ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

Universidad del Valle

Ingeniería Económica

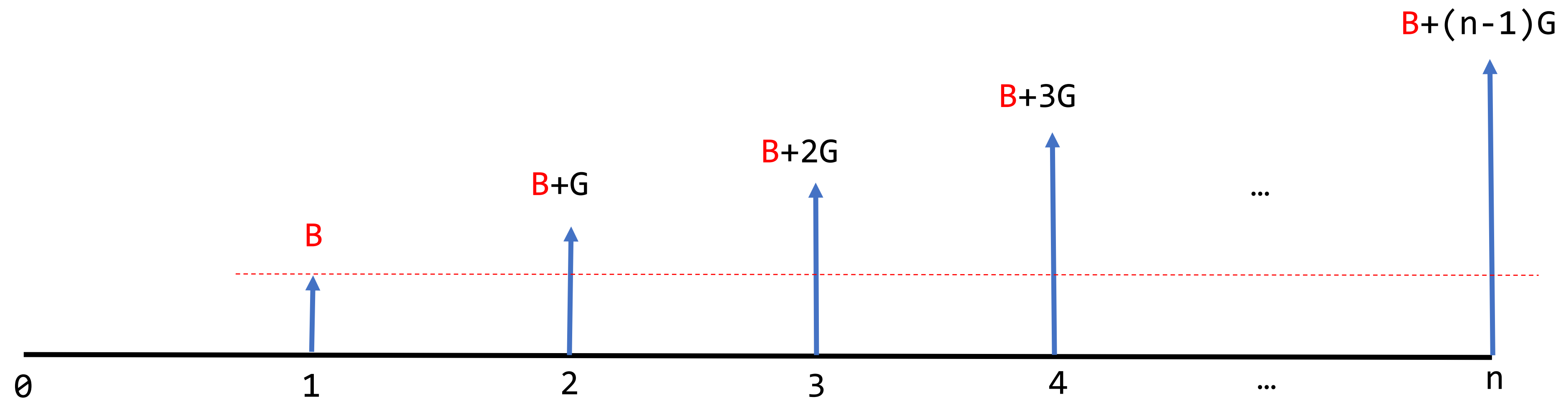
Yovany Arley Erazo Cifuentes
yovany.erazo@correounivalle.edu.co

Equivalencias

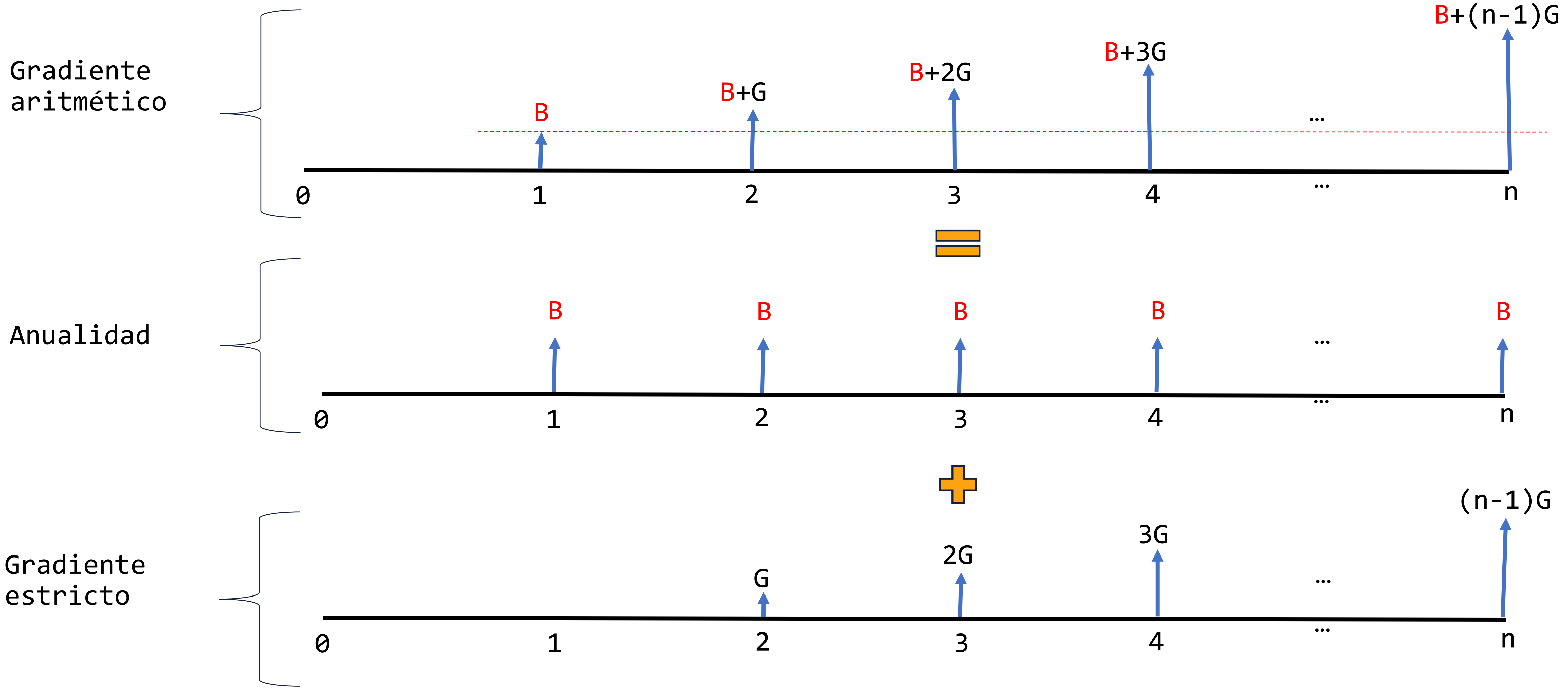
Entre un gradiente aritmético (B,G) y un valor presente (P)

Objetivo:

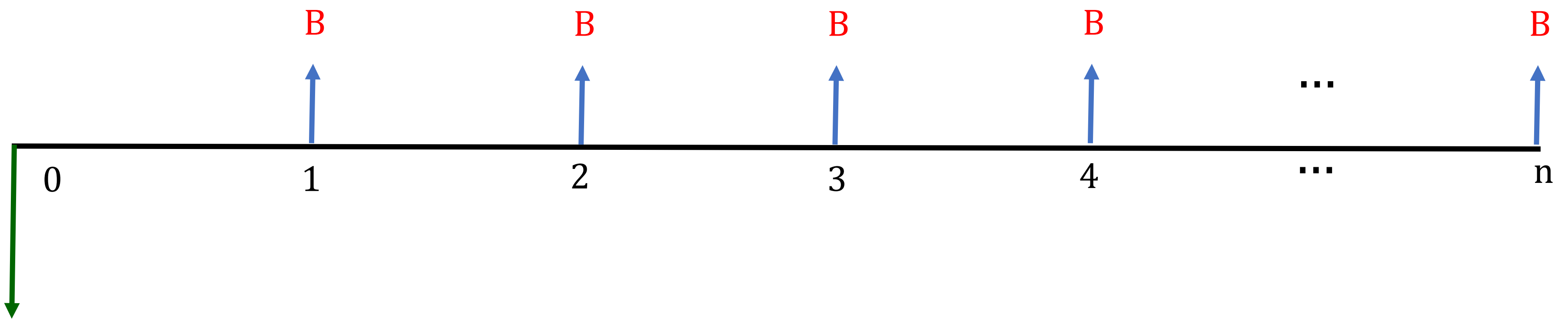
Determinar el valor presente equivalente a flujos que **varían** en una cantidad **uniforme**, dada una tasa de interés (i) y un horizonte de tiempo (n).



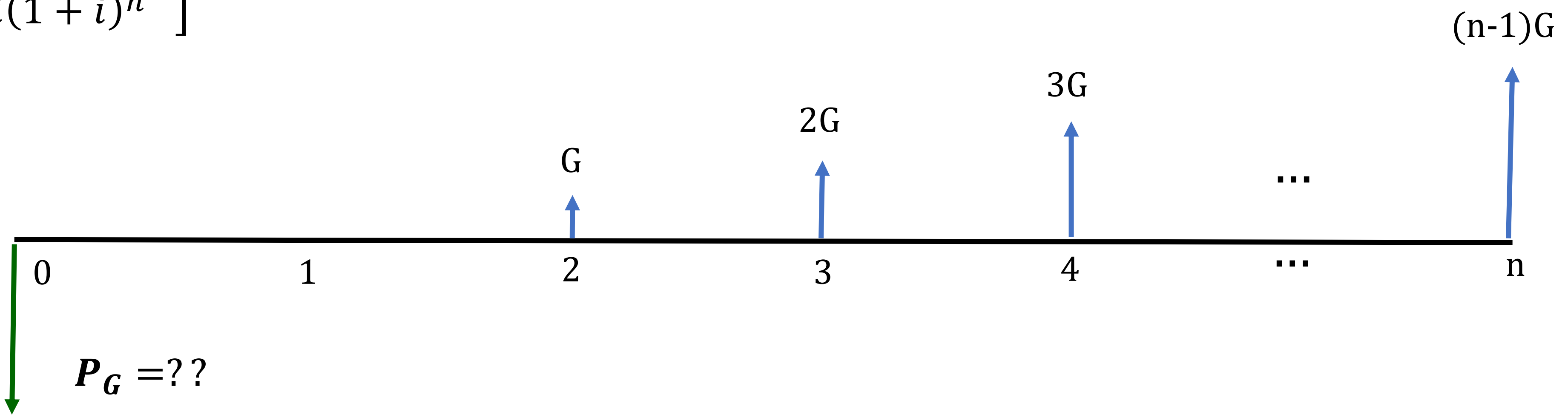
Valor presente de un gradiente aritmético



Valor presente de un gradiente aritmético

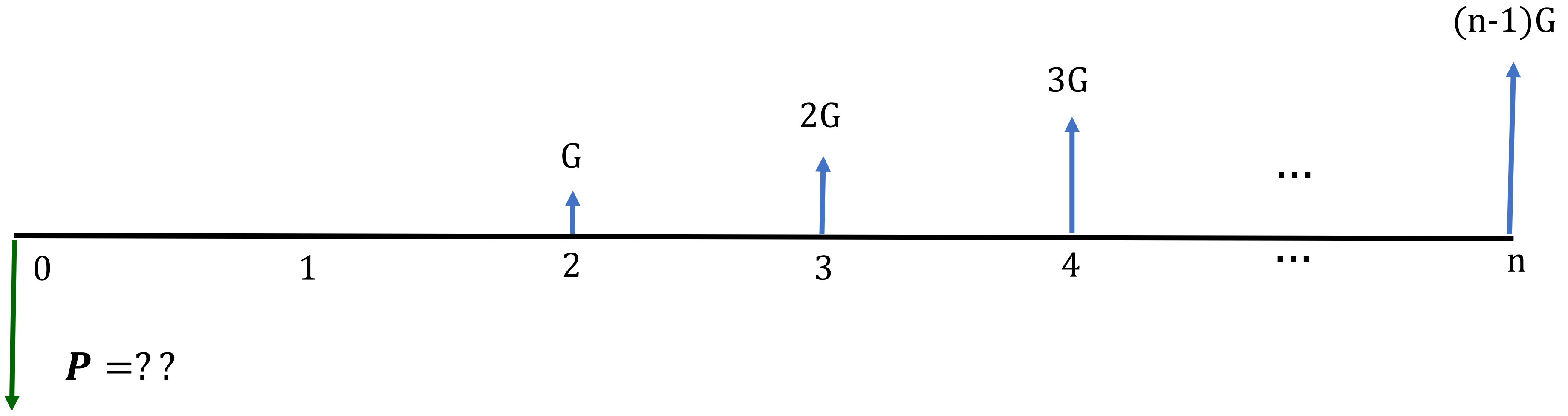


$$P_A = B\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$



$\boldsymbol{P_G} = ??$

Valor presente de un gradiente aritmético



$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

Si $P = \dfrac{F}{(1+i)^n}$ ➡ $P = \dfrac{F_1}{(1+i)^1} + \dfrac{F_2}{(1+i)^2} + \cdots + \dfrac{F_n}{(1+i)^n}$

➡ $$P = \frac{0}{(1+i)^1} + \frac{G}{(1+i)^2} + \frac{2G}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-1)G}{(1+i)^n}$$

Valor presente de un gradiente aritmético

$$P = \frac{0}{(1+i)^1} + \frac{G}{(1+i)^2} + \frac{2G}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-1)G}{(1+i)^n} \quad \ldots (1)$$

Multiplicando ambos lados por (1+i)

$$\Rightarrow \quad P(1+i) = \frac{0(1+i)}{(1+i)^1} + \frac{G(1+i)}{(1+i)^2} + \frac{2G(1+i)}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-1)G(1+i)}{(1+i)^n}$$

$$\Rightarrow \quad P(1+i) = 0 + \frac{G}{(1+i)^1} + \frac{2G}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{(n-1)G}{(1+i)^{n-1}} \quad \ldots (2)$$

Valor presente de un gradiente aritmético

Haciendo (2) - (1)

$$P + Pi = 0 + \frac{G}{(1+i)^1} + \frac{2G}{(1+i)^2} + \quad \dots \quad + \frac{(n-1)G}{(1+i)^{n-1}} \quad \dots (2)$$

$$P \quad = 0 + \quad \frac{G}{(1+i)^2} + \frac{2G}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(n-2)G}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(n-1)G}{(1+i)^n} \quad \dots (1)$$

$$Pi = \frac{G}{(1+i)^1} + \frac{G}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{G}{(1+i)^{n-1}} - \frac{(n-1)G}{(1+i)^n}$$

$$\Rightarrow \quad Pi = \frac{G}{(1+i)^1} + \frac{G}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{G}{(1+i)^{n-1}} - \left[\frac{Gn}{(1+i)^n} - \frac{G}{(1+i)^n}\right]$$

$$\Rightarrow \quad Pi = \left[\frac{G}{(1+i)^1} + \frac{G}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{G}{(1+i)^{n-1}} + \frac{G}{(1+i)^n}\right] - \left[\frac{Gn}{(1+i)^n}\right]$$

Valor presente de un gradiente aritmético

$$Pi = \left[\frac{G}{(1+i)^1} + \frac{G}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{G}{(1+i)^{n-1}} + \frac{G}{(1+i)^n}\right] - \left[\frac{Gn}{(1+i)^n}\right] \quad \ldots(3)$$

$$Sea\ \boldsymbol{x} = G\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \quad \ldots(4)$$

Multiplicando por $\frac{1}{(1+i)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{1+i} = G\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \quad \ldots(5)$$

Haciendo (5) - (4)

$$\frac{x}{1+i} = G\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \quad \ldots(5)$$

$$x = G\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right] \quad \ldots(4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-ix}{1+i} = G\left[\frac{-1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right]$$

Valor presente de un gradiente aritmético

$$\frac{-ix}{1+i} = G\left[\frac{-1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right] \Rightarrow -ix = G\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right] \Rightarrow x = \frac{G}{-i}\left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{G}{-i}\left[\frac{1}{(1+i)^n} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right] \Rightarrow x = \frac{G}{-i}\left[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right] \Rightarrow x = G\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Reemplazando x en (3)

$$\boldsymbol{Pi} = \left[\frac{G}{(1+i)^1} + \frac{G}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{G}{(1+i)^{n-1}} + \frac{G}{(1+i)^n}\right] - \left[\frac{Gn}{(1+i)^n}\right] = G\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] - \left[\frac{Gn}{(1+i)^n}\right] \ldots (3)$$

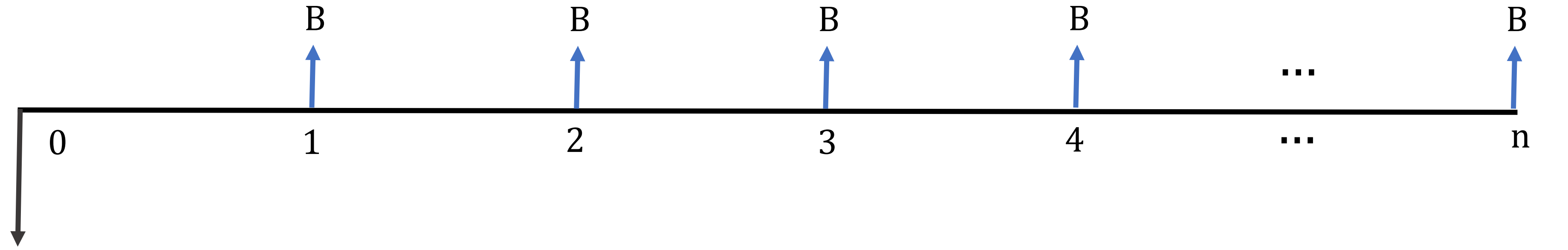
Valor presente de un gradiente aritmético

$$Pi = G\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \Rightarrow Pi = G\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} * \frac{i}{i}\right]$$

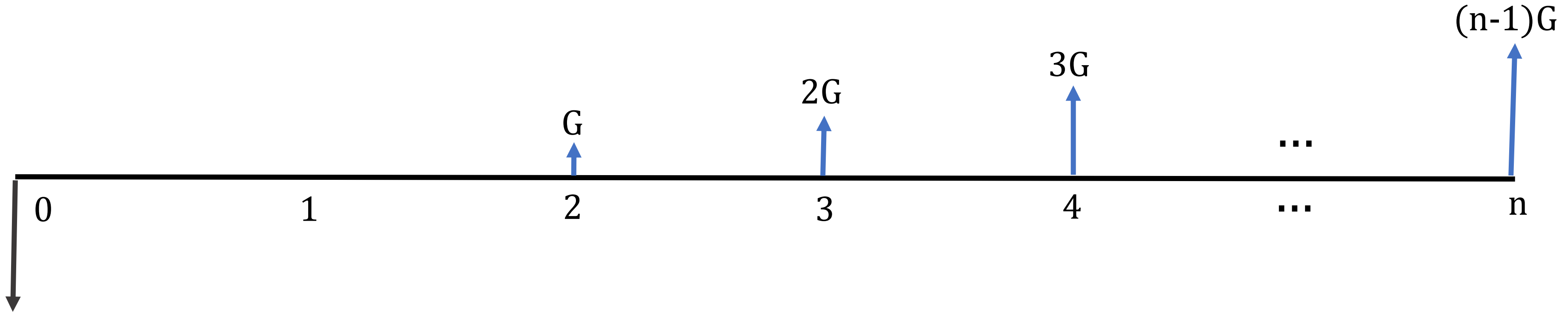
$$\Rightarrow \quad Pi = G\left[\frac{(1+i)^n - 1 - in}{i(1+i)^n}\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{P_G = G\left[\frac{(1+i)^n - in - 1}{i^2(1+i)^n}\right]}$$

Valor presente de un gradiente aritmético



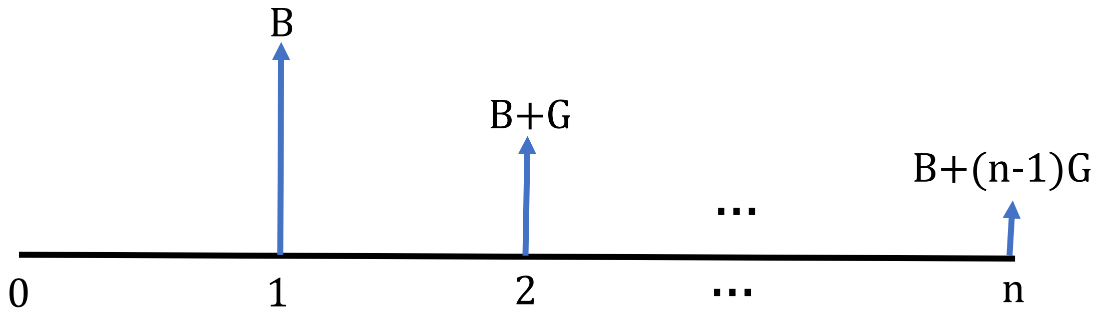
$$P_A = B\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

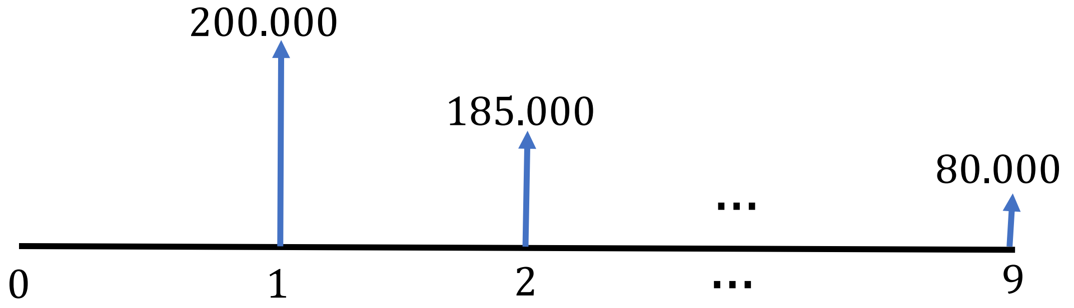


$$P_G = G\left[\frac{(1+i)^n - in - 1}{i^2(1+i)^n}\right]$$

Valor presente de un gradiente aritmético

Ejemplo: una serie de flujos de anuales consecutivos **inicia al final del año 1** con US$200.000 y **al final del año 9** el flujo corresponde a US$80.000. Determine el valor de G y el valor presente de los flujos considerando una tasa del 6% anual





$$B = 200.000; \quad n = 9; \quad B + (n-1)G = 80.000$$

$$200.000 + (9-1)G = 80.000$$

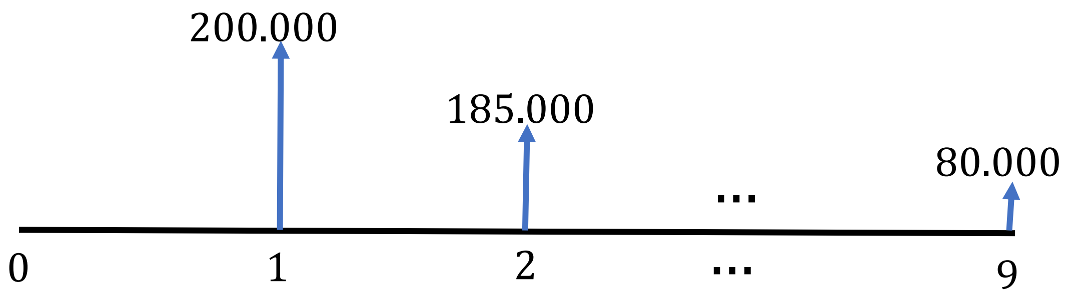
$$200.000 + 8G = 80.000$$

$$8G = 80.000 - 200.000$$

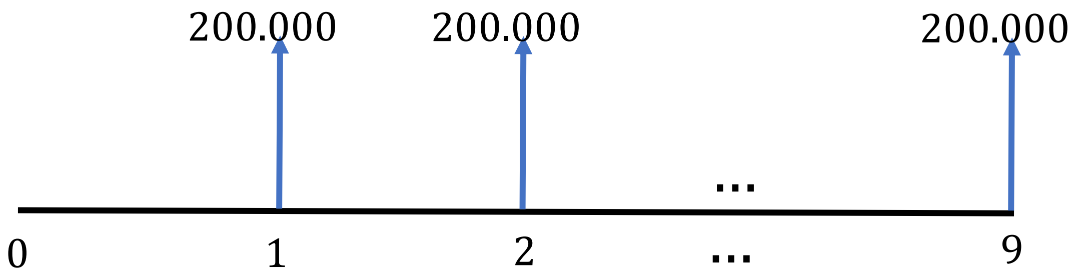
$$8G = -120.000$$

$$\boxed{\boldsymbol{G} = \frac{-120.000}{8} = -15.000}$$

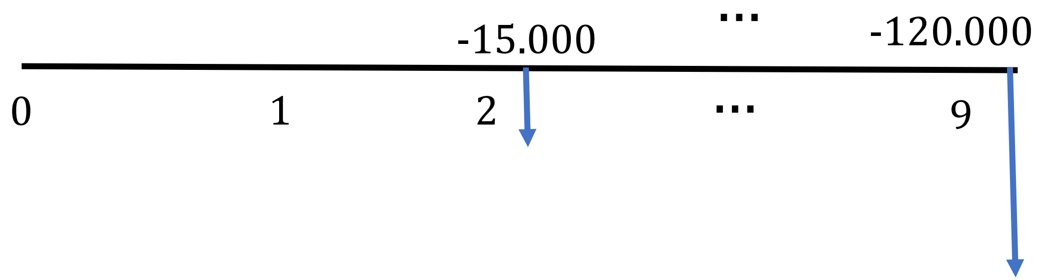
Valor presente de un gradiente aritmético



=



+



$$\boldsymbol{P_A} = B\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = 200.000\left[\frac{(1+0{,}06)^9 - 1}{0{,}06(1+0{,}06)^9}\right]$$

$$\boldsymbol{P_A} = 1.360.338{,}45$$

$$\boldsymbol{P_G} = G\left[\frac{(1+i)^n - in - 1}{i^2(1+i)^n}\right] = -15.000\left[\frac{(1+0{,}06)^9 - 0{,}06 * 9 - 1}{0{,}06^2(1+0{,}06)^9}\right]$$

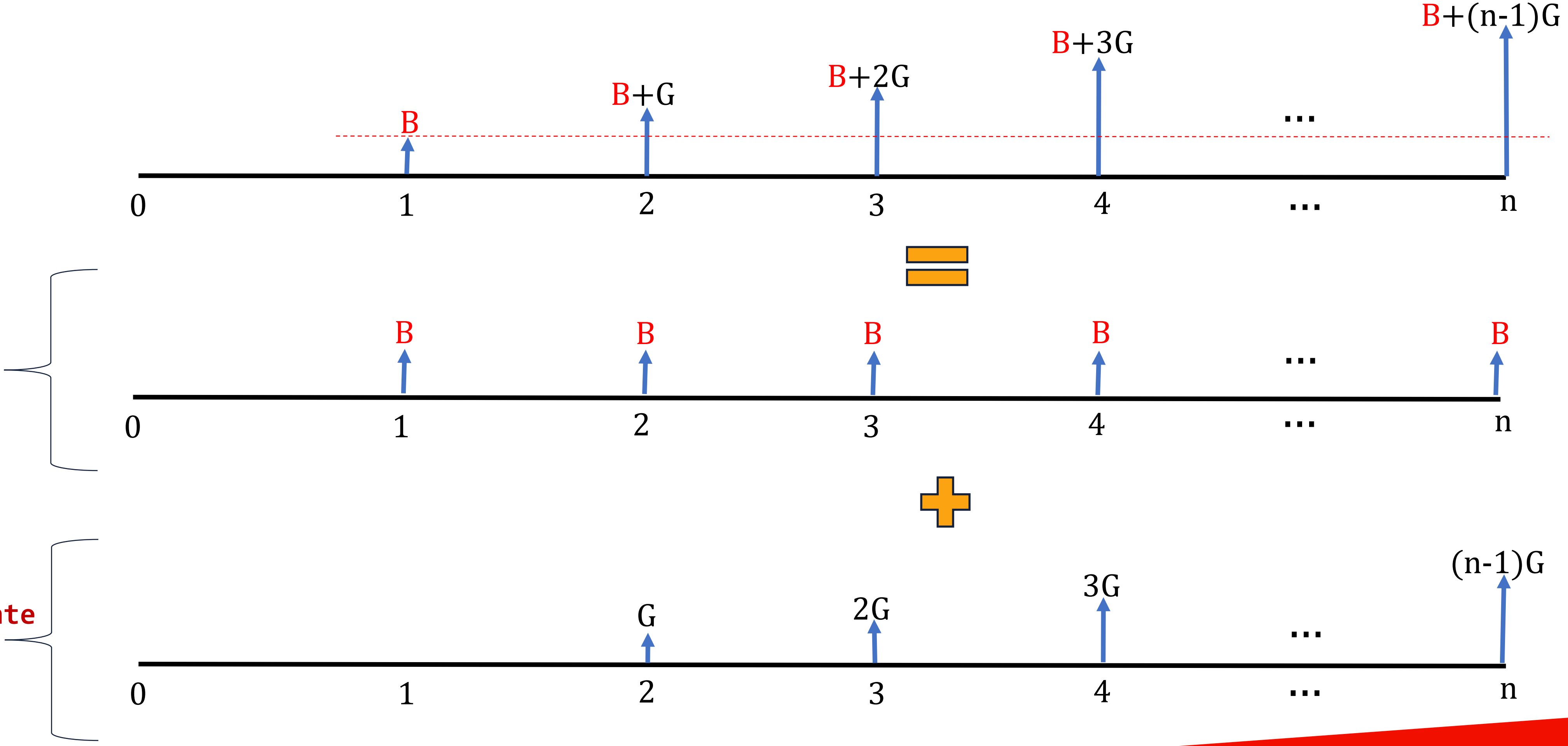
$$\boldsymbol{P_G} = -368.651{,}53$$

$$\boxed{\boldsymbol{P} = P_A + P_G = 991.686{,}93}$$

Equivalencias

Entre un gradiente aritmético (B,G) y una anualidad (A)

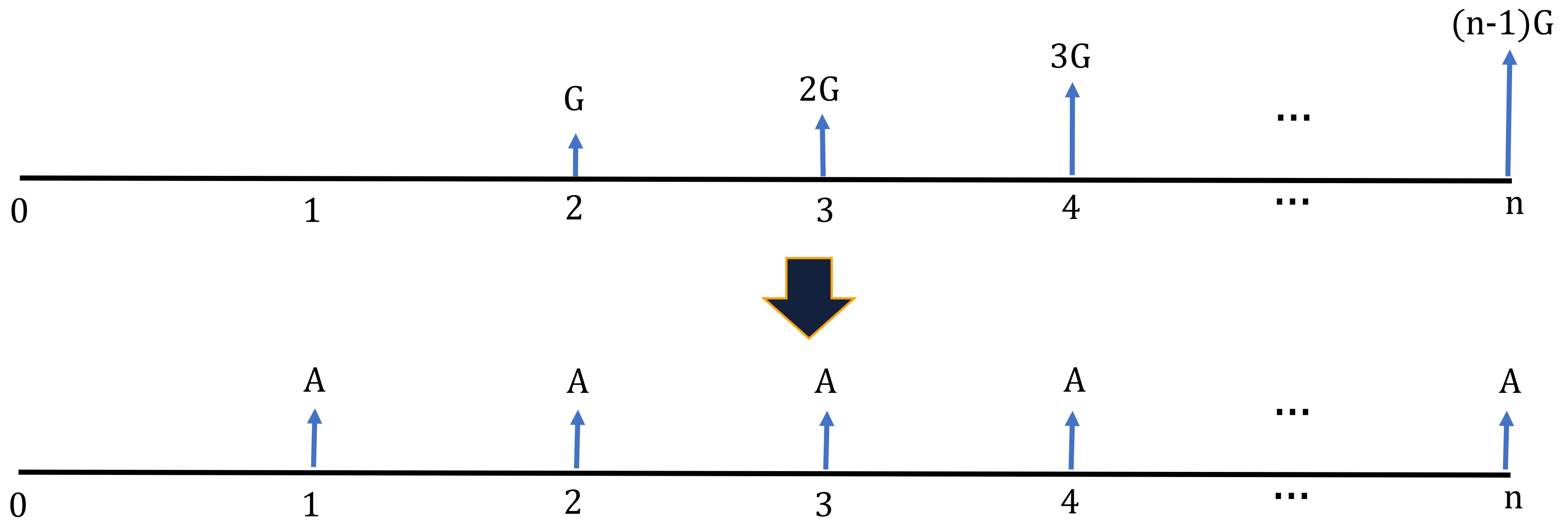
Objetivo: determinar la anualidad equivalente (A) de un gradiente aritmético, dada una tasa de interés (i) y un horizonte de tiempo (n).



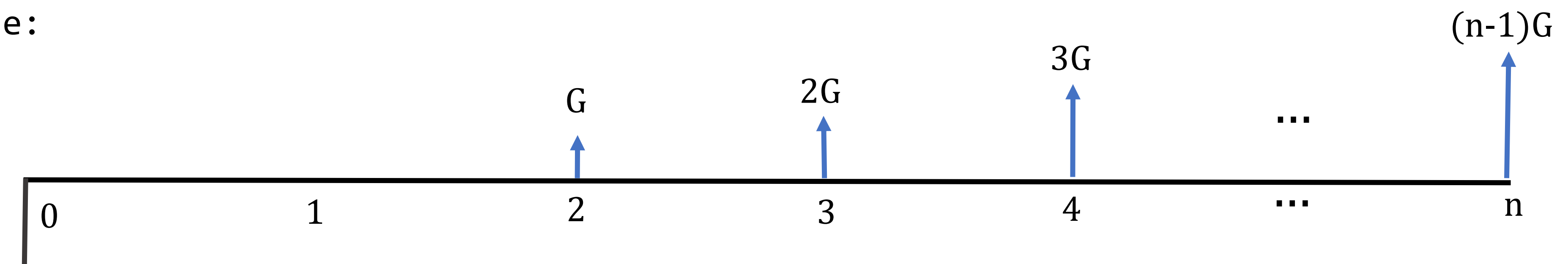
¡Ya es una anualidad!

¿Cuál es la anualidad equivalente al gradiente estricto?

Anualidad equivalente a un gradiente aritmético



Sabemos que:

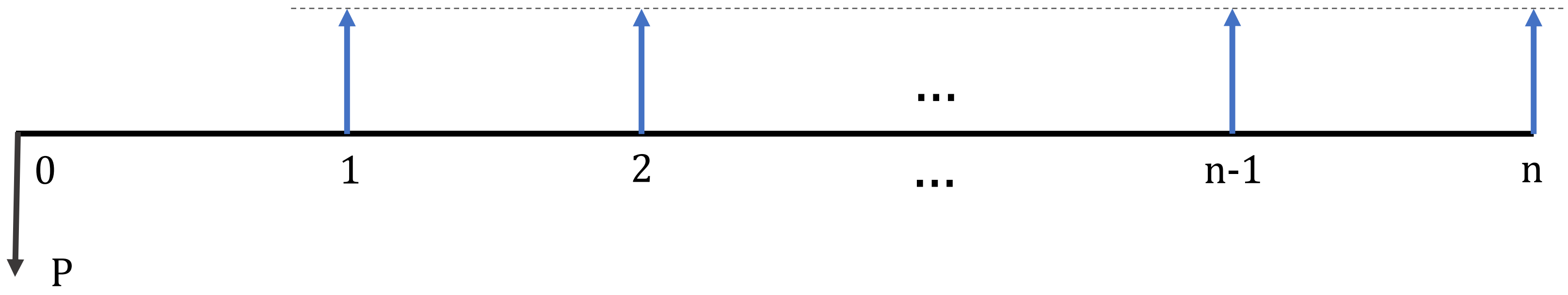


$$P_G = G\left[\frac{(1+i)^n - in - 1}{i^2(1+i)^n}\right]$$

Anualidad equivalente a un gradiente aritmético

Y también sabemos que:

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$



Entonces

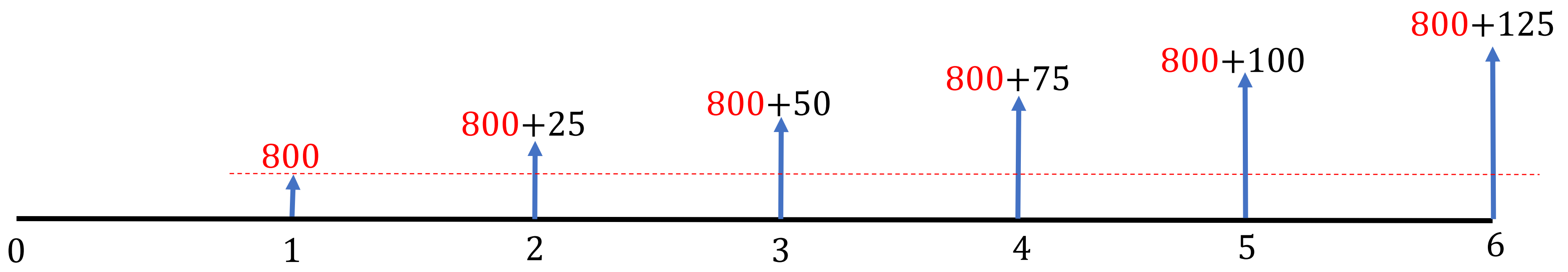
$$A_G = G\left[\frac{(1+i)^n - in - 1}{i^2(1+i)^n}\right]\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \Rightarrow A_G = G\left[\frac{(1+i)^n - in - 1}{i\big((1+i)^n - 1\big)}\right] = G\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\big((1+i)^n - 1\big)} + \frac{-in}{i\big((1+i)^n - 1\big)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{A_G = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right]} \qquad \Rightarrow \boxed{A = B + G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

Anualidad equivalente a un gradiente aritmético

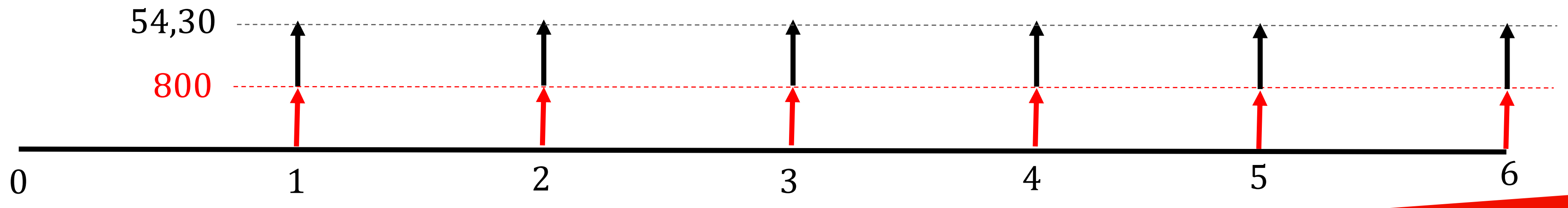
Ejemplo: Power Electric es una empresa que manufactura motores eléctricos. Las utilidades estimadas de la empresa para el **próximo año** son de **$800 millones**. El gerente financiero de la empresa estima un **crecimiento anual** de **$25 millones** en utilidades. Si se considera una tasa del **12% anual** y un horizonte de análisis de **6 años**, determinar los flujos anuales uniformes equivalentes.

$i = 12\%\ anual$



$$A_G = 25\left[\frac{1}{0{,}12} - \frac{6}{(1+0{,}12)^6 - 1}\right] = 54{,}30$$

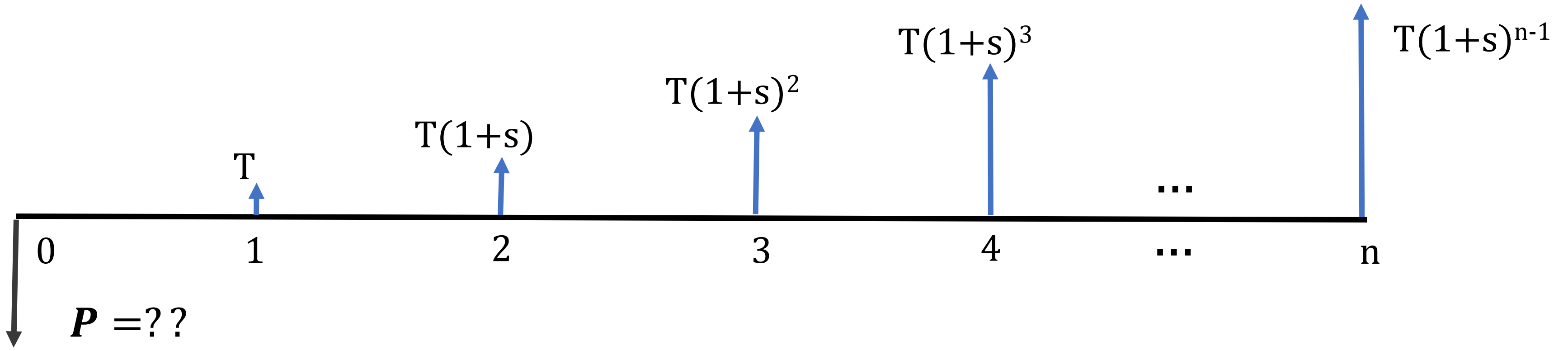
$$\boxed{A = B + A_G = 800 + 54{,}30 = 854{,}30}$$



Equivalencias

Entre un gradiente geométrico (T,s) y un valor presente (P)

Objetivo: determinar el valor presente equivalente (P) de un gradiente geométrico, dada una tasa de interés (i) y un horizonte de tiempo (n).



si $P = P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_n$ y $P = \frac{F}{(1+i)^n}$

$$P = \frac{F_1}{(1+i)^1} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} \ldots + \frac{F_n}{(1+i)^n} = \frac{\boldsymbol{T}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\mathbf{1}}} + \frac{\boldsymbol{T}(\mathbf{1}+\boldsymbol{s})^{\mathbf{1}}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\mathbf{2}}} + \frac{\boldsymbol{T}(\mathbf{1}+\boldsymbol{s})^{\mathbf{2}}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\mathbf{3}}} \ldots + \frac{\boldsymbol{T}(\mathbf{1}+\boldsymbol{s})^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}$$

Valor presente de un gradiente geométrico

$$P = \frac{T}{(1+i)^1} + \frac{T(1+s)^1}{(1+i)^2} + \frac{T(1+s)^2}{(1+i)^3} \ldots + \frac{T(1+s)^{n-1}}{(1+i)^n} \qquad \ldots (6)$$

Multiplicando ambos lados de (6) por: $\frac{1+s}{1+i}$

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{1+s}{1+i}\right) = \frac{T\,(1+s)}{(1+i)^2} + \frac{T(1+s)^2}{(1+i)^3} + \frac{T(1+s)^3}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{T(1+s)^n}{(1+i)^{n+1}} \quad \ldots (7)$$

Valor presente de un gradiente geométrico

Haciendo (7) - (6):

$$P\left(\frac{1+s}{1+i}\right) = \frac{T\,(1+s)}{(1+i)^2} + \frac{T(1+s)^2}{(1+i)^3} + \frac{T(1+s)^3}{(1+i)^4} + \quad \dots \quad + \frac{T(1+s)^n}{(1+i)^{n+1}} \quad \dots (7)$$

$$P = \frac{T}{(1+i)^1} + \frac{T(1+s)^1}{(1+i)^2} + \frac{T(1+s)^2}{(1+i)^3} + \quad \dots \quad + \frac{T(1+s)^{n-1}}{(1+i)^n} \quad \dots (6)$$

$$P\left(\frac{1+s}{1+i}\right) - P = -\frac{T}{(1+i)^1} + \frac{T(1+s)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

$$P\left(\frac{1+s}{1+i} - 1\right) = T\left[-\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(1+s)^n}{(1+i)^{n+1}}\right] \Rightarrow P\left(\frac{1+s}{1+i} - \frac{1+i}{1+i}\right) = T\left[-\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(1+s)^n}{(1+i)^{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1+s-1-i}{1+i}\right) = T\left[-\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(1+s)^n}{(1+i)^{n+1}}\right] \Rightarrow P\left(\frac{s-i}{1+i}\right) = T\left[-\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(1+s)^n}{(1+i)^{n+1}}\right]$$

Valor presente de un gradiente geométrico

$$P\left(\frac{s-i}{1+i}\right) = T\left[-\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(1+s)^n}{(1+i)^{n+1}}\right] \Rightarrow P(s-i) = T\left[-1 + \frac{(1+s)^n}{(1+i)^n}\right]$$

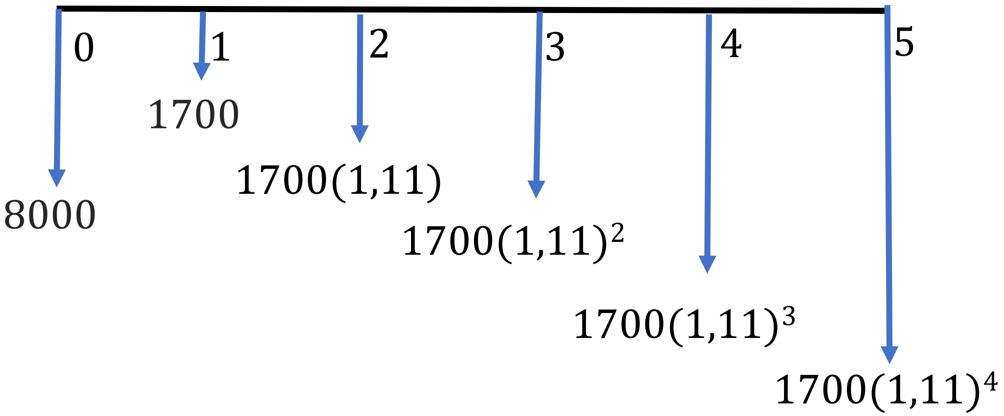
$$\Rightarrow P(s-i) = T\left[\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^n - 1\right] \Rightarrow P = T\left[\frac{\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^n - 1}{(s-i)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P = T\left[\frac{1-\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^n}{(i-s)}\right], s \neq i}$$

Si $s=i$ $\Rightarrow$ $\boxed{P = \frac{Tn}{1+i}}$

Valor presente de un gradiente geométrico

Ejemplo: El ingeniero de mantenimiento de una planta de generación eléctrica a base de carbón desea actualizar la válvula de control de emisiones. Dicha modificación requiere una inversión inicial de **US$8.000**. Se estima que la vida útil de la válvula es de **5 años**. Los costos de mantenimiento serán de **US$1.700** para el **primer año** los cuales **incrementarán** en un **11% cada año**. Determine el valor presente de todos los costos del proyecto, considerando una tasa de interés del **8% anual**.



$$P_G = T\left[\frac{1-\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^n}{(i-s)}\right], s \neq i$$

$$P_G = 1700\left[\frac{1-\left(\frac{1+0{,}11}{1+0{,}08}\right)^5}{(0{,}08-0{,}11)}\right] = 8.319{,}93$$

$$\boldsymbol{P} = 8000 + P_G = 8000 + 8.319{,}93 = 16.319{,}93$$

Evaluación 3