Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Movimiento forzado

Recordemos que el movimiento forzado corresponde a la ecuación

Recordemos que el movimiento forzado corresponde a la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t),$$

donde $f(t) \not\equiv 0$.

Movimiento forzado

Recordemos que el movimiento forzado corresponde a la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t),$$

donde $f(t) \not\equiv 0$.

En particular, analizaremos el comportamiento de algunos casos con forzamiento periódico de la forma $f(t) = F_0 cos(\gamma t)$ donde F_0 y γ son constantes no negativas.

Movimiento amortiguado forzado

En el caso de un movimiento amortiguado $b > 0$.

Movimiento amortiguado forzado

En el caso de un movimiento amortiguado $b > 0$.
Comencemos analizando $b^2 < 4mk$. Las raices complejas de la ecuación auxiliar son $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

Movimiento amortiguado forzado

En el caso de un movimiento amortiguado $b > 0$.
Comencemos analizando $b^2 < 4mk$. Las raices complejas de la ecuación auxiliar son $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

La solución homogenea asociada es

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\left(sen(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi)\right).$$

Movimiento amortiguado forzado

En el caso de un movimiento amortiguado $b > 0$.
Comencemos analizando $b^2 < 4mk$. Las raices complejas de la ecuación auxiliar son $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$, donde:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

La solución homogenea asociada es

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\left(sen(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi) \right).$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados buscaremos una solución particular de la forma

$$x_p(t) = A_1 cos(\gamma t) + A_2 sen(\gamma t)$$

donde A_1 y A_2 son constantes que debemos encontrar.

Derivando x_p obtenemos

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -A_1\gamma sen(\gamma t) + A_2\gamma cos(\gamma t) = \gamma(A_2 cos(\gamma t) - A_1 sen(\gamma t)) \\ x_p''(t) &= -A_1\gamma^2 cos(\gamma t) - A_2\gamma^2 sen(\gamma t) = -\gamma^2(A_1 cos(\gamma t) + A_2 sen(\gamma t)). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se sigue que

$$(k - \gamma^2 m)(A_1 cos(\gamma t) + A_2 sen(\gamma t)) + b\gamma(A_2 cos(\gamma t) - A_1 sen(\gamma t)) = F_0 cos(\gamma t)$$

Derivando x_p obtenemos

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -A_1\gamma sen(\gamma t) + A_2\gamma cos(\gamma t) = \gamma(A_2 cos(\gamma t) - A_1 sen(\gamma t)) \\ x_p''(t) &= -A_1\gamma^2 cos(\gamma t) - A_2\gamma^2 sen(\gamma t) = -\gamma^2(A_1 cos(\gamma t) + A_2 sen(\gamma t)). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se sigue que

$$(k-\gamma^2 m)(A_1 cos(\gamma t) + A_2 sen(\gamma t)) + b\gamma(A_2 cos(\gamma t) - A_1 sen(\gamma t)) = F_0 cos(\gamma t)$$

Reorganizando obtenemos:

$$((k-\gamma^2 m)A_1 + b\gamma A_2)cos(\gamma t) + ((k-\gamma^2 m)A_2 - b\gamma A_1)sen(\gamma t) = F_0 cos(\gamma t)$$

Llegamos al siguiente sistema de ecuaciones donde las variables son A_1 y A_2

$$\begin{aligned} (k-\gamma^2 m)A_1 \quad &+ \quad b\gamma A_2 &= F_0 \\ -b\gamma A_1 \quad &+ \quad (k-\gamma^2 m)A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Llegamos al siguiente sistema de ecuaciones donde las variables son A_1 y A_2

$$\begin{aligned} (k-\gamma^2 m)A_1 \quad &+ \quad b\gamma A_2 &= F_0 \\ -b\gamma A_1 \quad &+ \quad (k-\gamma^2 m)A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, llegamos a:

$$A_1 = \frac{F_0(k-\gamma^2 m)}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{F_0\gamma b}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}.$$

Llegamos al siguiente sistema de ecuaciones donde las variables son A_1 y A_2

$$\begin{array}{rcrl} (k-\gamma^2 m)A_1 & + & b\gamma A_2 & = F_0 \\ -b\gamma A_1 & + & (k-\gamma^2 m)A_2 & = 0. \end{array}$$

Resolviendo el sistema, llegamos a:

$$A_1 = \frac{F_0(k-\gamma^2 m)}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{F_0\gamma b}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}.$$

Una solución particular de la ecuación diferencial es

$$x_p(t) \;\; = \frac{F_0}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}((k-\gamma^2 m)cos(\gamma t) + \gamma bsen(\gamma t))$$

Llegamos al siguiente sistema de ecuaciones donde las variables son A_1 y A_2

$$\begin{aligned}(k-\gamma^2 m)A_1 &+ & b\gamma A_2 &= F_0\\ -b\gamma A_1 &+ & (k-\gamma^2 m)A_2 &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, llegamos a:

$$A_1 = \frac{F_0(k-\gamma^2 m)}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{F_0\gamma b}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}.$$

Una solución particular de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}((k-\gamma^2 m)cos(\gamma t) + \gamma b sen(\gamma t))\\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} sen(\gamma t + \theta),\end{aligned}$$

Llegamos al siguiente sistema de ecuaciones donde las variables son A_1 y A_2

$$\begin{array}{rcrl} (k-\gamma^2 m)A_1 & + & b\gamma A_2 & = F_0 \\ -b\gamma A_1 & + & (k-\gamma^2 m)A_2 & = 0. \end{array}$$

Resolviendo el sistema, llegamos a:

$$A_1 = \frac{F_0(k-\gamma^2 m)}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{F_0\gamma b}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}.$$

Una solución particular de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}((k-\gamma^2 m)cos(\gamma t) + \gamma b sen(\gamma t)) \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} sen(\gamma t + \theta), \end{aligned}$$

donde $tan\,\theta = \frac{(k-\gamma^2 m)}{b\gamma}$.

Concluimos que la solución general es

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} sen\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} sen(\gamma t + \theta).$$

Concluimos que la solución general es

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} sen\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} sen(\gamma t + \theta).$$

El primer sumando, el cual contiene la exponencial, de esta expresión es el término transitorio.

Concluimos que la solución general es

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} sen\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} sen(\gamma t + \theta).$$

El primer sumando, el cual contiene la exponencial, de esta expresión es el término transitorio. Dicho término converge a cero cuanto t tiende a infinito y sólo depende de las condiciones iniciales del sistema.

Concluimos que la solución general es

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} sen\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} sen(\gamma t + \theta).$$

El primer sumando, el cual contiene la exponencial, de esta expresión es el término transitorio. Dicho término converge a cero cuanto t tiende a infinito y sólo depende de las condiciones iniciales del sistema.

El segundo término lo llamaremos estacionario, con frecuencia angular γ.

Concluimos que la solución general es

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} sen\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} sen(\gamma t + \theta).$$

El primer sumando, el cual contiene la exponencial, de esta expresión es el término transitorio. Dicho término converge a cero cuanto t tiende a infinito y sólo depende de las condiciones iniciales del sistema.

El segundo término lo llamaremos estacionario, con frecuencia angular γ.

Llamaremos a $\dfrac{1}{\sqrt{(k - \gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}}$ el factor de ganancia.

Similarmente, obtenemos en los casos $b^2 = 4km$ y $b^2 > 4km$ que la solución es de la forma

$$x(t) = x_h + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} sen(\gamma t + \theta),$$

donde x_h es una solución de la ecuación homogénea asociada.

Movimiento forzado no amortiguado

En este caso $b = 0$ y la ecuación es

Movimiento forzado no amortiguado

En este caso $b = 0$ y la ecuación es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0cos(\gamma t).$$

Movimiento forzado no amortiguado

En este caso $b = 0$ y la ecuación es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 cos(\gamma t).$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$\begin{aligned} x_h(t) &= C_1 cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + C_2 sen(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ &= A sen(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi). \end{aligned}$$

Movimiento forzado no amortiguado

En este caso $b = 0$ y la ecuación es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 cos(\gamma t).$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$\begin{aligned} x_h(t) &= C_1 cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + C_2 sen(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ &= A sen(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi). \end{aligned}$$

Tenemos que analizar dos casos $\gamma \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\gamma = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Si $\gamma \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ tenemos que una solución particular

$$x_p(t) \quad = \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2}} cos(\gamma t)$$

Si $\gamma \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ tenemos que una solución particular

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2}} cos(\gamma t) \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2}} sen(\gamma t + \tfrac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Si $\gamma \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ tenemos que una solución particular

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2}} cos(\gamma t) \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2}} sen(\gamma t + \tfrac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Así, la solución es similar al caso amortiguado

$$x(t) = A\left(sen(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi) \right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2}} sen(\gamma t + \frac{\pi}{2})$$

Si $\gamma = \sqrt{\frac{k}{m}}$ tenemos que una solución particular

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2\sqrt{mk}} t sen(\gamma t).$$

Si $\gamma = \sqrt{\frac{k}{m}}$ tenemos que una solución particular

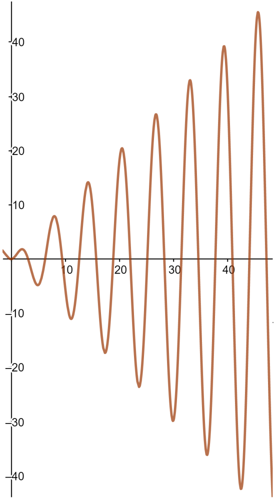
$$x_p(t) = \frac{F_0}{2\sqrt{mk}} t sen(\gamma t).$$

Así, la solución general es

$$x(t) = A\left(sen(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)\right) + \frac{F_0}{2\sqrt{mk}} t sen(\gamma t).$$

Notemos que en el segundo termino las oscilaciones se volverían infinitas, por tanto el sistema se rompería y la ecuación dejaría de ser aplicable.

Notemos que en el segundo termino las oscilaciones se volverían infinitas, por tanto el sistema se rompería y la ecuación dejaría de ser aplicable. Este fenómeno se le conoce como **Resonancia**.



La aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana o igual a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un serio problema en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

La aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana o igual a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un serio problema en cualquier sistema mecánico oscilatorio.
Note que el caso amortiguado forzado el factor de ganancia

$$\frac{1}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2+b^2\gamma^2}}$$

es máximo cuando $\gamma=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ejemplo 1

Este ejemplo es tomado del libro guía pag, 148.
Se requiere una fuerza de 400 Newtons para estirar un resorte $1m$ a partir de su longitud natural.

Ejemplo 1

Este ejemplo es tomado del libro guía pag, 148.
Se requiere una fuerza de 400 Newtons para estirar un resorte $1m$ a partir de su longitud natural. Una masa de $25kg$ se sujeta del resorte y el sistema se coloca a $0,5m$ por encima del equilibrio y se deja partir con velocidad de $2m/sg$ en dirección hacia abajo.

Ejemplo 1

Este ejemplo es tomado del libro guía pag, 148.
Se requiere una fuerza de 400 Newtons para estirar un resorte $1m$ a partir de su longitud natural. Una masa de $25kg$ se sujeta del resorte y el sistema se coloca a $0,5m$ por encima del equilibrio y se deja partir con velocidad de $2m/sg$ en dirección hacia abajo. Determine la posición de la masa con respecto al tiempo, el periodo y en que instante pasa por primera vez por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.

Ejemplo 1

Este ejemplo es tomado del libro guía pag, 148.
Se requiere una fuerza de 400 Newtons para estirar un resorte $1m$ a partir de su longitud natural. Una masa de $25kg$ se sujeta del resorte y el sistema se coloca a $0,5m$ por encima del equilibrio y se deja partir con velocidad de $2m/sg$ en dirección hacia abajo. Determine la posición de la masa con respecto al tiempo, el periodo y en que instante pasa por primera vez por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.

En este caso, $m = 25$ y dado que la fuerza F de restitución del resorte es $F = kx$, por tanto $400 = k \times 1$.

Ejemplo 1

Este ejemplo es tomado del libro guía pag, 148.
Se requiere una fuerza de 400 Newtons para estirar un resorte $1m$ a partir de su longitud natural. Una masa de $25kg$ se sujeta del resorte y el sistema se coloca a $0,5m$ por encima del equilibrio y se deja partir con velocidad de $2m/sg$ en dirección hacia abajo. Determine la posición de la masa con respecto al tiempo, el periodo y en que instante pasa por primera vez por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.

En este caso, $m = 25$ y dado que la fuerza F de restitución del resorte es $F = kx$, por tanto $400 = k \times 1$. Concluimos que $k = 400$.

Ejemplo 1

Este ejemplo es tomado del libro guía pag, 148.
Se requiere una fuerza de 400 Newtons para estirar un resorte $1m$ a partir de su longitud natural. Una masa de $25kg$ se sujeta del resorte y el sistema se coloca a $0,5m$ por encima del equilibrio y se deja partir con velocidad de $2m/sg$ en dirección hacia abajo. Determine la posición de la masa con respecto al tiempo, el periodo y en que instante pasa por primera vez por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.

En este caso, $m = 25$ y dado que la fuerza F de restitución del resorte es $F = kx$, por tanto $400 = k \times 1$. Concluimos que $k = 400$.
La ecuación diferencial es

$$25\frac{d^2x}{dt^2} + 400x = 0.$$

Ejemplo 1

Este ejemplo es tomado del libro guía pag, 148.
Se requiere una fuerza de 400 Newtons para estirar un resorte $1m$ a partir de su longitud natural. Una masa de $25kg$ se sujeta del resorte y el sistema se coloca a $0,5m$ por encima del equilibrio y se deja partir con velocidad de $2m/sg$ en dirección hacia abajo. Determine la posición de la masa con respecto al tiempo, el periodo y en que instante pasa por primera vez por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.

En este caso, $m = 25$ y dado que la fuerza F de restitución del resorte es $F = kx$, por tanto $400 = k \times 1$. Concluimos que $k = 400$.
La ecuación diferencial es

$$25\frac{d^2x}{dt^2} + 400x = 0.$$

Simplificando, obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0.$$

De aquí obtenemos que la frecuencia angular es 4 y el periodo es $P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

De aquí obtenemos que la frecuencia angular es 4 y el periodo es $P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
La ecuación auxiliar es $r^2 + 16 = 0$, cuyas raíces son $4i$ y $-4i$.

De aquí obtenemos que la frecuencia angular es 4 y el periodo es $P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
La ecuación auxiliar es $r^2 + 16 = 0$, cuyas raíces son $4i$ y $-4i$.

El movimiento es de la forma

$$x(t) = C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t).$$

De aquí obtenemos que la frecuencia angular es 4 y el periodo es $P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
La ecuación auxiliar es $r^2 + 16 = 0$, cuyas raíces son $4i$ y $-4i$.

El movimiento es de la forma

$$x(t) = C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t).$$

De las condiciones iniciales obtenemos $x(0) = C_1 = -0,5$ y $x'(0) = 4C_2 = 2$, por tanto

$$x(t) = -\frac{1}{2} cos(4t) + \frac{1}{2} sen(4t).$$

De aquí obtenemos que la frecuencia angular es 4 y el periodo es $P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
La ecuación auxiliar es $r^2 + 16 = 0$, cuyas raíces son $4i$ y $-4i$.

El movimiento es de la forma

$$x(t) = C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t).$$

De las condiciones iniciales obtenemos $x(0) = C_1 = -0,5$ y $x'(0) = 4C_2 = 2$, por tanto

$$x(t) = -\frac{1}{2} cos(4t) + \frac{1}{2} sen(4t).$$

Tomando $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\phi = \frac{3\pi}{4}$ obtenemos que

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} cos(4t - \frac{3\pi}{4}).$$

La masa siempre pasa por el punto de equilibrio siempre que $cos(4t - \frac{3\pi}{4}) = 0$, es decir, en los instantes

$$\frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, ...$$

La primera vez que pasa en dirección hacia arriba es en $\frac{5\pi}{16}$.

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio.

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente.

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente. Adicionalmente, existe una fuerza de amortiguación que en Newtons es 12 veces la velocidad instantánea.

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente. Adicionalmente, existe una fuerza de amortiguación que en Newtons es 12 veces la velocidad instantánea. Encontrar la posición del objeto en función del tiempo desde de la intervención de la persona.

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente. Adicionalmente, existe una fuerza de amortiguación que en Newtons es 12 veces la velocidad instantánea. Encontrar la posición del objeto en función del tiempo desde de la intervención de la persona.

De lo anterior $m = 6kg$, $b = 12kg/sg$, $x(0) = 70cm$, $x'(0) = 10cm/sg$ y $f(t) \equiv 0$.

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente. Adicionalmente, existe una fuerza de amortiguación que en Newtons es 12 veces la velocidad instantánea. Encontrar la posición del objeto en función del tiempo desde de la intervención de la persona.

De lo anterior $m = 6kg$, $b = 12kg/sg$, $x(0) = 70cm$, $x'(0) = 10cm/sg$ y $f(t) \equiv 0$. Para encontrar k recordemos que la gravedad
$9,8m/sg^2 = 980cm/sg^2$

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente. Adicionalmente, existe una fuerza de amortiguación que en Newtons es 12 veces la velocidad instantánea. Encontrar la posición del objeto en función del tiempo desde de la intervención de la persona.

De lo anterior $m = 6kg$, $b = 12kg/sg$, $x(0) = 70cm$, $x'(0) = 10cm/sg$ y $f(t) \equiv 0$. Para encontrar k recordemos que la gravedad $9,8m/sg^2 = 980cm/sg^2$ se sigue $57,647k = 6 \times 980$

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente. Adicionalmente, existe una fuerza de amortiguación que en Newtons es 12 veces la velocidad instantánea. Encontrar la posición del objeto en función del tiempo desde de la intervención de la persona.

De lo anterior $m = 6kg$, $b = 12kg/sg$, $x(0) = 70cm$, $x'(0) = 10cm/sg$ y $f(t) \equiv 0$. Para encontrar k recordemos que la gravedad $9,8m/sg^2 = 980cm/sg^2$ se sigue $57,647k = 6 \times 980$ y por tanto redondeando $k = 102kg/sg^2$.

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente. Adicionalmente, existe una fuerza de amortiguación que en Newtons es 12 veces la velocidad instantánea. Encontrar la posición del objeto en función del tiempo desde de la intervención de la persona.

De lo anterior $m = 6kg$, $b = 12kg/sg$, $x(0) = 70cm$, $x'(0) = 10cm/sg$ y $f(t) \equiv 0$. Para encontrar k recordemos que la gravedad $9,8m/sg^2 = 980cm/sg^2$ se sigue $57,647k = 6 \times 980$ y por tanto redondeando $k = 102kg/sg^2$.

Recordemos que el movimiento analizado corresponde a la ecuación

Ejemplo 2

Un objeto de $6kg$ se sujeta de un resorte soportado verticalmente y desplaza al resorte $57,647cm$ de la posición de equilibrio. Luego, una persona desplaza el objeto $70cm$ debajo del equilibrio y de forma que aplica una velocidad inicial de $10cm/sg$. Después la persona no interfiere y el sistema masa resorte oscila libremente. Adicionalmente, existe una fuerza de amortiguación que en Newtons es 12 veces la velocidad instantánea. Encontrar la posición del objeto en función del tiempo desde de la intervención de la persona.

De lo anterior $m = 6kg$, $b = 12kg/sg$, $x(0) = 70cm$, $x'(0) = 10cm/sg$ y $f(t) \equiv 0$. Para encontrar k recordemos que la gravedad $9,8m/sg^2 = 980cm/sg^2$ se sigue $57,647k = 6 \times 980$ y por tanto redondeando $k = 102kg/sg^2$.

Recordemos que el movimiento analizado corresponde a la ecuación

$$6\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 102x = 0.$$

La ecuación auxiliar es $6r^2 + 12r + 102 = 0$, simplificando $r^2 + 2r + 17 = 0$ cuyas raíces son $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$.

La ecuación auxiliar es $6r^2 + 12r + 102 = 0$, simplificando $r^2 + 2r + 17 = 0$ cuyas raíces son $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$.

La ecuación del movimiento es de la forma

$$x(t) = e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)).$$

La ecuación auxiliar es $6r^2 + 12r + 102 = 0$, simplificando $r^2 + 2r + 17 = 0$ cuyas raíces son $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$.

La ecuación del movimiento es de la forma

$$x(t) = e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)).$$

Luego

$$x'(t) \quad = -e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)) + e^{-t}(-4C_1 sen(4t) + 4C_2 cos(4t))$$

La ecuación auxiliar es $6r^2 + 12r + 102 = 0$, simplificando $r^2 + 2r + 17 = 0$ cuyas raíces son $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$.

La ecuación del movimiento es de la forma

$$x(t) = e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)).$$

Luego

$$\begin{aligned} x'(t) &= -e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)) + e^{-t}(-4C_1 sen(4t) + 4C_2 cos(4t)) \\ &= e^{-t}((4C_2 - C_1)cos(4t) - (4C_1 + C_2)sen(4t)). \end{aligned}$$

La ecuación auxiliar es $6r^2 + 12r + 102 = 0$, simplificando $r^2 + 2r + 17 = 0$ cuyas raíces son $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$.

La ecuación del movimiento es de la forma

$$x(t) = e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)).$$

Luego

$$\begin{aligned} x'(t) &= -e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)) + e^{-t}(-4C_1 sen(4t) + 4C_2 cos(4t)) \\ &= e^{-t}((4C_2 - C_1)cos(4t) - (4C_1 + C_2)sen(4t)). \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales $x(0) = 70$ y $x'(0) = 10$

La ecuación auxiliar es $6r^2 + 12r + 102 = 0$, simplificando $r^2 + 2r + 17 = 0$ cuyas raíces son $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$.

La ecuación del movimiento es de la forma

$$x(t) = e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)).$$

Luego

$$\begin{aligned} x'(t) &= -e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)) + e^{-t}(-4C_1 sen(4t) + 4C_2 cos(4t)) \\ &= e^{-t}((4C_2 - C_1)cos(4t) - (4C_1 + C_2)sen(4t)). \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales $x(0) = 70$ y $x'(0) = 10$ obtenemos

$$\begin{aligned} C_1 &= 70 \\ 4C_2 - C_1 &= 10. \end{aligned}$$

La ecuación auxiliar es $6r^2 + 12r + 102 = 0$, simplificando $r^2 + 2r + 17 = 0$ cuyas raíces son $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$.

La ecuación del movimiento es de la forma

$$x(t) = e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)).$$

Luego

$$\begin{aligned} x'(t) &= -e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)) + e^{-t}(-4C_1 sen(4t) + 4C_2 cos(4t)) \\ &= e^{-t}((4C_2 - C_1)cos(4t) - (4C_1 + C_2)sen(4t)). \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales $x(0) = 70$ y $x'(0) = 10$ obtenemos

$$\begin{aligned} C_1 &= 70 \\ 4C_2 - C_1 &= 10. \end{aligned}$$

Por tanto $C_1 = 70$ y $C_2 = 20$.

La ecuación auxiliar es $6r^2 + 12r + 102 = 0$, simplificando $r^2 + 2r + 17 = 0$ cuyas raíces son $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$.

La ecuación del movimiento es de la forma

$$x(t) = e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)).$$

Luego

$$\begin{aligned} x'(t) &= -e^{-t}(C_1 cos(4t) + C_2 sen(4t)) + e^{-t}(-4C_1 sen(4t) + 4C_2 cos(4t)) \\ &= e^{-t}((4C_2 - C_1)cos(4t) - (4C_1 + C_2)sen(4t)). \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales $x(0) = 70$ y $x'(0) = 10$ obtenemos

$$\begin{aligned} C_1 &= 70 \\ 4C_2 - C_1 &= 10. \end{aligned}$$

Por tanto $C_1 = 70$ y $C_2 = 20$. Concluimos que la solución es

$$x(t) = e^{-t}(70cos(4t) + 20sen(4t)).$$