TEOREMAS SOBRE CONTINUIDAD

TEOREMA 1: Si f y g son funciones continuas en $x=a$, entonces también lo son las funciones $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g, $g(x)\neq 0$.

TEOREMA 2: Si f es continua en $x=b$ y g es una función tal que $\lim_{x\to a} g(x)=b$, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)$$

TEOREMA 3: Si g es una función continua en $x=a$ y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f\circ g$ es continua en $x=a$

(composición de funciones continuas en $x=a$, es continua en $x=a$)

Veamos el ejercicio trabajado antes.

Ej. probar que $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ es continua en $[-2,2]$, pero usando composición

S// $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

En primer lugar f se puede expresar como una composición de dos funciones.

$$f(x)=(g\circ h)(x), \text{ donde } h(x)=4-x^2, \; g(x)=\sqrt{x}.$$

$$f(x)=g(h(x))=g(4-x^2)=\sqrt{4-x^2}.$$

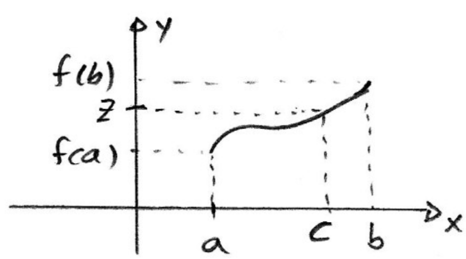
$h(x)=4-x^2$ es continua para todo $x\in\mathbb{R}$.

y $g(x) = \sqrt{x}$ es continua para $x \in [0, \infty)$, luego $f(x) = g(h(x)) = g(4 - x^2)$ es continua para x tal que $4 - x^2 \geq 0$. Así, f es continua para $x \in [-2, 2]$.

Finalmente existen dos Teoremas mas sobre continuidad. Veremos uno de ellos y el otro mas adelante

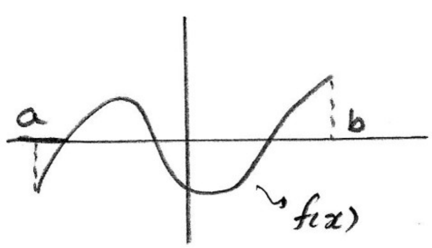
TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si z es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = z$.



El teorema indica que la función recorre todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signo contrario, el teorema garantiza la existencia de un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. (Teorema de Bolzano)



Geométricamente el teorema indica que la gráfica de la función corta el eje x por lo menos una vez

Ej: Demuestre que la ecuación $2x^7 - 3x^4 + 4 = 0$ tiene solución real. (Usando T.V.I)

S// Probar que la ecuación tiene solución en $\mathbb{R}$ es lo mismo que mostrar que la función $2x^7 - 3x^4 + 4$ tiene por lo menos una raíz real.

Sea $f(x) = 2x^7 - 3x^4 + 4$. f es continua en todo $\mathbb{R}$ (por ser un polinomio), luego es continua en todo subintervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
Buscamos un intervalo $[a,b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signo contrario.

$f(0) = 4 > 0$
$f(-1) = -1 < 0$.

f es continua en el intervalo $[-1,0]$, por el teorema de Bolzano, existe $c \in (-1,0)$ tq $f(c) = 0$; es decir,

$$2c^7 - 3c^4 + 4 = 0$$

por lo tanto la ecuación $2x^7 - 3x^4 + 4 = 0$ tiene solución real.

Observe: Si una función es tal que es continua en $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen igual signo, no significa que entonces f no tiene un cero real.
Por Ej: $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$ en $[-1,2]$

$f(-1) = 6$,
$f(2) = 84$, $x = \frac{1}{2}$ es raíz.