Análisis de Algoritmos II

Jesús Alexander Aranda Ph.D   Robinson Duque, Ph.D
Juan Francisco Díaz, Ph. D

Universidad del Valle

jesus.aranda@correounivalle.edu.co
robinson.duque@correounivalle.edu.co
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co

Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Overview

1. Demostración de NP-Completitud de Programación Entera (IP)
    - Conceptos Generales
    - ¿Está IP en NP?
    - ¿Es IP NP-Hard?
    - IP es NP-Completo
    - Ejercicios

Conceptos Generales

Definición Programación Entera (IP)

Instancia: un conjunto v de variables enteras, un conjunto de desigualdades sobre las variables, una función $f(v)$ para maximizar y un entero B.

Problema de Decisión

Pregunta: ¿existe alguna asignación de enteros a v de tal forma que se cumplan todas las desigualdades y $f(v) \geq B$?

Conceptos Generales

Ejemplo Programación Entera

$$v_1 \geq 1, v_2 \geq 0$$

$$v_1 + v_2 \leq 3$$

$$f(v) = 2v_2, B = 3$$

¿Que valores v_1 y v_2 satisfacen el problema?

$$v_1 = 1, v_2 = 2$$

Conceptos Generales

Ejemplo Programación Entera

$$v_1 \geq 1, v_2 \geq 0$$

$$v_1 + v_2 \leq 3$$

$$f(v) = 2v_2, B = 3$$

¿Que valores v_1 y v_2 satisfacen el problema?

$$v_1 = 1, v_2 = 2$$

Conceptos Generales

Ejemplo 2 Programación Entera

$$v_1 \geq 1, v_2 \geq 0$$

$$v_1 + v_2 \leq 3$$

$$f(v) = 2v_2, B = 5$$

¿Que valores v_1 y v_2 satisfacen el problema?

No hay solución debido a que el máximo valor posible para v_2 es 2 para cumplir con la restricción $v_1 + v_2 \leq 3$. Entonces $f(v) \geq B$ no se cumple puesto que el máximo valor que puede tomar $f(v)$ es 4.

Conceptos Generales

Ejemplo 2 Programación Entera

$$v_1 \geq 1, v_2 \geq 0$$

$$v_1 + v_2 \leq 3$$

$$f(v) = 2v_2, B = 5$$

¿Que valores v_1 y v_2 satisfacen el problema?
No hay solución debido a que el máximo valor posible para v_2 es 2 para cumplir con la restricción $v_1 + v_2 \leq 3$. Entonces $f(v) \geq B$ no se cumple puesto que el máximo valor que puede tomar $f(v)$ es 4.

Demostración de NP-Completitud Programación Entera

Para probar que la Programación Entera es NP-Completo se necesita:

1. (Ser NP) Probar que $IP \in NP$
2. (Ser NP duro) Probar que $IP \in NP - Hard$
    1. Seleccionar un problema NP-Completo A conocido
    2. Describir un algoritmo que transforme cada instancia de A a una instancia de IP. Esto es $A \prec_p IP$.
    3. Probar que el algoritmo anterior corre en tiempo polinomial y que la nueva instancia es de tamaño polinomial
    4. Probar que el algoritmo es correcto

¿Está IP en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es la asignación v de valores enteros a las variables que hace que se satisfagan las desigualdades y que $f(v) \geq B$.

IP $\in$ NP

Dada una instancia positiva de IP y el certificado v, sólo se debe verificar que cada desigualdad se cumpla y que $f(v) \geq B$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(mn)$ donde m es el número de desigualdades y n el número de variables.
Dada una instancia negativa de IP ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia.
Por tanto $IP \in NP$

¿Está IP en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es la asignación v de valores enteros a las variables que hace que se satisfagan las desigualdades y que $f(v) \geq B$.

IP $\in$ NP

Dada una instancia positiva de IP y el certificado v, sólo se debe verificar que cada desigualdad se cumpla y que $f(v) \geq B$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(mn)$ donde m es el número de desigualdades y n el número de variables.
Dada una instancia negativa de IP ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia.
Por tanto $IP \in NP$

¿Está IP en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.

Para este caso, el certificado es la asignación v de valores enteros a las variables que hace que se satisfagan las desigualdades y que $f(v) \geq B$.

IP $\in$ NP

Dada una instancia positiva de IP y el certificado v, sólo se debe verificar que cada desigualdad se cumpla y que $f(v) \geq B$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(mn)$ donde m es el número de desigualdades y n el número de variables.

Dada una instancia negativa de IP ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia.

Por tanto $IP \in NP$

¿Está IP en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es la asignación v de valores enteros a las variables que hace que se satisfagan las desigualdades y que $f(v) \geq B$.

IP $\in$ NP

Dada una instancia positiva de IP y el certificado v, sólo se debe verificar que cada desigualdad se cumpla y que $f(v) \geq B$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(mn)$ donde m es el número de desigualdades y n el número de variables.
Dada una instancia negativa de IP ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia.
Por tanto $IP \in NP$

¿Es IP NP-Hard? Escogiendo un problema para reducir

Se procede a realizar una reducción desde un problema NP-Completo conocido. Tenemos dos: SAT y 3-SAT. Escogemos 3SAT:

$$3 - SAT \prec_p IP$$

¿Es IP NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea: Simular cada variable booleana x de 3-SAT con un par de variables enteras x y $\bar{x}$ de valor 0 (falso) o 1 (verdadero), representando el valor booleano de la variable y de su negación. Se requieren las siguientes restricciones para que esas variables enteras jueguen el rol de booleanas:

- $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq \bar{x} \leq 1$, ambas variables estarán restringidas a valores 0 o 1. Lo cual las hace equivalentes a variables booleanas true/false.
- $1 \leq x + \bar{x} \leq 1$, exactamente una variable es asociada al valor de 1. Esto asegura que sólo una de las dos variables x y $\bar{x}$ puede ser verdadera y que la una es el complemento de la otra.
- Por cada cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, construya una desigualdad: $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$, donde $l_j = x$ si $l_{ij} = x$ y $l_j = \bar{x}$ si $l_{ij} = \neg x$. Esto garantizará que mínimo una variable de la clausula sea asignada el valor 1 (i.e., verdadera).

¿Es IP NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea: Simular cada variable booleana x de 3-SAT con un par de variables enteras x y $\bar{x}$ de valor 0 (falso) o 1 (verdadero), representando el valor booleano de la variable y de su negación. Se requieren las siguientes restricciones para que esas variables enteras jueguen el rol de booleanas:

- $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq \bar{x} \leq 1$, ambas variables estarán restringidas a valores 0 o 1. Lo cual las hace equivalentes a variables booleanas true/false.
- $1 \leq x + \bar{x} \leq 1$, exactamente una variable es asociada al valor de 1. Esto asegura que sólo una de las dos variables x y $\bar{x}$ puede ser verdadera y que la una es el complemento de la otra.
- Por cada cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, construya una desigualdad: $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$, donde $l_j = x$ si $l_{ij} = x$ y $l_j = \bar{x}$ si $l_{ij} = \neg x$. Esto garantizará que mínimo una variable de la clausula sea asignada el valor 1 (i.e., verdadera).

¿Es IP NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea: Simular cada variable booleana x de 3-SAT con un par de variables enteras x y $\bar{x}$ de valor 0 (falso) o 1 (verdadero), representando el valor booleano de la variable y de su negación. Se requieren las siguientes restricciones para que esas variables enteras jueguen el rol de booleanas:

- $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq \bar{x} \leq 1$, ambas variables estarán restringidas a valores 0 o 1. Lo cual las hace equivalentes a variables booleanas true/false.
- $1 \leq x + \bar{x} \leq 1$, exactamente una variable es asociada al valor de 1. Esto asegura que sólo una de las dos variables x y $\bar{x}$ puede ser verdadera y que la una es el complemento de la otra.
- Por cada cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, construya una desigualdad: $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$, donde $l_j = x$ si $l_{ij} = x$ y $l_j = \bar{x}$ si $l_{ij} = \neg x$. Esto garantizará que mínimo una variable de la clausula sea asignada el valor 1 (i.e., verdadera).

¿Es IP NP-Hard? Definiendo la reducción

La función objetivo no es importante en este caso puesto que se busca una asignación de valores a variables que satisfaga todas las cláusulas de 3-SAT, es decir, las desigualdades de IP. Por consiguiente, definimos una que siempre se cumple:

$$f(v) = v_1, B = 0$$

¿Es IP NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en 3-SAT se reducen a instancias positivas en IP

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable x que satisface todas las cláusulas.
- Por cada variable x en 3-SAT, hay dos variables x y $\bar{x}$ en IP.
- Si x es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $x = 1$ y $\bar{x} = 0$ en IP.

  Si x es asignada a falso en 3-SAT, considere $x = 0$ y $\bar{x} = 1$ en IP.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, si la asignación satisface C_i, entonces también se satisface la desigualdad $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$.
- Por lo tanto esta asignación satisface todas las desigualdades de la instancia en IP, puesto que la original satisface todas las cláusulas de 3-SAT.

¿Es IP NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en 3-SAT se reducen a instancias positivas en IP

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable x que satisface todas las cláusulas.
- Por cada variable x en 3-SAT, hay dos variables x y $\bar{x}$ en IP.
- Si x es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $x = 1$ y $\bar{x} = 0$ en IP.

  Si x es asignada a falso en 3-SAT, considere $x = 0$ y $\bar{x} = 1$ en IP.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, si la asignación satisface C_i, entonces también se satisface la desigualdad $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$.
- Por lo tanto esta asignación satisface todas las desigualdades de la instancia en IP, puesto que la original satisface todas las cláusulas de 3-SAT.

¿Es IP NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en 3-SAT se reducen a instancias positivas en IP

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable x que satisface todas las cláusulas.
- Por cada variable x en 3-SAT, hay dos variables x y $\bar{x}$ en IP.
- Si x es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $x = 1$ y $\bar{x} = 0$ en IP.

  Si x es asignada a falso en 3-SAT, considere $x = 0$ y $\bar{x} = 1$ en IP.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, si la asignación satisface C_i, entonces también se satisface la desigualdad $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$.
- Por lo tanto esta asignación satisface todas las desigualdades de la instancia en IP, puesto que la original satisface todas las cláusulas de 3-SAT.

¿Es IP NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en 3-SAT se reducen a instancias positivas en IP

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable x que satisface todas las cláusulas.
- Por cada variable x en 3-SAT, hay dos variables x y $\bar{x}$ en IP.
- Si x es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $x = 1$ y $\bar{x} = 0$ en IP.

  Si x es asignada a falso en 3-SAT, considere $x = 0$ y $\bar{x} = 1$ en IP.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, si la asignación satisface C_i, entonces también se satisface la desigualdad $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$.
- Por lo tanto esta asignación satisface todas las desigualdades de la instancia en IP, puesto que la original satisface todas las cláusulas de 3-SAT.

¿Es IP NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en 3-SAT se reducen a instancias positivas en IP

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable x que satisface todas las cláusulas.
- Por cada variable x en 3-SAT, hay dos variables x y $\bar{x}$ en IP.
- Si x es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $x = 1$ y $\bar{x} = 0$ en IP.

  Si x es asignada a falso en 3-SAT, considere $x = 0$ y $\bar{x} = 1$ en IP.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, si la asignación satisface C_i, entonces también se satisface la desigualdad $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$.
- Por lo tanto esta asignación satisface todas las desigualdades de la instancia en IP, puesto que la original satisface todas las cláusulas de 3-SAT.

¿Es IP NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en 3-SAT se reducen a instancias negativas en IP

- Si una instancia de 3-SAT es negativa, es porque en cada asignación de verdad de cada variable x al menos una cláusula queda sin satisfacer.
- Si esa cláusula es $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, entonces la asignación correspondiente en IP tampoco satisface la desigualdad $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$.
- Por lo tanto no existe solución para la instancia en IP, o sea que también es una instancia negativa

¿Es IP NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en 3-SAT se reducen a instancias negativas en IP

- Si una instancia de 3-SAT es negativa, es porque en cada asignación de verdad de cada variable x al menos una cláusula queda sin satisfacer.
- Si esa cláusula es $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, entonces la asignación correspondiente en IP tampoco satisface la desigualdad $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$.
- Por lo tanto no existe solución para la instancia en IP, o sea que también es una instancia negativa

¿Es IP NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en 3-SAT se reducen a instancias negativas en IP

- Si una instancia de 3-SAT es negativa, es porque en cada asignación de verdad de cada variable x al menos una cláusula queda sin satisfacer.
- Si esa cláusula es $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, entonces la asignación correspondiente en IP tampoco satisface la desigualdad $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$.
- Por lo tanto no existe solución para la instancia en IP, o sea que también es una instancia negativa

¿Es IP NP-Hard? Complejidad de la reducción

Complejidad de la reducción

Evidentemente, la reducción se hace en tiempo polinomial:

- Si se tienen n variables en SAT, se crean $2n$ variables y $3n$ desigualdades en IP.
- Si se tienen m clausulas en SAT, se crean m desigualdades en IP.

IP es NP-Completo

Se demostró que IP es NP. También se mostró que IP es NP-Hard a través de una reducción de SAT. Adicionalmente la reducción es correcta como se evidenció en cada caso y se puede realizar en tiempo polinomial, luego se concluye que:

IP es NP-Completo

Aclaraciones Sobre la Reducción

- La reducción preserva la estructura del problema. Note que la reducción no resuelve el problema, simplemente lo pone en un formato diferente.
- Las posibles instancias resultantes de IP son un pequeño subconjunto de las posibles instancias. Dado que algunas de ellas son duras, el problema en general es duro.
- La transformación captura la esencia del porqué IP es duro - no tiene que ver con grandes coeficientes o con grandes rangos en los dominios de las variables - la restricción 0-1 es suficiente.

Aclaraciones Sobre la Reducción

- La reducción preserva la estructura del problema. Note que la reducción no resuelve el problema, simplemente lo pone en un formato diferente.
- Las posibles instancias resultantes de IP son un pequeño subconjunto de las posibles instancias. Dado que algunas de ellas son duras, el problema en general es duro.
- La transformación captura la esencia del porqué IP es duro - no tiene que ver con grandes coeficientes o con grandes rangos en los dominios de las variables - la restricción 0-1 es suficiente.

Aclaraciones Sobre la Reducción

- La reducción preserva la estructura del problema. Note que la reducción no resuelve el problema, simplemente lo pone en un formato diferente.
- Las posibles instancias resultantes de IP son un pequeño subconjunto de las posibles instancias. Dado que algunas de ellas son duras, el problema en general es duro.
- La transformación captura la esencia del porqué IP es duro - no tiene que ver con grandes coeficientes o con grandes rangos en los dominios de las variables - la restricción 0-1 es suficiente.

Ejemplo

Ejemplo

Transformar esta instancia de SAT a IP

$$C = \{v_1, \neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}$$

Como se puede observar este SAT se puede satisfacer con $v_1 = V, v_2 = V, v_3 = F$

Ejemplo

Ejemplo

$$C = \{v_1, \neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}$$

- Generamos las variables $\{v_1, v_2, v_3, \bar{v_1}, \bar{v_2}, \bar{v_3}\}$
- Se agregan las restricciones $0 \leq v_1 \leq 1, 0 \leq v_2 \leq 1, 0 \leq v_3 \leq 1, 0 \leq \bar{v_1} \leq 1, 0 \leq \bar{v_2} \leq 1, 0 \leq \bar{v_3} \leq 1$
- Agregamos las restricciones $1 \leq v_1 + \bar{v_1} \leq 1, 1 \leq v_2 + \bar{v_2} \leq 1, 1 \leq v_3 + \bar{v_3} \leq 1$
- Creamos las restricciones asociadas con las cláusulas $v_1 + \bar{v_2} + \bar{v_3} \geq 1$ y $\bar{v_1} + v_2 + v_3 \geq 1$
- Finalmente $f(v) = v_1$ y $B = 0$

Si comprobamos efectivamente es una instancia positiva de IP, con $v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 0, \bar{v_1} = 0, \bar{v_2} = 0, \bar{v_3} = 1$

Ejercicio: ¿Y si hubiéramos usado SAT y no 3-SAT?

Ejercicio 1

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$C = \{\{\neg v_1, \neg v_2, \neg v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{v_2, \neg v_3\}\}$$

Ejercicio 2

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$C = \{\{\neg v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{v_2, \neg v_3\}.\{v_4\}\}$$

En ambos casos piense siempre ¿Esta instancia de SAT se puede satisfacer?

Fin de la Presentación

¿Preguntas?