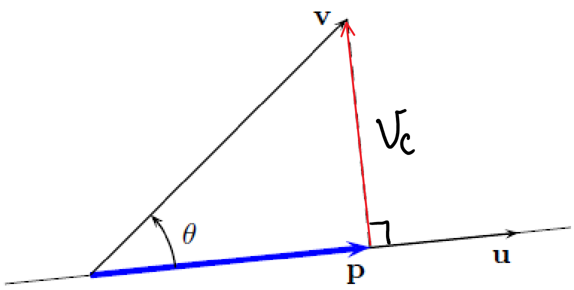
Componente vectorial de $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{u}$ ($\vec{v_c}$).



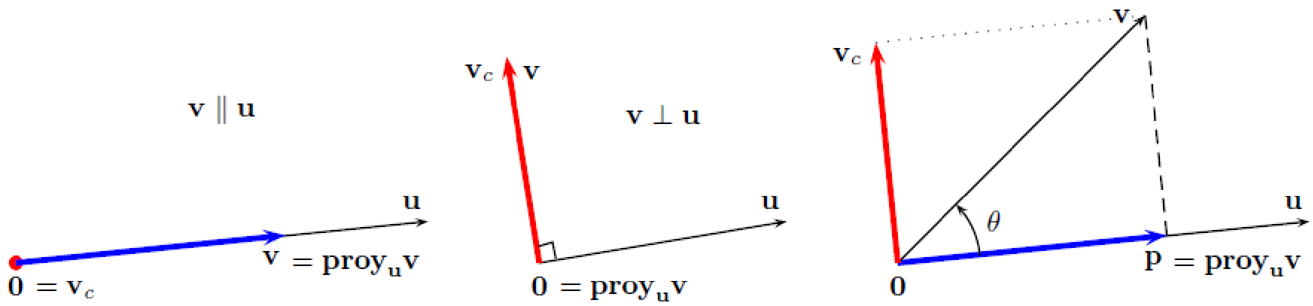
$$p + V_c = V$$

$$V_c = V - p.$$

$$= V - \text{proy}_u V.$$

observe que: · si $u \perp v \Rightarrow \text{proy}_u V = 0$ y $V_c = V$.

· si $u \parallel v \Rightarrow \text{proy}_u V = V$ y $V_c = 0$.



Ejms:

1. Sean $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determinar $\text{proy}_u v$ y V_c.

Solución:

· $\text{proy}_u v = \left(\dfrac{u \cdot v}{\|u\|^2} \right) u$ $\qquad u \cdot v = 1 + 1 - 1 = 1.$

$\|u\|^2 = u \cdot u = 1 + 1 + 1 = 3.$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

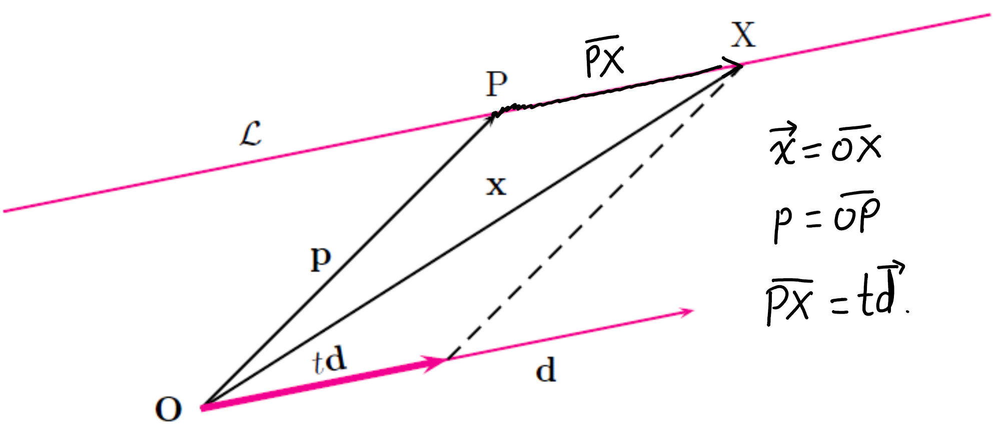
- $v_c = v - \text{proy}_u v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$

2. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$

$\text{proy}_u v = ?$ $\quad v_c = ?$ $\quad$ Ejercicio.

Rectas, planos e hiperplanos.

Definición [*Recta*]. Dado un punto $P \in R^n$ y un vector $\mathbf{d}$ no nulo de R^n, diremos que la recta $\mathcal{L}$ que contiene a P y tiene dirección $\mathbf{d}$ es el conjunto formado por P y todos los puntos X que determinan vectores $\overline{PX}$ paralelos a $\mathbf{d}$. Al vector $\mathbf{d}$ lo llamamos *vector dirección* o *vector director de la recta*.



$\vec{x} = \overline{OX}$

$p = \overline{OP}$

$\overline{PX} = t\vec{d}.$

$$\overline{OP} + \overline{PX} = \overline{OX}$$

$$\vec{p} + t\vec{d} = \vec{x}$$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + t\vec{d}}$$ Ecuación vectorial de la recta.

Si $p = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

De forma equivalente,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + td_1 \\ x_2 &= a_2 + td_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + td_n \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas de la recta.}$$

Despejando t en cada ecuación,

$$\frac{x_1 - a_1}{d_1} = t, \quad d_1 \neq 0.$$

$$\frac{x_2 - a_2}{d_2} = t, \quad d_2 \neq 0.$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_n - a_n}{d_n} = t, \quad d_n \neq 0.$$

De aquí que

$$\left.\frac{x_1 - a_1}{d_1} = \frac{x_2 - a_2}{d_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{d_n}\right\} \begin{array}{l}\text{Ecuaciones simétricas} \\ \text{de la recta.}\end{array}$$

Ejemplo 26. Dada la ecuación vectorial de la recta

$$\mathcal{L}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontremos dos puntos P y Q de la recta $\mathcal{L}$.

si $t=1$, $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}.$

si $t=-2$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$

(b) Determinemos si los puntos $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertenecen a la recta $\mathcal{L}$.

Veamos si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$3 = 2 - t \implies t = 2 - 3 = -1.$$

$$-1 = -1.$$

$$-2 = 3 + 5t$$

$$-2 \overset{?}{=} 3 + 5(-1) = 3 - 5 = -2$$

$$\cancel{2} = -2 \checkmark$$

Asi que $R \in \mathcal{L}$.

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 4 &= 2 - t \quad \Rightarrow \quad t = 2-4 = -2 \\ -1 &= -1 \checkmark \\ 0 &= 3 + 5t. \quad \Rightarrow \quad 0 \stackrel{?}{=} 3 + 5(-2) = -7. \\ & \qquad\qquad\qquad 0 = 7 \ \text{Falso.} \end{aligned}$$

Luego, $s \notin \mathcal{L}$.

(c) Encontremos un vector **d** que sea un vector director de la recta $\mathcal{L}$.

Note que $d_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$, $d_2 = -d_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}$ y $d_3 = 2d_1 = \begin{pmatrix}-2\\0\\10\end{pmatrix}$

son vectores directores de $\mathcal{L}$.

(d) Verifiquemos que el vector $\overline{PQ}$, donde P y Q son los puntos hallados en (a), es paralelo a **d**, el vector director de la recta $\mathcal{L}$ encontrado en **(c)**.

$$\overline{PQ} = Q - P = \ldots$$

Verificar que $\overline{PQ} \parallel d$.

Ejemplo. Encontrar una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos:

$$P = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \quad y \quad Q = \begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}.$$

Observe que un vector director es $\vec{d} = \overline{PQ} = Q - P$.

$$\vec{d} = Q - P = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-(-1) \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P + t\vec{d}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Definición.

Sean $\mathcal{L}_1 \in \mathbb{R}^n$ una recta con vector director $\vec{d_1}$

$\mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}^n$ " " " " " $\vec{d_2}$.

Decimos que $\mathcal{L}_1$ es paralela a $\mathcal{L}_2$ si $\vec{d_1}$ es paralelo a $\vec{d_2}$

y que $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a $\mathcal{L}_2$ si $\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 0$.

Ejemplos:

1. Sean $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por $P = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}. \qquad \mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \,?$$

Solución:

Un vector director de $\mathcal{L}_1$:

$$d_1 = Q - P = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Un vector director de $\mathcal{L}_2$:

$$d_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$d_2 \quad 2d_1 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$d_2 = 2d_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Como $d_1 \| d_2 \Rightarrow \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son rectas paralelas.

2. Consideremos las rectas.

- $\mathcal{L}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- La recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

¿ $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$?

Solución

- Un vector director de $\mathcal{L}_1$ es $d_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- " " " $\mathcal{L}_2$ " $d_2 = Q - P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$d_1 \cdot d_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0.$$

En consecuencia, $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$.

Ejemplo. Escribir un conjunto de ecuaciones simétricas de la recta

$$\mathcal{L} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x = 1 - t \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = 1 - x = t$$

$$y = 2 + 4t \Rightarrow \frac{y-2}{4} = t.$$

$$z = 3.$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{4}, \quad z = 3.$$

$$\left. 1 - x = \frac{y-2}{4}, \quad z = 3 \right\rangle \text{Ecuaciones simétricas.}$$