Martha Guzmán
Univ. del Valle

Ej: $\log_2 5 = ?$ $\quad \log_2 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} \approx \dfrac{1{,}609}{0{,}693} \approx 2{,}321$

$\log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx \dfrac{0{,}6989}{0{,}3010} \approx 2{,}321$. Así,

$\dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \dfrac{\log 5}{\log 2}$; es decir el cociente es el mismo no los logaritmos entre sí. ($\ln 5 \neq \log 5$, $\ln 2 \neq \log 2$)

Crecimiento Exponencial

Una función se dice que crece exponencialmente si es de la forma $f(x) = ce^{kx}$, $k>0$, $c \in \mathbb{R}$.
Decrece exponencialmente si $k<0$.

Problema 1: Cierta cantidad de dinero c se invierte a una tasa anual del 6% compuesto continuamente. Cuánto debe ser invertido hoy para que dentro de 15 años se obtenga \$1500.000?

S// En primer lugar, recuérdese que se invierte un capital c a un interés del r% anual compuesto continuamente, después de t años el saldo es

$$B(t) = ce^{\frac{r}{100}t}$$

$r = 6\%$, $t = 15$, $B(15) = 1500.000$.

$$B(15) = ce^{0{,}06(15)} = 1500.000 \rightarrow ce^{0{,}9} = 1500.000$$

$$c = \frac{1500.000}{e^{0{,}9}} = \$609.854$$

Problema 2: Un cultivo de bacterias crece exponencialmente. Inicialmente hay 100 bacterias y al cabo de 2 horas se triplican. ¿Cuántas bacterias hay al cabo de 4 horas?

S// Como las bacterias crecen exponencialmente podemos considerar el modelo

$$B(t) = B_0 e^{kt} \quad \text{con } B_0 = \text{Cantidad inicial de bacterias.}$$

Entonces:

$$B(t) = 100e^{kt} \quad \text{pues } B(0) = 100 = B_0 e^0 = B_0$$

$$B(2) = 3(100) = \cancel{300} = 100e^{2k}$$

$$3 = e^{2k} \rightarrow \ln 3 = 2k \rightarrow k = \tfrac{1}{2}\ln 3.$$

Así,

$$B(t) = 100e^{(\frac{1}{2}\ln 3)t} \quad (*)$$

$$B(4) = 100e^{(\frac{1}{2}\ln 3)4} = 100e^{2\ln 3} = 100e^{\ln 3^2} = 100 \cdot 9$$

$$= 900.$$

Al cabo de 4 horas hay 900 bacterias.

También se podo trabajar de la sgte forma:

$2(0)$ $t = 0 \rightarrow B = 100$

$2(1)$ $t = 2 \rightarrow B = 3(100)$

$2(2)$ $t = 4 \rightarrow B = 3(3(100)) = 3^2(100)$

$2(n)$ $t = 2n \rightarrow B = 3^n(100)$. pero $n = t/2$.

$\rightarrow B(t) = 100(3)^{t/2}$. Esta expresión se puede obtener en $*$.

Veamos algunos ejemplos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Ejemplo: Resolver las ecuaciones:

i) $27 = 243^{x}$

ii) $10^3 = 2^{4x-1}$

iii) $7^{5x-2} = 5^{4x+1}$

S// i) $27 = 243^{x}$. En primer lugar $x \in \mathbb{R}$.

Se puede usar la definición $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$ entonces $x = \log_{243} 27$.

Como 27 y 243 son potencias de 3, se puede hacer cambio de base

$$x = \log_{243} 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 243} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^5} = \frac{3}{5}.$$

Como $x \in \mathbb{R}$, $x = 3/5$ sirve como solución.

Otra forma: $27 = 243^{x} \Rightarrow 3^3 = (3^5)^x \Rightarrow 3^3 = 3^{5x}$.

Como 3^x es una función inyectiva $3 = 5x$, de donde $x = 3/5$.

ii) $10^3 = 2^{4x-1}$. $x \in \mathbb{R}$.

Se puede tomar un logaritmo. Como aparece una potencia de 10, tomamos logaritmo en base 10.

$$\log 10^3 = \log 2^{4x-1} \Rightarrow 3 = (4x-1)\log 2$$

$3 = 4x\log 2 - \log 2 \rightarrow 4x\log 2 = 3 + \log 2$

$$x = \frac{3+\log 2}{4\log 2} \qquad x \in \mathbb{R}, \text{ sino como solución.}$$

iii) $7^{5x-2} = 5^{4x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Como no manejan la misma base, se puede tomar a logaritmo natural ó log. decimal a ambos lados de la ecuación.
Tomemos por ej: logaritmo natural.

$$7^{5x-2} = 5^{4x+1}$$

$$\ln 7^{5x-2} = \ln 5^{4x+1}$$

$$(5x-2)\ln 7 = (4x+1)\ln 5$$

$$5x\ln 7 - 2\ln 7 = 4x\ln 5 + \ln 5$$

$$5x\ln 7 - 4x\ln 5 = 2\ln 7 + \ln 5$$

$$x(5\ln 7 - 4\ln 5) = 2\ln 7 + \ln 5$$

$$x = \frac{2\ln 7 + \ln 5}{5\ln 7 - 4\ln 5} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

ej: Resolver las siguientes ecuaciones

i) $\log_7(8x-4) = 2$ iii) $\log_{12} x + \log_{12}(x-4) = 1$

ii) $\log_5(7x-6) = \log_5(4x+1)$ iv) $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \frac{1}{\log_{12} 2}$

5// i) $\log_7(8x-4)=2.$ $\quad 8x-4>0 \Rightarrow x>1/2.$ (valores permitidos)

Tomamos la base 7 y elevamos.

$$7^{\log_7(8x-4)} = 7^2$$

$$8x-4 = 49 \Rightarrow 8x = 53 \Rightarrow x = \frac{53}{8}.$$

Como $53/8 > 1/2$ sirve como solución.

ii) $\log_5(7x-6) = \log_5(4x+1)$ $\quad \left.\begin{array}{l} 7x-6>0 \Rightarrow x>6/7 \\ 4x+1>0 \Rightarrow x>-1/4 \end{array}\right\} \rightarrow x>6/7$

Como $\log_5 x$ es 1-1, $\quad 7x-6=4x+1$

$$3x=7$$

$x = 7/3$. Como $7/3 > 6/7$ sirve.

iii) $\log_{12} x + \log_{12}(x-4) = 1$ $\quad \left.\begin{array}{l} x>0 \\ x-4>0 \Rightarrow x>4 \end{array}\right\} \underline{x>4}$

$$\log_{12} x(x-4) = 1$$

$$x(x-4) = 12 \Rightarrow x^2-4x-12=0.$$

$$(x-6)(x+2)=0.$$

$$x=6 \text{ ó } x=-2.$$

Como $6>4$, sirve, pero $-2 \not> 4$ (no sirve)

iv) $\log_2 x - \log_{1/2}(x-1) = \dfrac{1}{\log_{12} 2}$. $\quad \left.\begin{array}{l} x>0 \\ x>1 \end{array}\right\} x>1$

Hacemos cambio de base

$$\log_2 x - \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 1/2} = \frac{1}{\dfrac{\log_2 2}{\log_2 12}}$$

$$\log_2 x - \frac{\log_2 (x-1)}{-1} = \log_2 12$$

$$\log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_2 12 \Rightarrow \log_2 x(x-1) = \log_2 12$$

$$x(x-1) = 12 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0 \rightarrow x = 4, \quad x = -3$$

Como $x > 1$, sirve $\underline{x = 4}$

Cómo se procede si manejamos desigualdades?

Ej: Resolver:

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}$ iii) $\log_3 (4x-2) \leq \log_3 (x+1)$

ii) $3^{2x+1} > 2^{5x-2}$ iv) $\log_{1/5} (x-8) > \log_{1/5} x$

S/ i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Se puede resolver directamente. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ es una función decreciente $\left(x < y \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^y\right)$ entonces $x+4 > 3x-1$ luego $5 > 2x \rightarrow x < 5/2$.

ii) $3^{2x+1} > 2^{5x-2} \rightarrow \ln 3^{2x+1} > \ln 2^{5x-2}$ pues $\ln x$ es crec

$(2x+1)\ln 3 > (5x-2)\ln 2 \rightarrow 2x\ln 3 + \ln 3 > 5x\ln 2 - 2\ln 2$

$x(2\ln 3 - 5\ln 2) > -\ln 3 - 2\ln 2 \rightarrow x(\ln 9 - \ln 32) > -\ln 3 - \ln 2 \rightarrow$

$x < \frac{-\ln 3 - \ln 2}{\ln 9 - \ln 32}$ pues $\ln 9 < \ln 32$ ($\ln x$ es crec).

iii) $\log_3 (4x-2) \leq \log_3 (x+1)$ $\begin{array}{l} 4x-2>0 \\ x+1>0 \end{array} \rightarrow x > 1/2$. Como $\log_3 x$ es crec. $4x-2 \leq x+1 \rightarrow$

$3x \leq 3 \rightarrow x \leq 1. \rightarrow S: (1/2, 1]$ iv) Ejercicio.