Martha Quzo
Univ. del Valle

Ejercicio 2: $a, b = ?$ $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 2 & x \le 1 \\ 4x - 1 & x > 1 \end{cases}$
sea derivable en $x = 1$

S// Recuerdese que para que f sea derivable en $x=1$,
Primero debe ser continua en $x=1$.
Así, se cumple $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Para hallar el limite en $x=1$, buscamos limites laterales.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax^2 - 2bx + 2) = a - 2b + 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x - 1) = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow a - 2b + 2 = 3.$$

de otro lado $f(1) = a - 2b + 2$.

f es continua si $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$
luego

$$a - 2b + 2 = 3 = a - 2b + 2.$$

Así, se reduce a $a - 2b + 2 = 3$.

De otro lado como f es continua, buscamos $f'(1)$ usando reglas de derivación

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 2b & x < 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$$

$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} (2ax - 2b) = 2a - 2b$, $f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} 4$, luego para que f sea derivable en $x=1$, $f'_-(1) = f'_+(1)$

Así, $2a-2b=4$.

por lo tanto se tienen dos ecuaciones.

$a-2b+2=3$ (por continuidad)

$2a-2b=4$ (por derivabilidad)

Entonces $\left.\begin{array}{ll} a-2b=1 & (1) \\ a-b=2 & (2) \end{array}\right\} \rightarrow$ Restando (2)−(1)

$\underline{b=1}$

como $a-b=2 \rightarrow a=b+2$

$\underline{a=3}$

Así,

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+2 & x\leq 1 \\ 4x-1 & x>1 \end{cases}$$

es derivable en $x=1$.

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para hallar la derivada de las funciones trigonométricas primero se debe hallar la derivada del $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

veamos

$$(\operatorname{sen} x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$(\operatorname{sen} x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}x \cdot \cos h + \cos x \cdot \operatorname{sen}h - \operatorname{sen}x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}x(\cos h - 1) + \cos x \cdot \operatorname{sen}h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \operatorname{sen}h}{h}$$

$$= \operatorname{sen}x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}^{\to 0} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}h}{h}^{\to 1}$$

$$= \operatorname{sen}x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x.$$

(como $\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$

ent $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

ya que $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} (-1)\left(\frac{1 - \cos h}{h}\right)$

$-1 \cdot 0 = 0.$

Así, $(\operatorname{sen}x)' = \cos x.$

Hallamos la derivada de $\cos x$.

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \cos x - \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{-\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}h}{h}$$

$$= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}^{\to 0} - \operatorname{sen}x \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}h}{h}$$

$$= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen}x \cdot 1 = -\operatorname{sen}x.$$

Así, se tiene $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Usando la derivada del sen x y cos x, podemos hallar la derivada de las func. trigonométricas restantes.

Ej: Halle $f'(x)$ si $f(x) = \tan x$.

S// $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

En general, se puede probar:

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ $\qquad$ $(\cot x) = -\csc^2 x$

Ej: Halle la derivada de $f(x)$ si

i) $f(x) = \cos^2 x$, $\quad$ ii) $f(x) = \operatorname{Sen}(3x-1)$

S// i) $f(x) = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$

$f'(x) = (\cos x)' \cos x + (\cos x)' \cos x = 2\cos' x \cos x$

$2(-\operatorname{sen} x)\cos x = -2\operatorname{sen} x \cos x$.

ii) $f(x) = \text{sen}(3x+1)$

Para derivar esta función usando las reglas de derivación vistas, se vuelve muy complicado.

observe que $\text{sen}(3x+1)$ es composición de dos funciones una $g(x) = 3x+1$, la otra $h(x) = \text{sen}\,x$.

La siguiente regla permite derivar funciones compuestas.

REGLA DE LA CADENA

Sea $y = f(u)$ una función derivable en la vble u, y $u = g(x)$ una función derivable en la variable x. Entonces y es una función derivable en la variable x. además

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

(Notación de Leibnitz) $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Hablando en términos de función compuesta se tiene:

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $h = f \circ g$ es derivable respecto a x y además

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

Derivada de la función exterior evaluada en la interior, por la derivada de la función interna.

Los ejemplos anteriores los podemos resolver usando la regla de la cadena.

i) $f(x) = \cos^2 x = (\cos x)^2$

$$f'(x) = 2(\cos x)(\cos x)' = 2\cos x(-\operatorname{sen} x)$$
$$= -2\operatorname{sen} x \cos x.$$

ii) $f(x) = \operatorname{sen}(3x+1)$

$$f'(x) = \cos(3x+1)(3x+1)' = 3\cos(3x+1)$$

En general se puede probar que si

$$y = (f(x))^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{entonces}$$

$$y' = n(f(x))^{n-1} f'(x).$$

S// $\quad y = (f(x))^n$

Sea $u = f(x)$. Entonces

$y = u^n$. Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$. Como $y = u^n$, $\dfrac{dy}{du} = nu^{n-1}$

así $\quad \dfrac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$$= n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

Ej: Si $f(x) = (2x-3)^{50}$, $f'(x) = 50(2x-3)^{49}(2x-3)'$

$$f'(x) = 50(2x-3)^{49} \cdot 2 = 100(2x-3)^{49}.$$

Ej: Halle $f'(x)$ si $f(x) = \left(\dfrac{-x+3}{4x-1}\right)^3$

S/ $f'(x) = 3\left(\frac{-x+3}{4x-1}\right)^2 \left(\frac{-x+3}{4x-1}\right)'$

$$= 3\left(\frac{-x+3}{4x-1}\right)^2 \frac{(-x+3)'(4x-1)-(4x-1)'(-x+3)}{(4x-1)^2}$$

$$= 3\left(\frac{-x+3}{4x-1}\right)\left(\frac{-1(4x-1)-4(-x+3)}{(4x-1)^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{-x+3}{4x-1}\right)^2 \frac{(-4x+1+4x-12)}{(4x-1)^2}$$

$$= 3\left(\frac{-x+3}{4x-1}\right)^2 \frac{-11}{(4x-1)^2} = \frac{-33(-x+3)^2}{(4x-1)^4}$$

Ejemplo: Halle $\frac{dy}{dx}$ si f es una función derivable.

i) $y = f(x^3)$ iii) $y = f(\sqrt{x^2+4})$

ii) $y = f^2(2x^3-1)$ iv) $y = \sqrt{1+f^2(3x+5)}$

S// i) $y = f(x^3)$

$y' = (f(x^3))' = f'(x^3)(x^3)' = f'(x^3)3x^2$

ii) $y = f^2(2x^3-1)$

$$\frac{dy}{dx} = [f^2(2x^3-1)]' = 2f(2x^3-1)[f(2x^3-1)]'$$

$$= 2f(2x^3-1)f'(2x^3-1)(2x^3-1)'$$

$$= 2f(2x^3-1)f'(2x^3-1)6x^2$$

$$= 12x^2 f(2x^3-1)f'(2x^3-1)$$

iii) $y = f(\sqrt{x^2+4})$.

$$\frac{dy}{dx} = f'(\sqrt{x^2+4})(\sqrt{x^2+4})' = f'(\sqrt{x^2+4})\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot(x^2+4)'$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(\sqrt{x^2+4})\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}} = \frac{x f'(\sqrt{x^2+4})}{\sqrt{x^2+4}}$$

iv) $y = \sqrt{1+f^2(3x+5)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1+f^2(3x+5)}}\,[1+f^2(3x+5)]'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+f^2(3x+5)}} \cdot 2f(3x+5)[f(3x+5)]'$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+f^2(3x+5)}} \cdot \cancel{2}f(3x+5)\,f'(3x+5)(3x+5)'$$

$$= \frac{f(3x+5)\,f'(3x+5)\cdot 3}{\sqrt{1+f^2(3x+5)}}$$

$$= \frac{3f(3x+5)\,f'(3x+5)}{\sqrt{1+f^2(3x+5)}}$$

Ejemplo: Halle $\frac{dy}{dx}$ si $y = 2u^3 - 3u$, $u = x^4 - 3x^2 + 1$, en $x = -1$

S// Por la regla de la cadena, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = (6u^2-3)(4x^3-6x).$$

Si $x=-1$, $u = (-1)^4 - 3(-1)^2 + 1 = 1-3+1 = -1$. Entonces

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = (6(-1)^2-3)(4(-1)^3-6(-1)) = 3\cdot 2 = 6.$$

Ejercicio: Sea $f(x) = x\, g^2(\sqrt{x^2+3})$. Si g es una función derivable y $g(2)=3$ y $g'(2)=-2$ halle $f'(-1)$.

Sol $\quad f(x) = x\, g^2(\sqrt{x^2+3})$ $\quad$ (observe: $g^2(\sqrt{x^2+3}) = (g(\sqrt{x^2+3}))^2$

Por regla del producto, $\quad f'(x) = g^2(\sqrt{x^2+3}) + x \cdot 2g(\sqrt{x^2+3})\,(g(\sqrt{x^2+3}))'$

$$f'(x) = g^2(\sqrt{x^2+3}) + 2x\, g(\sqrt{x^2+3})\, g'(\sqrt{x^2+3})\,(\sqrt{x^2+3})'$$

$$f'(x) = g^2(\sqrt{x^2+3}) + 2x\, g(\sqrt{x^2+3})\, g'(\sqrt{x^2+3}) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

$$= g^2(\sqrt{x^2+3}) + \frac{2x^2 g(\sqrt{x^2+3})\, g'(\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$f'(-1) = g^2(\sqrt{4}) + \frac{2(-1)^2 g(\sqrt{4})\, g'(\sqrt{4})}{\sqrt{4}}$$

$$= g^2(2) + \frac{\cancel{2}\, g(2)\, g'(2)}{\cancel{2}}$$

$$= 9 + 3(-2)$$

$$= 9 - 6$$

$$= 3.$$