Distribuciones de probabilidad Continuas

Es una función que asigna a un intervalo de la variable aleatoria continua su valor de probabilidad correspondiente. Es decir, la probabilidad de que un evento ocurra en un intervalo de la variable.

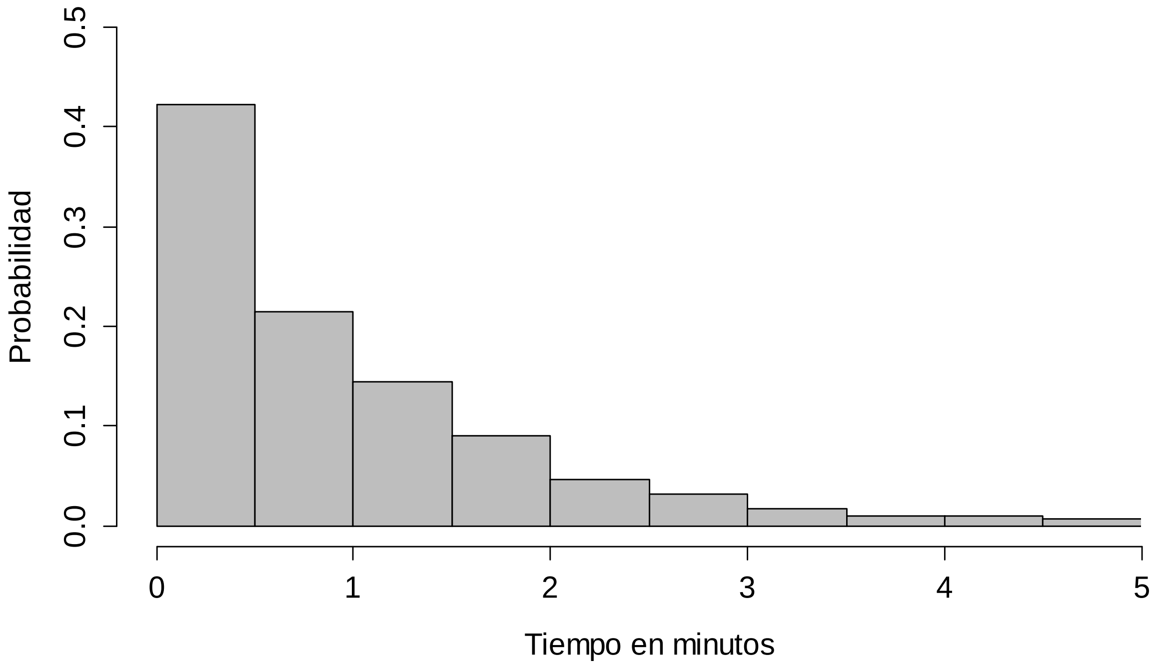
Características de una distribución de probabilidad discreta:

- La probabilidad de que la variable tome un valor en un intervalo, es el área bajo la curva de la función que describe la distribución en ese intervalo.
- El área bajo toda la curva es igual a 1.00.

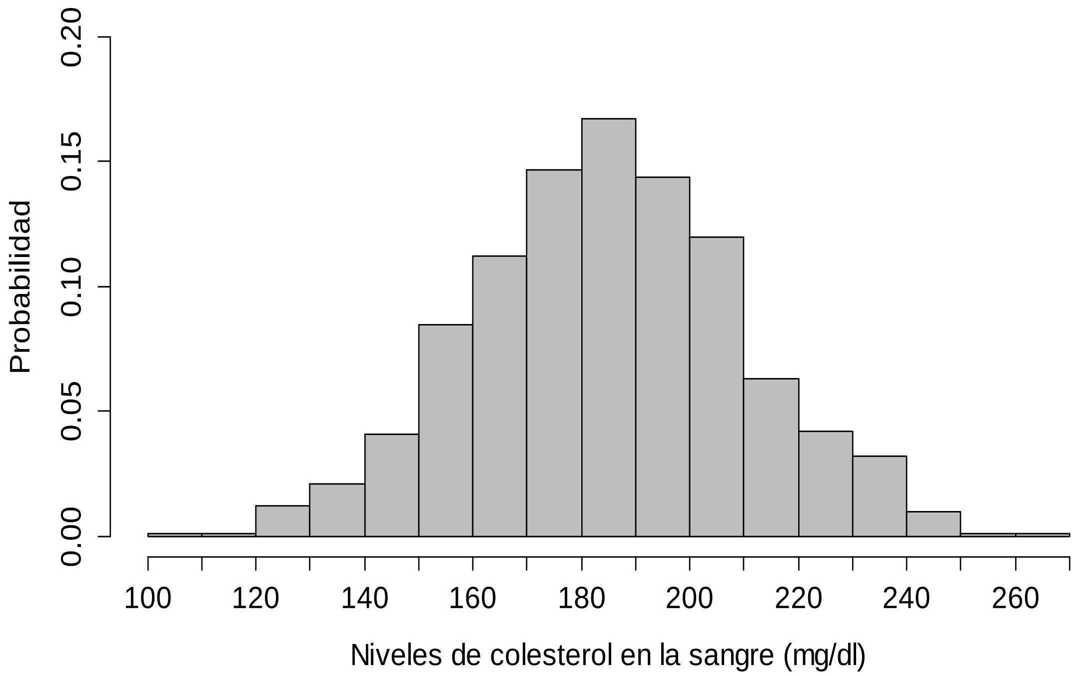
Parámetros:

Valor Esperado	$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\, dx$
Varianza	$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 * f(x)\, dx$

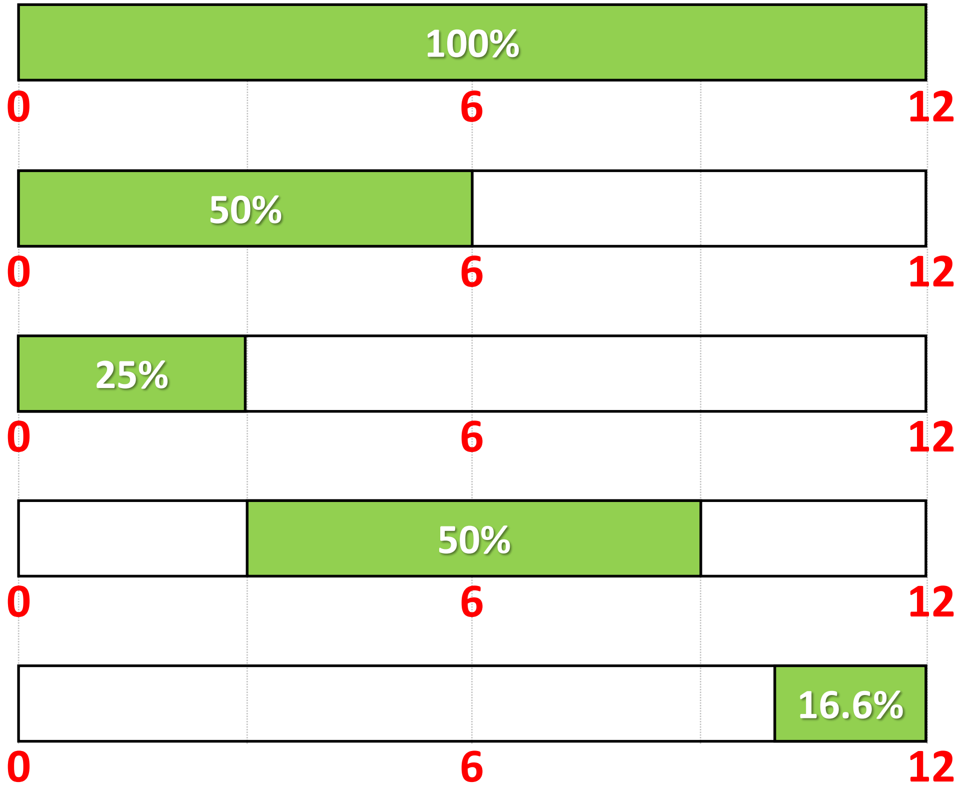
Tiempo en minutos entre dos llegadas consecutivas a una fila de una cafetería, para comprar almuerzos entre las 12:00 y 12:15 de la tarde los días viernes.



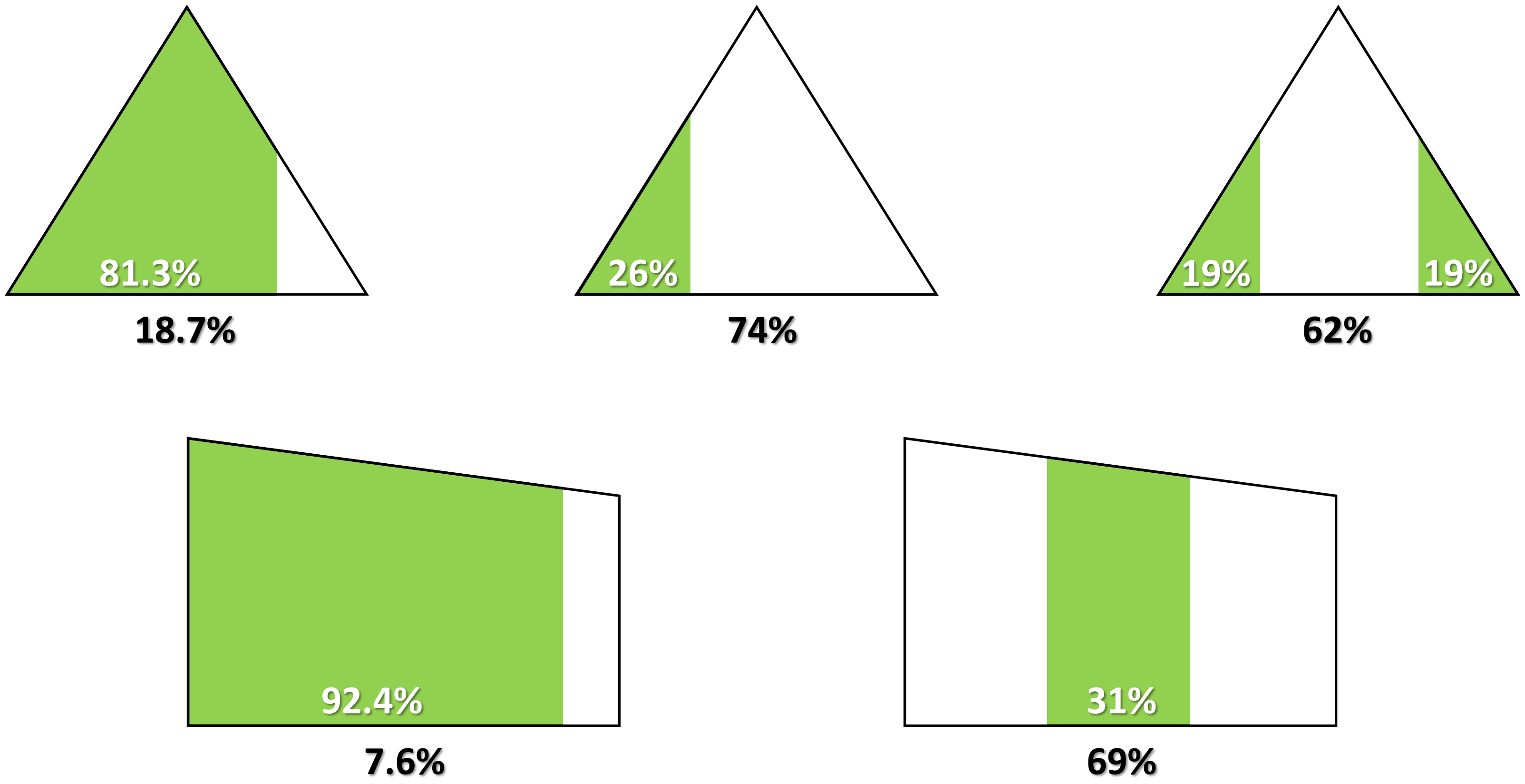
Niveles de colesterol en la sangre (mg/dl) para un grupo de personas adultas con edades entre los 50 y 60 años.



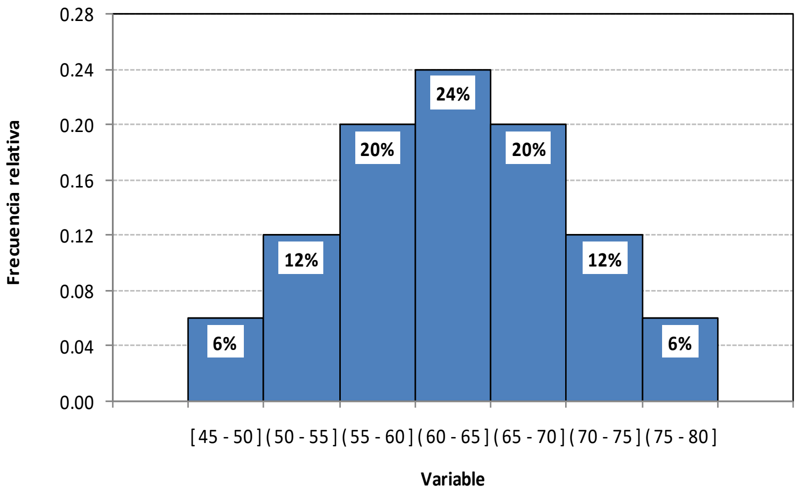
Para cada una de las siguientes situaciones indique en términos porcentuales cuanto representa el área en color verde:

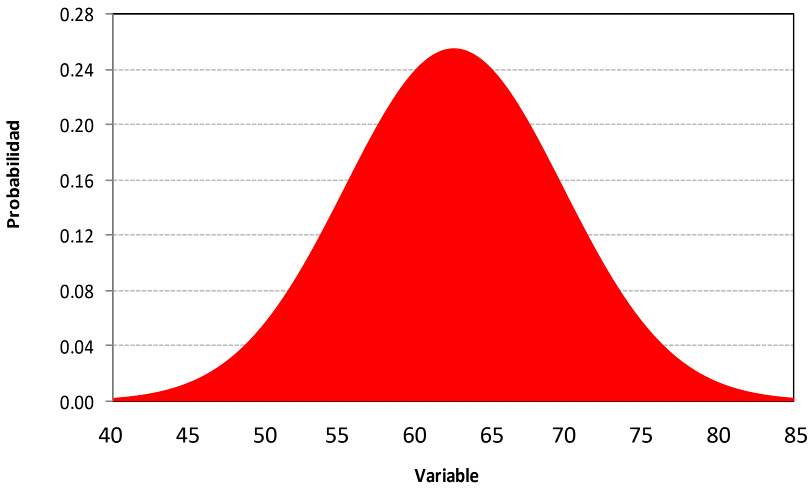


Para cada una de las siguientes situaciones indique en términos porcentuales cuanto representa el área en color blanco:



Al igual que el histograma, el área bajo la curva informa sobre el porcentaje de datos o de unidades que tienen la característica de interés comprendida en el rango que define el área.

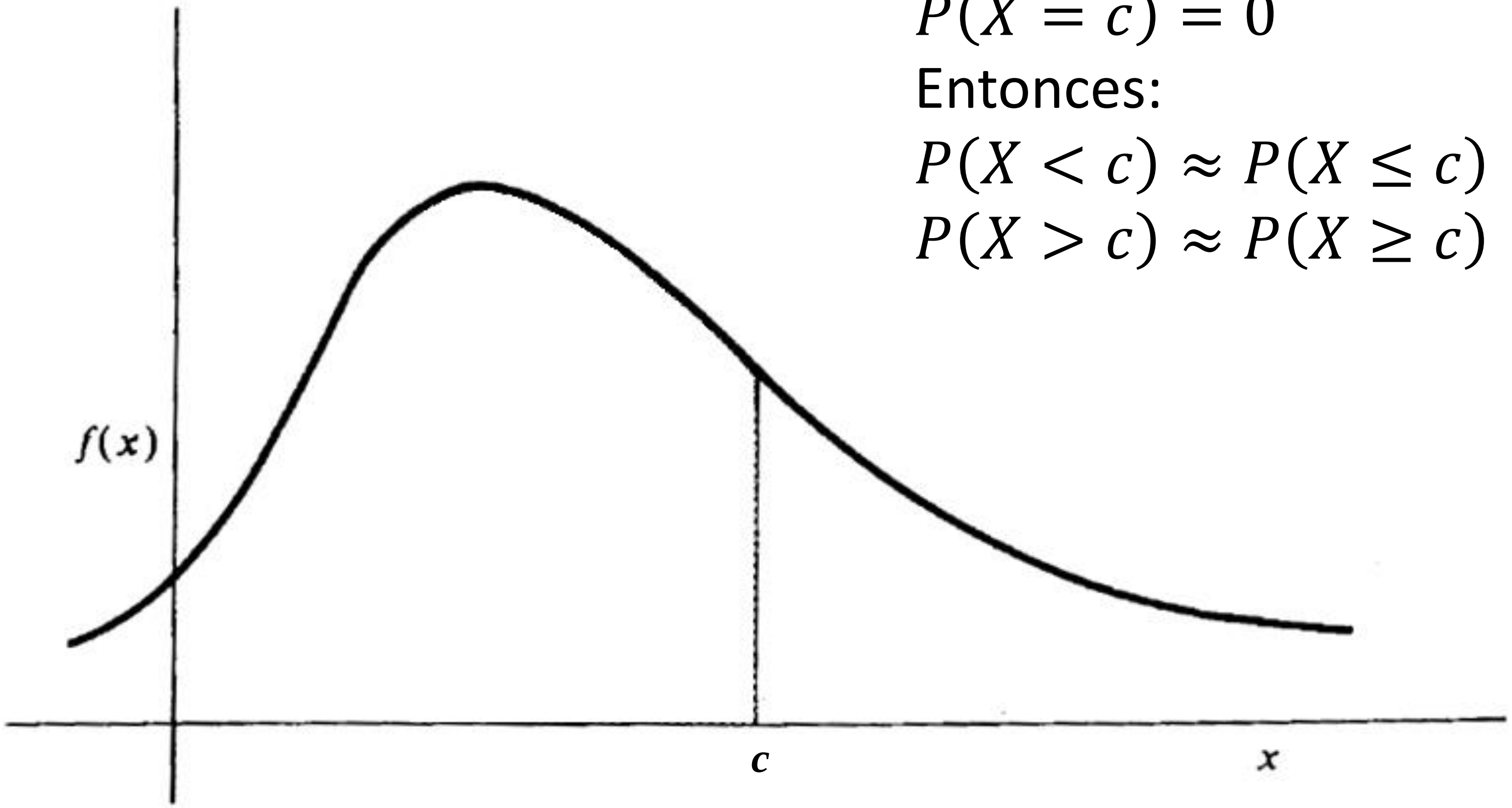




Por lo tanto, todo el área bajo la curva es equivalente al 100% de los datos, es decir que en términos de frecuencias, la suma de todas los valores de las barras del histograma suman 1 o 100%.

Propiedad	Variable aleatoria continua X
Función de densidad $\boldsymbol{f(x)}$	No es una función de probabilidad, pues no está acotada entre 0 y 1. $\boldsymbol{P(X=x)=0}$, para todo x.
Función acumulada $\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{P(X \leq x)}$ Es la probabilidad acumulada de que X sea menor o igual a x.
$\boldsymbol{P(X > c)}$	$\boldsymbol{1 - P(X \leq c)}$
$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b)}$	$\boldsymbol{P(X \leq b) - P(X \leq a)}$

Donde x, a, b y c son valores observados de la variable aleatoria X

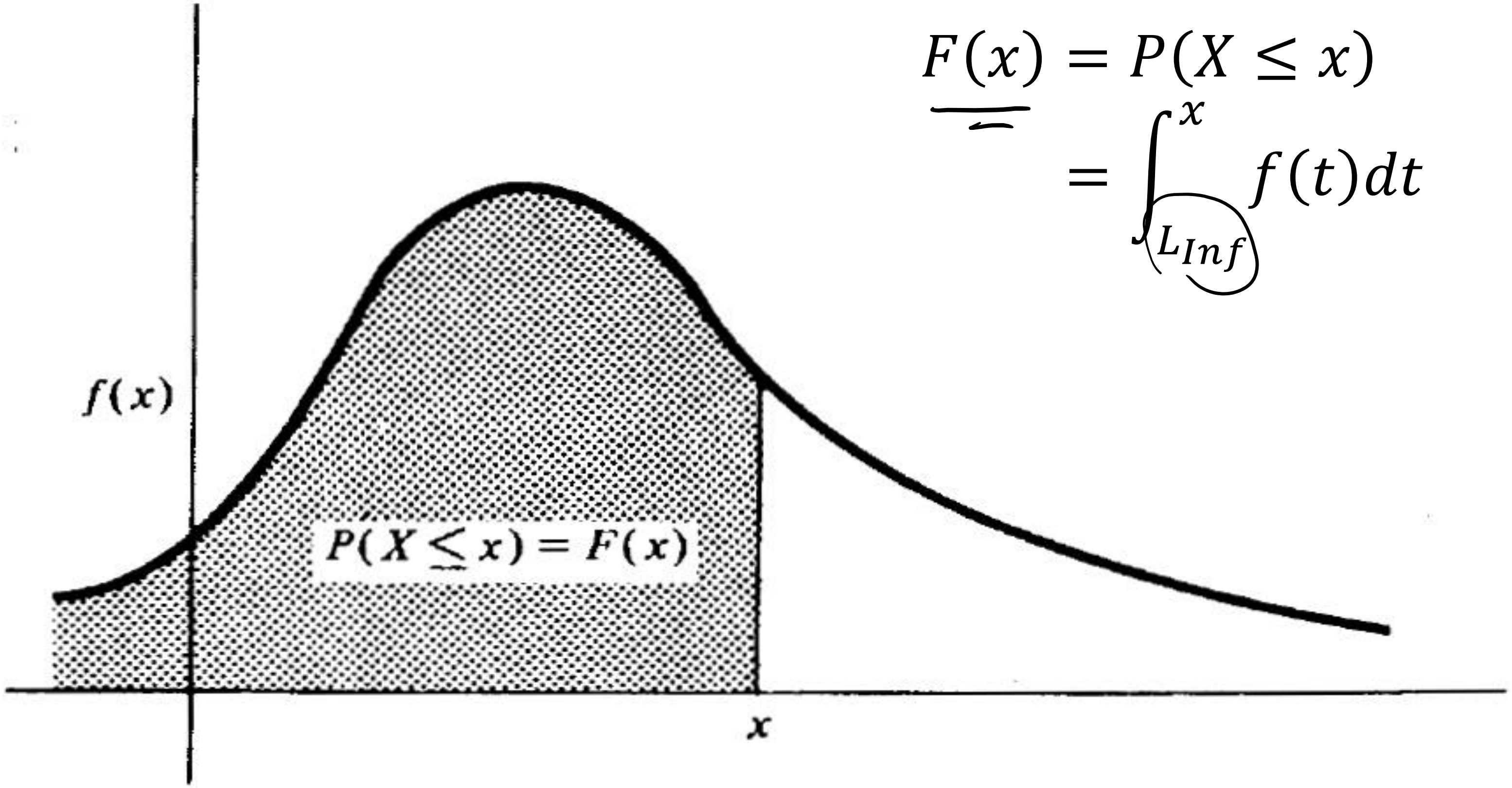


$P(X = c) = 0$

Entonces:

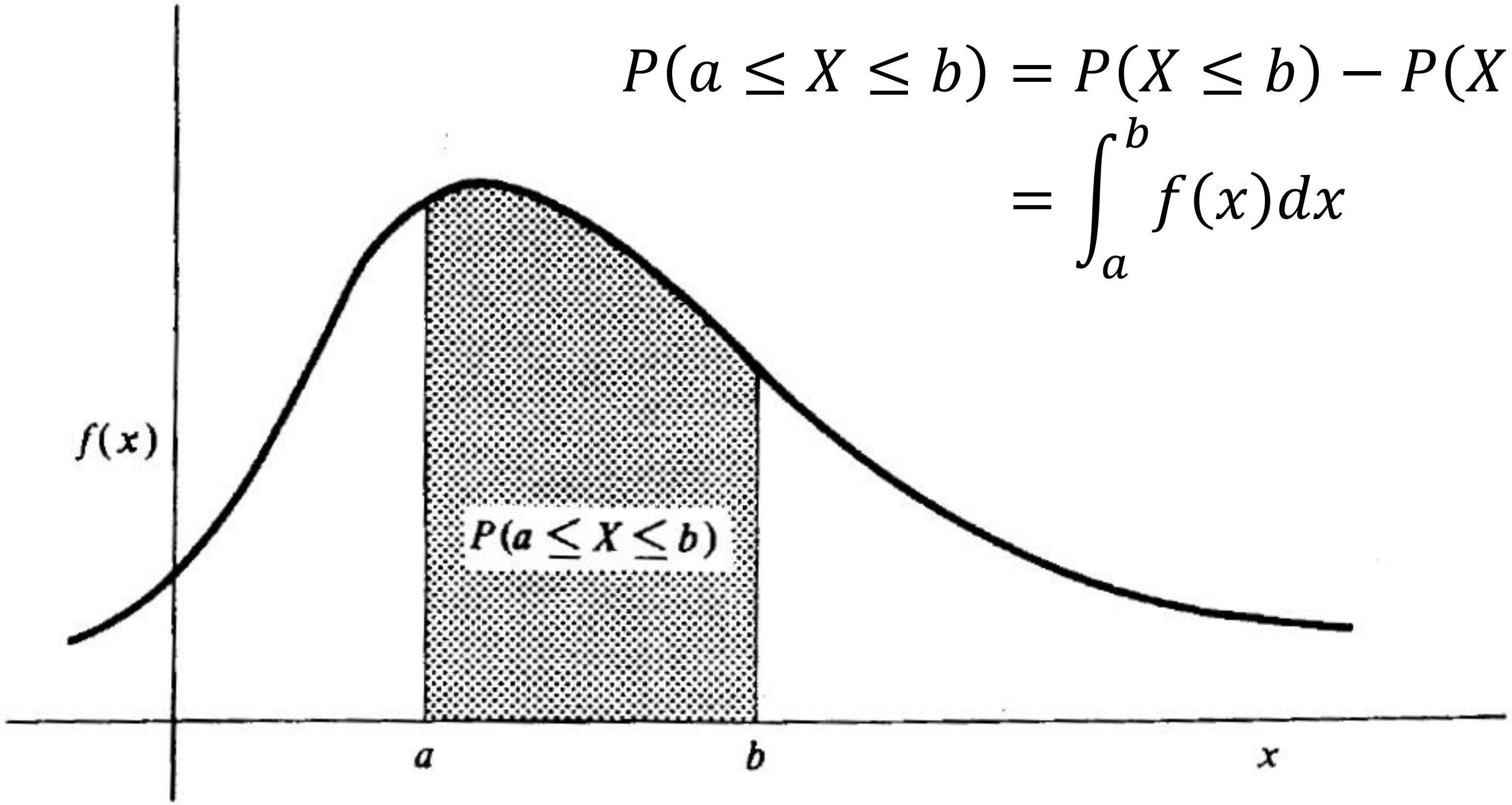
$P(X < c) \approx P(X \leq c)$

$P(X > c) \approx P(X \geq c)$



$$F(x) = P(X \le x)$$
$$= \int_{L_{Inf}}^{x} f(t)\,dt$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$
$$= \int_a^b f(x)dx$$



Ejemplo

Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad de dinero que ahorra un estudiante durante el día (valores en miles de pesos), cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{x}{8} \quad ; \quad 3 \leq x \leq 5$$

Determine lo siguiente:

a) La función acumulada.

b) La probabilidad de ahorrar 4 mil pesos o menos.

c) La probabilidad de ahorrar entre 4 mil y 5 mil pesos.

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad de dinero que ahorra un estudiante durante el día (valores en miles de pesos), cuya función de densidad está dada por:

$$f(x)=\frac{x}{8} \quad ; \quad 3\leq x\leq 5$$

Determine lo siguiente:

a) La función acumulada.

$$F(x)=\int_3^x f(t)dt=\int_3^x \frac{t}{8}dt=\frac{1}{8}\int_3^x tdt=\frac{1}{16}t^2\Big|_3^x=\frac{1}{16}(x^2-9)$$

Por lo tanto, cualquier probabilidad acumulada para valores de x entre 3 y 5, se puede calcular por medio de la siguiente expresión:

$$P(X\leq x)=\frac{1}{16}(x^2-9)$$

Ejemplo

Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad de dinero que ahorra un estudiante durante el día (valores en miles de pesos), cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{x}{8} \quad ; \quad 3 \leq x \leq 5$$

Función Acumulada:

$$P(X \leq x) = \frac{1}{16}(x^2 - 9)$$

Determine lo siguiente:

b) La probabilidad de ahorrar 4 mil pesos o menos.

$$P(X \leq 4) = \frac{1}{16}(4^2 - 9) = \frac{1}{16}(16 - 9) = \frac{7}{16} = 0.4375$$

c) La probabilidad de ahorrar entre 4 mil y 5 mil pesos.

$$P(4 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = \frac{1}{16}(5^2 - 9) - \frac{1}{16}(4^2 - 9)$$

$$= \frac{1}{16}(25 - 9) - \frac{1}{16}(16 - 9) = \frac{16}{16} - \frac{7}{16} = 0.5625$$

Ejercicio

El recorrido en micras de una pequeña corriente en un circuito, se puede modelar con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a. Halle el valor esperado del recorrido de la corriente a través del circuito.
b. Halle la mediana del recorrido de la corriente $Mediana = P(x \leq x_0) = 0.5$
c. Halle la probabilidad de que el recorrido sea superior a 2.0 micras, si se sabe que es inferior a 2.5

Ejercicio

El recorrido en micras de una pequeña corriente en un circuito, se puede modelar con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 0\le x\le 3\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

a. Halle el **valor esperado** del recorrido de la corriente a través del circuito.

$$\boldsymbol{E(x)}=\int_{-\infty}^{\infty} x*f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} x*\frac{1}{3}\,dx \quad =1.5\,micras$$

b. Halle la mediana del recorrido de la corriente $\quad Mediana=P(x\le x_0)=0.5$

$$\boldsymbol{Mediana}=\int_{0}^{x_0}\frac{1}{3}\,dx=0.5 \;\rightarrow\; \left[\frac{x}{3}\right]_0^{x_0}=\frac{x_0}{3}=0.5 \quad \rightarrow x_0=3*0.5=1.5\,micras$$

c. Halle la probabilidad de que el recorrido sea superior a 2.0 micras, si se sabe que es inferior a 2.5

$$\boldsymbol{P(x>2|x<2.5)}=\frac{P(2<x<2.5)}{P(x<2.5)}=\frac{\int_2^{2.5}\frac{1}{3}\,dx}{\int_0^{2.5}\frac{1}{3}\,dx}=\frac{1/6}{5/6}=\frac{1}{5}=0.20$$

Ejemplo

En una tarea de laboratorio, si el equipo está funcionando correctamente, la función acumulada del resultado observado está dada por:

$$F(x) = 2x - x^2 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

Determine lo siguiente:

a) ¿Calcular la probabilidad de que X sea menor o igual a 0.3?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea mayor a 0.5?

c) ¿Calcular la probabilidad de que X este entre 0.2 y 0.8?

En este caso ya se cuenta con la función acumulada, por lo cual todas las probabilidades acumuladas se pueden obtener reemplazando en:

$$P(X \leq x) = 2x - x^2$$

Ejempo

En una tarea de laboratorio, si el equipo está funcionando correctamente, la función acumulada del resultado observado está dada por:

$$F(x) = 2x - x^2 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

Determine lo siguiente:

a) ¿Calcular la probabilidad de que *X* sea menor o igual a 0.3?

$$P(X \leq 0.3) = 2(0.3) - 0.3^2 = 0.51$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que *X* sea mayor a 0.5?

$$P(X > 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - [2(0.5) - 0.5^2] = 1 - 0.75 = 0.25$$

c) ¿Calcular la probabilidad de que *X* este entre 0.2 y 0.8?

$$\begin{aligned} P(0.2 \leq X \leq 0.8) &= P(X \leq 0.8) - P(X \leq 0.2) \\ &= [2(0.8) - 0.8^2] - [2(0.2) - 0.2^2] \\ &= 0.96 - 0.36 = 0.60 \end{aligned}$$

Ejercicio

La función acumulada que describe las probabilidades de los pesos (en onzas) de las cajas de cereal en una empresa, es:

$$F(y) = \frac{4y - 95}{10} \quad ; \quad 23.75 \leq y \leq 26.25$$

Determine lo siguiente:

a) La probabilidad de que el peso sea menor que 24 onzas.

b) La empresa desea que un peso mayor que 26 onzas sea un caso extraordinariamente raro. ¿Cuál será la probabilidad de que en verdad ocurra este caso extraordinariamente raro?

c) La probabilidad de que el peso se encuentre entre 24 y 26 onzas.

d) ¿Cuál debería ser el nuevo peso mínimo de las cajas de cereal, si se cree que actualmente el 15% de las cajas con menor peso, traen perdidas para la empresa?

Ejercicio

La función acumulada que describe las probabilidades de los pesos (en onzas) de las cajas de cereal en una empresa, es:

$$F(y) = \frac{4y - 95}{10} \quad ; \quad 23.75 \leq y \leq 26.25$$

Determine lo siguiente:

a) La probabilidad de que el peso sea menor que 24 onzas.

$$P(Y < 24) = P(Y \leq 24) = \frac{4(24) - 95}{10} = \frac{1}{10} = 0.10$$

b) La empresa desea que un peso mayor que 26 onzas sea un caso extraordinariamente raro. ¿Cuál será la probabilidad de que en verdad ocurra este caso extraordinariamente raro?

$$P(Y > 26) = 1 - P(Y \leq 26) = 1 - \frac{4(26) - 95}{10} = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} = 0.10$$

Ejercicio

La función acumulada que describe las probabilidades de los pesos (en onzas) de las cajas de cereal en una empresa, es:

$$F(y) = \frac{4y - 95}{10} \quad ; \quad 23.75 \leq y \leq 26.25$$

Determine lo siguiente:

c) La probabilidad de que el peso se encuentre entre 24 y 26 onzas.

$$\begin{aligned} P(24 \leq Y \leq 26) &= P(Y \leq 26) - P(Y \leq 24) \\ &= \frac{4(26) - 95}{10} - \frac{4(24) - 95}{10} \\ &= \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0.80 \end{aligned}$$

Ejercicio

La función acumulada que describe las probabilidades de los pesos (en onzas) de las cajas de cereal en una empresa, es:

$$F(y) = \frac{4y - 95}{10} \quad ; \quad 23.75 \leq y \leq 26.25$$

Determine lo siguiente:

d) ¿Cuál debería ser el nuevo peso mínimo de las cajas de cereal, si se cree que actualmente el 15% de las cajas con menor peso, traen perdidas para la empresa?

Sea p el peso mínimo:

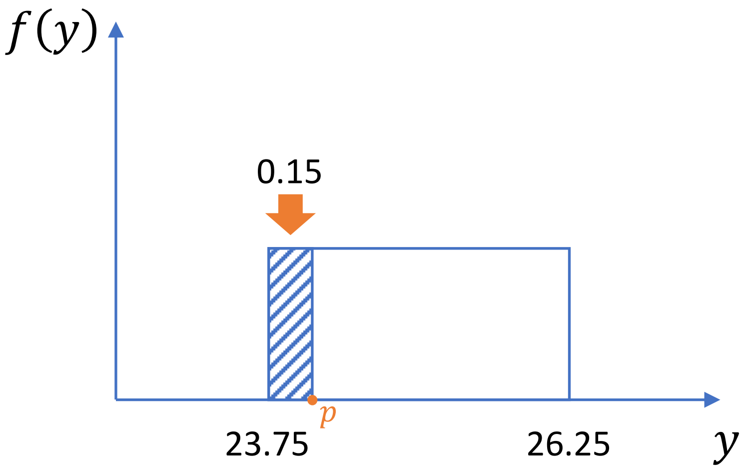
$$P(Y \leq p) = 0.15$$

$$\frac{4p - 95}{10} = 0.15$$

$$4p - 95 = 1.5$$

$$4p = 96.5$$

$$p = \frac{96.5}{4} = 24.125$$



Ejercicio

El tiempo de vida (en años) hasta que falla una batería del nuevo modelo de su celular, es una variable aleatoria Y con función acumulada dada por:

$$F(y) = 1 - e^{-y^2} \quad ; \quad y \geq 0$$

Determine lo siguiente:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería funcione dos años o menos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería funcione más de dos años?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería funcione exactamente un año?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería funcione entre 3 y 9 meses?

e) ¿Cuál debe ser el tiempo de vida de las baterías, si se desea que solo el 10% de las baterías duren más que esa cantidad?

Ejercicio

El tiempo de vida (en años) hasta que falla una batería del nuevo modelo de su celular, es una variable aleatoria Y con función acumulada dada por:

$$F(y) = 1 - e^{-y^2} \quad ; \quad y \geq 0$$

Determine lo siguiente:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería funcione dos años o menos?

$$P(Y \leq 2) = 1 - e^{-(2^2)} = 1 - e^{-4} = 1 - 0.0183 = 0.9817$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería funcione más de dos años?

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - 0.9817 = 0.0183$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería funcione exactamente un año?

$$P(Y = 1) = 0$$

Ejercicio

El tiempo de vida (en años) hasta que falla una batería del nuevo modelo de su celular, es una variable aleatoria Y con función acumulada dada por:

$$F(y) = 1 - e^{-y^2} \quad ; \quad y \geq 0$$

Determine lo siguiente:

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería funcione entre 3 y 9 meses?

Como la información de la pregunta esta dada en meses, se debe pasar a años tal y como esta definida la variable aleatoria, por lo tanto:

3 meses equivale a 0.25 años y 9 meses equivale a 0.75 años.

$$\begin{aligned} P(0.25 \leq Y \leq 0.75) &= P(Y \leq 0.75) - P(Y \leq 0.25) \\ &= \left[1 - e^{-\left(0.75^2\right)}\right] - \left[1 - e^{-\left(0.25^2\right)}\right] \\ &= \left[1 - e^{-0.5625}\right] - \left[1 - e^{-0625}\right] \\ &= [1 - 0.5698] - [1 - 0.9394] \\ &= 0.4302 - 0.0606 = 0.3696 \end{aligned}$$

Ejercicio

El tiempo de vida (en años) hasta que falla una batería del nuevo modelo de su celular, es una variable aleatoria Y con función acumulada dada por:

$$F(y) = 1 - e^{-y^2} \quad ; \quad y \geq 0$$

Determine lo siguiente:

d) ¿Cuál debe ser el tiempo de vida de las baterías, si se desea que solo el 10% de las baterías duren más que esa cantidad?

Sea t el tiempo máximo:

$$P(Y > t) = 0.10 \Rightarrow P(Y \leq t) = 0.90$$

$$1 - e^{-t^2} = 0.90$$

$$1 - 0.90 = e^{-t^2}$$

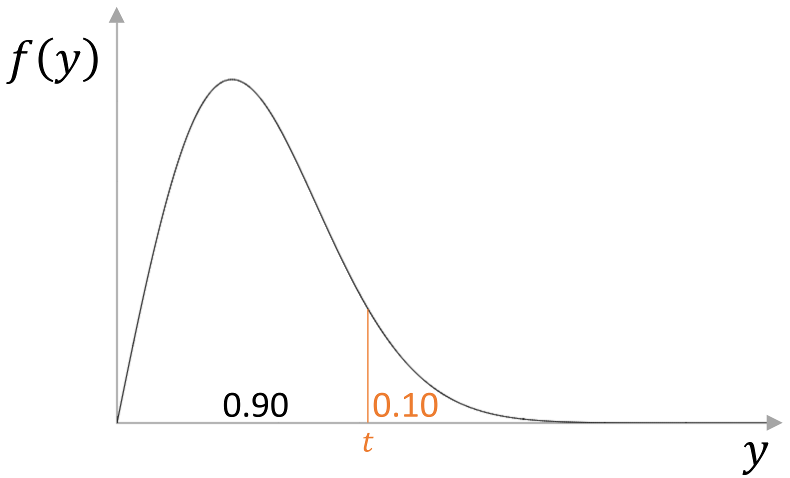
$$0.10 = e^{-t^2}$$

$$ln(0.10) = ln\left(e^{-t^2}\right)$$

$$ln(0.10) = -t^2$$

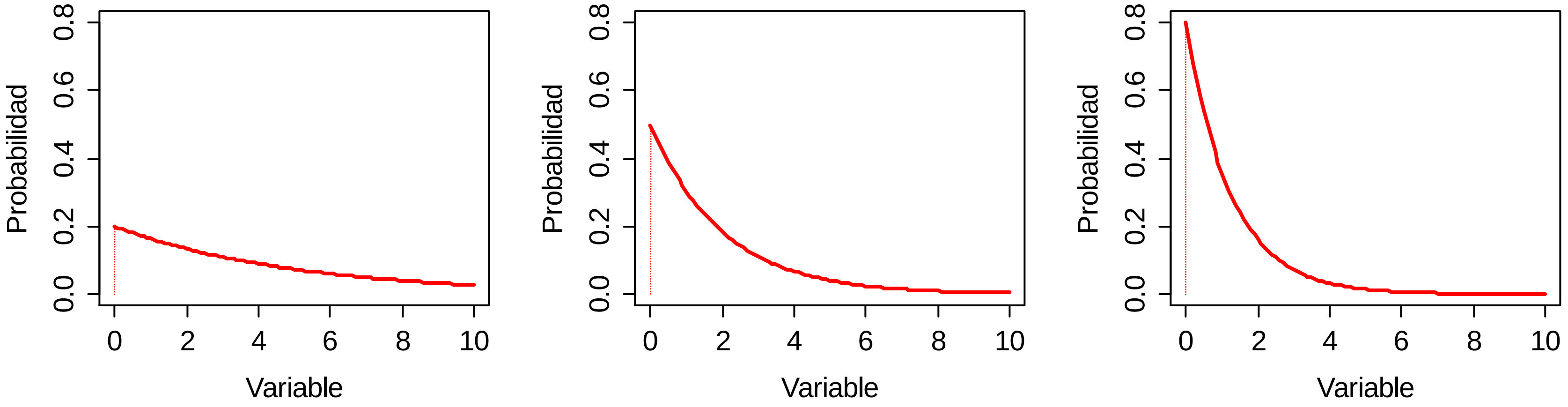
$$-ln(0.10) = t^2$$

$$t = \sqrt{-ln(0.10)} = 1.5174$$

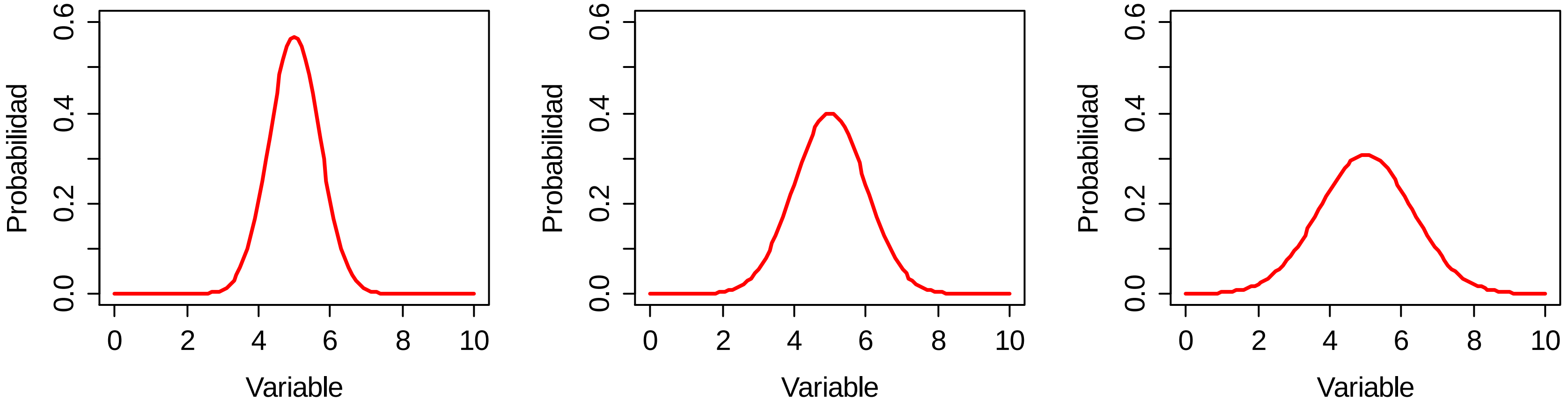


Algunas distribuciones de probabilidad continuas:

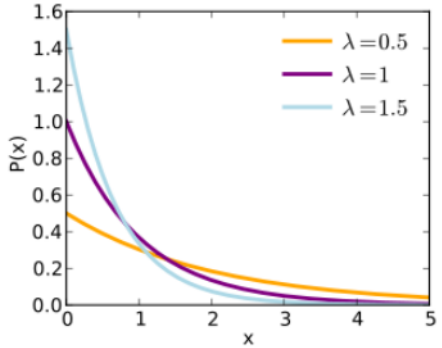
Distribución Exponencial



Distribución Normal



- # Experimento de Probabilidad Exponencial



¿Que modelamos con la Distribución Exponencial?

x = tiempo que se tarda en realizar una actividad.

Parámetros

$$E(x) = \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Función de probabilidad

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función de distribución acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Distribución Exponencial

Ejemplo:

Suponga que el tiempo de respuesta X en cierta terminal de computadora en línea (tiempo transcurrido entre el final de la petición de un usuario y el comienzo de la respuesta del sistema a esta petición) tiene una distribución exponencial con tiempo de respuesta esperado igual a 5 s.

$$E(x) = \mu = \frac{1}{\lambda} = 5$$

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{5} = 0.2}$$

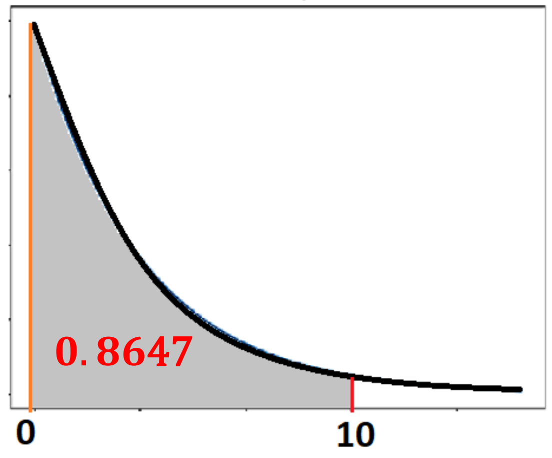
$$F(x) = P(x \leq x_0) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- La probabilidad de que el tiempo de respuesta sea a lo sumo de 10 segundos es?

$$\boldsymbol{P(x \leq 10) = ?}$$

$$F(10) = P(x \leq 10) = 1 - e^{-0.2*10} = \mathbf{0.8647}$$

La probabilidad de que el tiempo de respuesta sea a lo sumo de 10 segundos es del 0.8647



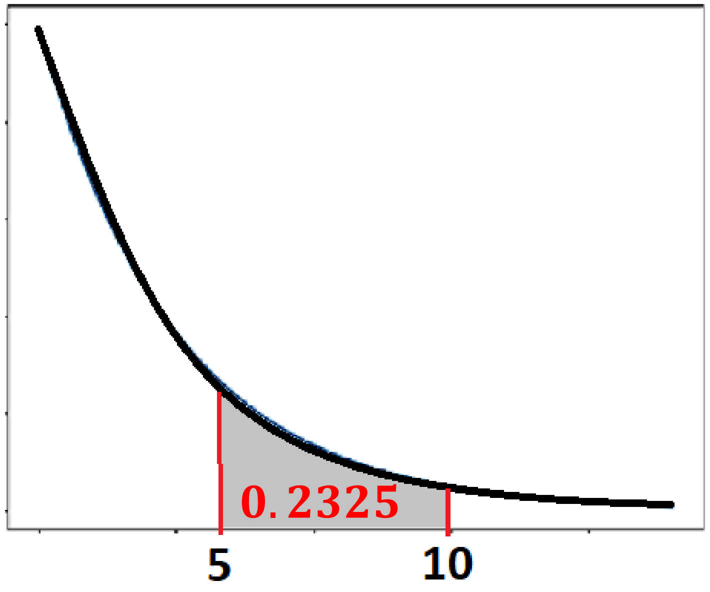
Distribución Exponencial

- La probabilidad de que el tiempo de respuesta este entre 5 y 10 segundos es?

$\boldsymbol{P(5 \le x \le 10) =?}$

$(a \le x \le b) = P(x \le b) - P(x \le a)$

$$\begin{aligned} P(5 \le x \le 10) &= P(x \le 10) - P(x \le 5) \\ &= (1 - e^{-0.2*10}) - (1 - e^{-0.2*5}) \\ &= 0.8647 - 0.6321 \\ &= \mathbf{0.2325} \end{aligned}$$



Ejercicio:

La distribución Exponencial proporciona un buen modelo de ajuste del tiempo que transcurre hasta que un delincuente reincide en hurto por fleteo. Suponga que el tiempo promedio hasta que comete un nuevo hurto por fleteo es de 5 días, ¿Cuál es la probabilidad de que un delincuente espere:

a) Tres días o menos para cometer un nuevo hurto por fleteo?
b) Como mínimo 5 días para cometer un nuevo hurto por fleteo?
c) Entre 7 y 10 días para cometer un nuevo hurto por fleteo?

Ejercicio:

La distribución Exponencial proporciona un buen modelo de ajuste del tiempo que transcurre hasta que un delincuente reincide en hurto por fleteo. Suponga que el tiempo promedio hasta que comete un nuevo hurto por fleteo es de 5 días, ¿Cuál es la probabilidad de que un delincuente espere:

a) Tres días o menos para cometer un nuevo hurto por fleteo?

b) Como mínimo 5 días para cometer un nuevo hurto por fleteo?

c) Entre 7 y 10 días para cometer un nuevo hurto por fleteo?

Solución:

Entonces θ = 5 días. Por lo cual $F(x)$ estará dada por:

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-x/5}, \qquad x > 0$$

Están preguntando por $P(X \le 3)$:

$$P(X \le 3) = 1 - e^{-3/5} = 0.45119$$

+DISTR.EXP(3;1/5;1)

Están preguntando por $P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 5)$:

$$P(X \ge 5) = 1 - \left(1 - e^{-5/5}\right) = e^{-1} = 0.36788$$

+1-DISTR.EXP(5;1/5;1)

Están preguntando por $P(7 \le X \le 10) = P(X \le 10) - P(X \le 7)$:

$$P(X \le 10) = 1 - e^{-10/5} = 0.86466$$

$$P(X \le 7) = 1 - e^{-7/5} = 0.75340$$

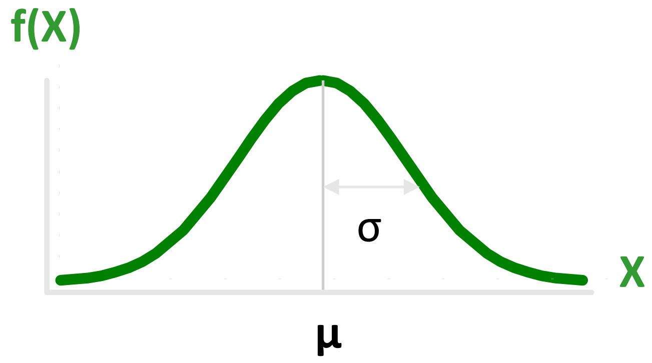
$$P(7 \le X \le 10) = 0.86466 - 0.75340 = 0.11126$$

+DISTR.EXP(10;1/5;1)-DISTR.EXP(7;1/5;1)

• Distribución Normal

¿Que modelamos con la Distribución Normal?

x = Cualquier variable con distribución en forma de campana.



Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$

Parámetros

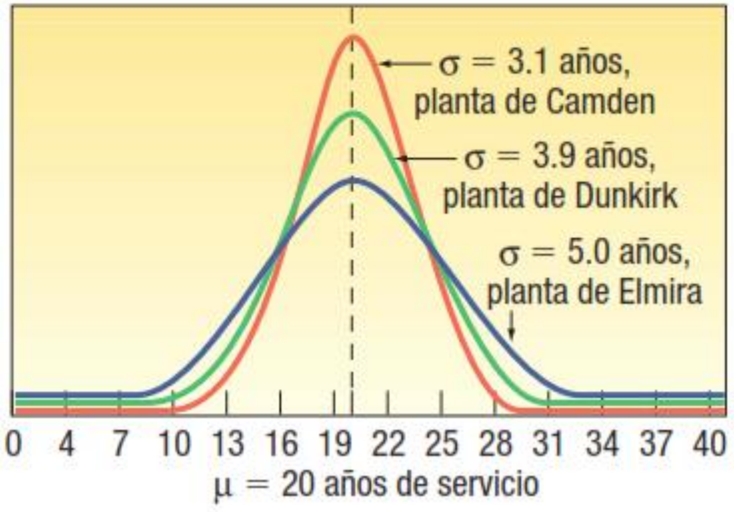
$$E(x) = \mu$$

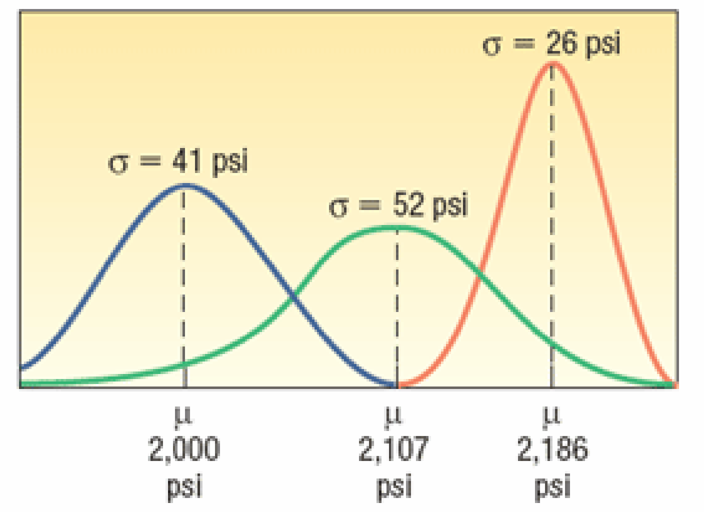
$$V(x) = \sigma^2$$

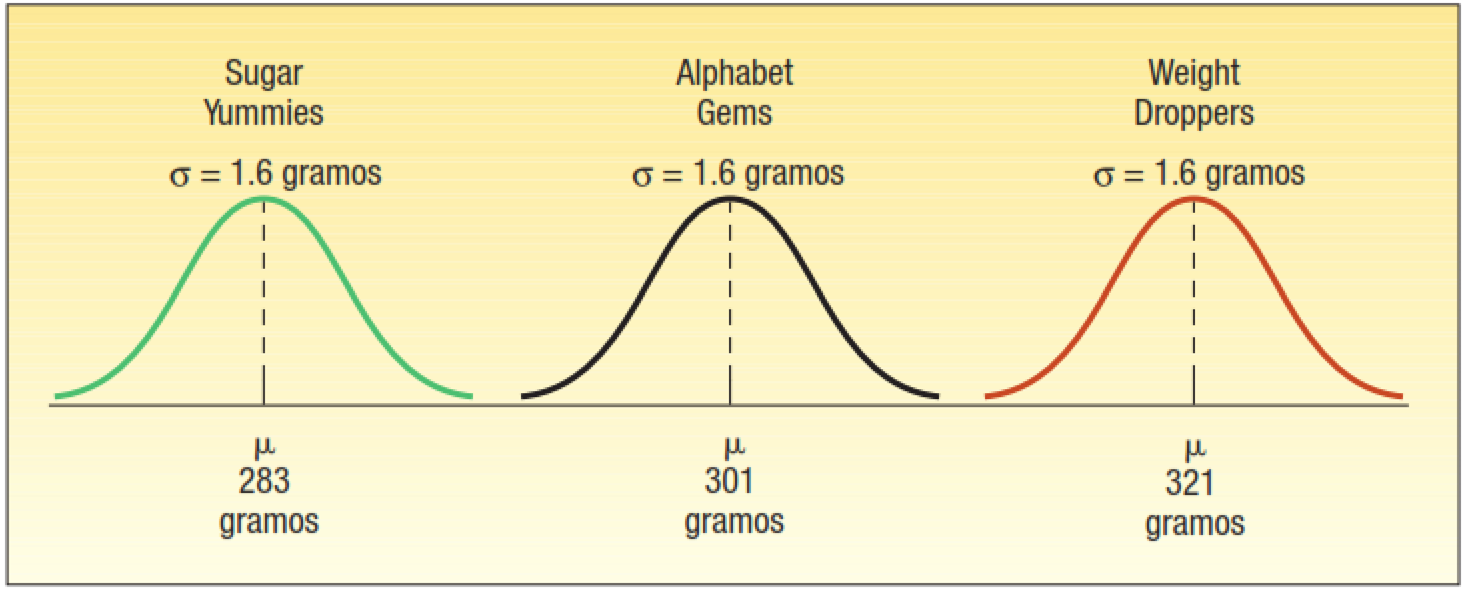
La distribución de probabilidad normal se caracteriza por:

- Tiene forma de campana.
- La media aritmética, la mediana y la moda son iguales.
- El área total bajo la curva es de 1.00.
- Es **simétrica** respecto de la media.
- La dispersión de la distribución se determina por medio de la desviación estándar σ.

Distribución Normal







Sea X una variable aleatoria con una distribución continua:

Distribución Normal:

+DISTR.NORM(x;media;desv_estándar;acum)

x:	Es el valor de la variable *x*.
media:	Es el valor del parámetro μ.
desv_estándar:	Es el valor del parámetro σ.
acum:	*Falso* o *0* para probabilidad puntual.
	Verdadero o *1* para probabilidad acumulada.

+DISTR.NORM.INV(probabilidad;media;desv_estándar)

probabilidad:	Es el valor de la probabilidad.
media:	Es el valor del parámetro μ.
desv_estándar:	Es el valor del parámetro σ.

Ejemplo:

Una máquina despachadora de gaseosa está ajustada para servir un promedio de 200 ml por vaso. Si la cantidad de gaseosa es normalmente distribuida con una desviación estándar de 15 ml.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 200 y 215 ml?,
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga más de 230 ml?
c. ¿Cuál es la cantidad máxima que tendrán el 98% de los vasos despachados por dicha máquina?

Solución:

Entonces: μ = 200 y σ = 15.

a. Nos preguntan por $P(200 \leq X \leq 215)$:

$$
\begin{aligned}
P(200 \leq X \leq 215) &= P(X \leq 215) - P(X \leq 200) \\
&= 0.8413 - 0.5000 \\
&= 0.3413
\end{aligned}
$$

```
=DISTR.NORM(215;200;15;1)-DISTR.NORM(200;200;15;1)
```

b. Nos preguntan por $P(X > 230)$:

$$
\begin{aligned}
P(X > 230) &= 1 - P(X \leq 230) \\
&= 1 - 0.9772 \\
&= 0.0228
\end{aligned}
$$

```
=1-DISTR.NORM(230;200;15;1)
```

c. ¿Cuál es la cantidad máxima que tendrán el 98% de los vasos despachados por dicha máquina?

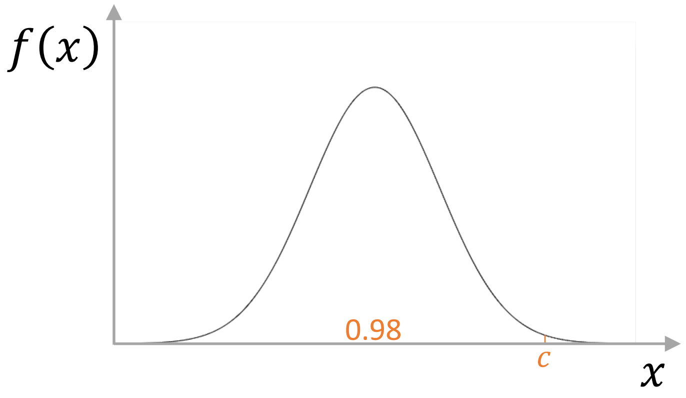
Entonces: μ = 200 y σ = 15.

Nos preguntan por *c*:

$$P(X \le c) = 0.98$$

$$c = ¿?$$

$$c = 230.8062$$



+DISTR.NORM.INV(0.98;200;15)

Una fábrica de golosinas produce dulces a los cuales se les realiza un control de calidad sobre el peso. Según estudios realizados en dicha fábrica, el peso se encuentra adecuadamente clasificado por una distribución normal con un promedio de 5.0 gr y una desviación estándar de 0.1 gr. Para que uno de estos dulces pase el control de calidad su peso debe encontrarse entre 4.8 y 5.2 gr. Si el peso es menor que 4.8 gr el dulce se desecha; si es mayor que 5.2 gr puede reprocesarse:

a) ¿Qué porcentaje de dulces pasaran el control de calidad?
b) ¿Qué porcentaje será desechado?
c) ¿Qué porcentaje será reprocesado?
d) Si se piensa realizar un cambio en los estándares del proceso, ¿Cuál debe ser el peso de los dulces para que máximo el 20% de ellos sean desechados?

a) ¿Qué porcentaje de dulces pasaran el control de calidad?

$$P(4.8 \leq X \leq 5.2) = P(X \leq 5.2) - P(X \leq 4.8)$$
$$= 0.9772 - 0.0228$$
$$= 0.9545$$
$$\Rightarrow 95.45\%$$

b) ¿Qué porcentaje será desechado?

$$P(X < 4.8) = P(X \leq 4.8)$$
$$= 0.0228$$
$$\Rightarrow 2.28\%$$

c) ¿Qué porcentaje será reprocesado?

$$P(X > 5.2) = 1 - P(X \leq 5.2)$$
$$= 1 - 0.9772$$
$$= 0.0228$$
$$\Rightarrow 2.28\%$$

d) Si se piensa realizar un cambio en los estándares del proceso, ¿Cuál debe ser el peso de los dulces para que máximo el 20% de ellos sean desechados?

$$P(X \leq p) = 0.20$$
$$p = ¿?$$
$$p = 4.916$$