

Análisis y Diseño de Algoritmos II

*Jesús Alexander Aranda Ph.D Robinson Duque, Ph.D
Juan Francisco Díaz, Ph. D*

Universidad del Valle

*jesus.aranda@correounalvalle.edu.co
robinson.duque@correounalvalle.edu.co
juanfco.diaz@correounalvalle.edu.co
Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación*



1 Solución de LPs de dos variables

2 LPs de dos o más variables

- Generalidades
- Ejemplo: Problema de la Dieta
- Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

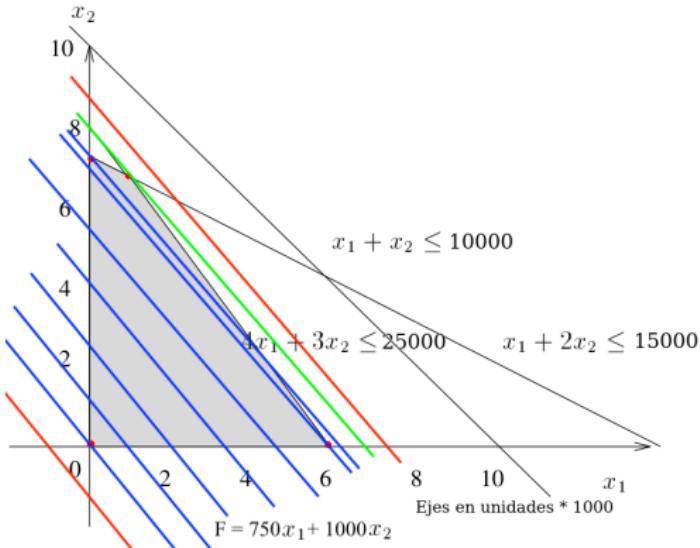
3 Ejercicios

- Problema de refinería
- Problema de agricultura
- Problema de cortes

Solución de LPs de dos variables

Recordemos...

Para modelos con dos variables es posible resolver el problema sin una computadora. Se debe dibujar la región factible Ω y determinar cómo se optimiza el objetivo en esa región.



LPs de dos o más variables- Generalidades

Los modelos de programación lineal se encuentran en casi todos los campos de las empresas y usualmente los modelos requieren más de dos variables. Recordemos que los problemas LP pueden contener variables que tomen valores continuos.

En las siguientes secciones introduciremos una serie de problemas, y mostraremos cómo modelarlos mediante la elección adecuada de las variables de decisión, el objetivo y las restricciones.

En todos los casos, describiremos el problema y daremos un modelo. Más adelante abordaremos la forma de solucionar estos modelos mediante el uso del método **Simplex**.

Ejemplo: Problema de la Dieta

Los datos de contenido nutricional de un grupo de alimentos y la necesidad semanal de un adulto se presentan en la tabla que se muestra a continuación. **Determine el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales (i.e., 550g de proteína, 600g de grasa, 2000g de carbohidratos).**

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)		550	600	2000	

Determine el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales... **¿Qué variables de decisión se deben usar?**

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)		550	600	2000	

Determine el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales... **¿Qué variables de decisión se deben usar?**

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- ¿Qué representan estas variables?

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)		550	600	2000	

Determine el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales... **¿Qué variables de decisión se deben usar?**

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- ¿Qué representan estas variables?
- R/: El número de gramos de cada uno de los alimentos

Ejemplo: Problema de la Dieta

Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1 Bread	8%	1%	55%	0.25
2 Butter	—	90%	—	0.5
3 Cheese	25%	36%	—	1.2
4 Cereal	12%	3%	75%	0.6
5 Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)		550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

- $0,08x_1 + 0,25x_3 + 0,12x_4 + 0,08x_5 \geq 550$

Ejemplo: Problema de la Dieta

Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1 Bread	8%	1%	55%	0.25
2 Butter	—	90%	—	0.5
3 Cheese	25%	36%	—	1.2
4 Cereal	12%	3%	75%	0.6
5 Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

- $0,08x_1 + 0,25x_3 + 0,12x_4 + 0,08x_5 \geq 550$
- $0,01x_1 + 0,9x_2 + 0,36x_3 + 0,03x_4 \geq 600$

Ejemplo: Problema de la Dieta

Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1 Bread	8%	1%	55%	0.25
2 Butter	—	90%	—	0.5
3 Cheese	25%	36%	—	1.2
4 Cereal	12%	3%	75%	0.6
5 Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

- $0,08x_1 + 0,25x_3 + 0,12x_4 + 0,08x_5 \geq 550$
- $0,01x_1 + 0,9x_2 + 0,36x_3 + 0,03x_4 \geq 600$
- $0,55x_1 + 0,75x_4 + 0,5x_5 \geq 2000$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)		550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

- $0,08x_1 + 0,25x_3 + 0,12x_4 + 0,08x_5 \geq 550$
- $0,01x_1 + 0,9x_2 + 0,36x_3 + 0,03x_4 \geq 600$
- $0,55x_1 + 0,75x_4 + 0,5x_5 \geq 2000$
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)		550	600	2000	

¿Cuál es la función objetivo? Recuerde: determinar el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales... (en este caso también podríamos expresar los costos por cada gramo dividiendo toda la función por 100 para obtener la misma solución)

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)		550	600	2000	

¿Cuál es la función objetivo? Recuerde: determinar el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales... (en este caso también podríamos expresar los costos por cada gramo dividiendo toda la función por 100 para obtener la misma solución)

- **Minimizar** $0,25x_1 + 0,5x_2 + 1,2x_3 + 0,6x_4 + 1,5x_5$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost \$ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	—	90%	—	0.5
3	Cheese	25%	36%	—	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	—	50%	1.5
Weekly requirement (g)		550	600	2000	

Modelo final:

```
minimize       $f = 0,25x_1 + 0,5x_2 + 1,2x_3 + 0,6x_4 + 1,5x_5$ 
subject to     $0,08x_1 + 0,25x_3 + 0,12x_4 + 0,08x_5 \geq 550$ 
               $0,01x_1 + 0,9x_2 + 0,36x_3 + 0,03x_4 \geq 600$ 
               $0,55x_1 + 0,75x_4 + 0,5x_5 \geq 2000$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ 
```

Ejemplo: Problema de la Dieta

Modelo final:

```
minimize       $f = 0,25x_1 + 0,5x_2 + 1,2x_3 + 0,6x_4 + 1,5x_5$ 
subject to     $0,08x_1 + 0,25x_3 + 0,12x_4 + 0,08x_5 \geq 550$ 
               $0,01x_1 + 0,9x_2 + 0,36x_3 + 0,03x_4 \geq 600$ 
               $0,55x_1 + 0,75x_4 + 0,5x_5 \geq 2000$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ 
```

Actividad en casa

Implementar el modelo en MiniZinc, encontrar el valor de cada variable x_i y el costo mínimo para producir la dieta.

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Un fabricante de aleaciones planea producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar cinco aleaciones disponibles. La composición y los precios de estas aleaciones se muestran en la tabla a continuación:

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Qué variables de decisión se deben usar?

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Qué variables de decisión se deben usar?

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- ¿Qué representan estas variables?

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Qué variables de decisión se deben usar?

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- ¿Qué representan estas variables?
- R:/ el número de kg de cada una de las aleaciones disponibles fundidas y mezcladas para formar la cantidad necesaria de la aleación requerida

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

- $0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 + 0,4x_5 = 250$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

- $0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 + 0,4x_5 = 250$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

- $0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 + 0,4x_5 = 250$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000$
- $x_1 \leq 300, x_2 \leq 400, x_3 \leq 200, x_4 \leq 700, x_5 \leq 450$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

- $0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 + 0,4x_5 = 250$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000$
- $x_1 \leq 300, x_2 \leq 400, x_3 \leq 200, x_4 \leq 700, x_5 \leq 450$
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Cuál es la función objetivo? Recuerde: minimizar el costo de la producción...

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

¿Cuál es la función objetivo? Recuerde: minimizar el costo de la producción...

- **Minimizar** $6x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 30x_5$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price \$/kg	6	10	18	24	30

Modelo final:

```
minimize       $f = 6x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 30x_5$ 
subject to     $0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 + 0,4x_5 = 250$ 
               $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000$ 
               $x_1 \leq 300, x_2 \leq 400, x_3 \leq 200, x_4 \leq 700, x_5 \leq 450$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ 
```

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Modelo final:

```
minimize       $f = 6x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 30x_5$ 
subject to     $0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 + 0,4x_5 = 250$ 
               $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000$ 
               $x_1 \leq 300, x_2 \leq 400, x_3 \leq 200, x_4 \leq 700, x_5 \leq 450$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ 
```

Actividad en casa

Implementar el modelo en MiniZinc, encontrar el valor de cada variable x_i y el costo mínimo para producir la aleación.

Problema de refinería

Una refinería utiliza dos aceites crudos diferentes, un crudo ligero cuesta \$40 por barril y un crudo pesado cuesta \$30 por barril para producir: gasolina, combustible para calefacción, combustible para aviones y lubricante de petróleo. El rendimiento de estos tipos de crudo por barril se da en la siguiente tabla:

	Gasoline	Heating oil	Jet fuel	Lube oil
Light crude oil	0.4	0.2	0.3	0.1
Heavy crude oil	0.3	0.45	0.1	0.05

La demanda es de 8 millones de barriles de gasolina, 6 millones de barriles de combustible para calefacción, 7 millones de barriles de combustible para aviones y 3 millones de barriles de aceite lubricante. Escribir un modelo que permita determinar las cantidades de crudo ligero y crudo pesado que se comprará por un costo mínimo.

Problema de refinería

	Gasoline	Heating oil	Jet fuel	Lube oil
Light crude oil	0.4	0.2	0.3	0.1
Heavy crude oil	0.3	0.45	0.1	0.05

Sean x_1 y x_2 los millones de barriles de crudo ligero y pesado comprados, respectivamente. Modelo final:

```
minimize       $f = 40x_1 + 30x_2$ 
subject to     $0,4x_1 + 0,3x_2 \geq 8$ 
               $0,2x_1 + 0,45x_2 \geq 6$ 
               $0,3x_1 + 0,1x_2 \geq 7$ 
               $0,1x_1 + 0,05x_2 \geq 3$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 
```

Problema de refinería

Modelo final:

```
minimize       $f = 40x_1 + 30x_2$ 
subject to     $0,4x_1 + 0,3x_2 \geq 8$ 
               $0,2x_1 + 0,45x_2 \geq 6$ 
               $0,3x_1 + 0,1x_2 \geq 7$ 
               $0,1x_1 + 0,05x_2 \geq 3$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 
```

Actividad en casa

Implementar el modelo en MiniZinc, encontrar el valor de cada variable x_i y el costo de los barriles de crudo.

Problema de agricultura

Un agricultor de vegetales tiene la opción de producir tomates, pimientos verdes o pepinos en su granja de 200 acres. Un total de 500 días-hombre de trabajo están disponibles. En la tabla se muestran los rendimientos y los días-hombre de trabajo por acre:

	Yield \$/ acre	Labor man-days/acre
Tomatoes	450	6
Green Peppers	360	7
Cucumbers	400	5

Suponiendo que los costos de los fertilizantes son los mismos para cada producto, determine la combinación óptima de cultivos.

Problema de agricultura

	Yield \$/ acre	Labor man-days/acre
Tomatoes	450	6
Green Peppers	360	7
Cucumbers	400	5

Sean x_1 , x_2 y x_3 los acres de tierra para tomates, pimientos verdes y pepinos respectivamente. El problema del LP puede ser declarado como:

```
maximize       $f = 450x_1 + 360x_2 + 400x_3$ 
subject to     $x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$ 
               $6x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 500$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ 
```

Problema de agricultura

Modelo final:

```
maximize       $f = 450x_1 + 360x_2 + 400x_3$ 
subject to     $x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$ 
               $6x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 500$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ 
```

Actividad en casa

Implementar el modelo en MiniZinc, encontrar el valor de cada variable x_i y el rendimiento de los cultivos.

Problema de cortes

Una fábrica de papel hace rollos jumbo de 1m de ancho. Recibieron un pedido de 200 carretes 260mm de ancho, 400 carretes de 180mm de ancho, y 300 carretes 300mm de ancho. Los rollos deben ser cortados del rollo jumbo. Las combinaciones de cuchillas de corte son tales que se debe incluir un carrete de 300 mm de ancho en cada corte. Determine el número total de carretes jumbo y combinaciones de corte para minimizar el recorte sobrante.

Combination	Number of 300 mm	Number of 260 mm	Number of 180 mm	Trim mm
1	3	0	0	100
2	2	1	0	140
3	2	0	2	40
4	1	2	1	0
5	1	1	2	80
6	1	0	3	160

Problema de cortes

Combination	Number of 300 mm	Number of 260 mm	Number of 180 mm	Trim mm
1	3	0	0	100
2	2	1	0	140
3	2	0	2	40
4	1	2	1	0
5	1	1	2	80
6	1	0	3	160

Sean x_1 a x_6 el número de carretes jumbo por cada combinación.
Formulación basada en el número mínimo:

```
minimize       $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ 
subject to     $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 300$ 
               $x_2 + 2x_4 + x_5 \geq 200$ 
               $2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \geq 400$ 
               $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ 
```

Problema de cortes

Sean x_1 a x_9 el número de carretes jumbo por cada combinación.
Formulación basada en el mínimo desperdicio:

minimize

$$f = 100x_1 + 140x_2 + 40x_3 + 80x_5 + 160x_6 + 300x_7 + 260x_8 + 180x_9$$

subject to $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 300$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 - x_8 = 200$$

$$2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 - x_9 = 400$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0,$$

$$x_8 \geq 0, x_9 \geq 0$$

Fin de la Presentación

¿Preguntas?

[Belegundu and Chandrupatla, 2019]

References I



Belegundu, A. D. and Chandrupatla, T. R. (2019).
Optimization concepts and applications in engineering.
Cambridge University Press.