Clase 01-12-21

miércoles, 1 de diciembre de 2021 11:06 a. m.

Propiedades (de N_A).

Sean A una matriz. Si $\vec{x}, \vec{y} \in N_A$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\vec{x} + \vec{y} \in N_A$. 2. $\lambda \vec{x} \in N_A$.

Argumento:

1. $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \in N_A$.
2. $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{x} \in N_A$.

Espacio columna de una matriz (C_A).

Sea $A = [\vec{a_1}\ \vec{a_2} \dots \vec{a_n}]$ con $\vec{a_i} \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Se define C_A como

$$C_A = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^m : A\vec{x} = \vec{b}, \text{ para algun } \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

$$= \{\vec{b} \in \mathbb{R}^m : \text{el SEL cuya M.A. es } (A|\vec{b}) \text{ tiene solución}\}.$$

$$= \text{Gen}\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}\}.$$

Ejm. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\vec{b} \in C_A$? $\vec{c} \in C_A$?
- Encontrar un conjunto generador para C_A.

Solución.

- Veamos si existen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{b} \quad \text{y} \quad A\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \vec{c}$$

¿$(A|\vec{b})$ y $(A|\vec{c})$ son consistentes?

M.A. Conjunta: $(A \mid \vec{b} \ \ \vec{c})$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & -5 & -5 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Forma escalonado

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 19/2 & -19/2 & -19/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Consistente. Inconsistente

Entonces $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \in C_A$ y $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \notin C_A$.

- Por definición de C_A

$$C_A = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Asi que $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de C_A.

Propiedades (de C_A).

Sea A una matriz. Si $\vec{b}$ y $\vec{c} \in C_A$, entonces:

1. $\vec{b} + \vec{c} \in C_A$. 2. $\lambda \vec{b} \in C_A$.

Argumento.

1. Como $\vec{b}, \vec{c} \in C_A$ existen $\vec{x}, \vec{y}$ tales que $A\vec{x} = \vec{b}$ y $A\vec{y} = \vec{c}$.

$$\vec{b} + \vec{c} = A\vec{x} + A\vec{y} = A(\vec{x} + \vec{y}) \Rightarrow \vec{b} + \vec{c} \in C_A.$$

2. ejercicio.

Observaciones:

1. Dada una matriz A, si el vector $\mathbf{u}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y el vector $\mathbf{v}$ es solución del sistema homogéneo asociado ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$), entonces $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. Dada una matriz A, si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Dada una matriz A y una solución $\mathbf{u}$ del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si y solo si, $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{u}$, donde $\mathbf{h}$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = 0$.
4. Un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que tiene más de una solución, tiene infinitas soluciones.

Argumento:

1. Sea A una matriz. $\left.\begin{array}{l}\vec{u} \text{ es sol. de } A\vec{x}=\vec{b}.\\ \vec{v} \text{ '' '' '' } A\vec{x}=0.\end{array}\right\}$ ent. $\vec{u}+\vec{v}$ es sol. de $A\vec{x}=b$.

$$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

2. $A(\vec{u}-\vec{v}) = A\vec{u} - A\vec{v} = \vec{b} - \vec{b} = 0$

Independencia lineal.

Definición Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es *linealmente dependiente (l.d.)* si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, al menos uno de ellos diferente de cero, tales que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es *linealmente independiente* si los únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

son todos cero.

Ejm. Los vectores $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ son l.d. ya que

$$1\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Ejemplo. Determinar si los siguientes conjuntos son l.i.

1. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right\}$

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución.

1. Sean λ_1, λ_2 y λ_3 tales que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La M.A. del sistema correspondiente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

y su F.E. está dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0. \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0. \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0. \end{array}$$

Dado que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, el conjunto es l.i.

2. Sean λ_1, λ_2 y λ_3 tales que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ Forma escalonada.}$$

$$-\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2t, \quad t = \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_3 = -2t - t = -3t.$$

Como el sistema tiene infinitas soluciones, entonces el conjunto es l.d.

Observación: Todo conjunto de vectores que contenga el vector nulo, es un conjunto l.d.

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v} + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k + \lambda_{k+1} 0 = 0$$

Si $\lambda_{k+1} \neq 0$, entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k, 0\}$ es l.d.

Teorema [*Equivalencia de conceptos*].

Dados los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de R^m, sea A la matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es *l.i.*
2. El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única (la solución trivial).
3. La forma escalonada de la matriz A tiene n pivotes.

observación.

Las columnas de una matriz correspondientes a las columnas pivotales de una matriz escalonada equivalente a ella, forman un conjunto de vectores l.i.

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -1}^{\text{columnas pivotales}} & 2 \\ 0 \quad\ \ 5 & -5 \\ 0 \quad\ \ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Forma escalonada de } A$$

Luego, los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ forman un conjunto l. i.