Sistemas de ecuaciones lineales (continuación)

¿Que es un SEL? Es un conjunto de m ecuaciones lineales con n variables de la forma

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

observe que · a_{ij} es el coeficiente de x_j en la ecuacion i.

$i = 1, 2, \ldots, m$
$j = 1, 2, \ldots, n$.

· b_i es el termino independiente de la ecuación i

· si $b_i = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ el sistema se llama homogéneo.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\
2x_1 - x_2 + 5x_3 &= -1 \\
-x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7.
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\
2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\
-x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0
\end{aligned}\right\}
\text{ sistema homogeneo asociado}
$$

Definición (solución de un SEL):

La solución de un SEL es una n-upla que es solución de cada una de las ecuaciones del sistema.

observación: Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre tiene al menos una solución: todas las variables iguales a cero (solución trivial).

Ejemplos

① La tripla $(-15, 6, -1)$ es solucion del sistema

$$x_1 + 2x_2 = -3$$
$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10.$$

En efecto, $-15 + 2(6) = -15 + 12 = -3 \Rightarrow -3 = -3.$

$2(-15) + 3(6) - 2(-1) = -10 \Rightarrow -10 = -10.$

② ¿ La dupla $(1,0)$ es solución $\begin{array}{l} 3x + 2y = 3 \\ -x + y = 4 \end{array}$?

$3(1) + 2(0) = 3$ ✓✓

$-1 + 0 = -1 \neq 4$ ✗ RTA: No es solución del sistema.

Número de soluciones de un SEL.

Ejemplo. Resolver y graficar cada SEL dado.

(a) $\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ 2x - 2y = 4 & (2) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

Solución:

(a). $x = y + 2$ $y = r$ parámetro

$x = r + 2$

Note que $(r+2, r)$ es solución de (1).

¿ $(r+2, r)$ es solución (2) ? SI.

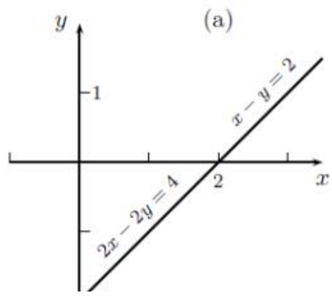
$2(r+2) - 2r = 2r + 4 - 2r = 4$ ✓✓

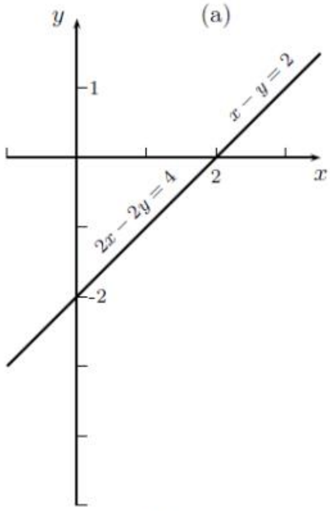
$2(r+2) - 2r \stackrel{?}{=} 4$

$4 = 4$ cierta.

C.S. del sistema: $\{(r+2, r) : r \in \mathbb{R}\}$.

Asi que el C.S. es infinito.





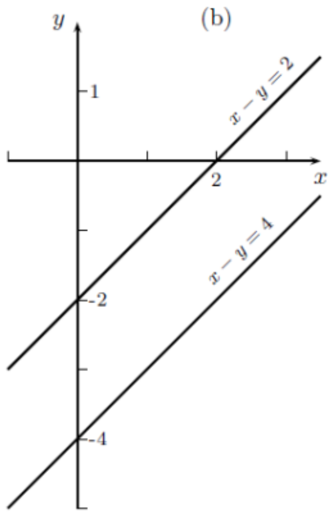
Conjunto solución *infinito*

(b) $x - y = 2$ (1) Este sistema no tiene solución.
$x - y = 4$ (2)

De (1): $x = y + 2$

Reempl. en (2): $y + 2 - y = 4 \Rightarrow 2 = 4$ Falso.

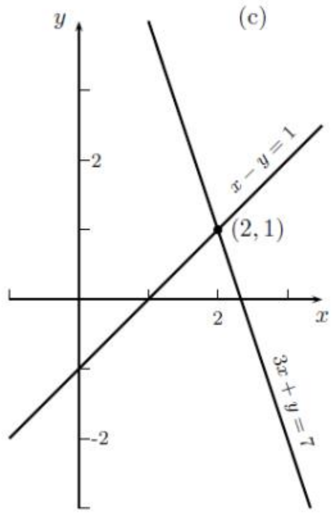
Conjunto solución: ϕ.



Conjunto solución *vacío*

(c) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned}$

$(2,1)$ es la unica solución del sistama.



Conjunto solución *unitario*

Posibilidades para el número de soluciones de un SEL:

1. Tiene solución única.
2. Tiene infinitas soluciones

} El sistema es consistante.

3. No tiene solución. } El sistama es inconsistante.

¿ Todo sistema homogéneo es consistante ? Si

Definición: Decimos que dos SEL son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

(a) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y \quad &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \quad (1) \\ y + 3z &= 5 \quad (2) \\ z &= 2 \quad (3) \end{aligned}$

¿ Cuál es más fácil de resolver ?

El sistama (b).

- De la ecuación 3 se tiene que $z = 2$.
- Sustituir $z = 2$ en la ecuacion (2)

$$y + 3(2) = 5 \Rightarrow y = -1$$

- Sustituir $y = -1$ y $z = 2$ en la ecuacion (1).

$$x - 2(-1) + 3(2) = 9 \Rightarrow x = 1.$$

Así, $(1, -1, 2)$ es la solución de (b).

Sustitución hacia atrás aplicada al sistama (b).

objetivo: Resolver un SEL transformandolo primero en un sistema equivalente que esté en la forma escalonada por filas (renglones).

Operaciones que conducen a un sistema equivalente:

1. Intercambiar dos ecuaciones
2. Multiplicar una ecuación por una cte no nula.
3. Sumar el multiplo de una ecuación a otra.

Ejemplo. Resolver.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \quad (E1) \\ -x + 3y &= -4 \quad (E2) \\ 2x - 5y + 5z &= 17. \quad (E3). \end{aligned}$$

solución.

- Sustituir la E2 por la suma de E1 y E2.

$$\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 9 \\ \underline{-x + 3y = -4} \\ y + 3z = 5 \end{array} \leftarrow \text{Es la nueva E2.}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

- $-2E1 + E3$. $\quad -2E1: \quad -2x + 4y - 6z = -18.$

$$\begin{array}{rr} E3: & \underline{2x - 5y + 5z = 17} \\ & -y - z = -1 \end{array} \leftarrow \text{Nueva E3.}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ -y - z &= -1. \end{aligned}$$

- Sumar E2 y E3.

$$\begin{array}{r} y + 3z = 5 \\ \underline{-y - z = -1} \\ 0 + 2z = 4 \end{array} \leftarrow \text{Nueva E3.}$$

$$
\begin{aligned}
x - 2y + 3z &= 9 \\
y + 3z &= 5 \\
2z &= 4.
\end{aligned}
$$

- Finalmente, multiplicar la $E3$ por $1/2$.

$$
\begin{aligned}
x - 2y + 3z &= 9 \\
y + 3z &= 5 \\
z &= 2
\end{aligned}
$$

Cualquer solución de éste sistama es también solución de los sistamas anteriores y, en particular, del sistama inicial.

Ya sabemos que $(1, -1, 2)$ es la solución del sistama.