)] = (q \implies \neg s) \vee (\neg(q \implies \neg s) \wedge \text{true})$$

Regla de Leibniz

- $\langle \text{Leibniz} \rangle: \frac{E_1 \equiv E_2}{E[x:=E_1] \equiv E[x:=E_2]} \mid \begin{array}{l} E_1, E_2: \text{proposiciones} \\ E: \text{Expresión proposicional sobre } x \end{array}$
- Intuitivamente: se pueden **reemplazar iguales por iguales**.
- Si $E = \underbrace{\neg(p \wedge q)}_x \vee (p \vee q)$ y $\underbrace{\neg(p \wedge q)}_{E_1} \equiv \underbrace{\neg p \vee \neg q}_{E_2}$ entonces

$$\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$$

Regla de Leibniz

- $\langle \text{Leibniz} \rangle: \frac{E_1 \equiv E_2}{E[x:=E_1] \equiv E[x:=E_2]} \mid \begin{array}{l} E_1, E_2: \text{proposiciones} \\ E: \text{Expresión proposicional sobre } x \end{array}$
- Intuitivamente: se pueden **reemplazar iguales por iguales**.
- Si $E = \underbrace{\neg(p \wedge q)}_x \vee (p \vee q)$ y $\underbrace{\neg(p \wedge q)}_{E_1} \equiv \underbrace{\neg p \vee \neg q}_{E_2}$ entonces

$$\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$$

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia**
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - **Ejemplos de demostración con equivalencias**
- 4 Otras formas de demostración
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Analogía con la aritmética

Demostrar que $a^2 - b^2 = (a + b) * (a - b)$

Teo: $a^2 - b^2 = (a + b) * (a - b)$

Dem:

$$\begin{aligned}
 & (a + b) * (a - b) \\
 = & a * (a - b) + b * (a - b) && \text{Distributividad} \\
 = & a * a - a * b + b * a - b * b && \text{Distributividad} \\
 = & a^2 - a * b + b * a - b^2 && \text{Definición de } x^2 \\
 = & a^2 + a * b - a * b - b^2 && \text{Conmutatividad } * \text{ y } + \\
 = & a^2 + 0 - b^2 && \text{Teorema } x - x = 0 \\
 = & a^2 - b^2 && \text{Teorema } x + 0 = x
 \end{aligned}$$

◇

Esquema de demostración: *Video1.4*

- Sea $\alpha = E \equiv F$. Se quiere demostrar $\vdash \alpha$.
- La secuencia

$$E_0 \overset{r_1}{\equiv} E_1 \overset{r_2}{\equiv} E_2 \dots \overset{r_{i-1}}{\equiv} E_{i-1} \overset{r_i}{\equiv} E_i \dots \overset{r_k}{\equiv} E_k$$

es una **demostración de α** si:

- $E_0 = \alpha$ y E_k es un teorema ($\alpha \equiv \dots \equiv \text{true}$); o
- $E_k = \alpha$ y E_0 es un teorema ($\text{true} \equiv \dots \equiv \alpha$); o
- $E = E_0$ y $E_k = F$ ($E \equiv \dots \equiv F$); o
- $F = E_0$ y $E_k = E$ ($F \equiv \dots \equiv E$)
- La información asociada a la razón r_i debe contener (en lo posible):
 - identificador de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - enunciado de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - parte de la fórmula E_{i-1} sobre la que se aplica el teorema o la regla de inferencia
 - sustitución de variables (del teorema o de la regla de inferencia)

Esquema de demostración: *Video1.4*

- Sea $\alpha = E \equiv F$. Se quiere demostrar $\vdash \alpha$.
- La secuencia

$$E_0 \overset{r_1}{\equiv} E_1 \overset{r_2}{\equiv} E_2 \dots \overset{r_{i-1}}{\equiv} E_{i-1} \overset{r_i}{\equiv} E_i \dots \overset{r_k}{\equiv} E_k$$

es una **demostración de α** si:

- $E_0 = \alpha$ y E_k es un teorema ($\alpha \equiv \dots \equiv \text{true}$); o
- $E_k = \alpha$ y E_0 es un teorema ($\text{true} \equiv \dots \equiv \alpha$); o
- $E = E_0$ y $E_k = F$ ($E \equiv \dots \equiv F$); o
- $F = E_0$ y $E_k = E$ ($F \equiv \dots \equiv E$)
- La información asociada a la razón r_i debe contener (en lo posible):
 - identificador de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - enunciado de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - parte de la fórmula E_{i-1} sobre la que se aplica el teorema o la regla de inferencia
 - sustitución de variables (del teorema o de la regla de inferencia)

Esquema de demostración: *Video1.4*

- Sea $\alpha = E \equiv F$. Se quiere demostrar $\vdash \alpha$.
- La secuencia

$$E_0 \overset{r_1}{\equiv} E_1 \overset{r_2}{\equiv} E_2 \dots \overset{r_{i-1}}{\equiv} E_{i-1} \overset{r_i}{\equiv} E_i \dots \overset{r_k}{\equiv} E_k$$

es una **demostración de α** si:

- $E_0 = \alpha$ y E_k es un teorema ($\alpha \equiv \dots \equiv \text{true}$); o
- $E_k = \alpha$ y E_0 es un teorema ($\text{true} \equiv \dots \equiv \alpha$); o
- $E = E_0$ y $E_k = F$ ($E \equiv \dots \equiv F$); o
- $F = E_0$ y $E_k = E$ ($F \equiv \dots \equiv E$)
- La información asociada a la razón r_i debe contener (en lo posible):
 - identificador de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - enunciado de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - parte de la fórmula E_{i-1} sobre la que se aplica el teorema o la regla de inferencia
 - sustitución de variables (del teorema o de la regla de inferencia)

Esquema de demostración: *Video1.4*

- Sea $\alpha = E \equiv F$. Se quiere demostrar $\vdash \alpha$.
- La secuencia

$$E_0 \overset{r_1}{\equiv} E_1 \overset{r_2}{\equiv} E_2 \dots \overset{r_{i-1}}{\equiv} E_{i-1} \overset{r_i}{\equiv} E_i \dots \overset{r_k}{\equiv} E_k$$

es una **demostración de α** si:

- $E_0 = \alpha$ y E_k es un teorema ($\alpha \equiv \dots \equiv \text{true}$); o
 - $E_k = \alpha$ y E_0 es un teorema ($\text{true} \equiv \dots \equiv \alpha$); o
 - $E = E_0$ y $E_k = F$ ($E \equiv \dots \equiv F$); o
 - $F = E_0$ y $E_k = E$ ($F \equiv \dots \equiv E$)
- La información asociada a la razón r_i debe contener (en lo posible):
 - identificador de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - enunciado de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - parte de la fórmula E_{i-1} sobre la que se aplica el teorema o la regla de inferencia
 - sustitución de variables (del teorema o de la regla de inferencia)

Esquema de demostración: *Video1.4*

- Sea $\alpha = E \equiv F$. Se quiere demostrar $\vdash \alpha$.
- La secuencia

$$E_0 \overset{r_1}{\equiv} E_1 \overset{r_2}{\equiv} E_2 \dots \overset{r_{i-1}}{\equiv} E_{i-1} \overset{r_i}{\equiv} E_i \dots \overset{r_k}{\equiv} E_k$$

es una **demostración de α** si:

- $E_0 = \alpha$ y E_k es un teorema ($\alpha \equiv \dots \equiv \text{true}$); o
- $E_k = \alpha$ y E_0 es un teorema ($\text{true} \equiv \dots \equiv \alpha$); o
- $E = E_0$ y $E_k = F$ ($E \equiv \dots \equiv F$); o
- $F = E_0$ y $E_k = E$ ($F \equiv \dots \equiv E$)
- La información asociada a la razón r_i debe contener (en lo posible):
 - identificador de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - enunciado de la regla de inferencia o del teorema que se aplica
 - parte de la fórmula E_{i-1} sobre la que se aplica el teorema o la regla de inferencia
 - sustitución de variables (del teorema o de la regla de inferencia)

$$p \wedge q \implies p \vee q: \text{Video1.4}$$

Teo: $p \wedge q \implies p \vee q$

Dem:

$$\begin{aligned}
 & p \wedge q \implies p \vee q \\
 \equiv & \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{Definición de } \implies \\
 \equiv & \neg p \vee \neg q \vee p \vee q && \text{De Morgan } \wedge, \text{ Simplificación} \\
 \equiv & p \vee \neg p \vee q \vee \neg q && \text{Conmutatividad } \vee, \text{ varias veces} \\
 \equiv & \text{true} \vee q \vee \neg q && \text{Medio excluido } \vee \\
 \equiv & \text{true} && \text{Dominación } \vee
 \end{aligned}$$

◇

$$p \wedge (\neg q \implies p) \equiv p$$

Teo: $p \wedge (\neg q \implies p) \equiv p$

Dem:

$$p \wedge (\neg q \implies p) \equiv p$$

$$\equiv p \wedge (\neg \neg q \vee p) \equiv p$$

$$\equiv p \wedge (q \vee p) \equiv p$$

$$\equiv \underbrace{p \wedge (p \vee q)}_{\text{Teorema absorción}} \equiv p$$

Teorema absorción

Definición de \implies

Doble negación

Conmutatividad \vee



$p \wedge (\neg q \implies p) \equiv p$, otra demostración (*Video1.5*)

Teo: $p \wedge (\neg q \implies p) \equiv p$

Dem:

$$\begin{aligned}
 & p \wedge (\neg q \implies p) \\
 \equiv & p \wedge (\neg \neg q \vee p) && \text{Definición de } \implies \\
 \equiv & p \wedge (q \vee p) && \text{Doble negación} \\
 \equiv & p \wedge (p \vee q) && \text{Conmutatividad } \vee \\
 \equiv & p && \text{absorción } \wedge
 \end{aligned}$$

◇

$$\neg p \implies q \equiv p \vee q$$

Teo: $\neg p \implies q \equiv p \vee q$

Dem:

$$\neg p \implies q$$

$$\equiv \neg \neg p \vee q$$

$$\equiv p \vee q$$

Definición de \implies
Doble negación



Ejercicio en clase

[Socrative]

Demuestre que

$$(p \implies q) \wedge \neg(p \equiv q) \implies q$$

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 **Otras formas de demostración**
 - **Lemas**
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Lemas

- La justificación de un paso en la demostración de un teorema α puede requerir usar un teorema β que no está en la lista de teoremas conocidos.
- Se hace necesario demostrar β para demostrar α :

Lema: β

Dem:

...

Teo: α

Dem:

	E_0	
\equiv	E_1	r_1
\equiv	E_2	r_2
\vdots	\vdots	\vdots
\equiv	E_{i-1}	β
\equiv	E_i	r_i
\vdots	\vdots	\vdots
\equiv	E_k	r_k
	\diamond	

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 **Otras formas de demostración**
 - Lemas
 - **El metateorema de la deducción**
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

El metateorema de la deducción

- Es un teorema que relaciona **deducción** con **implicación** (es decir aparato deductivo y semántica):

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \vdash \beta \text{ si y solo si } \vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \implies \beta$$

- Modo de uso:** Si le piden demostrar

$$\vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \implies \beta$$

basta con demostrar

$$\beta$$

suponiendo las hipótesis

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k$$

como fórmulas válidas o teoremas.

- Demostrar $p \wedge q \implies p \vee q$.

Teo: $p \wedge q \implies p \vee q$

Hip: p, q // A demostrar $p \vee q$

Dem:

$$p \vee q$$

$$\equiv \text{true} \vee q$$

$$\equiv \text{true}$$

Hipótesis p

Dominación y Conmutatividad \vee



El metateorema de la deducción

- Es un teorema que relaciona **deducción** con **implicación** (es decir aparato deductivo y semántica):

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \vdash \beta \text{ si y solo si } \vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \implies \beta$$

- Modo de uso:** Si le piden demostrar

$$\vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \implies \beta$$

basta con demostrar

$$\beta$$

suponiendo las hipótesis

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k$$

como fórmulas válidas o teoremas.

- Demostrar $p \wedge q \implies p \vee q$.

Teo: $p \wedge q \implies p \vee q$

Hip: p, q // A demostrar $p \vee q$

Dem:

$$p \vee q$$

$$\equiv \text{true} \vee q$$

$$\equiv \text{true}$$

Hipótesis p

Dominación y Conmutatividad \vee



El metateorema de la deducción

- Es un teorema que relaciona **deducción** con **implicación** (es decir aparato deductivo y semántica):

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \vdash \beta \text{ si y solo si } \vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \implies \beta$$

- Modo de uso:** Si le piden demostrar

$$\vdash \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \implies \beta$$

basta con demostrar

$$\beta$$

suponiendo las hipótesis

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k$$

como fórmulas válidas o teoremas.

- Demostrar $p \wedge q \implies p \vee q$.

Teo: $p \wedge q \implies p \vee q$

Hip: p, q // A demostrar $p \vee q$

Dem:

$$p \vee q$$

$$\equiv \text{true} \vee q$$

$$\equiv \text{true}$$

Hipótesis p
Dominación y Conmutatividad \vee



Relajación esquema de pruebas (1) (*Video1.6*)

- Usando el teorema de la deducción se puede probar que:

$$\vdash ((p \implies q) \wedge (q \equiv r)) \implies (p \implies r)$$

$$\vdash ((p \equiv q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$$

$$\vdash ((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$$

- Esto da lugar a tres reglas de inferencia **no ecuacionales**:

$$p \implies q, q \equiv r \vdash p \implies r$$

$$p \equiv q, q \implies r \vdash p \implies r$$

$$p \implies q, q \implies r \vdash p \implies r$$

Relajación esquema de pruebas (1) (*Video1.6*)

- Usando el teorema de la deducción se puede probar que:

$$\vdash ((p \implies q) \wedge (q \equiv r)) \implies (p \implies r)$$

$$\vdash ((p \equiv q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$$

$$\vdash ((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$$

- Esto da lugar a tres reglas de inferencia **no ecuacionales**:

$$p \implies q, q \equiv r \vdash p \implies r$$

$$p \equiv q, q \implies r \vdash p \implies r$$

$$p \implies q, q \implies r \vdash p \implies r$$

Relajación esquema de pruebas (2) (*Video1.6*)

- Ahora una prueba puede tener la forma:

	Exp.	Regla (razón)
	E_0	
(\equiv, \implies)	E_1	r_1
(\equiv, \implies)	E_2	r_2
\vdots	\vdots	\vdots
(\equiv, \implies)	E_{i-1}	r_{i-1}
(\equiv, \implies)	E_i	r_i
\vdots	\vdots	\vdots
(\equiv, \implies)	E_k	r_k

en cuyo caso el teorema demostrado es

$$E_0 \implies E_k$$

Nótese que **la prueba ya no es ecuacional**.

- Una forma de demostrar $E \equiv F$ es demostrando $E \implies F$ y $F \implies E$

Relajación esquema de pruebas (2) (*Video1.6*)

- Ahora una prueba puede tener la forma:

	Exp.	Regla (razón)
	E_0	
(\equiv, \implies)	E_1	r_1
(\equiv, \implies)	E_2	r_2
\vdots	\vdots	\vdots
(\equiv, \implies)	E_{i-1}	r_{i-1}
(\equiv, \implies)	E_i	r_i
\vdots	\vdots	\vdots
(\equiv, \implies)	E_k	r_k

en cuyo caso el teorema demostrado es

$$E_0 \implies E_k$$

Nótese que **la prueba ya no es ecuacional**.

- Una forma de demostrar $E \equiv F$ es demostrando $E \implies F$ y $F \implies E$

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 **Otras formas de demostración**
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - **Debilitamiento/Fortalecimiento**
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Debilitamiento/Fortalecimiento: más reglas no ecuacionales

- Si $\alpha \Rightarrow \beta$ es válida, se dice que β es más débil que α o que α es más fuerte que β
- Otros teoremas con la implicación:

$$\vdash p \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$$

- dan lugar a otras reglas de inferencia no ecuacionales:

$$p \vdash p \vee q$$

$$p \wedge q \vdash p$$

$$p \wedge q \vdash p \vee q$$

$$p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q$$

$$p, q \vdash p \wedge (q \vee r)$$

Debilitamiento/Fortalecimiento: más reglas no ecuacionales

- Si $\alpha \Rightarrow \beta$ es válida, se dice que β es más débil que α o que α es más fuerte que β
- Otros teoremas con la implicación:

$$\vdash p \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$$

- dan lugar a otras reglas de inferencia no ecuacionales:

$$p \vdash p \vee q$$

$$p \wedge q \vdash p$$

$$p \wedge q \vdash p \vee q$$

$$p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q$$

$$p, q \vdash p \wedge (q \vee r)$$

Debilitamiento/Fortalecimiento: más reglas no ecuacionales

- Si $\alpha \Rightarrow \beta$ es válida, se dice que β es más débil que α o que α es más fuerte que β
- Otros teoremas con la implicación:

$$\vdash p \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow p \vee q$$

$$\vdash p \wedge q \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$$

- dan lugar a otras reglas de inferencia no ecuacionales:

$$p \vdash p \vee q$$

$$p \wedge q \vdash p$$

$$p \wedge q \vdash p \vee q$$

$$p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q$$

$$p, q \vdash p \wedge (q \vee r)$$

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 **Otras formas de demostración**
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - **Modus Ponens**
 - Prueba por casos
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Modus Ponens

- Otro teorema muy conocido de la implicación:

$$p \wedge (p \implies q) \implies q$$

- da lugar a una regla muy conocida: **Modus Ponens**:

$$\langle \text{Modus Ponens} \rangle p, p \implies q \vdash q$$

Modus Ponens

- Otro teorema muy conocido de la implicación:

$$p \wedge (p \implies q) \implies q$$

- da lugar a una regla muy conocida: **Modus Ponens**:

$$\langle \text{Modus Ponens} \rangle p, p \implies q \vdash q$$

Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 **Otras formas de demostración**
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - **Prueba por casos**
 - Pruebas por contrarecíproca y contradicción
- 5 Ejemplos de demostraciones

Prueba por casos

- Recuerde el axioma de **Distributividad derecha de \implies sobre \wedge** :

$$(p \implies r) \wedge (q \implies r) \equiv (p \vee q) \implies r$$

- Si $q = \neg p$: $(p \implies r) \wedge (\neg p \implies r) \equiv ((p \vee \neg p) \implies r) \equiv (\text{true} \implies r) \equiv r$
Por tanto, para demostrar r se puede proceder por casos así:

Caso 1: Demostrar $p \implies r$

Caso 2: Demostrar $\neg p \implies r$

- En general se puede usar el esquema de prueba siguiente:

Teo: r

Dem:

Casos: p_1, \dots, p_m

Demostración de $p_1 \vee \dots \vee p_m$ (si no es obvio)

Caso 1:

Demostración de $p_1 \implies r$

\vdots \vdots \vdots

Caso m:

Demostración de $p_m \implies r$



Prueba por casos

- Recuerde el axioma de **Distributividad derecha de \implies sobre \wedge** :

$$(p \implies r) \wedge (q \implies r) \equiv (p \vee q) \implies r$$

- Si $q = \neg p$: **$(p \implies r) \wedge (\neg p \implies r) \equiv ((p \vee \neg p) \implies r) \equiv (\text{true} \implies r) \equiv r$**
Por tanto, para demostrar r se puede proceder por casos así:

Caso 1: Demostrar $p \implies r$

Caso 2: Demostrar $\neg p \implies r$

- En general se puede usar el esquema de prueba siguiente:

Teo: r

Dem:

Casos: p_1, \dots, p_m

Demostración de $p_1 \vee \dots \vee p_m$ (si no es obvio)

Caso 1:

Demostración de $p_1 \implies r$

\vdots

Caso m:

Demostración de $p_m \implies r$



Plan

- 1 Motivación
- 2 Axiomas
- 3 Reglas de inferencia
 - Reglas de inferencia ecuacional, sustitución y Leibniz
 - Ejemplos de demostración con equivalencias
- 4 **Otras formas de demostración**
 - Lemas
 - El metateorema de la deducción
 - Debilitamiento/Fortalecimiento
 - Modus Ponens
 - Prueba por casos
 - **Pruebas por contrarecíproca y contradicción**
- 5 Ejemplos de demostraciones

Pruebas por contrarecíproca y contradicción

Contrarecíproca: $(p \implies q) \equiv (\neg q \implies \neg p)$

Cuando no se sabe cómo deducir q a partir de p , el camino puede ser deducir $\neg p$ a partir de $\neg q$.

Teo: $p \implies q$

Hip: $\neg q$ // A demostrar $\neg p$

Demostración de $\neg p$

◇

Contradicción: $\neg p \implies false \equiv (\neg false \implies \neg \neg p) \equiv (true \implies p) \equiv p$

Cuando no se sabe cómo deducir p , el camino puede ser deducir $\neg p \implies false$ es decir deducir **una contradicción** a partir de $\neg p$.

Teo: r

Hip: $\neg r$

Demostración de $false$

◇

Pruebas por contrarecíproca y contradicción

Contrarecíproca: $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Cuando no se sabe cómo deducir q a partir de p , el camino puede ser deducir $\neg p$ a partir de $\neg q$.

Teo: $p \Rightarrow q$

Hip: $\neg q$ // A demostrar $\neg p$

Demostración de $\neg p$

◇

Contradicción: $\neg p \Rightarrow false \equiv (\neg false \Rightarrow \neg \neg p) \equiv (true \Rightarrow p) \equiv p$

Cuando no se sabe cómo deducir p , el camino puede ser deducir $\neg p \Rightarrow false$ es decir deducir **una contradicción** a partir de $\neg p$.

Teo: r

Hip: $\neg r$

Demostración de $false$

◇

Recuerden el ejemplo: ¿Superman existe? (*Video1.7*)

Considere el siguiente razonamiento:

Si Supermán fuera capaz y quisiera prevenir el mal, él lo prevendría.

Si Supermán fuera incapaz de prevenir el mal, sería impotente; si él no quisiera prevenir el mal, sería malévolo.

Supermán no previene el mal.

Si Supermán existe, no es impotente ni malévolo.

Entonces, *Supermán no existe.*

- Variables proposicionales:
 a : Supermán es capaz de prevenir el mal w : Supermán quiere prevenir el mal p : Supermán previene el mal
 i : Supermán es impotente m : Supermán es malévolo
 e : Supermán existe

- Traducción:

$$p_0: a \wedge w \implies p \quad p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m)$$

$$p_2: \neg p \quad p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m$$

$$p_4: \neg e$$

$$A: p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \implies p_4$$

- Deducir: $A: p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \implies p_4$ es demostrar $p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4$

Recuerden el ejemplo: ¿Superman existe? (*Video1.7*)

Considere el siguiente razonamiento:

Si Superman fuera capaz y quisiera prevenir el mal, él lo prevendría.

Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, sería impotente; si él no quisiera prevenir el mal, sería malévolo.

Supermán no previene el mal.

Si Superman existe, no es impotente ni malévolo.

Entonces, *Supermán no existe.*

- Variables proposicionales:
 a : Superman es capaz de prevenir el mal w : Superman quiere prevenir el mal p : Superman previene el mal
 i : Superman es impotente m : Superman es malévolo
 e : Superman existe

- Traducción:

$$p_0: a \wedge w \implies p \quad p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m)$$

$$p_2: \neg p \quad p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m$$

$$p_4: \neg e$$

$$A: p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \implies p_4$$

- Deducir: $A: p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \implies p_4$ es demostrar $p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4$

Recuerden el ejemplo: ¿Superman existe? (*Video1.7*)

Considere el siguiente razonamiento:

Si Superman fuera capaz y quisiera prevenir el mal, él lo prevendría.

Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, sería impotente; si él no quisiera prevenir el mal, sería malévolo.

Supermán no previene el mal.

Si Superman existe, no es impotente ni malévolo.

Entonces, *Supermán no existe.*

- Variables proposicionales:
a: Superman es capaz de prevenir el mal w: Superman quiere prevenir el mal p:
Supermán previene el mal
i: Superman es impotente m: Superman es malévolo
e: Superman existe
- Traducción:
 $p_0: a \wedge w \implies p$ $p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m)$
 $p_2: \neg p$ $p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m$
 $p_4: \neg e$
 $A: p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \implies p_4$
- Deducir:** $A: p_0 \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \implies p_4$ es demostrar $p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4$

$$p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4 \quad (1) \quad (\text{Video 1.7})$$

$$\begin{array}{lll} p_0: a \wedge w \implies p & p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m) & \\ p_2: \neg p & p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m & p_4: \neg e \end{array}$$

Intuición

- Hay que llegar a $\neg e$
- La contrapositiva de p_3 serviría para esto:
 $\neg(\neg i \wedge \neg m) \implies \neg e$
- Necesitamos entonces demostrar $i \vee m$
- i se puede lograr de p_1 si tenemos $\neg a$
- m se puede lograr de p_1 si tenemos $\neg w$
- La contrapositiva de p_0 permitiría concluir $\neg a \vee \neg w$ si se tiene $\neg p$
- $\neg p$ es un hecho por p_2

Plan de la demostración

- Observar que $\neg p$ es un hecho por p_2
- Deducir $\neg a \vee \neg w$ por contrapositiva de p_0 y *(DeMorgan)*
- Usar esto con p_1 para deducir $i \vee m$
- Deducir $\neg e$ por contrapositiva de p_3

$$p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4 \quad (1) \quad (\text{Video 1.7})$$

$$\begin{array}{lll} p_0: a \wedge w \implies p & p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m) & \\ p_2: \neg p & p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m & p_4: \neg e \end{array}$$

Intuición

- Hay que llegar a $\neg e$
- La contrapositiva de p_3 serviría para esto:
 $\neg(\neg i \wedge \neg m) \implies \neg e$
- Necesitamos entonces demostrar $i \vee m$
- i se puede lograr de p_1 si tenemos $\neg a$
- m se puede lograr de p_1 si tenemos $\neg w$
- La contrapositiva de p_0 permitiría concluir $\neg a \vee \neg w$ si se tiene $\neg p$
- $\neg p$ es un hecho por p_2

Plan de la demostración

- Observar que $\neg p$ es un hecho por p_2
- Deducir $\neg a \vee \neg w$ por contrapositiva de p_0 y *(DeMorgan)*
- Usar esto con p_1 para deducir $i \vee m$
- Deducir $\neg e$ por contrapositiva de p_3

$$p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4 \quad (2) \quad (\text{Video 1.7})$$

$$\begin{array}{lll} p_0: a \wedge w \implies p & p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m) \\ p_2: \neg p & p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m & p_4: \neg e \end{array}$$

$$L_0: \neg p \implies (\neg a \vee \neg w)$$

Lema: $\neg p \implies (\neg a \vee \neg w)$

Hip: p_0, p_1, p_2, p_3

Dem:

true

$$\begin{array}{ll} \equiv & a \wedge w \implies p \\ \equiv & \neg p \implies \neg(a \wedge w) \\ \equiv & \neg p \implies \neg a \vee \neg w \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Hipótesis } p_0 \\ \langle \text{Contrapositiva} \rangle \\ \langle \text{DeMorgan} \rangle \\ \diamond \end{array}$$

$$L_1: \neg a \vee \neg w$$

Lema: $\neg a \vee \neg w$

Hip: p_0, p_1, p_2, p_3

Dem:

true

$$\begin{array}{ll} \equiv & \neg p \\ \implies & \neg a \vee \neg w \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Hipótesis } p_2 \\ \langle L_0; \text{Modus Ponens} \rangle \\ \diamond \end{array}$$

$p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4$ (2) (*Video 1.7*)

$$\begin{array}{lll} p_0: a \wedge w \Rightarrow p & p_1: (\neg a \Rightarrow i) \wedge (\neg w \Rightarrow m) \\ p_2: \neg p & p_3: e \Rightarrow \neg i \wedge \neg m & p_4: \neg e \end{array}$$

$L_0 : \neg p \Rightarrow (\neg a \vee \neg w)$

Lema: $\neg p \Rightarrow (\neg a \vee \neg w)$

Hip: p_0, p_1, p_2, p_3

Dem:

true

$$\begin{array}{ll} \equiv & a \wedge w \Rightarrow p \quad \text{Hipótesis } p_0 \\ \equiv & \neg p \Rightarrow \neg(a \wedge w) \quad \langle \text{Contrapositiva} \rangle \\ \equiv & \neg p \Rightarrow \neg a \vee \neg w \quad \langle \text{DeMorgan} \rangle \\ & \diamond \end{array}$$

$L_1 : \neg a \vee \neg w$

Lema: $\neg a \vee \neg w$

Hip: p_0, p_1, p_2, p_3

Dem:

true

$$\begin{array}{ll} \equiv & \neg p \quad \text{Hipótesis } p_2 \\ \Rightarrow & \neg a \vee \neg w \quad \langle L_0; \text{Modus Ponens} \rangle \\ & \diamond \end{array}$$

$p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4$ (3) (*Video 1.7*)

$p_0: a \wedge w \implies p$ $p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m)$ $p_2: \neg p$ $p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m$ $p_4: \neg e$

$L_2: i \vee m$

Lema: $i \vee m$

Hip: $p_0, p_1, p_2, p_3, L_0, L_1$

Dem:

Casos: $\neg a, \neg w$

Demostración de $\neg a \vee \neg w$

$true \equiv \neg a \vee \neg w \quad \langle L_1 \rangle$

Caso: $\neg a$

Demostración de $\neg a \implies i \vee m$

$true$

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg a \implies i) \\ &\quad \wedge (\neg w \implies m) \quad \langle p_1 \rangle \\ \implies &(\neg a \implies i) \quad \langle p \wedge q \implies q \rangle \\ \implies &(\neg a \implies (i \vee m)) \quad \langle p \implies p \vee q \rangle \end{aligned}$$

Caso: $\neg w$

Demostración de $\neg w \implies i \vee m$

$true$

$L_2: i \vee m$ (cont)

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg a \implies i) \\ &\quad \wedge (\neg w \implies m) \quad \langle p_1 \rangle \\ \implies &(\neg w \implies m) \quad \langle p \wedge q \implies q \rangle \\ \implies &(\neg w \implies (m \vee i)) \quad \langle p \implies p \vee q \rangle \\ &\quad \diamond \end{aligned}$$

Teorema: $\neg e$

Dem:

Hip: $p_0, p_1, p_2, p_3, L_0, L_1, L_2$

$true$

$$\begin{aligned} &\equiv e \implies \neg i \wedge \neg m \quad \langle p_3 \rangle \\ &\equiv \neg(\neg i \wedge \neg m) \implies \neg e \quad \langle \text{Contrapositiva} \rangle \\ &\equiv i \vee m \implies \neg e \quad \langle \text{DeMorgan} \rangle \\ &\implies \neg e \quad \langle L_2; MP \rangle \end{aligned}$$

\diamond

$p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4$ (3) (*Video 1.7*)

$p_0: a \wedge w \implies p$ $p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m)$ $p_2: \neg p$ $p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m$ $p_4: \neg e$

$L_2: i \vee m$

Lema: $i \vee m$

Hip: $p_0, p_1, p_2, p_3, L_0, L_1$

Dem:

Casos: $\neg a, \neg w$

Demostración de $\neg a \vee \neg w$

$true \equiv \neg a \vee \neg w \quad \langle L_1 \rangle$

Caso: $\neg a$

Demostración de $\neg a \implies i \vee m$

$true$

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg a \implies i) \\ &\quad \wedge (\neg w \implies m) \quad \langle p_1 \rangle \\ &\implies (\neg a \implies i) \quad \langle p \wedge q \implies q \rangle \\ &\implies (\neg a \implies (i \vee m)) \quad \langle p \implies p \vee q \rangle \end{aligned}$$

Caso: $\neg w$

Demostración de $\neg w \implies i \vee m$

$true$

$L_2: i \vee m$ (cont)

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg a \implies i) \\ &\quad \wedge (\neg w \implies m) \quad \langle p_1 \rangle \\ &\implies (\neg w \implies m) \quad \langle p \wedge q \implies q \rangle \\ &\implies (\neg w \implies (m \vee i)) \quad \langle p \implies p \vee q \rangle \\ &\quad \diamond \end{aligned}$$

Teorema: $\neg e$

Dem:

Hip: $p_0, p_1, p_2, p_3, L_0, L_1, L_2$
 $true$

$$\begin{aligned} &\equiv e \implies \neg i \wedge \neg m \quad \langle p_3 \rangle \\ &\equiv \neg(\neg i \wedge \neg m) \implies \neg e \quad \langle \text{Contrapositiva} \rangle \\ &\equiv i \vee m \implies \neg e \quad \langle \text{DeMorgan} \rangle \\ &\implies \neg e \quad \langle L_2; MP \rangle \\ &\quad \diamond \end{aligned}$$

$p_0, p_1, p_2, p_3 \vdash p_4$ (3) (*Video 1.7*)

$p_0: a \wedge w \implies p$ $p_1: (\neg a \implies i) \wedge (\neg w \implies m)$ $p_2: \neg p$ $p_3: e \implies \neg i \wedge \neg m$ $p_4: \neg e$

$L_2: i \vee m$

Lema: $i \vee m$

Hip: $p_0, p_1, p_2, p_3, L_0, L_1$

Dem:

Casos: $\neg a, \neg w$

Demostración de $\neg a \vee \neg w$

$true \equiv \neg a \vee \neg w \quad \langle L_1 \rangle$

Caso: $\neg a$

Demostración de $\neg a \implies i \vee m$

$true$

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg a \implies i) \\ &\quad \wedge (\neg w \implies m) \quad \langle p_1 \rangle \\ &\implies (\neg a \implies i) \quad \langle p \wedge q \implies q \rangle \\ &\implies (\neg a \implies (i \vee m)) \quad \langle p \implies p \vee q \rangle \end{aligned}$$

Caso: $\neg w$

Demostración de $\neg w \implies i \vee m$

$true$

$L_2: i \vee m$ (cont)

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg a \implies i) \\ &\quad \wedge (\neg w \implies m) \quad \langle p_1 \rangle \\ &\implies (\neg w \implies m) \quad \langle p \wedge q \implies q \rangle \\ &\implies (\neg w \implies (m \vee i)) \quad \langle p \implies p \vee q \rangle \\ &\quad \diamond \end{aligned}$$

Teorema: $\neg e$

Dem:

Hip: $p_0, p_1, p_2, p_3, L_0, L_1, L_2$
 $true$

$$\begin{aligned} &\equiv e \implies \neg i \wedge \neg m \quad \langle p_3 \rangle \\ &\equiv \neg(\neg i \wedge \neg m) \implies \neg e \quad \langle \text{Contrapositiva} \rangle \\ &\equiv i \vee m \implies \neg e \quad \langle \text{DeMorgan} \rangle \\ &\implies \neg e \quad \langle L_2; MP \rangle \\ &\quad \diamond \end{aligned}$$

Ejercicio en clase

Considere el siguiente razonamiento:

La policía le está siguiendo el rastro a un posible delincuente que usó el transmilenio para escaparse. De acuerdo a sus investigaciones la policía ha podido establecer que el delincuente tomó rutas que pasaron por la estaciones Aguas, Cll26, Prado y Virrey, donde el delincuente pudo bajarse o no. Y se sabe lo siguiente:

- 1 El delincuente se bajó en al menos una de esas estaciones.
- 2 El delincuente no se bajó en Virrey si se bajó antes en Aguas o Cll26.
- 3 Si el delincuente se bajó en Prado entonces también se bajó en Aguas
- 4 Si el delincuente no se bajó en Prado entonces tampoco se bajó en Cll26
- 5 El delincuente se bajó Prado y Virrey o no se bajó en ninguna de ellas.

Un policía de inteligencia concluyó que el delincuente sólo se bajó en Aguas. Demuéstre que esa conclusión es correcta

- Haga la demostración siguiendo los esquemas y reglas de la lógica proposicional
- [Socrative]

Ejercicio en clase

Considere el siguiente razonamiento:

La policía le está siguiendo el rastro a un posible delincuente que usó el transmilenio para escaparse. De acuerdo a sus investigaciones la policía ha podido establecer que el delincuente tomó rutas que pasaron por la estaciones Aguas, Cll26, Prado y Virrey, donde el delincuente pudo bajarse o no. Y se sabe lo siguiente:

- 1 El delincuente se bajó en al menos una de esas estaciones.
- 2 El delincuente no se bajó en Virrey si se bajó antes en Aguas o Cll26.
- 3 Si el delincuente se bajó en Prado entonces también se bajó en Aguas
- 4 Si el delincuente no se bajó en Prado entonces tampoco se bajó en Cll26
- 5 El delincuente se bajó Prado y Virrey o no se bajó en ninguna de ellas.

Un policía de inteligencia concluyó que el delincuente sólo se bajó en Aguas. Demuéstre que esa conclusión es correcta

- Haga la demostración siguiendo los esquemas y reglas de la lógica proposicional
- [Socrative]