FISICA 1

Marisela Benitez Barahona

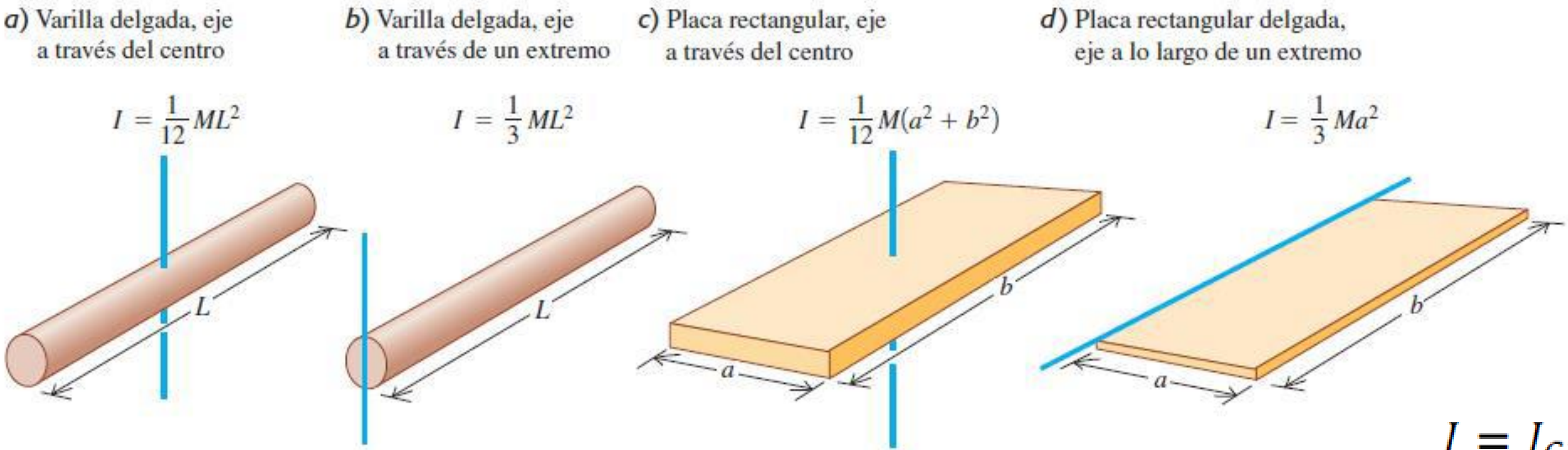
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del valle

RESUMEN DE ECUACIONES DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL Y TRASLACIONAL

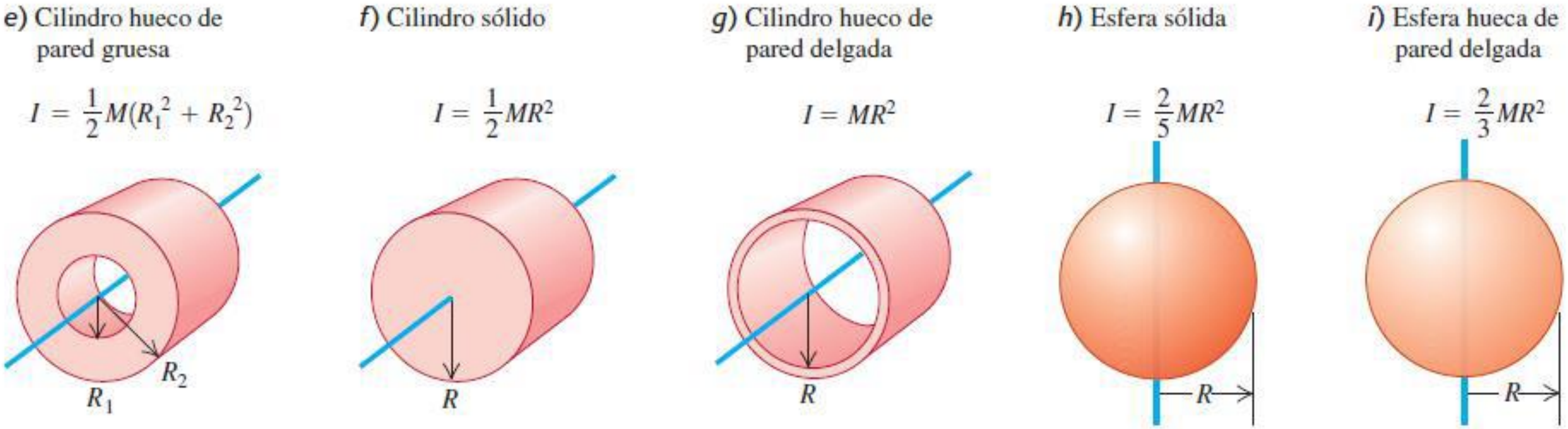
Ecuaciones útiles en movimiento rotacional y traslacional

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
Rapidez angular $\omega = d\theta/dt$	Rapidez traslacional $v = dx/dt$
Aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$	Aceleración traslacional $a = dv/dt$
Momento de torsión neto $\sum \tau = I\alpha$	Fuerza neta $\sum F = ma$
Si $\alpha =$ constante $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Si $a =$ constante $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Trabajo $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta$	Trabajo $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$
Energía cinética rotacional $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia $\mathcal{P} = \tau\omega$	Potencia $\mathcal{P} = Fv$
Cantidad de movimiento angular $L = I\omega$	Cantidad de movimiento lineal $p = mv$
Momento de torsión neto $\sum \tau = dL/dt$	Fuerza neta $\sum F = dp/dt$

MOMENTO DE INERCIA DE OBJETOS SIMÉTRICOS

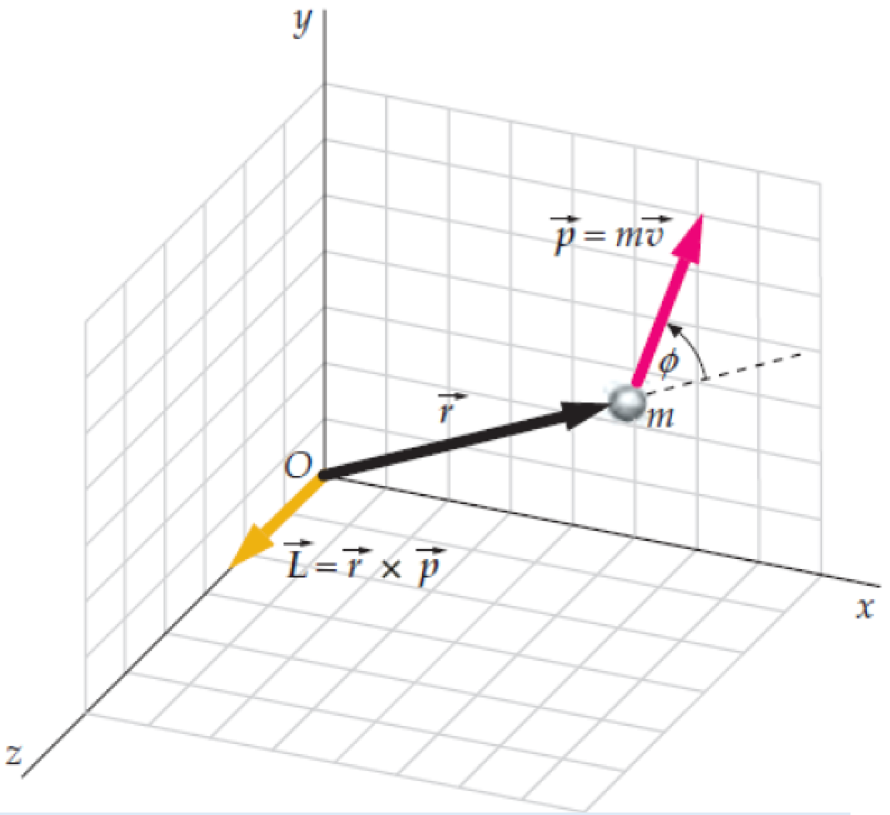


$$I = I_{CM} + MD^2$$

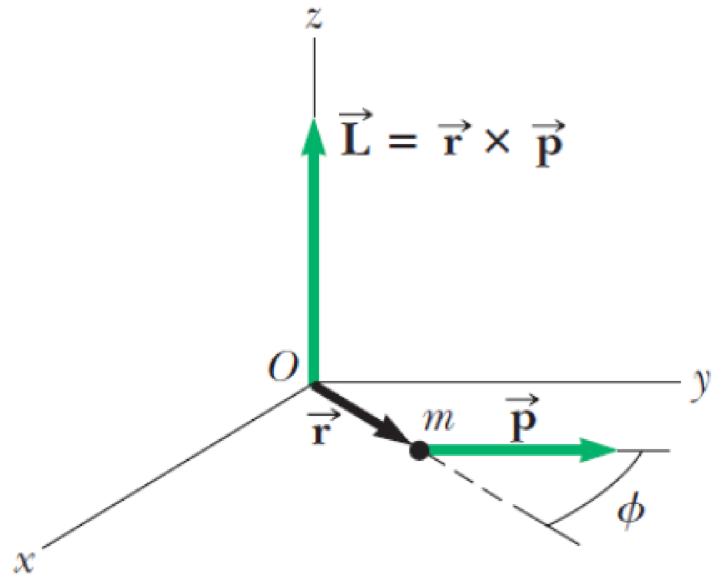


MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Una partícula de masa m, ubicada en una posición $\vec{r}$ desde el origen O, que se mueve con velocidad $\vec{v}$, tiene momento lineal $\vec{p}$.



El momento angular es una magnitud vectorial que utilizamos en física para caracterizar el estado de rotación de los cuerpos.



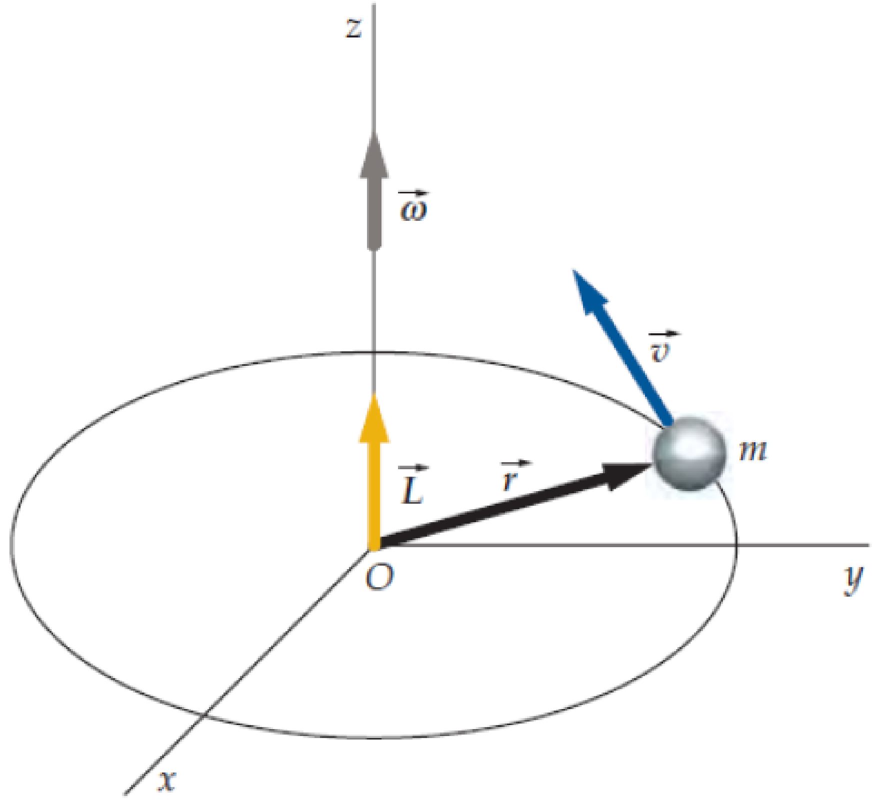
La dirección de ***L*** es perpendicular el plano formado por ***r*** y ***p*** y su sentido dado por la regla de la mano derecha.

Se define el momento angular $\vec{L}$ de una partícula respecto al origen, como el producto vectorial entre la posición $\vec{r}$ y el momento lineal $\vec{p}$, esto es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

La unidad de medida de ***L*** en el SI es $kg\ m^2/s$.

En la figura se muestra los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ que están en el plano xy, por lo tanto L apunta en dirección del eje z. L es cero cuando $\vec{r}$ es paralela a $\vec{p}$ ($\phi = 0$ ó $180°$), este es el caso cuando la partícula pasa por el origen. Si $\vec{r}$ es perpendicular a $\vec{p}$, $\phi = 90°$, entonces $L = mvr$.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

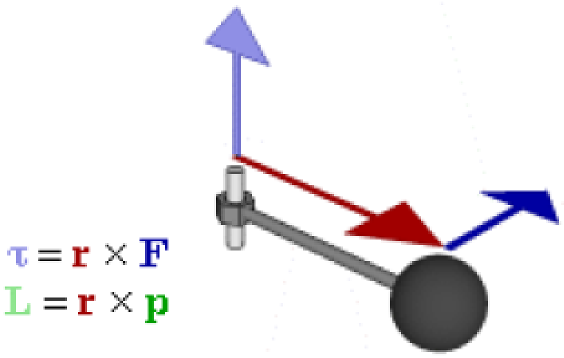
$$\vec{L} = r\,(mv)\sin 90°\,\hat{k}$$

$$\vec{L} = rm(r\omega)\,\hat{k}$$

$$\vec{L} = mr^2\omega\hat{k}$$

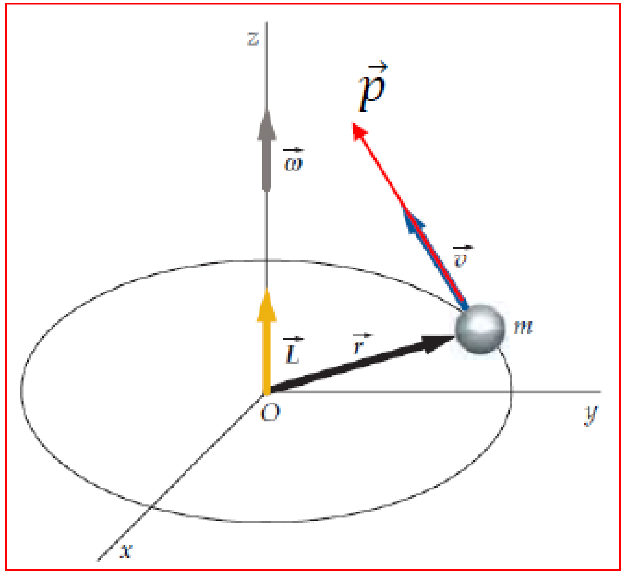
$$\vec{L} = \underbrace{mr^2}\vec{\omega}$$

MOMENTO DE INCERCIA DE UNA PARTÍCULA



$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Si se calcula la derivada temporal del momento angular, se obtiene un resultado interesante:



$$\left.\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})\end{aligned}\right\} \quad \frac{d}{dx}[A(x) \times B(x)] = \frac{dA(x)}{dx} \times B(x) + A(x) \times \frac{dB(x)}{dx}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

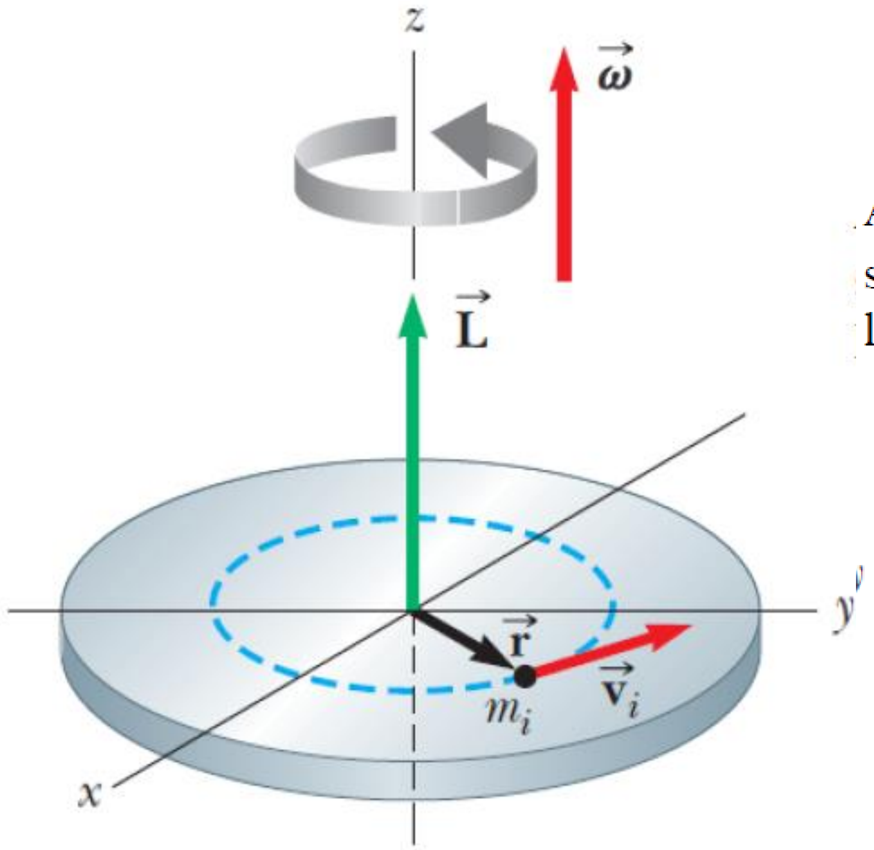
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\cancel{\vec{v} \times \vec{p}}}_{\text{PARALELOS}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \boxed{\vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\text{FUERZA}}}$$

TORQUE

Análogo rotacional de la segunda Ley de Newton. Esta ecuación indica que el torque sobre una partícula es igual a variación temporal del momento angular de la partícula.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO EN TORNO A UN EJE FIJO



La cantidad de movimiento angular de esta partícula se expresaría

$$\vec{L}_i = m_i r_i^2 \omega\,\hat{k}$$

Ahora se puede encontrar la cantidad de movimiento angular (que en esta situación sólo tiene una componente z) de todo el objeto, al tomar la suma de $\vec{L}_i$ sobre todas las partículas:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \omega\,\hat{k}$$

La velocidad angular es la misma para todas las partículas.

$$\vec{L} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right)}_{\text{MOMENTO DE INCERCIA DE TODO EL CUERPO RÍGIDO}} \omega\,\hat{k}$$

$$\vec{L} = I\omega\,\hat{k}$$

Ahora derive la ecuación anterior respecto al tiempo, se tendrá:

$$\underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_{\boxed{TORQUE}} = I\underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\boxed{\text{ACELERACIÓN ANGULAR}}}$$

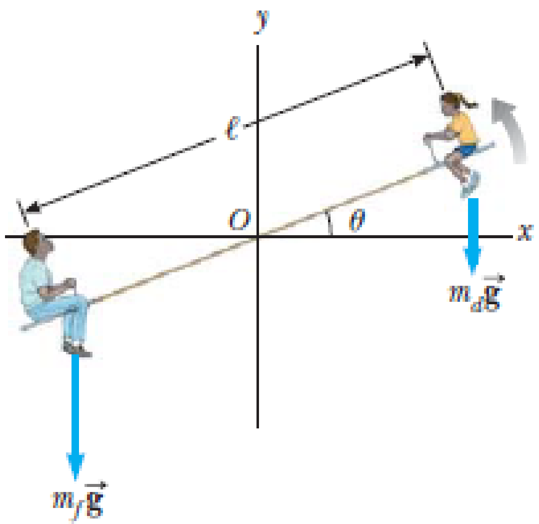
$$\tau = I\alpha$$

el momento de torsión externo neto que actúa sobre un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia en torno al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto en relación con dicho eje.

Ejemplo 1

El sube y baja

Un padre de masa m_f y su hija de masa m_d se sientan en extremos opuestos de un sube y baja a iguales distancias desde el eje en el centro (figura 11.9). El sube y baja se modela como una barra rígida de masa M y longitud y se articula sin fricción. En cierto momento, la combinación da vueltas en un plano vertical con una rapidez angular v.



A) Encuentre una expresión para la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema.

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)$$

$$L = I\omega = \boxed{\frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\omega}$$

B) Encuentre una expresión para la magnitud de la aceleración angular del sistema cuando el sube y baja forma un ángulo con la horizontal.

$$\tau_f = m_f g \frac{\ell}{2}\cos\theta \quad (\vec{\tau}_f \text{ afuera de la página})$$

$$\tau_d = -m_d g \frac{\ell}{2}\cos\theta \quad (\vec{\tau}_d \text{ hacia la página})$$

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = \tfrac{1}{2}(m_f - m_d)g\ell\cos\theta$$

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \boxed{\frac{2(m_f - m_d)g\cos\theta}{\ell\left[(M/3) + m_f + m_d\right]}}$$

Ejemplo 10.10 Momento angular y torca

Una hélice de turbina del motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de $2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular en función del tiempo es

$$\omega_z = (40\ \mathrm{rad/s^3})t^2$$

a) Calcule el momento angular de la hélice en función del tiempo y su valor en $t = 3.0$ s. *b*) Determine la torca neta que actúa sobre la hélice en función del tiempo, y su valor en $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que un ventilador, la hélice de una turbina gira alrededor de un eje de simetría (el eje z). Por lo tanto, el vector de momento angular tiene sólo una componente z (L_z), que podemos determinar a partir de la velocidad angular ω_z. Puesto que la dirección del momento angular es constante, la torca neta también tiene sólo una componente τ_z a lo largo del eje de rotación; esto es igual a la derivada de L_z con respecto al tiempo.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (10.28) para obtener L_z a partir de ω_z, y la ecuación (10.29) para calcular τ_z a partir de la derivada de L_z con respecto al tiempo.

EJECUTAR: *a*) La componente del momento angular está sobre el eje de rotación (z):

$$L_z = I\omega_z = (2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2})(40\ \mathrm{rad/s^3})t^2 = (100\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})t^2$$

(Omitimos "rad" de la respuesta porque el radián es una cantidad adimensional.) En $t = 3.0$ s, $L_z = 900\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$.

b) Por la ecuación (10.29), la componente de la torca neta en el eje de rotación es

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})(2t) = (200\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})t$$

En el instante $t = 3.0$ s,

$$\tau_z = (200\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})(3.0\ \mathrm{s}) = 600\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^2} = 600\ \mathrm{N\cdot m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, vemos que la aceleración angular de la hélice es $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40\ \mathrm{rad/s^2})(2t) = (80\ \mathrm{rad/s^2})\,t$. Por el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton, la torca que actúa sobre la hélice es $\tau_z = I\alpha_z = (2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2})(80\ \mathrm{rad/s^2})\,t = (200\ \mathrm{kg\cdot m^2/s^3})\,t$, lo que coincide con nuestro cálculo anterior.

CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

A partir de la expresión que relaciona el torque neto que actúa sobre un cuerpo rígido con el cambio del momento angular respecto al tiempo:

$$\sum \tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Si el torque neto que actúa sobre el sistema aislado es cero, entonces:

$$0 = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Esta ecuación dice que el momento angular total de un sistema es constante si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero: **es el principio de conservación del momento angular.**

La conservación del momento angular se escribe en la forma:

$$L_f = L_i$$

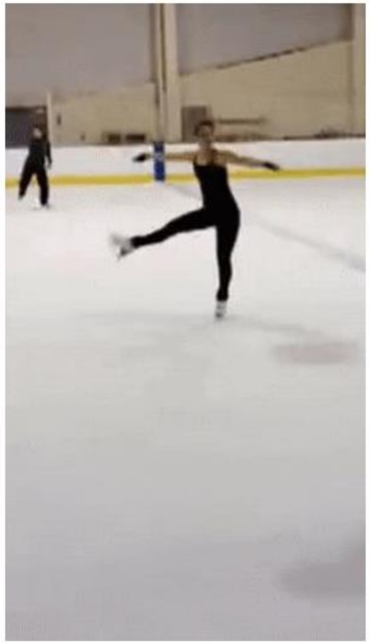
Si el cuerpo gira entorno a un eje fijo, entonces $L = I\omega$:

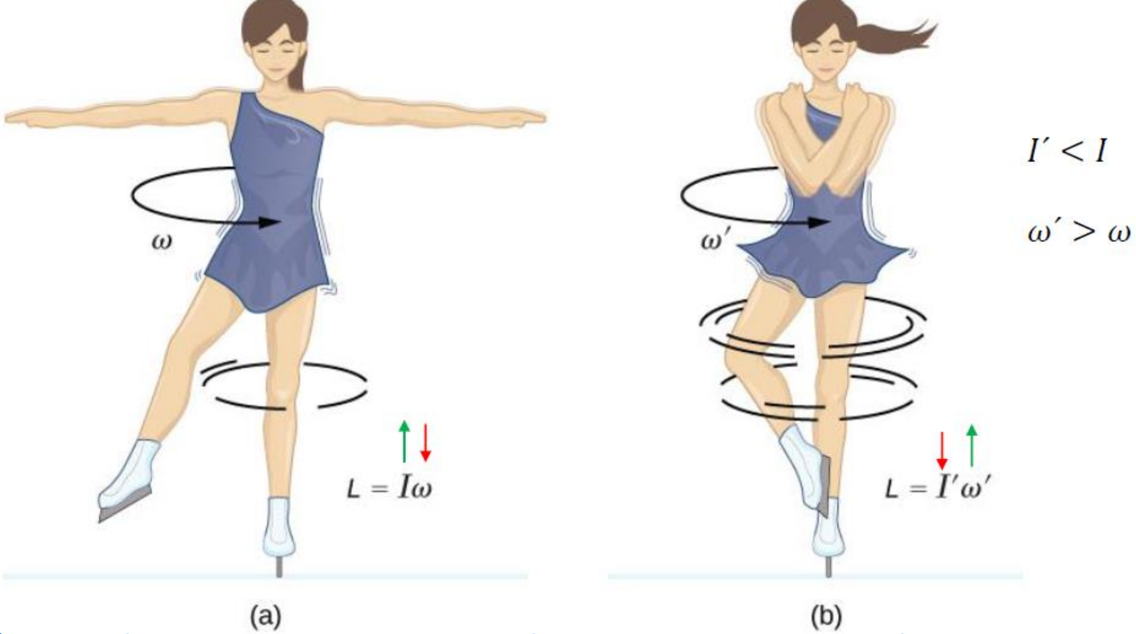
$$I\omega_f = I\omega_i$$

Entonces ahora podemos afirmar que para un sistema aislado, la energía, el momento lineal y el momento angular permanecen constantes. Son los principios de conservación en Física.

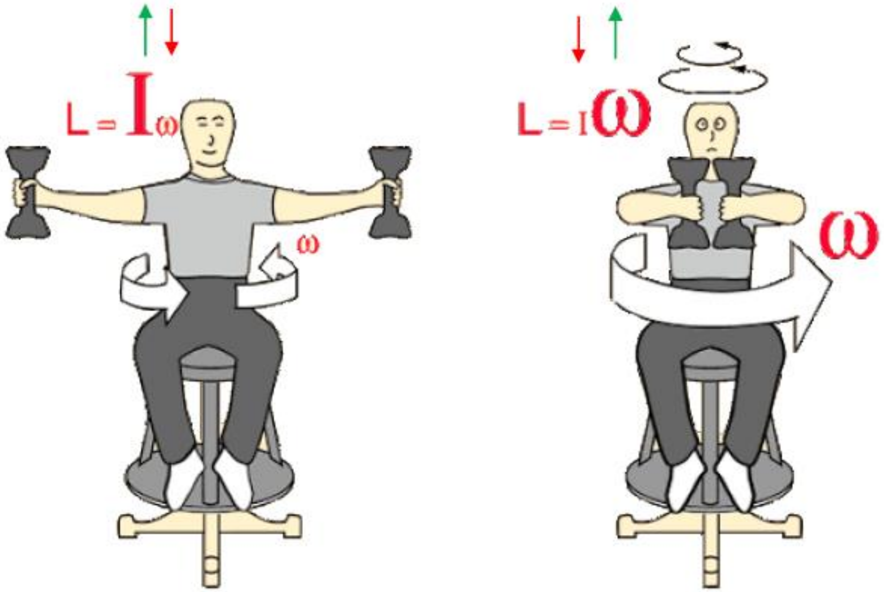
Conservación de cantidad de movimiento angular

Figura 11.10 La cantidad de movimiento angular se conserva mientras el patinador artístico ruso, Evgeni Plushenko, participa durante los Campeonatos Mundiales de Patinaje Artístico 2004. Cuando sus brazos y piernas están cerca de su cuerpo, su momento de inercia es pequeño y su rapidez angular es grande. Para frenar al final de su giro, mueve brazos y piernas hacia afuera, lo que aumenta su momento de inercia.



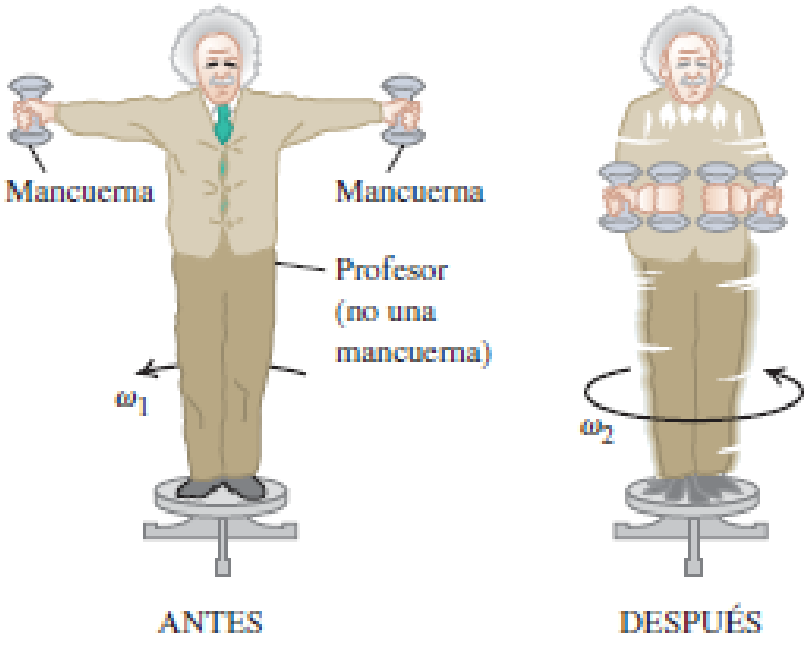


[(6) Angular Momentum V2: Physics Concept Trailer™ - YouTube]



Ejemplo 3

Un ágil profesor de física se para en el centro de una mesita giratoria con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5.0 kg en cada mano (figura 10.29). Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2.0 s. Calcule la nueva velocidad angular del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3.0 kgm^2 con los brazos estirados, y baja a 2.2 kgm^2 si pone las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1.0 m del eje al principio y a 0.20 m al final; trátelas como partículas.



$$I_1 = 3.0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\,\text{kg})(1.0\,\text{m})^2 = 13\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1\,\text{rev}}{2.0\,\text{s}} = 0.50\,\text{rev/s}$$

El momento de inercia final es

$$I_2 = 2.2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\,\text{kg})(0.20\,\text{m})^2 = 2.6\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

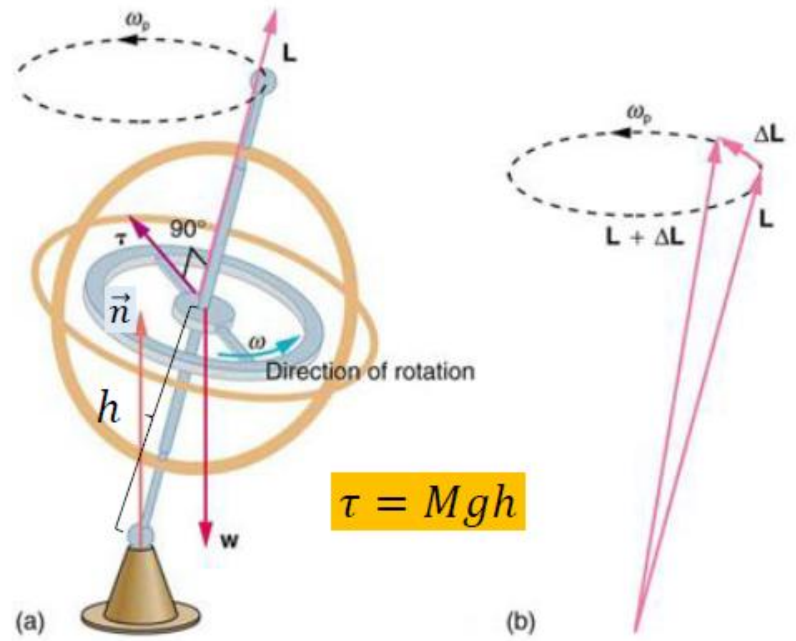
Por la ecuación (10.30), la velocidad angular final es

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}{2.6\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}(0.50\,\text{rev/s}) = 2.5\,\text{rev/s}$$

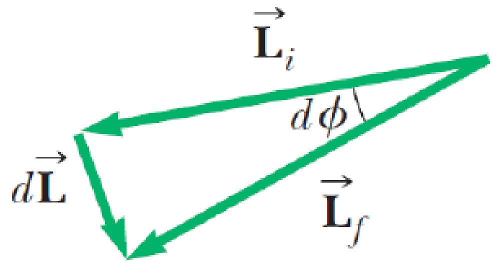
MOVIMIENTO DE PRECESIÓN

El vector $\vec{\tau}$ se encuentra en un plano perpendicular al vector cantidad de movimiento angular.

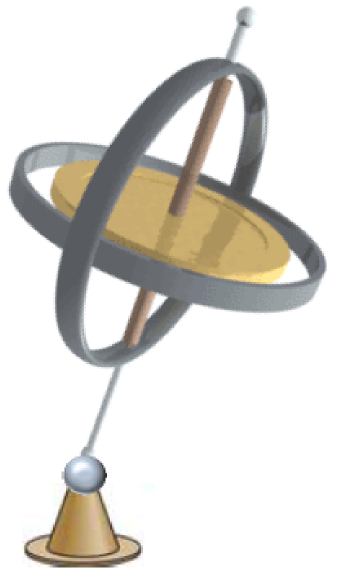
La fuerza normal no produce momento de torsión.



$\tau = Mgh$



El momento de torsión resulta en un cambio en cantidad de movimiento angular $d\vec{L}$ en una dirección perpendicular al eje. El eje barre un ángulo $d\phi$ en un intervalo de tiempo dt.

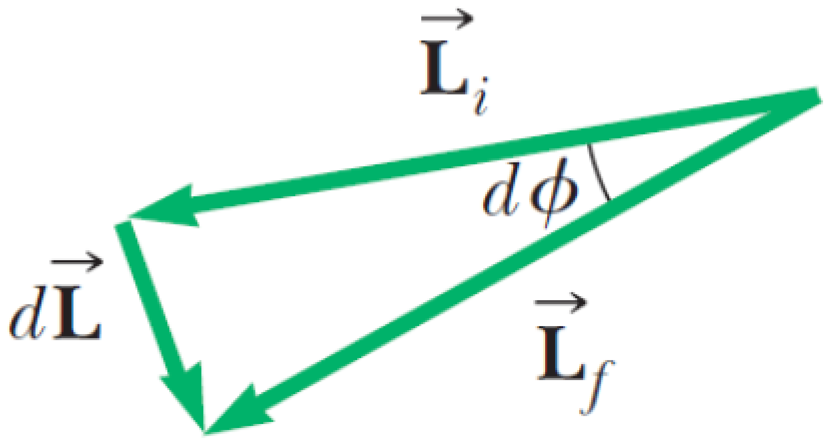


El momento de torsión neto y la cantidad de movimiento angular del giroscopio se relacionan mediante: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$$d\vec{L} = \vec{\tau}dt \qquad [1]$$

El cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{L}$ es en la dirección de $\vec{\tau}$, hay un cambio en la dirección pero no en la magnitud, lo que ocasional el movimiento de precesión.

MOVIMIENTO DE PRECESIÓN



$$\left|\vec{L}_f\right| = \left|\vec{L}_i\right| = L$$

Utilizamos la aproximación $\sin\theta \approx \theta$

Por lo tanto,

$$sen\ d\phi = \frac{dL}{L}$$

$$d\phi = \frac{dL}{L} \quad [2]$$

Y considerando:

$$L = \omega I \quad [3] \qquad \omega = frecuencia\ del\ giro$$

Sustituyendo [1] y [3] en la ecuación [2], se tiene:

$$d\phi = \frac{\tau dt}{L} = \frac{Mgh\ dt}{\omega I}$$

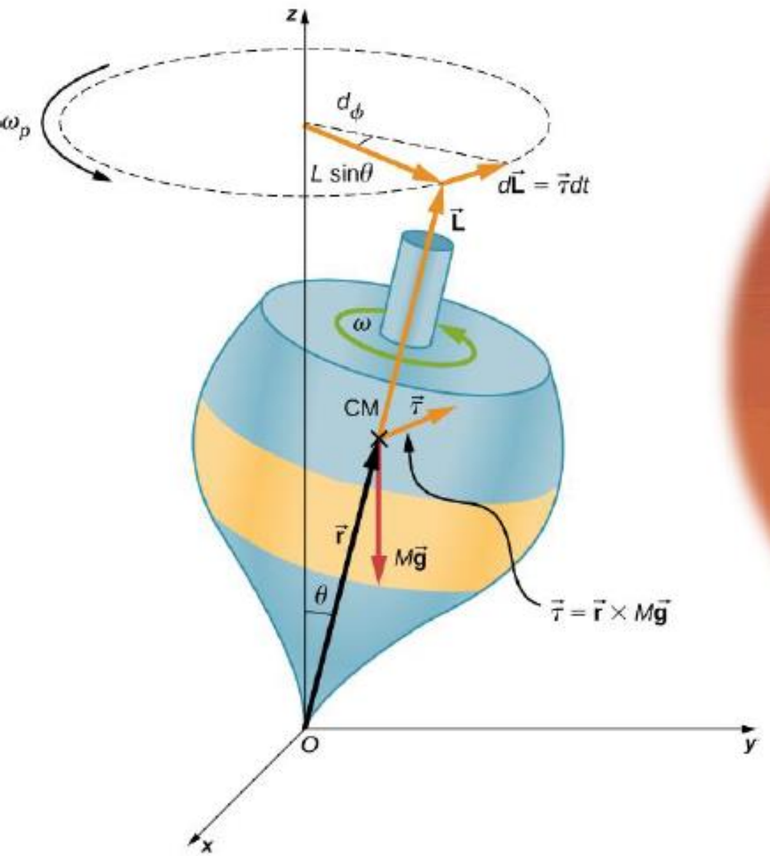
Dividiendo por dt ambos lados de la ecuación

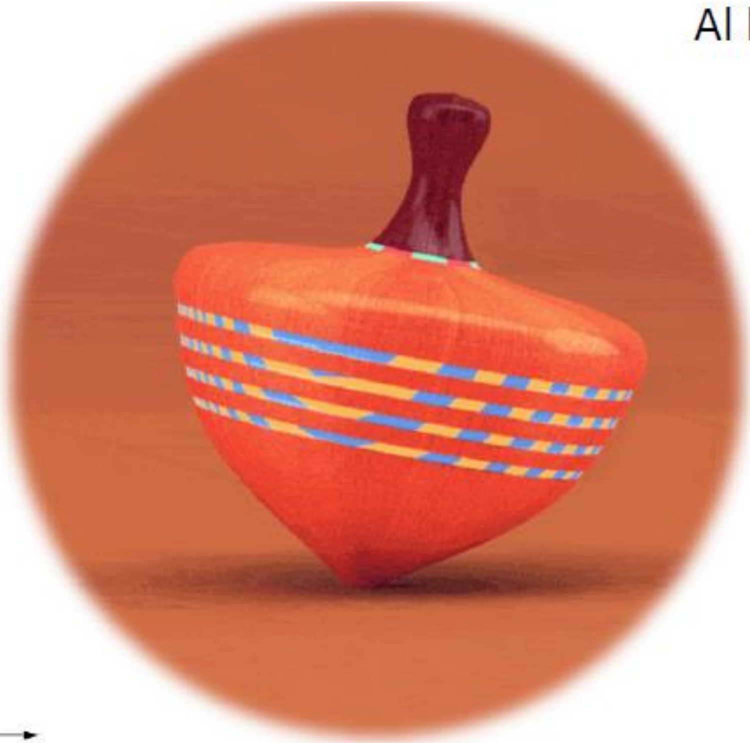
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgh\ dt}{\omega I dt}$$

frecuencia de precesión

$$\omega_p = \frac{Mgh}{\omega I} \qquad \omega_p <<< \omega$$

MOVIMIENTO DE PRECESIÓN





Al lanzarlo, la cuerda imprime momento angular

$$L = \omega I$$

ω =velocidad angular de rotación, respecto a su eje de simetría

Como el momento de las fuerzas exteriores es igual a cero, el momento angular se conserva.

La precesión genera el torque, lo cual evita que el trompo caiga, la fricción con el suelo hace que el trompo pierda energía

[(6) Otros movimientos de la Tierra - YouTube]