Martha Pinzón
Univ. del Valle.

Vimos el concepto de limite y sus propiedades. Con esto retomamos el concepto de derivada de una función. Recordemos:

DERIVADA: La derivada de f en $x=a$ es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{si el limite existe.}$$

Geométricamente representa la pendiente de la recta tangente en $x=a$.

En general, la derivada de f en x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \text{si el limite existe.}$$

$f'(x)$ es una función, con dominio los x para los que el limite existe.

Ej1 Si $f(x) = mx+b$, $f'(x) = m$.

(La recta tangente en un punto de la gráfica de f, es la misma recta, luego su derivada que es la pendiente de la tangente, es igual a m.

Ej: si $f(x) = -5x+2$, $f'(x) = -5$, luego $f'(1) = -5$
$f'(7) = -5$.

Ej 2: Si $f(x) = ax^2+bx+c$.

$f'(x) = 2ax+b$. (Lo vimos antes).

Ej 3: Si $f(x)=c$, entonces $f'(x)=0$.

En efecto,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0.$$

Ej 4: Si $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, probar que $f'(x)=nx^{n-1}$!

Para hallar $f'(x)$ necesitamos usar binomio de newton, pues

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$(x+h)^n=\binom{n}{0}x^n h^0+\binom{n}{1}x^{n-1}h^1+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots\binom{n}{n-1}x h^{n-1}+\binom{n}{n}x^0 h^n$$

Pero $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $n!=1\cdot 2\cdots n$

$3!=3\cdot 2\cdot 1=6.$

$5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120.$

Se define $0!=1$.

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{(n-0)!\,0!}=1,\quad \binom{n}{1}=\frac{n!}{(n-1)!\,1!}=\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=n$$

Propiedad. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. Ej: $\underbrace{\binom{n}{0}=\binom{n}{n}}_{=1}$, $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

Así,

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+\binom{n}{n-1}xh^{n-1}+\binom{n}{n}h^n-x^n}{h}$$

$$=\frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n-\cancel{x^n}}{h}$$

$$=\frac{h\left(nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\cdots\ n\cdot xh^{n-2}+h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \quad nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots \; nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

Así, $\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots \; h^{n-1}\right)$$

$f'(x) = nx^{n-1}$, $\quad n\in\mathbb{N}$. $(n\in\mathbb{Z}^+)$

Ej: $\quad f(x) = x^7$, ent. $\quad f'(x) = 7x^6$.

Las siguientes reglas permiten hallar la derivada de funciones, sin usar la definición.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Si f, g son funciones derivables en $x=a$, entonces también lo son $f\pm g$, $f\,g$, f/g, $g(a)\neq 0$, además:

i) $(f\pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

ii) $(cf)'(a) = c\,f'(a)$

iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

iv) $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Observe que esta regla se puede usar para calcular la derivada de x^n, con $n\in\mathbb{Z}^-$.

$f(x) = x^n$, $\; n\in\mathbb{Z}^-$

$f(x) = x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$, $\quad -n\in\mathbb{Z}^+$.

Por la regla del cociente

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{1' x^{-n} - (x^{-n})' \cdot 1}{(x^{-n})^2}$$

(¬$-n \in \mathbb{Z}^+$ luego se puede aplicar la regla al x^{-n}).

$$= \frac{0 x^{-n} - (-n x^{-n-1})}{x^{-2n}} = \frac{n x^{-n-1}}{x^{-2n}}$$

$$= n x^{-n-1} \cdot x^{2n} = n x^{-n-1+2n} = n x^{n-1}.$$

Así, si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f'(x) = n x^{n-1}$.

Ej: Hallar $f'(x)$ si

i) $f(x) = 2x^4 - \frac{3}{x^2} + x - 1$ ii) $f(x) = (3x+1)^2$

iii) $f(x) = \frac{-x^2}{3x+1}$

S// i) $f(x) = 2x^4 - \frac{3}{x^2} + x - 1 = 2x^4 - 3x^{-2} + x - 1$.

$f'(x) = 8x^3 + 6x^{-3} + 1 = 8x^3 + \frac{6}{x^3} + 1$.

ii) $f(x) = (3x+1)^2$ se puede aplicar regla del producto o desarrollar el cuadrado.

$f(x) = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$. Entonces:

$f'(x) = 18x + 6$

iii) $f(x) = \frac{-x^2}{3x+1}$.

$$f'(x) = \frac{(-x^2)'(3x+1) - (3x+1)'(-x^2)}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x(3x+1) - 3(-x^2)}{(3x+1)^2} = \frac{-6x^2 - 2x + 3x^2}{(3x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x}{(3x+1)^2}$$

Ejemplo: Halle $f'(-1)$ si $f(x)=\begin{cases} 2x^2+1 & x\leq -1 \\ -4x+2 & x>-1 \end{cases}$

S// por definición

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(1)}{h}$$

Para calcular dicho límite, se deben buscar límites laterales.
Esto dá origen al concepto de derivada lateral.

DEFINICIÓN: Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene un número a.
f es derivable en a por la izquierda, si

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{existe.}$$

Cuando el límite existe, se denota por $f_-'(a)$

f es derivable en a por la derecha, si

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{existe.}$$

Si el límite existe, se denota por $f_+'(a)$

Claramente f es derivable en $x=a$ sii f es derivable en a por izquierda y derecha y las derivadas laterales son iguales, es decir

$$f'(a)=L \text{ si y sólo si } f_-'(a)=L=f_+'(a).$$

Retomemos el ejercicio. Hallar $f'(-1)$ si $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & x\leq -1\\ -4x+2 & x>-1\end{cases}$

S// Como decíamos, buscamos derivadas laterales.

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2(-1+h)^2+1-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2-4h+2h^2-2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-4h+2h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}(-4+2h)}{\cancel{h}}$$
$$= -4.$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-4(-1+h)+2-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{4-4h-1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3-4h}{h}. \quad \text{No existe}$$

Estos límites muestran que f no es derivable en $x=-1$, es decir $f'(-1)$ no existe.

Veamos que sucede si procedemos con reglas de derivación.

Si $x<-1$ ent $f'_-(x)=4x$

Si $x>-1$, ent $f'_+(x)=-4$.

Entonces $f'_-(-1)=-4$. Se concluye que $f'(-1)=-4$?

$f'_+(-1)=-4$.

Vimos que usando la definición la derivada en $x=-1$ no existe. Qué sucede cuando se usan reglas de derivación?

Veamos si f es continua en $x=-1$.

f es continua en $x=-1$ si $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$.

Para hallar $\lim_{x \to -1} f(x)$, buscamos límites laterales.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (2x^2+1) = 2(-1)^2+1 = 3.$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-4x+2) = -4(-1)+2 = 6.$$

Como los límites laterales son diferentes, f no es continua en $x=-1$.

Sí, se pueden usar reglas de derivación siempre que la función sea continua en el punto. veremos porqué.

El ejemplo nos muestra una función que no es continua ni es derivable.

Veamos qué sucede con la función $f(x) = |x|$ en $x=0$.

i) $|x|$ es continua en $x=0$? $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$?

Buscamos límites laterales.

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = -(0) = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = 0.$$

y $f(0) = |0| = 0$.

Luego $\lim_{x \to 0} |x| = f(0)$. Por tanto $f(x) = |x|$ es continuo en $x=0$.

Veamos si es derivable. Buscamos derivadas laterales.

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)-|0|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)-|0|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ f no es derivable en $x=0$.

Así, f es continua en $x=0$, pero no derivable, luego

$$\text{continuidad} \not\Rightarrow \text{derivabilidad}.$$

La relación correcta es

$$\text{Derivabilidad} \Rightarrow \text{Continuidad}$$

Es decir, si f es una función derivable entonces la función es continua. es decir antes de ser derivable la función, primero debe ser continua. Este resultado se puede enunciar en un Teorema.

<u>TEOREMA</u>: Si f es una función derivable en $x=a$, entonces es continua en $x=a$.

D// Para poder probar el teorema, necesitamos el siguiente resultado.

Las siguientes definiciones de derivada en $x=a$, $f'(a)$ son equivalentes.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{es equivalente}$$

a $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Para probarlo, es suficiente hacer un cambio de variable. Sea $x=a+h$. Si $h\to 0$, $x\to a$, luego

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

De igual manera, del segundo límite se llega al primero.

Ahora, podemos demostrar el teorema.

D// Se debe probar si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$, es decir que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

En efecto, escribimos $f(x)$ como $f(x)=f(a)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$

Entonces,
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$ (pues cada límite existe)

$$= f(a) + \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$$ (De nuevo, cada límite existe)

$$= f(a) + f'(a)\lim_{x\to a}(x-a)$$
$$= f(a) + f'(a)\cdot(a-a)$$
$$= f(a).$$

Por tanto f es continua en $x=a$.

Veamos ejemplos de cálculo de derivadas.

Ej: Sea $f(x)=\sqrt{x}$. $x\in[0,\infty)$. Halle $f'(x)$ indicando su dominio.

S// Como el dominio de f es un intervalo, $[0,\infty)$ se debe buscar la derivada de f en $x=0$ por la derecha y la derivada para $x\in(0,\infty)$.

Sea $x\in(0,\infty)$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\,\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim_{h \to 0}(x+h)} + \sqrt{\lim_{h \to 0} x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Hasta ahora, se tiene si $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.
Falta determinar si f es derivable en $x=0$ por derecha.

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} \cdot \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h\sqrt{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

Luego $f(x) = \sqrt{x}$, no es derivable en $x=0$.
Por lo tanto, si $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, con dominio $(0, \infty)$.

Ej 2: Halle los valores de las constantes a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 2 & x \leq 1 \\ 4x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

Sea derivable en $x = 1$.