Martha Quizá
Univ. del Valle

Polinomios

Habiendo estudiado dos casos particulares de los polinomios, retomamos el concepto para estudiarlos en general.

Recordemos:

polinomio: Un polinomio de grado n (entero no negativo) es una expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$; $a_n \neq 0$.

Recuérdese también que todo polinomio define una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si operamos polinomios, la suma, resta, producto, vuelve a ser un polinomio.

DEFINICIÓN: Sea f un polinomio de grado n, $n \geq 1$. Se dice que $x = c$ es un cero ó una raíz de f si $f(c) = 0$.

ej: Si $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, entonces $c = 2$, $c = -2$ són ceros de f. En efecto, $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2) - 4 = -8 + 4 + 8 - 4 = 0$.

igualmente $f(2) = (2)^3 + 2^2 - 4(2) - 4 = 8 + 4 - 8 - 4 = 0$.

Recordemos en qué consiste el algoritmo de la división.

Algoritmo de la división: Dados dos enteros m, n, $m > 0$, existen otros 2 enteros q y r, tales que $n = mq + r$, con $0 \leq r < m$.

$n = mq + r$, $0 \leq r \leq |m|$

n: Dividendo, m: Divisor, q: cociente, r: Residuo.

Ej: Dados $n = 17$, $m = 3$, entonces

$17 = 3(5) + 2 \quad 0 \leq 2 < 3$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \underline{15} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$n = -16$, $m = 3$

$$\begin{array}{r|l} -16 & 3 \\ \underline{-18} & -6 \\ -16+18=2 & \end{array}$$

$-16 = 3(-6) + 2 \quad 0 \leq 2 < 3.$

De igual manera, existe algoritmo de la división entre polinomios.

Algoritmo: Sean $f(x)$, $g(x)$ dos polinomios de grado $n \geq 1$. Existen dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$, tales que

$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$, donde $0 \leq gr(r(x)) < gr\, g(x)$ ó $r(x) = 0$.

$f(x)$: Dividendo, $g(x)$: Divisor, $q(x)$: cociente, $r(x)$: residuo

Ejemplo: Dados los polinomios $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$, encontrar polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que $f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$.

S// Tomamos los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ y completamos con ceros los términos que no aparecen en el dividendo $f(x)$.

$$2x^4 - x^3 + 2x + 1 = 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x + 1.$$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x + 1 & x^2 - 2 \\
\cline{3-3}
+ & -2x^4 \qquad\quad 4x^2 & 2x^2 - x + 4 \\
\cline{2-2}
 & -x^3 + 4x^2 + 2x + 1 & \\
 & x^3 \qquad\quad -2x & \\
\cline{2-2}
 & 4x^2 + 1 & \\
 & -4x^2 + 8 & \\
\cline{2-2}
 & 9 &
\end{array}
$$

Cuantas veces cabe x^2 entre $2x^4$?

$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$ veces

$$2x^4 - x^3 + 2x + 1 = (x^2 - 2)(2x^2 - x + 4) + 9$$

Ej 2: Sean $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x - 4$, $g(x) = x^2 - x + 1$.

Halle $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Sol// Usamos el algoritmo de la división para hallar el cociente

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 2x - 4 & x^2 - x + 1 \\
\cline{2-2}
-x^5 \quad x^4 \quad -x^3 & x^3 + x^2 - 4 \\
\cline{1-1}
x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x - 4 & \\
-x^4 \quad x^3 \quad -x^2 & \\
\cline{1-1}
-4x^2 + 2x - 4 & \\
4x^2 - 4x + 4 & \\
\cline{1-1}
-2x &
\end{array}
$$

Termina la división

como $0 \leq gr(-2x) < gr(x^2 - x + 1)$

$0 \leq 1 < 2$

Así $x^5 - 3x^2 + 2x - 4 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 4) - 2x$

$$\frac{x^5 - 3x^2 + 2x - 4}{x^2 - x + 1} = x^3 + x^2 - 4 - \frac{2x}{x^2 - x + 1}$$

En general si $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, $0 \leq gr\, r < gr\, g$ ó $r(x) = 0$

entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Existen resultados importantes de polinomios, que enunciaremos como teoremas.

TEOREMA DEL RESIDUO:

El residuo de dividir un polinomio $f(x)$ de grado $n \geq 1$ entre un polinomio de la forma $g(x) = x - c$ es igual a $f(c)$.

D// Dados $f(x)$, $g(x) = x - c$, existen dos polinomios $q(x)$, $r(x)$ tales que $f(x) = g(x) q(x) + r(x)$, donde

$gr\, r(x) < gr\,(x-c) = 1$

$gr\, r(x) = 0$ ó $r(x) = 0$.

Como $gr\, r(x) = 0$ ó $r(x) = 0$, se tiene que $r(x)$ es constante, luego $r(x) = r$. Así,

$$f(x) = g(x) q(x) + r$$

$$f(x) = (x - c) q(x) + r, \quad \text{de donde}$$

$$f(c) = (c - c) q(x) + r, \quad \text{es decir,} \quad r = f(c).$$

Ej: Encuentre el residuo de dividir $f(x) = 3x^{480} - 2x^{100} + 1$ entre $g(x) = x + 1$.

S// Por el Teorema del residuo, el residuo de la división de $f(x)$ entre $x+1$ es igual a $f(-1)$

Así, $f(-1) = 3(-1)^{480} - 2(-1)^{100} + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$,

luego el residuo de la división es 2.

Otro Teorema importante es el Teorema del factor.

TEOREMA DEL FACTOR

Sea $f(x)$ un polinomio de grado n, $n \geq 1$. $x=c$ es raiz o cero de f si y sólo si $(x-c)$ es un factor de f.

D// En primer lugar decimos que $g(x)$ es un factor del polinomio $f(x)$ si el residuo de la división de f entre g es cero, es decir

$$f(x) = g(x)q(x).$$

Para demostrar el teorema debemos demostrar los dos sentidos de la implicación.

$$x=c \text{ es raiz de } f \longleftrightarrow (x-c) \text{ es factor de } f$$

veamos:

$\rightarrow$) $x=c$ es raiz de $f \rightarrow (x-c)$ es un factor de f.

Por el algoritmo de la división dados $f(x)$, $g(x)=x-c$, existen $q(x), r(x)$ tales que

$$f(x) = (x-c)q(x) + r(x), \qquad gr\, r(x)=0 \text{ ó } r(x)=0.$$

Por el Teorema del residuo, $r(x) = f(c)$, luego

$$f(x) = (x-c)q(x) + f(c)$$

como $x=c$ es raiz de f, $f(c)=0$, luego

$$f(x) = (x-c)q(x),$$ de donde se concluye que $(x-c)$ es un factor de f.

$\leftarrow)$ $(x-c)$ es un factor de $f \rightarrow x=c$ es una raíz de f.

Como $(x-c)$ es un factor de f, $f(x)=(x-c)q(x)$.
luego $f(c)=(c-c)q(c)$, de donde $f(c)=0$
y por tanto $x=c$ es raíz de $f(x)$.

Ej: Demostrar que $(x+1)$ es un factor de
$f(x)= x^3+x^2-4x-4$

S// Se puede probar que $(x+1)$ es un factor de $f(x)$ haciendo la división de $f(x)$ entre $(x+1)$ y mostrando que el residuo es cero ó más sencillo usando el Teorema del factor.

Cuál sentido se usa? $\rightarrow$ ó $\leftarrow$?
Claramente debemos usar $\rightarrow)$.

$f(c)=0 \rightarrow x-c$ es un factor de f.

En este caso $c=-1$ pues $g(x)=x+1=x-(-1)$

$f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-4(-1)-4 = -1+1+4-4=0$.

Como $f(-1)=0$, concluimos que $x+1$ es un factor de $f(x)$.

Ej: Halle las raíces del polinomio $f(x)=x^4-81$.

S// Ahora usamos el teorema del factor en el otro sentido. $\leftarrow)$ $(x-c)$ factor de $f \rightarrow x=c$ es raíz.
Entonces si conocemos los factores de $f(x)=x^4-81$, conocemos sus raíces. por lo tanto factorizamos el polinomio $f(x)$.