Pruebas (Test) de Hipótesis

Los datos evidencian la verdad

Pruebas de Hipótesis

Es posible estimar un parámetro a partir de datos muestrales, bien sea una estimación puntual o un intervalo de confianza. Pero:

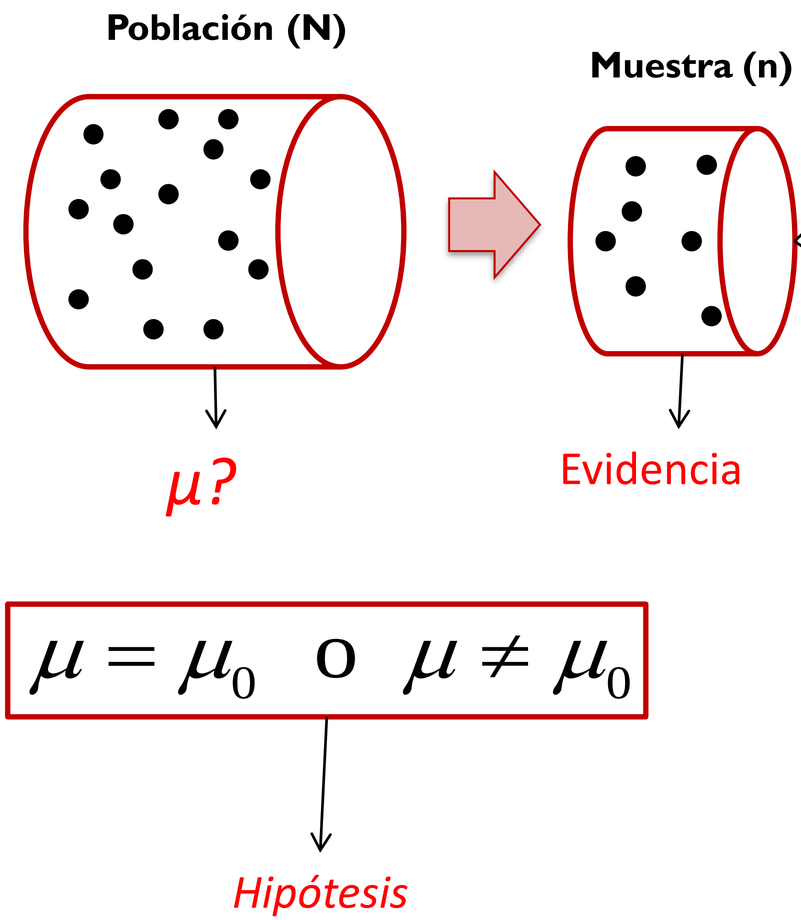
¿Si mi objetivo no es estimar un parámetro, sino determinar el cumplimiento de una hipótesis sobre un parámetro?

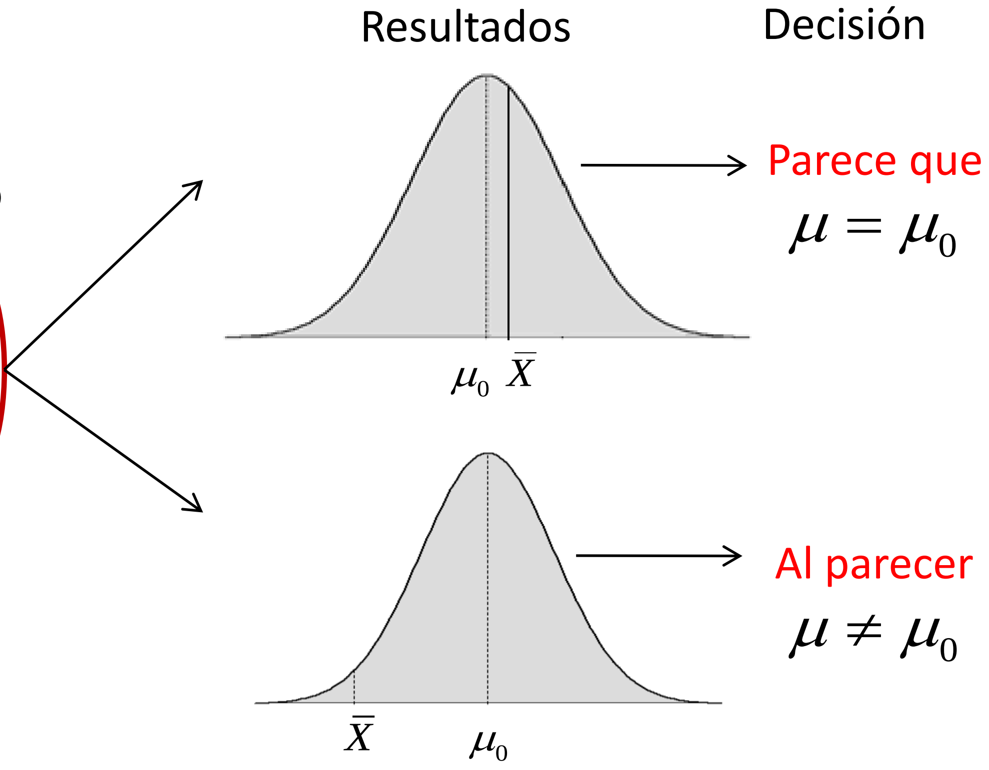
Ejemplos:

- *La cantidad de OD en un rio es inferior a 4 mg/L*
- *La resistencia a la ruptura de una fibra es igual a 150 psi.*
- *El porcentaje de suertes de caña de azúcar afectada por factores biológicos es superior al 10%.*

"Claramente el objetivo mas que saber el valor exacto del parámetro, consiste en validar la hipótesis planteada"

¿Como Opera una Pruebas de Hipótesis?





Su decisión se fundamenta en la evidencia recogida a través de una muestra representativa.

Pruebas de Hipótesis

Algunas Definiciones:

Hipótesis de investigación: Idea o conjetura que se tiene a priori y que se desea contrastar a través de la realidad.

Hipótesis Estadística: Representación de la hipótesis de investigación en forma de ecuación matemática y en función de parámetros poblacionales.

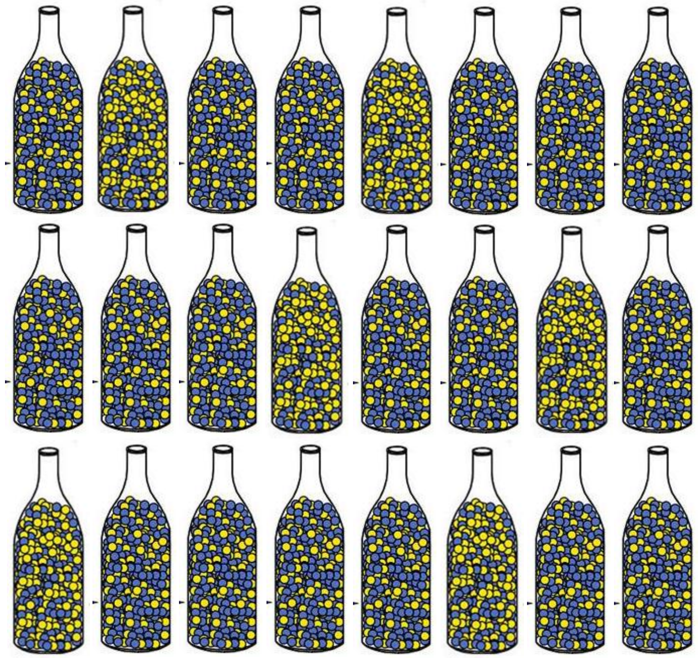
Ejemplos:

- H_1: La cantidad de OD en un rio es inferior a 4 mg/L → H_1: $\mu < 4$
  - H_0: $\mu \geq 4$
  - H_1: $\mu < 4$
- H_2: La resistencia a la ruptura de una fibra es igual a 150 psi. → H_2: $\mu = 150$
  - H_0: $\mu = 150$
  - H_1: $\mu \neq 150$
- H_3: El porcentaje de suertes de caña de azúcar afectada por factores biológicos es superior o igal al 10%. → H_3: $P \geq 0.10$
  - H_0: $P \geq 0.10$
  - H_1: $P < 0.10$

En cada situación, las hipótesis de investigación pueden desglosarse en dos hipótesis estadísticas que se denominan: "***Hipótesis Nula*** **(H_0)**" e "***Hipótesis Alterna*** **(H_1)**".

Ejemplo:

Se esta fabricando gel antibacterial, donde se espera que el porcentaje de alcohol en la botella de un litro sea del 70%.

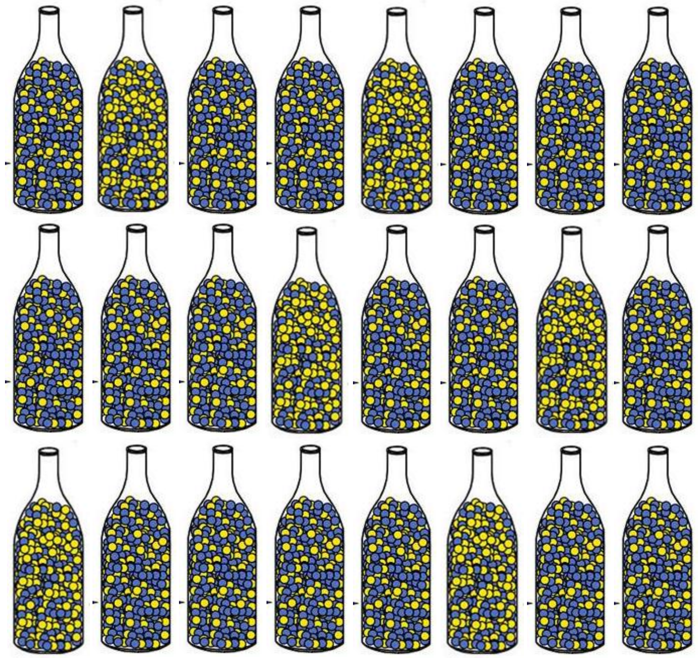


Con porcentaje de alcohol igual al 70%.

Con porcentaje de alcohol menor al 70%.

Ejemplo:

Se esta fabricando gel antibacterial, donde se espera que el porcentaje de alcohol en la botella de un litro sea del 70%.



El referente histórico indica que:

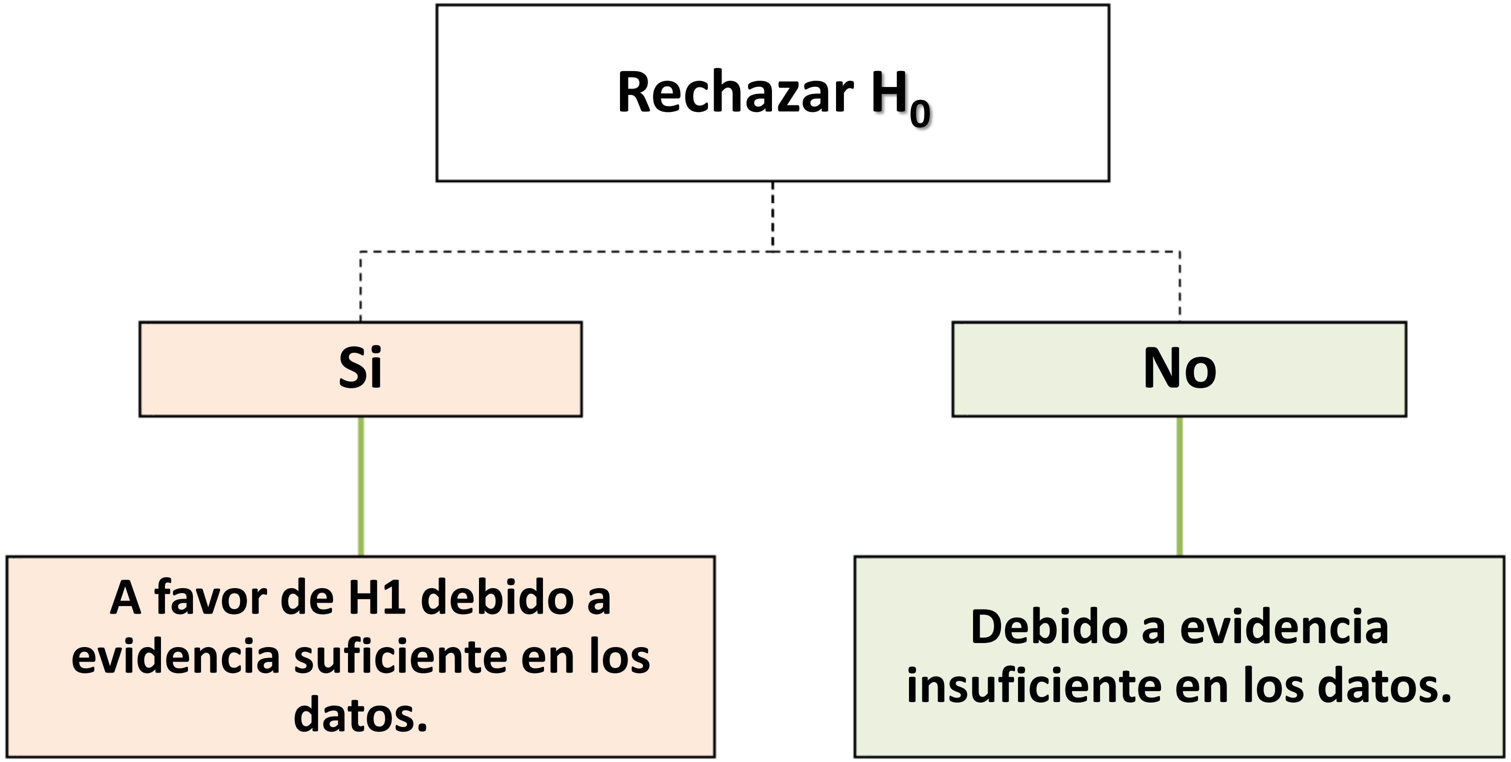
$$H_0: P = 0.70$$

¿Qué probaríamos en este caso?:

Si los clientes manifiestan que el porcentaje de alcohol es menor.

$$H_1: P < 0.70$$

En un procedimiento de prueba de hipótesis, el analista llega a una de las siguientes dos conclusiones:



Ejemplo:

Se esta fabricando gel antibacterial, donde se espera que el porcentaje de alcohol en la botella de un litro sea del 70%.

Se toma una muestra al azar.

La muestra indica que el porcentaje de alcohol es menor al 70%.

$$H_1: P < 0.70$$

¿Es suficiente para generalizar el resultado a toda la población?

Ejemplo:

Se esta fabricando gel antibacterial, donde se espera que el porcentaje de alcohol en la botella de un litro sea del 70%.

Se toma una muestra al azar.

La muestra indica que el porcentaje de alcohol es igual 70%.

$$H_0: P = 0.70$$

¿Es suficiente para generalizar el resultado a toda la población?

Paso 1. Afirmación sobre algún parámetro $(\boldsymbol{\theta})$: $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}$

Paso 2. Llevar la afirmación a un contraste de hipótesis:

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_0: \mu \geq \mu_0 \qquad H_0: \mu \leq \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0 \qquad H_1: \mu < \mu_0 \qquad H_1: \mu > \mu_0$$

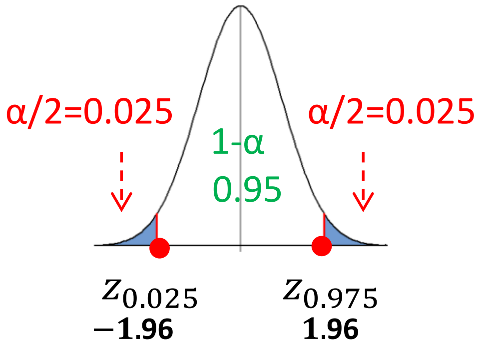
Paso 3. Regla de decisión:

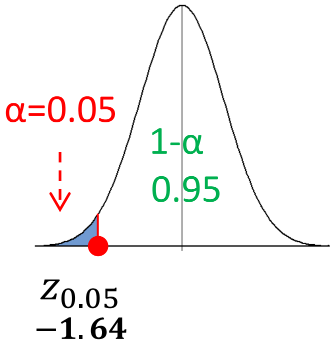
α = Región de Rechazo H_0

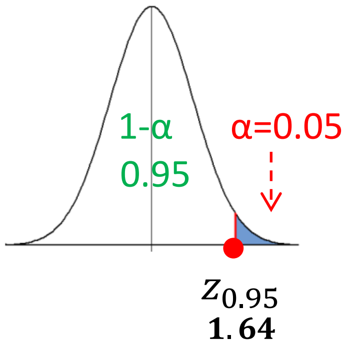
1-α = Región de No Rechazo H_0

α=0.05

1-α=0.95







Paso 4. Estadístico de Prueba:

$\boldsymbol{\mu}$

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

$\boldsymbol{\pi}$

$$Z_0 = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_c (1 - \pi_o)}{n}}}$$

$z_0 = 0.78$

$z_0 = -2.0$

$z_0 = 2.0$

Paso 5: Tomar una conclusión.

- En el caso del rechazo de $\mathbf{H_0}$:

"*dado lo observado en la muestra a un nivel de significancia del* α*100%, *existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de que …*"

- En el caso del no rechazo de $\mathbf{H_0}$:

"*dado lo observado en la muestra a un nivel de significancia del* α*100%, *no existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de que …*"

Errores en las Pruebas de Hipótesis

"Se debe entender que la aceptación de una hipótesis implica tan solo que los datos no arrojaron suficiente evidencia que indique que esta no se cumple".

Decisión \ Condición real	H_0 verdadera	H_0 falsa
Rechazar H_0	**Error Tipo I**	No existe error
Aceptar H_0	No existe error	**Error Tipo II**

- ***Error Tipo I:*** Rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera
  P(Error Tipo I) = $\boldsymbol{\alpha}$ = **Nivel de significancia**
- No rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera
  1 - P(Error Tipo I) = $\mathbf{1-\boldsymbol{\alpha}}$ = **Nivel de Confianza**

- ***Error Tipo II:*** No rechazar la hipótesis nula cuando es falsa
  P(Error Tipo II) = $\boldsymbol{\beta}$
- Rechazar la hipótesis nula cuando es falsa
  1 - P(Error Tipo II) = $\mathbf{1-\boldsymbol{\beta}}$ = **Potencia de la prueba**

Lo ideal seria que tanto $\boldsymbol{\alpha}$ como $\boldsymbol{\beta}$ sean muy pequeños, pero esto sólo se logra aumentando el tamaño de la muestra.

Estadísticos de Prueba

Caso 1: Comparación de una población contra un valor objetivo: **Media**

H_0	H_1	Supuestos	Estadístico de Prueba	Distribución
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	• Normalidad • Varianza poblacional conocida • Muestra ≥30 o <30	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	Z
		• Normalidad • Varianza poblacional desconocida y muestra ≥ 30	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	Z
		• Normalidad • Varianza poblacional desconocida y muestra < 30	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t_{(n-1)}$

Estadísticos de Prueba

Caso 1: Comparación de una población contra un valor objetivo:
Proporción y **Varianza**

H_0	H_1	Supuestos	Estadístico de Prueba	Distribución
$\mathrm{P} = P_0$	$\mathrm{P} \neq P_0$ $\mathrm{P} > P_0$ $\mathrm{P} < P_0$	Muestra grande	$Z = \dfrac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1 - P_0)}{n}}}$	Z
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	Normalidad	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2_{(n-1)}$

Ejemplo

Llenado de botellas

Se supone que las botellas de una famosa bebida contienen 350 mililitros (ml). Existe una cierta variación entre las botellas porque las máquinas embotelladoras no son absolutamente precisas.

Según las especificaciones de la máquina, el llenado presenta una desviación de *3.0 ml.* Un inspector que sospecha que la embotelladora llena menos de lo indicado, mide el contenido de diez botellas. Los resultados son:

348,40	347,70	350,01	347,90	348,20	348,00	350,10	347,30	350,20	349,10

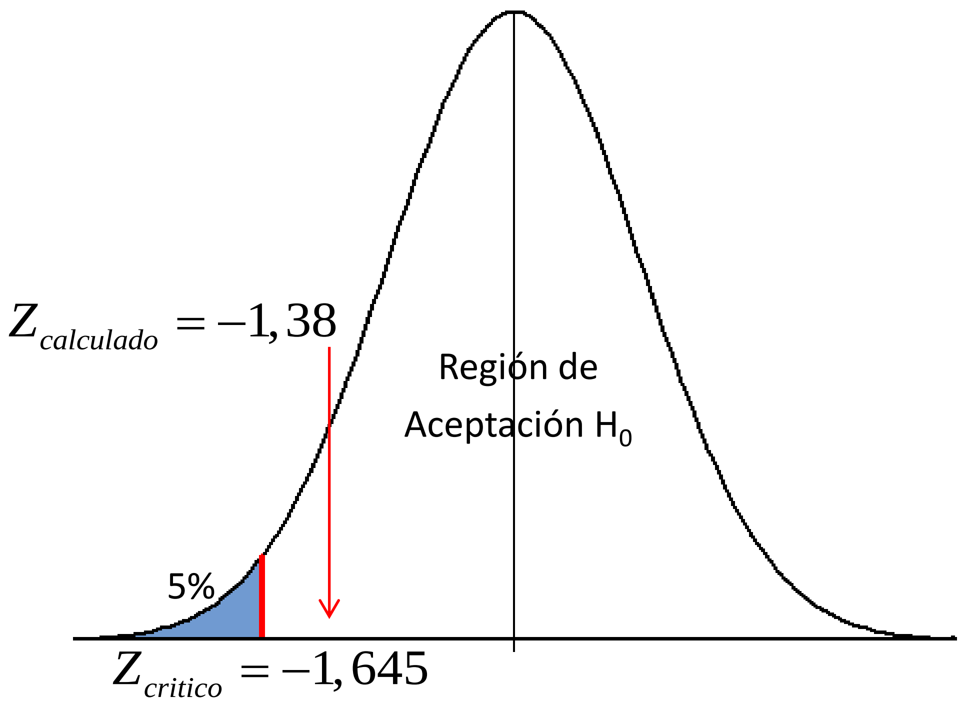
$$\bar{x} = 348,69 \quad ; \quad S = 1.08$$

- Estos datos, **¿proporcionan suficiente evidencia a favor de que el contenido medio de las botellas es <u>menor de 350 ml</u>?**
- Evalúe la hipótesis a un nivel de **significancia del 5%.**

Solución Ejemplo

Hipótesis de Investigación:
El contenido de las botellas es inferior a 350 ml.

Hipótesis Estadísticas: H_0: $\mu \geq 350$ ml
H_1: $\mu < 350$ ml



Estadístico de Prueba:
Suponiendo que el contenido se distribuye de manera Normal, el estadístico de prueba viene dado por:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{348,691 - 350}{3.0 / \sqrt{10}} = -1,38$$

Estadístico de Contraste (Valor Crítico):

$$Z_\alpha = Z_{0,05} = -1,645$$

Regla de Decisión:
Se rechaza H_0 si $Z_{calculado} < Z_{crítico}$

Conclusión:
Como el estadístico de prueba es superior al estadístico de contraste entonces **no existe suficiente evidencia para rechazar H_0** a un nivel de significancia del 5%, por lo tanto el contenido de llenado de las botellas se considera igual a 350 ml.

Ejercicio

Se requiere que la resistencia a la ruptura de una fibra sea de por lo menos 150 psi. Se prueba una muestra aleatoria de cuatro ejemplares que dan como resultado:

145, 153, 150, 147

a. ¿Cuales son las hipótesis que deberían considerarse para este experimento?
b. Grafique la zona de rechazo y aceptación.
c. Pruebe la hipótesis utilizando el estadístico de prueba y critico a un $\alpha=0.05$.
d. Evalúe el valor-p.

Ejercicio

La longitud media de una pequeña barra de contrapeso es de 43 milímetros. Al supervisor de producción le preocupa que hayan cambiado los ajustes de la máquina de producción de barras. Solicita una investigación al departamento de ingeniería, que selecciona una muestra aleatoria de 12 barras y las mide. Los resultados aparecen en seguida, expresados en milímetros.

42	39	42	45	43	40	39	41	40	42	43	42

¿Es razonable concluir que cambió la longitud media de las barras? Utilice el nivel de significancia 0.05.

Ejercicio

Por experiencias pasadas se ha encontrado que el tiempo para que realicen los estudiantes de este curso el próximo taller, es una variable aleatoria normal con una media de 35 minutos. Si una muestra aleatoria de 20 estudiantes de este curso le tomó un promedio de 33.1 minutos realizar este taller con una desviación estándar de 4.3 minutos, pruebe la hipótesis que los estudiantes se toman menos de 35 minutos en realizar el taller a un nivel de significancia del 5%.

Ejercicio

Un ingeniero se interesa en probar el sesgo en un medidor de pH. Se toma una muestra de las mediciones y los datos son los siguientes:

7.07, 7.00, 7.10, 6.97, 7.00, 7.03, 7.01, 7.01, 6.98 y 7.08.

Si el medidor funciona correctamente no debería presentar diferencias significativas al 10%, con respecto al verdadero pH promedio de 7.0.

Ejemplo

El área de gestión humana de una compañía afirma que el 68% de sus empleados ha tenido relaciones extramaritales. Lo cual es una afirmación muy fuerte, sin embargo, no tenemos como demostrar que es menor o mayor.

¿Usted estaría de acuerdo con esta afirmación si una encuesta aleatoria de los empleados de la compañía revelara que 18 de cada 32 han tenido relaciones extramaritales?

Utilice un nivel de significancia de 0.10.

Solución Ejemplo

Hipótesis de Investigación: el contenido medio de nicotina de sus cigarrillos es igual a 3.5mg.

Hipótesis Estadística:

$$H_0 : P = 0.68$$
$$H_1 : P \neq 0.68$$

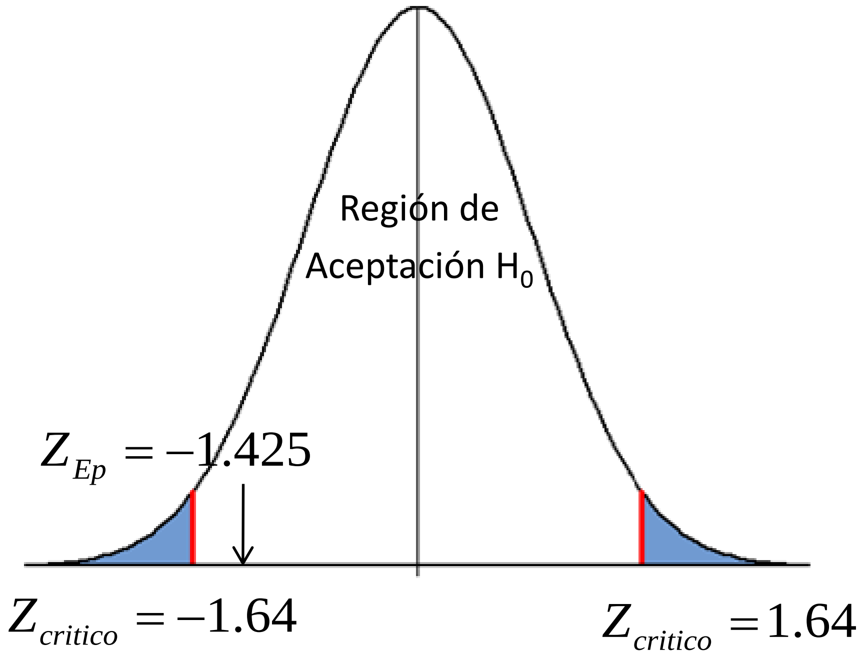
Estadístico de Prueba:
Suponiendo que el peso se distribuye de manera Normal, el estadístico de prueba viene dado por:

$$Z_{Ep} = \frac{p - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0.5625 - 0.68}{\sqrt{\frac{0.68(1-0.68)}{32}}} = -1.425$$

Estadístico de Contraste (Valor Critico):

$$Z_{Critico} = Z_{(1-\alpha/2)} = Z_{(1-0.10/2)} = Z_{0.95} = 1.64$$

Regla de Decisión:
si $|Z_{calculado}| < Z_{critico}$ → No rechaza H_0



Conclusión:
Con una significancia del 10%, dado lo observado en la muestra se concluye que la muestra no presenta suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir que no hay razón suficiente para dudar de la afirmación del área de gestión humana.

Ejercicio

Si la producción diaria de la maquina de una fabrica tiene mas de 10% de artículos defectuosos, es necesario repararla. Una muestra aleatoria de 100 piezas de la producción del da contiene 15 piezas defectuosas y el supervisor decide que la maquina debe ser reparada.

¿La evidencia muestral apoya la decisión? Use un nivel de significancia del 1 %.