

Teorema de la dimensión

$A_{m \times n}$ .  $N_A$ : espacio nulo de  $A$

$C_A$ : espacio columna

Nulidad de  $A$  ( $\nu(A)$ ): es la dimensión del espacio nulo de  $A$

Rango de  $A$  ( $\rho(A)$ ): " " " " " " columna de  $A$ .

$$\nu(A) = \dim(N_A) \quad y \quad \rho(A) = \dim(C_A).$$

Teorema (relación entre  $\nu(A)$  y  $\rho(A)$ ).

Sea  $A$  una matriz de tamaño  $m \times n$ . Entonces.

$$\nu(A) + \rho(A) = n$$

$$\dim(N_A) + \dim(C_A) = n.$$

$\text{Nu}(T)$ : nucleo de la T.L.  $T$ .

$\text{Im}(T)$ : Imagen de la T.L.  $T$

Nulidad  $T$  ( $\kappa(T)$ ): es la dimensión del  $\text{Nu}(T)$ .

Rango  $T$  ( $\tau(T)$ ): " " " " de  $\text{Im}(T)$ .

$$\kappa(T) = \dim(\text{Nu}(T)) \quad y \quad \tau(T) = \dim(\text{Im}(T)).$$

Teorema de la dimensión.

Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales.

Si  $T: V \rightarrow W$  es un transformación lineal, entonces

$$\dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V), \quad \dim(V) < \infty.$$

$$K(T) + \tau(T) = \dim(V)$$

$$\text{Nulidad}(T) + \text{rango}(T) = \dim(V).$$

Ejemplo. calcular el rango y la nulidad de

$$T: M_{2 \times 2} \rightarrow P_1.$$

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - 2b + (a + 2c + 3d)x.$$

Solución.

Para calcular  $K(T)$  y  $\tau(T)$ , basta con determinar el rango y la nulidad de una matriz asociada a  $T$ .

Sean .  $B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{V_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{V_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_4} \right\}$  base de  $M_{2 \times 2}$ .

.  $B = \{1, x\}$  base de  $P_1$

$$A_T = [A_T]_{BB'} = \left( [T(V_1)]_{B'}, [T(V_2)]_{B'}, [T(V_3)]_{B'}, [T(V_4)]_{B'} \right).$$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ F.E. de } A_T$$

Fuego, el rango  $A_T = 2 = \text{nulidad de } A_T$ .

Por tanto, rango ( $T$ ) = 2 = nulidad de ( $T$ ).

### Transformaciones lineales inyectivas y sobreyectivas

**Definición 6** [Transformación lineal inyectiva]. Diremos que  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal inyectiva, si y sólo si, para cada  $\mathbf{w}$  de  $Im(T)$ , existe un único  $\mathbf{v} \in V$  tal que  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ . (Ver Fig. 5.10)

$T$  es inyectiva si  $T(v_1) = T(v_2)$  implica  $v_1 = v_2$ .

$v_1 \neq v_2$  implica  $T(v_1) \neq T(v_2)$ .

Ejemplo.  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿  $T$  es una T.L. inyectiva ?

Solución.

$$\text{Supong. que } T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = y_2$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

$$1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

$$x_1 + y_2 = x_2 + y_1$$

$$x_1 = x_2$$

luego,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  y  $T$  es inyectiva

Ejemplo.  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}.$$

¿ Es  $T$  una T.L. inyectiva ? NO, ya que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Teorema (Caracterización de una T.L. inyectiva).

Sea  $T: V \rightarrow W$  una T.L.

$T$  es inyectiva (1-1) si y solo si  $Nu(T) = \{\mathbf{0}\}$ .

Argumento.

( $\Rightarrow$ ) Supog. que  $T$  es inyectiva.

Si  $v \in Nu(T)$  entonces  $T(v) = \mathbf{0}$

Ademas  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

Sigue,  $T(v) = T(0) \Rightarrow v = 0$  por ser  $T$  inyectiva  
 Así, cualquier elemento de  $\text{Nu}(T)$  es el vector cero.

$$\text{Nu}(T) = \{0\}.$$

$(\Leftarrow)$  Suponer que  $\text{Nu}(T) = \{0\}$ .

Sean  $u, v \in V$  tales que

$$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0$$

$$T(u-v) = 0$$

$$\Rightarrow u-v \in \text{Nu}(T) = \{0\} \text{ por hipótesis.}$$

$$u-v = 0$$

$$u = v$$

En consecuencia,  $T$  es inyectiva.

**Teorema 9** [Independencia lineal y transformaciones lineales inyectivas].

Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal inyectiva y  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es un conjunto de vectores l.i., entonces  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  es un conjunto de vectores l.i.

Argumento:

$$\lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \dots + \lambda_n T(v_n) = 0$$

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = 0 \text{ por ser } T \text{ una T.L.}$$

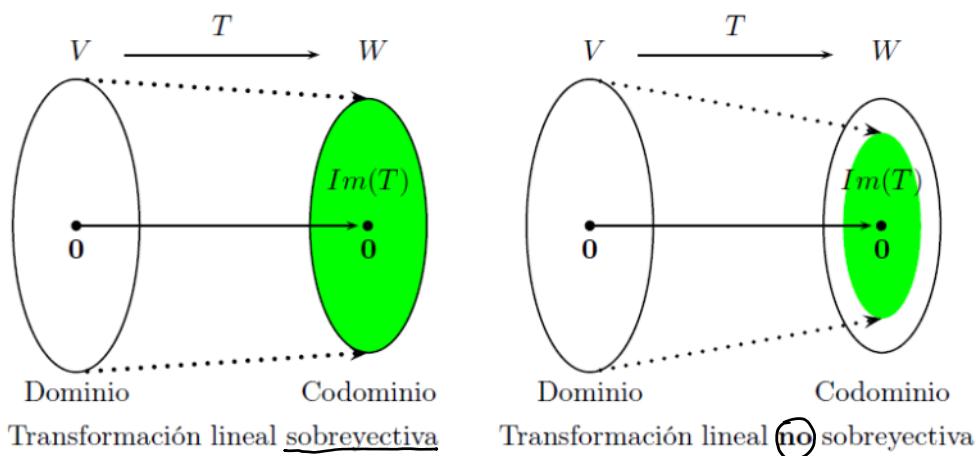
$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Nu}(T) = \{0\} \text{ por ser } T \text{ inyectiva.}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  por ser  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  l.i.

Por tanto,  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  es l.i.

**Definición 7 [Transformación lineal sobreyectiva].** Diremos que  $T : V \rightarrow W$  es una *transformación lineal sobreyectiva*, si y sólo si,  $Im(T) = W$  (Ver Fig. 5.12).



$T : V \rightarrow W$  es sobre si y solo si  $\forall w \in W$  existe  $v \in V : T(v) = w$ .

Ejemplo.  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿ Es  $T$  sobreyectiva ? NO, ya que para  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  no existe  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  tal

que  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$

Ejemplo. Sea  $T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una T.L. tal que

$$(a+b+c)$$

Ejemplo. Sea  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una T.L. tal que

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}.$$

•  $\text{Nu}(T)$ :

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+0+0=0 \Rightarrow a=0.$$

$$b+c=0 \Rightarrow b=0$$

$$c=0$$

luego,  $\text{Nu}(T) = \{0 + 0x + 0x^2\} = \{\Theta\} \Rightarrow T$  es inyectiva.

•  $\text{Im}(T)$ : Sea  $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$a+b+c=p \quad b+c=q \quad c=r.$$

$$b+r=q$$

$$b=q-r$$

$$a+(q-r)+r=p$$

$$a=p-q.$$

Observe que

$$|p-q+r+r| = |p|$$

$$T \left[ \frac{(p-q)}{a} + \frac{(q-r)}{b}x + \frac{r}{c}x^2 \right] = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \frac{p-q}{a} & \frac{q-r}{b} & \frac{r}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Hemos mostrado que cualquier elemento de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ , tiene un preímagen en  $P_2$  de la forma

$$(p-q) + (q-r)x + rx^2.$$

Por tanto,  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow T$  es sobreyectiva.

**Definición 8 [Isomorfismo].** Diremos que una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  es un *isomorfismo*, si y sólo si,  $T$  es una transformación lineal inyectiva y sobreyectiva<sup>2</sup> (Ver Figs. 5.13 y 5.14).

**Definición 9 [Espacios vectoriales isomorfos].** Si dados dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , existe un isomorfismo  $T : V \rightarrow W$ , diremos que  $V$  y  $W$  son isomorfos, lo cual denotamos  $V \cong W$ .