

Definición 8 [*Operaciones elementales entre ecuaciones*]. Dado un sistema de ecuaciones lineales, llamamos *operaciones elementales entre ecuaciones* a cada uno de las siguientes procedimientos:

1. *Escalamiento*. Reemplazar la ecuación i , E_i , por un múltiplo de ésta, cE_i , $c \neq 0$: $cE_i \rightarrow E_i$.
2. *Eliminación*. Reemplazar la ecuación i , E_i , por la suma de ésta con un múltiplo de otra, cE_j : $E_i + cE_j \rightarrow E_i$.
3. *Permutación*. Intercambiar las ecuaciones i y j , E_i y E_j : $E_i \longleftrightarrow E_j$.

Ejemplo. Considerar el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Aplicar operaciones elementales para obtener un sistema equivalente con un patrón escalonado.

$$-2E_1 + E_2 \rightarrow E_2 \quad (E_2 - 2E_1 \rightarrow E_2)$$

$$\begin{array}{rcl} -2E_1: & -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 & = -2 \\ E_2: & 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = 2 \\ \hline \text{Nueva } E_2: & 0 + 5x_2 - 4x_3 & = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$-E_1 + E_3 \rightarrow E_3 \quad (E_3 - E_1 \rightarrow E_3).$$

$$\begin{array}{rcl} -E_1: & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = -1 \\ E_3: & x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = -1 \\ \hline \text{Nueva } E_3: & 0 + 5x_2 - 4x_3 & = -2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_2 - 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$-E_2 + E_3 \rightarrow E_3 \quad (E_3 - E_2 \rightarrow E_3).$$

$$-E_2: \quad -5x_2 + 4x_3 = 0$$

$$E_3: \quad 5x_2 - 4x_3 = -2$$

$$\text{Nueva } E_3: \quad 0 = -2$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_2 - 4x_3 = 0$$

$0 = -2 \leftarrow \text{FALSO. Implica que el sistema no tiene solución (inconsistente).}$

Ejemplo: $x_2 - x_3 = 0$

$$x_1 - 3x_3 = -1$$

$$-x_1 + 3x_2 = 1.$$

$$E_1 \leftrightarrow E_2$$

$$x_1 - 3x_3 = -1$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$-x_1 + 3x_2 = 1.$$

$$E_1 + E_3 \rightarrow E_3$$

$$x_1 - 3x_3 = -1$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-3E_2 + E_3 \rightarrow E_3.$$

$$x_1 - 3x_3 = -1$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$0 = 0 \leftarrow \text{Certo para cualquier valor de } x_3.$

$$(0x_3 = 0)$$

Sea $x_3 = t \Rightarrow x_2 - t = 0$

$$x_1 - 3t = -1$$

$$x_2 = t$$

$$x_1 = 3t - 1.$$

Conjunto solución:

$$\{(3t-1, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Luego, el sistema es consistente.

Representación matricial.

¿Qué es una matriz? Es un arreglo rectangular de números reales (o complejos).

Ejemplos:

1.
$$\begin{matrix} & \begin{matrix} F_1 & \rightarrow & 2 & 1 & 0 \\ F_2 & \rightarrow & 3 & -4 & 1/5 \end{matrix} \\ \text{Filas} & \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1/5 \end{array} \right) \end{matrix}$$
 Es una matriz de tamaño 2×3
$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ & \text{columnas} \end{matrix}$$

Filas \downarrow
Columnas \uparrow

2.
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & \pi & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$
 matriz de tamaño 3×5 .

Dado un sistema de ecuaciones, podemos formar:

- La **matriz de coeficientes del sistema**: Es aquella formada por los coeficientes de las variables.
- La **matriz aumentada del sistema**: Es aquella formada por los coeficientes de las variables y la columna de los términos independientes del sistema.

$$\begin{array}{rcl} \underline{\alpha_{11}}x_1 + \underline{\alpha_{12}}x_2 + \cdots + \underline{\alpha_{1n}}x_n & = & b_1 \\ \underline{\alpha_{21}}x_1 + \underline{\alpha_{22}}x_2 + \cdots + \underline{\alpha_{2n}}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ \underline{\alpha_{m1}}x_1 + \underline{\alpha_{m2}}x_2 + \cdots + \underline{\alpha_{mn}}x_n & = & b_m \end{array}$$

Sistema de m ecuaciones con n variables.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes del sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Matriz aumentada del sistema.

Nota: El pivote de una fila de una matriz es el primer elemento de la fila, de izquierda a derecha, que es no nulo.

Definición (Operaciones elementales entre filas)

1. Escalamiento: $cF_i \rightarrow F_i$, $c \neq 0$ una constante.
2. Eliminación: $F_i + cF_j \rightarrow F_i$
3. Permutación: $F_i \leftrightarrow F_j$.

Ejemplo:

Sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 3y + 2z = 16 \\ 2x - y + z = 9 \end{cases}$$

Realizar operaciones elementales en las filas de la matriz aumentada para resolver el sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right) \quad (1)$$

$$F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2$$

$$\begin{array}{rrrrr} F_2: & 3 & -3 & 2 & 16 \\ -3F_1: & -3 & 3 & 3 & -6 \\ \hline \text{Nueva } F_2: & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

$$F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3$$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & 9 \\ -2 & 2 & 2 & -4 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

$$F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right) \quad (2)$$

Esta última es la matriz aumentada de cuál sistema?

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ y + 3z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Aplicando sustitución hacia atrás:

$$z = 2.$$

$$y + 3(2) = 5 \Rightarrow y = -1.$$

$$x - (-1) - 2 = 2 \Rightarrow x = 3.$$

Definición. Dos matrices son equivalentes si al efectuar operaciones elementales entre filas a una de ellas, se obtiene la otra.

Observe que las matrices (1) y (2) del ejemplo anterior son equivalentes.