Martha Pauzó
Univ. del valle

En resomen se tiene:

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x>0 \qquad (\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x), \quad f(x)>0$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x>0 \qquad (\log_a f(x))' = \frac{1}{f(x)\cdot \ln a} f'(x), \quad f(x)>0.$

$(e^x)' = e^x, \quad x\in\mathbb{R}. \qquad (e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x), \quad f(x)\in\mathbb{R}.$

$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x\in\mathbb{R} \qquad (a^{f(x)})' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x), \quad f(x)\in\mathbb{R}$

Ejemplo: Hallar la derivada de las sigoientes fonciones:

i) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$ ii) $f(x) = x e^{3x^2-1}$, iii) $f(x) = 3^{2x} + \log_2(x^4+$

iv) $f(x) = x^x$.

S// i) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$. Se pueden usar propiedades antes de derivar.

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+1} = \ln(x^2+1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\,2x = \frac{x}{x^2+1}$$

ii) $f(x) = x e^{3x^2-1}$ Usamos regla del producto

$$f'(x) = e^{3x^2-1} + (x\, e^{3x^2-1})6x$$

$$= e^{3x^2+1} + 6x^2 e^{3x^2-1}$$

iii) $f(x) = 3^{2x} + \log_2(x^4+1)$

$$f'(x) = 3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot 2 + \frac{1}{(x^4+1)\ln 2} \cdot 4x^3$$

$$= 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 + \frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 2}$$

iv) $f(x) = x^x$.

observe: para derivar x^x, no se pueden usar las reglas de derivación. se puede derivar de dos maneras:
Una escribiendo x^x en forma exponencial ó usando lo que se conoce como derivación logarítmica, la cuál consiste en tomar logaritmo a ambos lados de la ecuación y luego derivar. Veamos:

- Escribimos x^x en forma exponencial.

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$$

- Usando derivación logarítmica

$$y = x^x \rightarrow \ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1) \rightarrow y' = x^x(\ln x + 1).$$

Ej: Derivar $y = \dfrac{\sqrt[5]{2x^2-1}}{\sqrt[4]{(4x+2)^3}}$.

S// Aunque se pueden usar las reglas de derivación para hallar $\frac{dy}{dx}$, es más sencillo usar derivación logarítmica.

$$y = \frac{\sqrt[5]{2x^2-1}}{\sqrt[4]{(4x+2)^3}} = \frac{(2x^2-1)^{1/5}}{(4x+2)^{3/4}}$$

$$\ln y = \ln \frac{(2x^2-1)^{1/5}}{(4x+2)^{3/4}} = \ln (2x^2-1)^{1/5} - \ln (4x+2)^{3/4}$$

$$\ln y = \tfrac{1}{5}\ln(2x^2-1) - \tfrac{3}{4}\ln(4x+2).$$ Derivamos respecto a x.

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{5}\,\frac{4x}{2x^2-1} - \frac{3}{4}\,\frac{4}{4x+2}$$

$$y' = y\left(\frac{4x}{5(2x^2-1)} - \frac{3}{4x+2}\right) = y\,\frac{4x(4x+2)-3\cdot 5(2x^2-1)}{5(2x^2-1)(4x+2)}$$

$$y' = \frac{(2x^2-1)^{1/5}}{(4x+2)^{3/4}}\;\frac{16x^2+8x-30x^2+15}{5(2x^2-1)(4x+2)}$$

$$y' = \frac{(2x^2-1)^{1/5}}{(4x+2)^{3/4}}\;\frac{-14x^2+8x+15}{5(2x^2-1)(4x+2)}$$

Observación: Si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, se puede probar que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ej: Si $f(x) = x^{\sqrt{5}}$, entonces $f'(x) = \sqrt{5}\,x^{\sqrt{5}-1}$.

Una aplicación inmediata de la derivación implícita se tiene en problemas de razones de cambio relacionadas. Pero antes de ver estos problemas, vemos la derivada como razón de cambio.

DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

Si $f(x) = mx+b$ es una función lineal, la pendiente representa la variación de y respecto a cambios en x, es decir $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, luego m es la razón de cambio de la variable y respecto a la variable x.

Ahora, si $y = f(x)$ es una función derivable, entonces la derivada $\frac{dy}{dx}$ en x_0, representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $x = x_0$ y por tanto la derivada es una razón de cambio de la variable y respecto a x.

La derivada de una función $y = f(x)$ tiene diferentes interpretaciones, dependiendo de lo que representa la función.

Vimos como representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = x_0$.

Si la función $y = f(x)$ representa la posición de una partícula moviéndose sobre una línea recta entonces:

La velocidad media V_m del objeto en el intervalo de tiempo $[t, t+h]$ es

$$V_m = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

De otro lado, si se quiere hallar la velocidad instantánea en el tiempo t, hacemos que $t+h \to t$, pero esto es válido si $h \to 0$. Así, la velocidad instantánea en el tiempo t es

$$V_I = \lim_{h \to 0} V_m = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

De esta manera se tiene que la velocidad instantánea de una partícula en movimiento en el tiempo $t = t_0$ es la derivada de la función posición en $t = t_0$, es decir, $V_I = f'(t_0)$.

Ej: Halle la razón de cambio del área de un círculo respecto a su circunferencia.

S/ Si denotamos por A el área del círculo de radio r, $A = \pi r^2$. La circunferencia o longitud es $L = 2\pi r$, luego $r = L/2\pi$. Por tanto

$$A = \pi r^2 = \pi \left(L/2\pi \right)^2 = \frac{\cancel{\pi} L^2}{4\pi^{\cancel{2}}} = \frac{L^2}{4\pi}$$

Como $A(L) = \frac{L^2}{4\pi}$, entonces $A'(L) = \frac{2L}{4\pi} = \frac{L}{2\pi}$

Habiendo visto la derivada como razón de cambio veremos problemas de Razones de cambio relacionados.

Razones de cambio Relacionadas o tasas Relacionadas

En una ecuación en las variables x e y, puede suceder que ellas dependan del tiempo t. Las razones de cambio de estas variables respecto al tiempo t, son $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$.
Estas razones se encuentran relacionadas por medio de la ecuación. Si se conoce una de las variaciones, se puede hallar la otra.

Para resolver problemas de este tipo, es importante tener en cuenta lo siguiente:

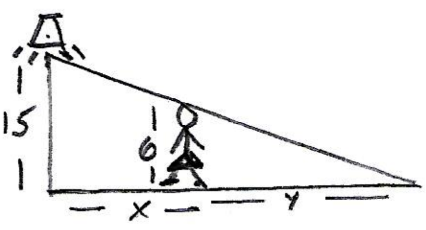
- Leer bién el problema.
- Hacer un dibujo (si es posible)
- Identificar las variables
- Encontrar una ecuación que relacione las variables.

Problema 1: Una mujer de 6 pies de altura camina a 5 P/sg, alejándose de una luz que está a 15 Pies de altura sobre el suelo. Cuando la mujer está a 10 pies de la base de la luz:

a) A que ritmo está cambiando la longitud de su sombra?

b) A qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?

S1

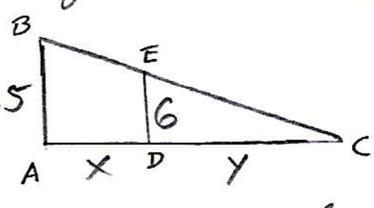


Sea x: Distancia de la mujer a la base de la luz

y: Longitud de la sombra.

a) Se pregunta por $\frac{dy}{dt}$, si $x = 10$ y $\frac{dx}{dt} = 5$

Observe que los siguientes triángulos son semejantes



Δ ABC y Δ DEC.

Por tanto existe proporción entre sus lados.

Así,
$$\frac{15}{x+y} = \frac{6}{y} \Rightarrow 15y = 6x + 6y$$
$$9y = 6x$$
$$y = 6/9\, x$$

Por tanto $dy/dt = \frac{6}{9}\frac{dx}{dt} = \frac{6}{9} \cdot 5 = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$

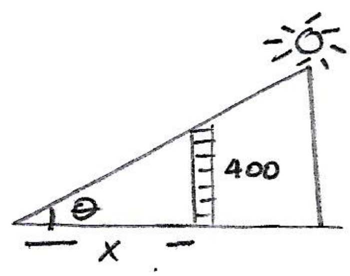
La longitud de la sombra crece a razón de $\frac{10}{3}$ P/sg.

b). El extremo de la sombra se mueve a razón de: $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 5 + \frac{10}{3} = \frac{25}{3}$

El extremo de la sombra se mueve a razón de $\frac{25}{3}$ p/sg.

Problema 2: El ángulo de elevación del sol disminuye a razón de 0,25 rad/h. ¿Con qué rapidez aumenta la longitud de la sombra producida por un edificio de 400 pies de altura, cuando el ángulo de elevación del sol es $\pi/6$?

Sl



Sea x: Longitud de la sombra.

$\frac{dx}{dt} = ?$ si $\frac{d\theta}{dt} = -0{,}25$, $\theta = \pi/6$

Se busca una relación entre el ángulo θ y la longitud de la sombra.

$$\tan\theta = \frac{400}{x} \quad \text{entonces} \quad \frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d}{dt}\frac{400}{x}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{400}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{-400}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{\cos^2\pi/6}(-0{,}25) = \frac{-400}{x^2}\frac{dx}{dt}. \qquad x = ?$$

Si $\theta = \pi/6$, $\tan\theta = \frac{400}{x} \rightarrow x = \frac{400}{\tan\pi/6} = \frac{400}{\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}} = 400\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\cos^2 \pi/6}(-0{,}25) = \frac{-400}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad x = 400\sqrt{3}$$

$$\frac{-0{,}25}{(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{-400}{(400\sqrt{3})^2}\,\frac{dx}{dt}$$

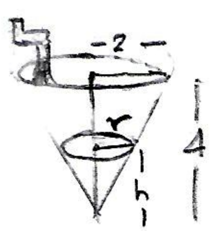
$$\frac{-1/4}{3/4} = \frac{-400}{(400)^2(3)}\,\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{400 \cdot 3}\,\frac{dx}{dt}$$

$$400 = \frac{dx}{dt}$$

La sombra del edificio aumenta a razón de 400 P/h

Problema 3: Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular invertido, con radio de la base igual a 2 mt y 4 mt de altura. Si se le bombea agua a razón de 2 m³/mto, Calcular la velocidad con la que sube el nivel del agua, cuando la profundidad alcanza 3 mts.

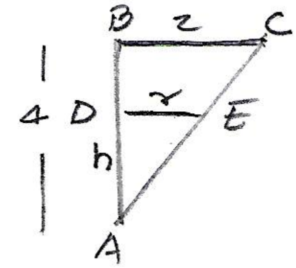


Se quiere hallar $\frac{dh}{dt}$, cuando $h = 3$, sabiendo $\frac{dv}{dt} = 2$

El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Se puede derivar usando regla del producto, pero tendría que buscarse $\frac{dr}{dt}$

pues aparece en la derivada.
Otra forma es expresar el volomen en términos de h para luego derivar respecto a t, pero para ello se debe buscar una relación entre r y h. procedemos por este camino.

observe que los triángolos ABC y ADE son semejantes, luego hay proporción entre sus lados. Así,



$$\frac{2}{4} = \frac{r}{h} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{h}.$$

Como se qoiere expresar el volomen en términos de h, se busca r en términos de h. luego como

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{h} \Rightarrow r = h/2.$$

Por lo tanto $\quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi\frac{h^2}{4}h = \frac{1}{12}\pi h^3.$

Así, $\quad V(h) = \frac{1}{12}\pi h^3.$ Derivamos respecto al tiempo.

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi h^3\right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{3}{12}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}.$$

como $\frac{dv}{dt} = 2$, y $h = 3$., se tiene $\quad 2 = \frac{1}{4}\pi \cdot (3)^2 \frac{dh}{dt}.$

de donde $\quad \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{8}{9\pi}$

El nivel del agua aumenta a razón de $\frac{8}{9\pi}$ m/mto.