Propiedades de los límites.

Las siguientes propiedades permiten calcular límites, sin tener que elaborar tablas. Veamos las propiedades en teoremas.

TEOREMA 1: Sea f una función tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to a} f(x) = M, \text{ entonces } L = M.$$

Es decir, si el límite de una función existe, entonces es único.

TEOREMA 2: Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, entonces

i) $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

ii) $\lim_{x\to a} (cf)(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$, $c \in \mathbb{R}$

iii) $\lim_{x\to a} (fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

iv) $\lim_{x\to a} (f/g)(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

v) $\lim_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

vi) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} x} = \sqrt[n]{a}$

En general $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

límites elementales $\lim_{x\to a} x = a$, $\lim_{x\to a} c = c$

Cada límite se prueba usando la definición formal de límite.

Teorema 3: Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

Ejemplos: Halle los siguientes límites si existen

i) $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 1)$ ii) $\lim_{x \to 1} \frac{4x-5}{-1-x}$, iii) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2}{3-x}$

iv) $\lim_{x \to 3} f(x)$ $f(x) = \begin{cases} 2/x + 1/3 & x \neq 3 \\ \pi & x = 3 \end{cases}$ v) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2}$

S// i) $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \to 2} 3x^2 - \lim_{x \to 2} 4x + \lim_{x \to 2} 1$

$$= 3 \lim_{x \to 2} x^2 - 4 \lim_{x \to 2} x + 1$$

$$= 3 \left(\lim_{x \to 2} x\right)^2 - 4(2) + 1$$

$$= 3(2)^2 - 4(2) + 1 = 12 - 8 + 1 = 5.$$

En general si $f(x)$ es un polinomio, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

En efecto, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_n x^n + \dots a_1 x + a_0)$$

$$= a_n \lim_{x \to a} x^n + a_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} \dots a_1 \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} a_0$$

$$= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots a_1 a + a_0 = f(a).$$

ii) $\lim_{x \to 1} \frac{4x-5}{-1-x} = \frac{\lim_{x \to 1} (4x-5)}{\lim_{x \to 1} (-1-x)} = \frac{4-5}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = 1/2.$

En general, si $f(x)$ es una función racional es decir $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ p, q polinomios, entonces

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

En efecto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} P(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \dfrac{P(a)}{q(a)} = f(a)$

iii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2}{3-x} = ?$ como $\lim\limits_{x\to 3} 2x^2 \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to 3} 3-x = 0$, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2}{3-x}$ no existe

IV) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1.$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \dfrac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0} x^2+4} + \lim\limits_{x\to 0} 2} = \dfrac{1}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{1}{4}.$