Martha Quizo
Univ. del Valle

Ejemplo 1: Esbozar la gráfica de la función $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2-9}$, indicando: Dominio, rango, intervalos de crecimiento, de decrecimiento, extremos locales, Intervalos de concavidad hacia arriba, hacia abajo Puntos de inflexión, asíntotas horizontales y verticales si existen.

S// $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2-9}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

A. verticales:
Posiblemente en $x=-3, x=3$. $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{-2x^2}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{-2x^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{-}{--} = -\infty$.

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{-2x^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{-}{-+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{-2x^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{-}{-+} = \infty, \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{-2x^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{-}{++} = -\infty$$

Las rectas $x=-3$, $x=3$ son asíntotas Verticales

A. Horizontales $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x^2}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{-2x^2}{x^2}}{\frac{x^2-9}{x^2}}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{1 - \frac{9}{x^2}} = -2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^2}{x^2-9} = -2.$$

La recta $y = -2$ es A. Horizontal

Buscamos números críticos

$$f'(x) = \frac{-4x(x^2-9) - 2x(-2x^2)}{(x^2-9)^2} = \frac{-4x^3 + 36x + 4x^3}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{36x}{(x^2-9)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f'(x)$ no existe en $x = \pm 3$, pero $\pm 3 \notin D_f$.

Único número crítico $x = 0$. (de primer orden)

Buscamos números críticos de 2° orden

$$f''(x) = \frac{36(x^2-9)^2 - 2(x^2-9)(2x)36x}{(x^2-9)^4}$$

$$= \frac{36(x^2-9)(x^2-9-4x^2)}{(x^2-9)^4} = \frac{36(-3x^2-9)}{(x^2-9)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-36 \cdot 3(x^2+3)}{(x^2-9)^3} = \frac{-108(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$$

$f''(x) = 0$ Nunca.

$f''(x)$ no existe en $x = \pm 3$, pero no están en D_f.

No hay N° críticos de segundo orden, luego no hay puntos de inflexión.

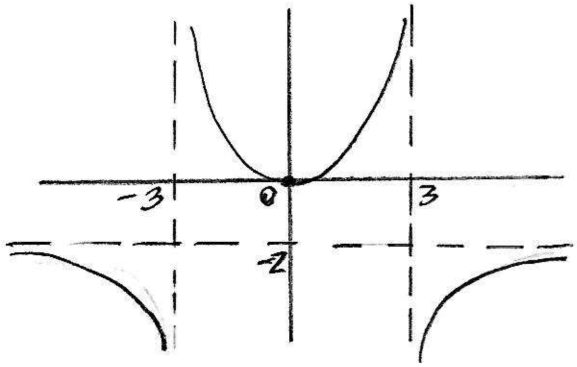
Elaboramos el cuadro considerando $x = -3, 0, 3$.

Intervalo	$f'(x)$	Crecimiento	$f''(x)$	concav.	forma
$(-\infty, -3)$	$-$	Decrec	$-$	abajo	
$(-3, 0)$	$-$	Decrec	$+$	arriba	
$(0, 3)$	$+$	crece	$+$	arriba	
$(3, \infty)$	$+$	crece	$-$	abajo	

Gráf. f crece en $[0,3]$, $(3,\infty)$, Decrece $(-\infty,-3]$, $[-3,0]$.

De acuerdo al cuadro por crit. 1ª derivada en $x=0$ hay mínimo local. $f(0)=0$. $P(0,0)$

En $x=-3$ y en $x=3$ aparentemente hay puntos de inflexión, pero -3 y 3 no están en el dominio de f, luego no hay puntos de Inflexión.



Rango f: $\mathbb{R} \setminus [-2,0)$

Ejemplo 2: Esboce la gráfica de $f(x) = xe^{-x}$ indicando: Dominio, rango, intervalos de crecimiento valores extremos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión y asíntotas si existen.

Sol. $f(x) = xe^{-x}$, $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x)$$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 1$, $f'(x)$ siempre existe.

$$f''(x) = -e^{-x} - [e^{-x} - xe^{-x}] = -2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}(x-2)$$

$f''(x) = 0 \leftrightarrow x = 2$

$f''(x)$ siempre existe.

Números críticos $x = 1$, $x = 2$.

Asíntotas verticales no tiene, pues f es continua en $\mathbb{R}$

A. Horizontales: $\lim\limits_{x \to \infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$

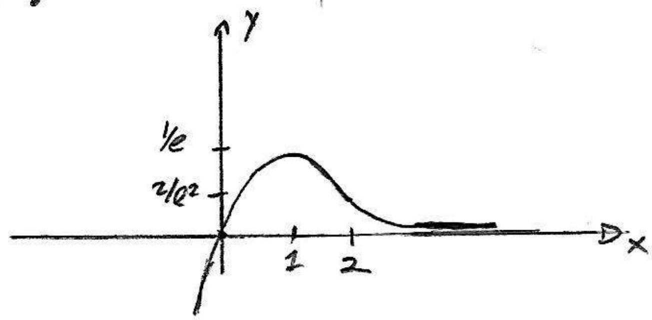
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$

La recta $y = 0$ es A. horizontal

Números Críticos $x = 1$, $x = 2$.

Intervalo	$f'(x)$	crecim.	$f''(x)$	concav.	forma
$(-\infty, 1)$	$+$	crece	$-$	abajo	
$(1, 2)$	$-$	decre	$-$	abajo	
$(2, \infty)$	$-$	decre	$+$	arriba	

Por crit. de 1ª derivada en $x = 1$ hay máximo
$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$. $P(1, 1/e)$
En $x = 2$ hay punto de inflexión. $f(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$.
$Q\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$



$R_f = (-\infty, 1/e]$

Los Criterios trabajados, permiten resolver problemas prácticos de optimización en dominios abiertos.