Matrices elementales

Definición 8 [*Matriz elemental*]. Llamamos *matriz elemental* de tamaño $n \times n$ a una matriz que se obtiene de aplicar una operación elemental entre filas a la matriz identidad I, también de tamaño $n \times n$.

Ejemplos.

1. $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Escalamiento}]{\boxed{3F_2 \to F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 \leftarrow$$ matriz elemental (M.E.) de tipo escalamiento.

2. $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Eliminación}]{\boxed{F_2 + 2F_1 \to F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \leftarrow$$ M.E. de tipo eliminación

3. $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Permutación}]{\boxed{F_1 \longleftrightarrow F_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \leftarrow$$ M.E. de tipo permutación.

- Premultiplicar por una M.E. es equivalente a aplicar la operación elemental correspondiente.

Ejm. sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- $F_1 \leftrightarrow F_2$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A_1.$

- $EA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A_1$

Ejm. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

- $F_2 - 3F_1 \to F_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = B_1.$

- $EB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = B_1.$

Inversa de las matrices elementales.

Las matrices elementales son invertibles y la inversa de una matriz elemental es a su vez una matriz elemental del mismo tipo; más exactamente,

1. La inversa de la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $F_i + cF_j \longrightarrow F_i$ es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $F_i - cF_j \longrightarrow F_i$.

2. La inversa de la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $cF_i \longrightarrow F_i$, $c \neq 0$ es la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $\frac{1}{c}F_i \longrightarrow F_i$.

3. La inversa de la matriz elemental correspondiente a la operación elemental $F_i \longleftrightarrow F_j$ es la matriz elemental correspondiente a la misma operación elemental $F_i \longleftrightarrow F_j$.

Ejemplo. Sea $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- $F_2 + 4F_1 \to F_2$

  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

- $F_2 - 4F_1 \to F_2$

  $E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$

observe que $E_1 E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1^{-1} E_1.$

Ejm. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- $F_1 \leftrightarrow F_2$

- $F_1 \leftrightarrow F_2$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2^{-1} = E_2.$$

$$E_2 E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2^{-1}E_2.$$

Observación: Si U es una matriz escalonada equivalente a una matriz A, entonces existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$U = E_k \cdots E_2 E_1 A.$$

y dado que las matrices elementales son invertibles, entonces.

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U.$$

Ejemplo. sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

		Matriz elemental	Inversa
$F_2 - 2F_1 \to F_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$F_2 \leftrightarrow F_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = U$	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observe que al premultiplicar A por E_1 y E_2 se obtiene U.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_{U.}$$

$$E_2E_1A = U$$

$$E_2^{-1}E_2E_1A = E_2^{-1}U$$

$$E_1A = E_2^{-1}U.$$

$$E_1^{-1}E_1A = E_1^{-1}E_2^{-1}U$$

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}U.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_{U.}$$

Caracterizacion de la inversa en terminos de M.E.

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$.

A es invertible si y solo si A es el producto de matrices elementales.

D/: ($\Rightarrow$) si A invertible existen M.Es. $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2E_1A = I.$$

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1} I$$

($\Leftarrow$) si A es producto de M.Es., dado que cada M.E. es invertible, entonces A es invertible. Pues el producto de matrices invertibles es invertible

Determinantes

El determinante de una matriz A se denota: $\det A$ o $|A|$.

- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular $\det A$.

$$\det A = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$= -6-(-1) - (-4-1) + (-2-3)$$

$$= -5 + 5 - 5.$$

$$\det A = -5.$$

¿Cómo se define el determinante de una matriz?

Definición[*Menor*]. Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, definimos M_{ij}, *el menor* (i,j) de A, como la matriz de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que resulta al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

Ejm. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar M_{13} y M_{32}.

- $M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Definición [*Cofactor*]. Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, definimos A_{ij}, *el cofactor* (i, j) de A, como el escalar que resulta al multiplicar el determinante del menor (i, j) de A por $(-1)^{i+j}$, es decir,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$