
Departamento de Matemáticas

Cálculo I

Taller N°9: Límites y continuidad



Profesoras: Martha Pinzón y Daniela Vásquez.

Abril 16 de 2021

1. Calcule los siguientes límites si existen

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

d) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta - \sec \theta}{1 - \cos \theta}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{3 \operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{\operatorname{sen} 3x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(5x-5)}{x^3-1}$

2. Halle si existen, asíntotas horizontales y verticales de las funciones dadas.

a) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

b) $f(x) = 7x^6 - 3x^4 + 8$

c) $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$

3. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$ no existe.

4. Use el teorema del sandwich para calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cos \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

5. Suponga que $f(x)$ es una función acotada (es decir, existe una constante real $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in D_f$). Use el teorema del Sandwich para probar que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$.

Definición: Sea f una función y a un número real perteneciente al dominio de f . Se dice que f es continua en a si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Si f no es continua en un punto a , se dice que f es discontinua en a .

6. Muestre que las siguientes funciones son continuas en $x = a$.

a) $f(x) = -5x^3 - 3x^2 + x - 2$; $a = 2$.

b) $f(x) = \tan x$; $a = \frac{\pi}{4}$.

7. Sea $f(x) = |x|$. Muestre que f es continua en $x = 0$. Es f derivable en $x = 0$?

8. Muestre que las siguientes funciones son continuas en $x = a$.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x^2-1} & \text{si } x \in [0, 3], x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} ; \quad a = 1.$

b) $f(x) = |x| - x$; $a = 0$.

9. Determine si la función f es continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 5}{x + 3} & \text{si } x \in (-3, 0] \\ \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

10. Halle los valores de la constante a para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} -2a^2 + x + 5 & \text{si } x \geq -2 \\ \frac{5a}{x+1} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

es continua en $x = -2$.

11. Halle los valores de la constante m , para que la función sea continua en $x = m$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 7 & \text{si } x \leq m \\ -2x + 3 & \text{si } x > m \end{cases}$$

12. Halle la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$. (La recta normal a la curva en un punto P , es la recta perpendicular a la recta tangente a la curva en P).