

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- El algoritmo *branch and bound* aplica iterativamente el método simplex.
- La idea de este algoritmo es dividir el problema sucesivamente en subproblemas, aplicando en cada uno una restricción adicional con el fin de forzar el simplex a tomar soluciones enteras.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- El algoritmo *branch and bound* aplica iterativamente el método simplex.
- La idea de este algoritmo es dividir el problema sucesivamente en subproblemas, aplicando en cada uno una restricción adicional con el fin de forzar el simplex a tomar soluciones enteras.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Considere el siguiente problema:

Maximizar

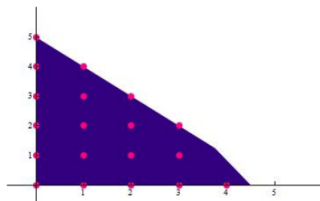
$$5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros}$$



Se utilizará el término PL0 para referenciar este problema.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Considere el siguiente problema:

Maximizar

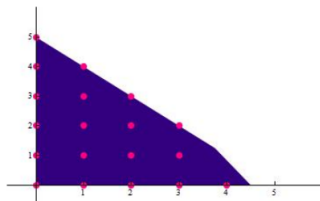
$$5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros}$$

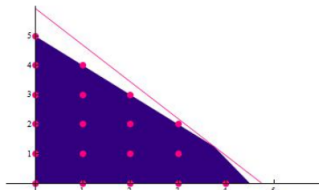


Se utilizará el término PL0 para referenciar este problema.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

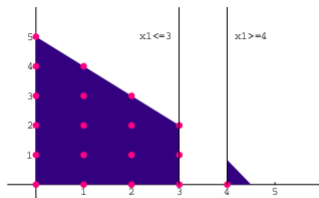
- **Solucion de PL0:** $x_1 = 3.75$, $x_2 = 1.25$, $z = 23.75$.
- Claramente, esta solución es no entera. Por consiguiente, es necesario ramificar.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Se selecciona una variable que no cumpla la restricción de ser entera.
- Por ejemplo, se escoge x_1 que es denominada la **variable de ramificación**.
- En la solución continua encontrada, se tiene que $x_1 = 3.75$.
- Puesto que debe cumplirse que x_1 sea entera, luego se tiene que $x_1 \leq 3$ o $x_1 \geq 4$.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Se generan dos problemas, agregando al problema anterior una de las restricciones anteriores:

Problema PL1

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema PL2

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Se generan dos problemas, agregando al problema anterior una de las restricciones anteriores:

Problema PL1

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema PL2

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Se generan dos problemas, agregando al problema anterior una de las restricciones anteriores:

Problema PL1

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema PL2

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

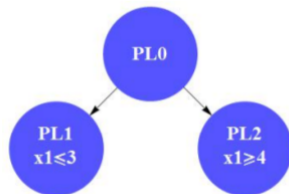
$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

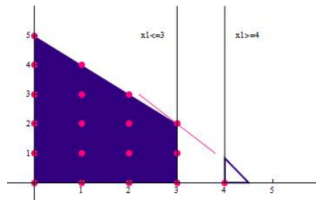
- Problemas pendientes a resolver: {PL1, PL2}.
- Se escoge y resuelve uno de los problemas, por ejemplo PL1.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

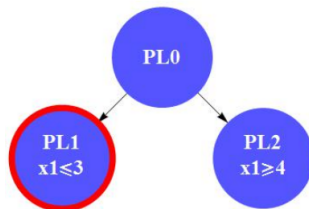
- **Solucion de PL1:** $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z = 23$.
- Se llegó a una solución óptima de PL1 que es entera.
- No tiene sentido buscar más en PL1.
- Esta solución es candidata para solución óptima entera y se debe almacenar.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

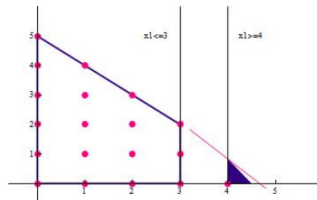
- Problemas pendientes a resolver: {PL2}.
- Se resuelve el problema PL2.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

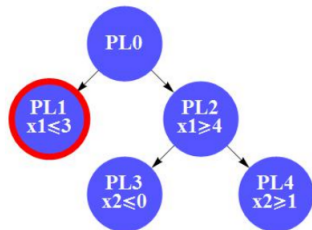
- **Solucion de PL2:** $x_1 = 4$,
 $x_2 = 5/6$, $z = 23.33$.
- Dado que el valor de x_2 no es entero, la solución no es entera.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Es necesario ramificar x_2 en PL2.
- De esta manera, se generan 2 nuevos problemas agregando a PL2 la restricción $x_2 \leq 0$ (PL3) y la restricción $x_2 \geq 1$ (PL4) respectivamente.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Los problemas PL3 y PL4 son como sigue:

Problema PL3

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema PL4

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Los problemas PL3 y PL4 son como sigue:

Problema PL3

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema PL4

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Los problemas PL3 y PL4 son como sigue:

Problema PL3

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema PL4

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

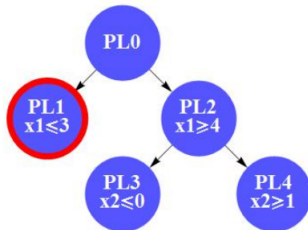
$$x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

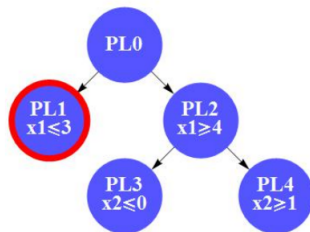
- Problemas pendientes a resolver: {PL3, PL4}.
- Se resuelve el problema PL4.
- PL4 tiene la restricción $x_2 \geq 1$, la cual no es satisfactible considerando las otras restricciones.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

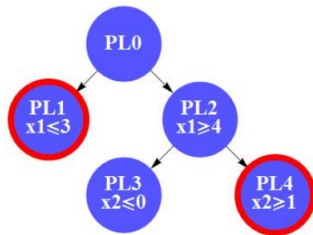
- Problemas pendientes a resolver: {PL3, PL4}.
- Se resuelve el problema PL4.
- PL4 tiene la restricción $x_2 \geq 1$, la cual no es satisfactible considerando las otras restricciones.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

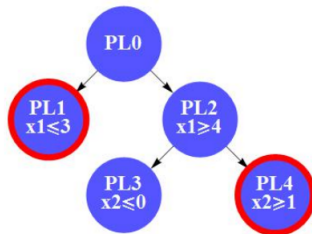
- Problemas pendientes a resolver: {PL3, PL4}.
- Se resuelve el problema PL4.
- PL4 tiene la restricción $x_2 \geq 1$, la cual no es satisfactible considerando las otras restricciones.
- En consecuencia, el problema PL4 no tiene solución y está agotado.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

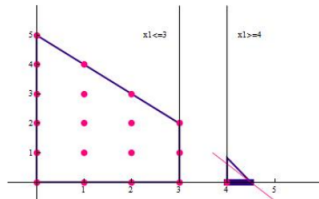
- Problemas pendientes a resolver: {PL3}.
- Se resuelve el problema PL3.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- **Solucion de PL3:** $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 20$.
- Esta solución es entera (pudo haber sido real no entera).
- Sin embargo, el problema está agotado puesto que una solución entera tendrá un valor de $z \leq 22.5$, que es menor que el mejor valor encontrado 23.
- En consecuencia, no se ramifica.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Dado que no hay problemas pendientes, el algoritmo finaliza.
- El algoritmo retorna el mejor candidato en la búsqueda, que fue encontrado en el problema PL1 correspondiente a la solución óptima entera $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $z = 23$.

