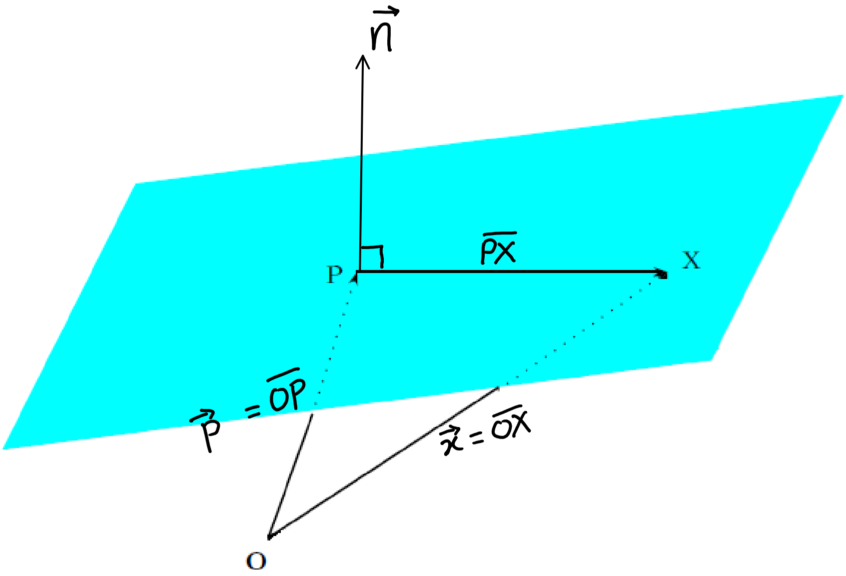
Clase 17-12-21

viernes, 17 de diciembre de 2021 10:56 a. m.

Hiperplanos

Definición [*Hiperplano*]. Dados un punto P y un vector no nulo $\mathbf{n}$, diremos que el conjunto formado por P y todos los puntos X que determinan vectores $\overline{PX}$ ortogonales a $\mathbf{n}$ es el *hiperplano* que contiene al punto P y es ortogonal al vector $\mathbf{n}$. Al vector $\mathbf{n}$ lo llamamos *vector normal* del hiperplano .



$\overline{PX} \cdot \vec{n} = 0$

producto punto

como $\overline{PX} = \overline{OX} - \overline{OP}$

ent. $(\overline{OX} - \overline{OP}) \cdot \vec{n} = 0$

$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0.$

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{n} &= \vec{p} \cdot \vec{n} \end{aligned}}$$

Ecuación normal de un hiperplano.

Sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\vec{n} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = 0$$

$$l_1(x_1 - a_1) + l_2(x_2 - a_2) + \cdots + l_n(x_n - a_n) = 0.$$

de manera equivalente,

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_n x_n = l_1 a_1 + l_2 a_2 + \cdots + l_n a_n$$
$$= \vec{n} \cdot \vec{p}$$

$$\boxed{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_n x_n = d, \quad \text{donde} \quad d = \vec{n} \cdot \vec{p}.}$$

Ecuación general del hiperplano que pasa por P y es ortogonal a $\vec{n}$.

Ejm. ¿Cuál es la ecuación del hiperplano que pasa por $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y es ortogonal a $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Solución.

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.$$

$$-2(x+1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0.$$

$$-2x - 2 + y - 2 + 4z - 12 = 0$$

$$-2x + y + 4z - 16 = 0.$$

$$-2x + y + 4z = 16$$

Definición.

Sean H_1 un hiperplano con vector normal $\vec{n}_1$

H_2 " " " " " $\vec{n}_2$.

Decimos que

Decimos que

- H_1 y H_2 son paralelos si y solo si $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son paralelos
- H_1 y H_2 " ortogonales " " " ortogonales.

Ejemplos.

1. Hallar la ecuación del Hno que pasa por $P=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ y que es paralelo al Hno $2x-5y+2z=1$.

Solución:

$$P=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} \qquad n=\begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}.$$

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{p}\cdot\vec{n}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}.$$

$$2x-5y+2z = 2+10+8 = 20 /\!/$$

2. Hallar la ecuación del Hno H_1 de $\mathbb{R}^5$ que pasa por el origen y que es ortogonal al Hno H_2 $3x_2-x_3-2x_4=2$

Solución

- Hno dado H_2: $0x_1+3x_2-x_3-2x_4+0x_5=2$.

$$\vec{n}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

- si $\vec{n}_1$ es el vector normal del Hno $H_1 \Rightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$.

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verificar que $2x_1 + x_2 + 3x_3$ es la ecuación del Hno H_1.

Hiperplanos
- En $\mathbb{R}$ son puntos
- En $\mathbb{R}^2$ son rectas
- En $\mathbb{R}^3$ son planos.

Producto vectorial

Definición [*Producto vectorial*]. Dados dos vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ de R^3, definimos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, el *producto vectorial* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, como el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Ejm. Sean $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Calcular $u \times v$ y $v \times u$.

- $$u \times v = \begin{pmatrix} (-1)(-1) - 3(-2) \\ 3(1) - 2(-1) \\ 2(-2) - (-1)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- $$v \times u = \begin{pmatrix} -2(3) - (-1)(-1) \\ 2(-1) - 3(1) \\ 1(-1) - (-2)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Note que $u \times v \neq v \times u$

Tarea: revisar ejemplo 41, pág. 106.

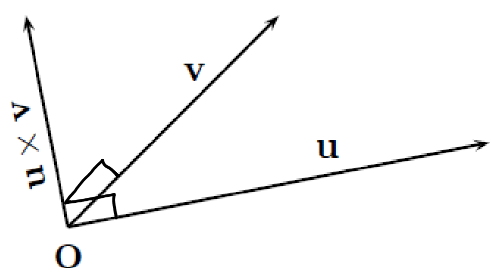
Teorema [*Propiedades del producto vectorial*].

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de R^3 y λ es un escalar, entonces:

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. *Ley anticonmutativa*
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$. *Ley distributiva por derecha*
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. *Ley distributiva por izquierda*
4. $\lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v})$.
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
7. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.
8. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$.
9. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Observación: de la propiedad 8 se tiene que

$(u \times v) \perp u$ y $(u \times v) \perp v$



Teorema [*Norma del producto vectorial*].

Dados dos vectores arbitrarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de R^3, si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces

1. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$. [*Identidad de Lagrange*]
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$. [*Norma del producto vectorial*]

D/: 1. $\|u\times v\|^2 = (u\times v)\cdot(u\times v)$

$= w\cdot(u\times v), \quad w = u\times v$

$= u\cdot(v\times w)$ prop. 9.

$= u\cdot[v\times(u\times v)]$

$= u\cdot[\underbrace{(v\cdot v)}_{\text{escalar}}u - \underbrace{(v\cdot u)}_{\text{escalar}}v]$.

$= (v\cdot v)(u\cdot u) - (v\cdot u)(u\cdot v)$

$= \|u\|^2\|v\|^2 - (u\cdot v)^2$ //

2. Recordar: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

$\cos\theta = \dfrac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|} \Rightarrow u\cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta$.

$\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u\cdot v)^2$

$= \|u\|^2\|v\|^2 - (\|u\|\|v\|\cos\theta)^2$

$= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\theta$.

$= \|u\|^2\|v\|^2(1-\cos^2\theta)$.

$\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2\operatorname{sen}^2\theta$

En consecuencia, $\|u\times v\| = \|u\|\|v\|\operatorname{sen}\theta$.

Vectores paralelos en $\mathbb{R}^3$.

Sean u y v no nulos en $\mathbb{R}^3$.

$u \parallel v$ si y solo si $u \times v = \mathbf{0}$

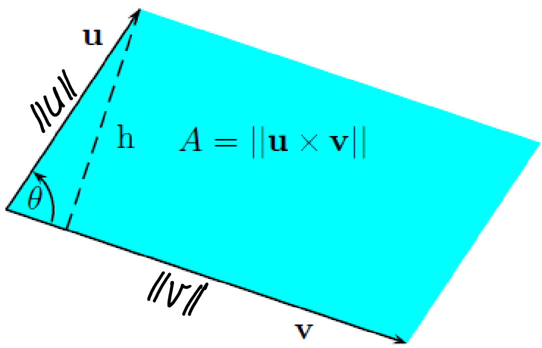
D/: ($\Rightarrow$) si $u \parallel v \Rightarrow v = \alpha u$.

$$u \times v = u \times (\alpha u) = \alpha (u \times u) = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0} \,//$$

($\Leftarrow$) Ejercicio.

Área de un paralelogramo.

Corolario [*Área de un paralelogramo*].
El área del paralelogramo cuyos lados no paralelos están dados por los vectores **u** y **v** de R^3 está dada por $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$.



Observe que $\quad \text{sen}\, \theta = \dfrac{h}{||u||} \Rightarrow h = ||u|| \, \text{sen}\, \theta$.

$$A = \text{base} \cdot \text{altura} = ||v|| \, h = ||v|| \, ||u|| \, \text{sen}\, \theta$$
$$= ||u|| \, ||v|| \, \text{sen}\, \theta$$
$$= ||u \times v|| \,//$$