Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Vibraciones mecánicas

Podemos encontrar ejemplos de vibraciones mecánicas en los rebotes de un carro debido a los huecos, en las vibraciones de un puente debido al tráfico y al viento, o en un estadio cuando la personas de la tribuna están saltando.

Vibraciones mecánicas

Podemos encontrar ejemplos de vibraciones mecánicas en los rebotes de un carro debido a los huecos, en las vibraciones de un puente debido al tráfico y al viento, o en un estadio cuando la personas de la tribuna están saltando.

Como modelo para estudiar las vibraciones mecánicas vamos a considerar un sistema masa-resorte.

Vibraciones mecánicas

Podemos encontrar ejemplos de vibraciones mecánicas en los rebotes de un carro debido a los huecos, en las vibraciones de un puente debido al tráfico y al viento, o en un estadio cuando la personas de la tribuna están saltando.

Como modelo para estudiar las vibraciones mecánicas vamos a considerar un sistema masa-resorte.

Para analizar este sistema aplicamos la ley de Hooke y la segunda ley de Newton.

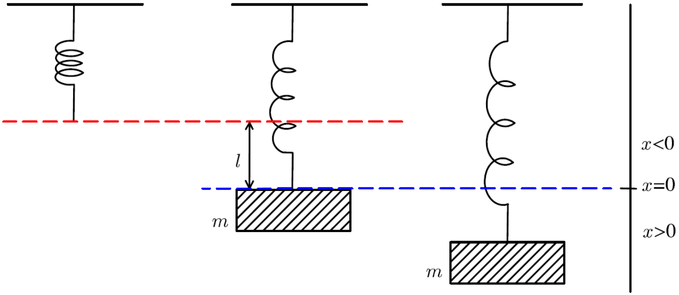
Vibraciones mecánicas

Podemos encontrar ejemplos de vibraciones mecánicas en los rebotes de un carro debido a los huecos, en las vibraciones de un puente debido al tráfico y al viento, o en un estadio cuando la personas de la tribuna están saltando.

Como modelo para estudiar las vibraciones mecánicas vamos a considerar un sistema masa-resorte.

Para analizar este sistema aplicamos la ley de Hooke y la segunda ley de Newton.

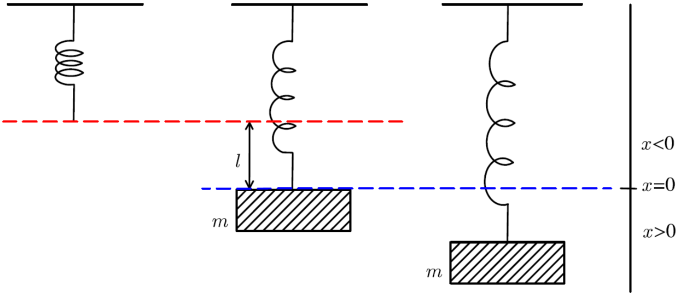
La ley de Hooke establece que el resorte ejerce una fuerza de restitución opuesta a la dirección del alargamiento del resorte con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento. Es decir, $F = ks$, donde s es el alargamiento y k es una constante propia del resorte.



(a) Resorte

(b) Masa-resorte en reposo

(c) Masa-resorte en movimiento



(a) Resorte

(b) Masa-resorte en reposo

(c) Masa-resorte en movimiento

Tenemos en la segunda figura aplicando la ley de Hooke y segunda ley de Newton que $mg = kl$.

Veamos ahora las diversas fuerzas que actúan sobre la masa m

Veamos ahora las diversas fuerzas que actúan sobre la masa m

Veamos ahora las diversas fuerzas que actúan sobre la masa m

a) Gravedad $F_1 = mg$.

Veamos ahora las diversas fuerzas que actúan sobre la masa m

a) Gravedad $F_1 = mg$.

b) Fuerza de restitución: $F_2 = -k(x + l)$. Luego tenemos que $F_2 = -kx - mg$.

Veamos ahora las diversas fuerzas que actúan sobre la masa m

a) Gravedad $F_1 = mg$.

b) Fuerza de restitución: $F_2 = -k(x + l)$. Luego tenemos que $F_2 = -kx - mg$.

c) Fuerza de amortiguación: $F_3 = -b\frac{dx}{dt}$ donde $b > 0$.

Veamos ahora las diversas fuerzas que actúan sobre la masa m

a) Gravedad $F_1 = mg$.

b) Fuerza de restitución: $F_2 = -k(x + l)$. Luego tenemos que $F_2 = -kx - mg$.

c) Fuerza de amortiguación: $F_3 = -b\frac{dx}{dt}$ donde $b > 0$.

d) Fuerzas externas: $F_4 = f(t)$.

Aplicando ahora la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - mg - b\frac{dx}{dt} + f(t)$$

Aplicando ahora la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - mg - b\frac{dx}{dt} + f(t)$$

obtenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t).$$

Aplicando ahora la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - mg - b\frac{dx}{dt} + f(t)$$

obtenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t).$$

Cuando $b = 0$, se dice que el sistema es **no amortiguado**; en caso contrario, se dice que el sistema es **amortiguado**.

Aplicando ahora la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - mg - b\frac{dx}{dt} + f(t)$$

obtenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t).$$

Cuando $b = 0$, se dice que el sistema es **no amortiguado**; en caso contrario, se dice que el sistema es **amortiguado**. Cuando $f(t) \equiv 0$, se dice que el movimiento es **libre**; en caso contrario, se dice que el movimiento es **forzado**.

Movimiento libre no amortiguado

En este caso el movimiento satisface la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Movimiento libre no amortiguado

En este caso el movimiento satisface la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Si $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ entonces

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0.$$

Movimiento libre no amortiguado

En este caso el movimiento satisface la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Si $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ entonces

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0.$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + w^2 = 0$. Luego las raíces son $r = wi$ y $r = -wi$.

Movimiento libre no amortiguado

En este caso el movimiento satisface la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Si $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ entonces

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0.$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + w^2 = 0$. Luego las raíces son $r = wi$ y $r = -wi$.

La solución general es

$$x(t) = C_1cos(wt) + C_2sin(wt).$$

Si escribimos $C_1 = Asen\phi$ y $C_2 = Acos\phi$ o

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = arctan(\frac{C_1}{C_2})$$

tenemos

$$x(t) \quad = C_1 cos(wt) + C_2 sen(wt)$$

Si escribimos $C_1 = Asen\phi$ y $C_2 = Acos\phi$ o

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = arctan(\frac{C_1}{C_2})$$

tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 cos(wt) + C_2 sen(wt) \\ &= Asen\phi\, cos(wt) + Acos\phi\, sen(wt) \end{aligned}$$

Si escribimos $C_1 = Asen\phi$ y $C_2 = Acos\phi$ o

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = arctan(\frac{C_1}{C_2})$$

tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 cos(wt) + C_2 sen(wt) \\ &= Asen\phi\, cos(wt) + Acos\phi\, sen(wt) \\ &= Asen(wt + \phi). \end{aligned}$$

Si escribimos $C_1 = Asen\phi$ y $C_2 = Acos\phi$ o

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = arctan(\frac{C_1}{C_2})$$

tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 cos(wt) + C_2 sen(wt) \\ &= Asen\phi\, cos(wt) + Acos\phi\, sen(wt) \\ &= Asen(wt + \phi). \end{aligned}$$

De esta solución se deduce que el movimiento es una onda senoidal o lo que se llama un movimiento armónico simple.

Si escribimos $C_1 = Asen\phi$ y $C_2 = Acos\phi$ o

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = arctan(\frac{C_1}{C_2})$$

tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 cos(wt) + C_2 sen(wt) \\ &= Asen\phi\, cos(wt) + Acos\phi\, sen(wt) \\ &= Asen(wt + \phi). \end{aligned}$$

De esta solución se deduce que el movimiento es una onda senoidal o lo que se llama un movimiento armónico simple.

La constante A representa la amplitud del movimiento y ϕ es el ángulo de fase. El movimiento es periódico con periodo $P = \frac{2\pi}{w}$ y frecuencia natural $\frac{w}{2\pi}$.

Movimiento libre amortiguado

En la mayoría de las aplicaciones existe algún tipo de fuerza de fricción o amortiguación que desempeña un papel importante. En este caso la ecuación toma la forma:

Movimiento libre amortiguado

En la mayoría de las aplicaciones existe algún tipo de fuerza de fricción o amortiguación que desempeña un papel importante. En este caso la ecuación toma la forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Movimiento libre amortiguado

En la mayoría de las aplicaciones existe algún tipo de fuerza de fricción o amortiguación que desempeña un papel importante. En este caso la ecuación toma la forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

La ecuación auxiliar es

$$mr^2 + br + k = 0.$$

Movimiento libre amortiguado

En la mayoría de las aplicaciones existe algún tipo de fuerza de fricción o amortiguación que desempeña un papel importante. En este caso la ecuación toma la forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

La ecuación auxiliar es

$$mr^2 + br + k = 0.$$

Recordemos la expresión para encontrar las raices

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

Notemos que el discriminante es $b^2 - 4mk$. Así la soluciones dependen del signo de este término.

Notemos que el discriminante es $b^2 - 4mk$. Así la soluciones dependen del signo de este término.

Así que tenemos distintas soluciones deacuerdo al signo del discriminante

Notemos que el discriminante es $b^2 - 4mk$. Así la soluciones dependen del signo de este término.

Así que tenemos distintas soluciones deacuerdo al signo del discriminante

Si $b^2 - 4mk < 0$. Movimiento oscilatorio o subamortiguado.

Si $b^2 - 4mk = 0$. Movimiento críticamente amortiguado.

Si $b^2 - 4mk > 0$. Movimiento sobremortiguado.

Movimiento oscilatorio subamortiguado

En este caso $b^2 < 4mk$ y las raices complejas de la ecuación auxiliar son $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

Movimiento oscilatorio subamortiguado

En este caso $b^2 < 4mk$ y las raices complejas de la ecuación auxiliar son $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 cos(\beta t) + C_2 sin(\beta t)).$$

Movimiento oscilatorio subamortiguado

En este caso $b^2 < 4mk$ y las raices complejas de la ecuación auxiliar son $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 cos(\beta t) + C_2 sin(\beta t)).$$

Similarmente, al movimiento libre no amortiguado podemos escribir

$$x(t) = e^{\alpha t} A(sin(\beta t + \phi))$$

donde

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = arctan(\frac{C_1}{C_2}).$$

En la solución aparece un factor senoidal que explica el movimiento oscilatorio. Llamaremos a $\beta = \dfrac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$ frecuencia auxiliar y a $P = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{4m\pi}{\sqrt{4mk-b^2}}$ el cuasiperiodo.

En la solución aparece un factor senoidal que explica el movimiento oscilatorio. Llamaremos a $\beta = \dfrac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$ frecuencia auxiliar y a $P = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{4m\pi}{\sqrt{4mk-b^2}}$ el cuasiperiodo.

Dado que $\alpha < 0$ se tiene que la solución es acotada y toma valores entre $-Ae^{\alpha t}$ y $Ae^{\alpha t}$, adicionalmente $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

En la solución aparece un factor senoidal que explica el movimiento oscilatorio. Llamaremos a $\beta = \dfrac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$ frecuencia auxiliar y a $P = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{4m\pi}{\sqrt{4mk-b^2}}$ el cuasiperiodo.

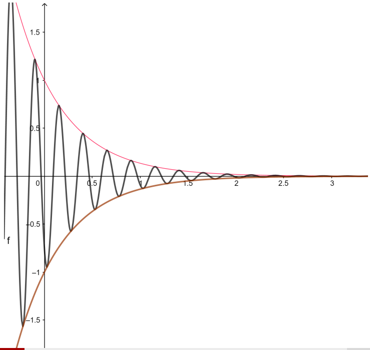
Dado que $\alpha < 0$ se tiene que la solución es acotada y toma valores entre $-Ae^{\alpha t}$ y $Ae^{\alpha t}$, adicionalmente $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

El sistema se llama subamortiguado porque no hay suficiente amortiguación para prevenir que el sistema oscile.

En la solución aparece un factor senoidal que explica el movimiento oscilatorio. Llamaremos a $\beta = \dfrac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$ frecuencia auxiliar y a $P = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{4m\pi}{\sqrt{4mk-b^2}}$ el cuasiperiodo.

Dado que $\alpha < 0$ se tiene que la solución es acotada y toma valores entre $-Ae^{\alpha t}$ y $Ae^{\alpha t}$, adicionalmente $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

El sistema se llama subamortiguado porque no hay suficiente amortiguación para prevenir que el sistema oscile.



Movimiento crítico subamortiguado

En este caso $b^2 = 4mk$ y la raiz es

$$\alpha = -\frac{b}{2m}.$$

Movimiento crítico subamortiguado

En este caso $b^2 = 4mk$ y la raiz es

$$\alpha = -\frac{b}{2m}.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t} \\ &= e^{\alpha t}(C_1 + C_2 t). \end{aligned}$$

Movimiento crítico subamortiguado

En este caso $b^2 = 4mk$ y la raiz es

$$\alpha = -\frac{b}{2m}.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t} \\ &= e^{\alpha t}(C_1 + C_2 t). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \quad = \lim_{t\to\infty} \frac{(C_1+C_2 t)}{e^{\frac{b}{2m}t}} = 0.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t} + C_2 \alpha t e^{\alpha t} \\ &= (\alpha C_1 + C_2 + C_2 \alpha t) e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t} + C_2 \alpha t e^{\alpha t} \\ &= (\alpha C_1 + C_2 + C_2 \alpha t) e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Así $x' \equiv 0$ si y solo si $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t} + C_2 \alpha t e^{\alpha t} \\ &= (\alpha C_1 + C_2 + C_2 \alpha t) e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Así $x' \equiv 0$ si y solo si $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$.

Si $C_2 \neq 0$ la derivada tiene un cero.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t} + C_2 \alpha t e^{\alpha t} \\ &= (\alpha C_1 + C_2 + C_2 \alpha t) e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Así $x' \equiv 0$ si y solo si $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$.

Si $C_2 \neq 0$ la derivada tiene un cero.

Si $C_2 = 0$ y $C_1 \neq 0$ la derivada nunca es cero.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t} + C_2 \alpha t e^{\alpha t} \\ &= (\alpha C_1 + C_2 + C_2 \alpha t) e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Así $x' \equiv 0$ si y solo si $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$.

Si $C_2 \neq 0$ la derivada tiene un cero.

Si $C_2 = 0$ y $C_1 \neq 0$ la derivada nunca es cero.

Es decir, la función es nula o tiene a lo más un punto crítico. En el último caso tiene a lo más un máximo o mínimo relativo. En ambos casos concluimos que la función no oscila.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t} + C_2 \alpha t e^{\alpha t} \\ &= (\alpha C_1 + C_2 + C_2 \alpha t) e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

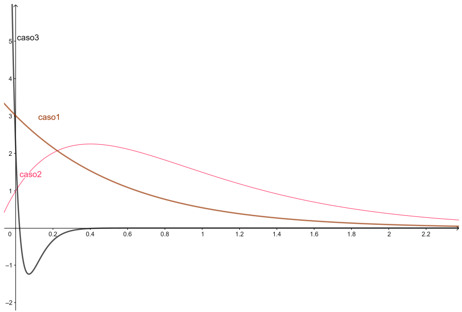
Así $x' \equiv 0$ si y solo si $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$.

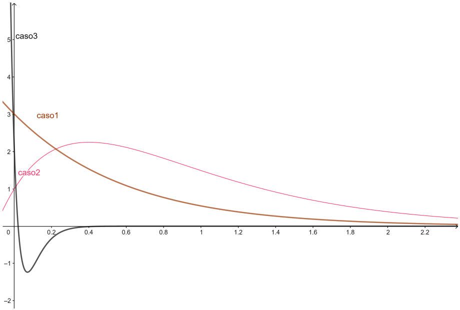
Si $C_2 \neq 0$ la derivada tiene un cero.

Si $C_2 = 0$ y $C_1 \neq 0$ la derivada nunca es cero.

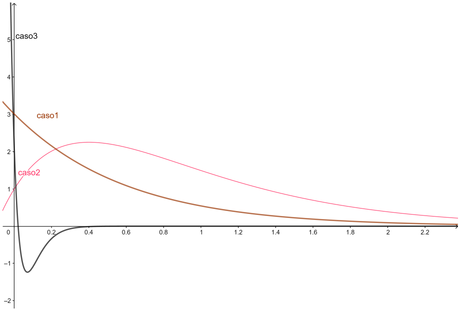
Es decir, la función es nula o tiene a lo más un punto crítico. En el último caso tiene a lo más un máximo o mínimo relativo. En ambos casos concluimos que la función no oscila.

En general tenemos tres posibilidades de movimiento dependiendo de las condiciones iniciales


caso3
caso1
caso2
5
4
3
2
1
−1
−2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2

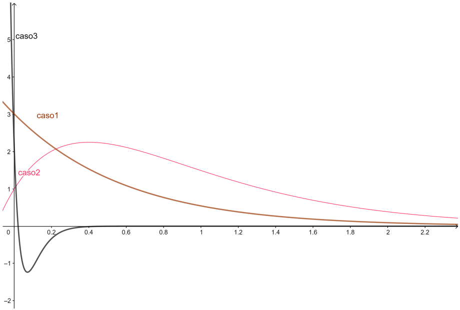


Caso 1: la masa m no pasa por la posición de equilibrio, ni alcanza un desplazamiento extremo relativo para $t > 0$.



Caso 1: la masa m no pasa por la posición de equilibrio, ni alcanza un desplazamiento extremo relativo para $t > 0$.

Caso 2: la masa no pasa por la posición de equilibrio para $t > 0$, pero su desplazamiento alcanza un extremo único.



Caso 1: la masa m no pasa por la posición de equilibrio, ni alcanza un desplazamiento extremo relativo para $t > 0$.

Caso 2: la masa no pasa por la posición de equilibrio para $t > 0$, pero su desplazamiento alcanza un extremo único.

Caso 3: la masa pasa por su posición de equilibrio una vez, luego alcanza su desplazamiento extremo.

Después, todas las soluciones convergen al equilibrio.

Después, todas las soluciones convergen al equilibro.

Por otro lado, si b disminuye aparecería la oscilación, por eso este movimiento se llama criticamente amortiguado.

Movimiento sobremortiguado

En este caso $b^2 > 4mk$ y la raices de la ecuación auxiliar son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

Movimiento sobremortiguado

En este caso $b^2 > 4mk$ y la raices de la ecuación auxiliar son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) \quad = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Movimiento sobremortiguado

En este caso $b^2 > 4mk$ y la raices de la ecuación auxiliar son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) \quad = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Dado que $b^2 > b^2 - 4mk$ tenemos que $b > \sqrt{b^2 - 4mk}$, por tanto $r_1 < 0$, también tenemos que $r_2 < 0$. Por tanto,

$$\lim_{t \to \infty} x(t) \quad = 0.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} \\ &= (C_1 r_1 + C_2 r_2 e^{(r_2 - r_1)t}) e^{r_1 t}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} x'(t) &= C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} \\ &= (C_1 r_1 + C_2 r_2 e^{(r_2 - r_1)t}) e^{r_1 t}. \end{aligned}$$

Tenemos un comportamiento similar al caso anterior del movimiento crítico amortiguado: La solución es nula o tiene a lo más un máximo o mínimo local y adicionalmente pasa máximo una vez por la solución de equilibrio.