Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Recordemos que en el modelo Malthus o exponencial se asume que la tasa de crecimiento es proporcional a la población en cada instante;

Crecimiento de Poblaciones

Recordemos que en el modelo Malthus o exponencial se asume que la tasa de crecimiento es proporcional a la población en cada instante; por tanto, tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad k > 0.$$

Crecimiento de Poblaciones

Recordemos que en el modelo Malthus o exponencial se asume que la tasa de crecimiento es proporcional a la población en cada instante; por tanto, tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad k > 0.$$

Este modelo es poco realista y funciona en pequeños periodos de tiempo, en dicho modelo no se considera una tasa de mortalidad debida a factores externos.

Crecimiento de Poblaciones

Recordemos que en el modelo Malthus o exponencial se asume que la tasa de crecimiento es proporcional a la población en cada instante; por tanto, tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad k > 0.$$

Este modelo es poco realista y funciona en pequeños periodos de tiempo, en dicho modelo no se considera una tasa de mortalidad debida a factores externos. El siguiente modelo que es el logístico o de Verhulst considera este factor y viene dado por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

Note: que para valores pequeños de P, tenemos que $\dfrac{dP}{dt} \approx aP$ y por tanto este se ve como una corrección del modelo de Malthus.

Note: que para valores pequeños de P, tenemos que $\dfrac{dP}{dt} \approx aP$ y por tanto este se ve como una corrección del modelo de Malthus. Sin embargo, cuando P es grande, el término $-bP$ no puede despreciarse.

Note: que para valores pequeños de P, tenemos que $\dfrac{dP}{dt} \approx aP$ y por tanto este se ve como una corrección del modelo de Malthus. Sin embargo, cuando P es grande, el término $-bP$ no puede despreciarse. Notemos que $P(t) \equiv 0$ y $P(t) \equiv \frac{a}{b}$ son soluciones de la ecuación, dado que la población no cambia estas son llamadas soluciones de equilibrio.

Note: que para valores pequeños de P, tenemos que $\dfrac{dP}{dt} \approx aP$ y por tanto este se ve como una corrección del modelo de Malthus. Sin embargo, cuando P es grande, el término $-bP$ no puede despreciarse. Notemos que $P(t) \equiv 0$ y $P(t) \equiv \frac{a}{b}$ son soluciones de la ecuación, dado que la población no cambia estas son llamadas soluciones de equilibrio. Para resolver la ecuación, procedemos a separar variables e integrar

$$\int \frac{1}{P(a-bP)} dP = \int dt.$$

Note: que para valores pequeños de P, tenemos que $\dfrac{dP}{dt} \approx aP$ y por tanto este se ve como una corrección del modelo de Malthus. Sin embargo, cuando P es grande, el término $-bP$ no puede despreciarse. Notemos que $P(t) \equiv 0$ y $P(t) \equiv \frac{a}{b}$ son soluciones de la ecuación, dado que la población no cambia estas son llamadas soluciones de equilibrio. Para resolver la ecuación, procedemos a separar variables e integrar

$$\int \frac{1}{P(a-bP)} dP = \int dt.$$

Utilizando variables separables tenemos que el lado izquierdo

$$\int \frac{1}{P(a-bP)} dP \quad = \frac{1}{a} \int \frac{1}{P} + \frac{b}{a-bP} dP$$

Note: que para valores pequeños de P, tenemos que $\dfrac{dP}{dt} \approx aP$ y por tanto este se ve como una corrección del modelo de Malthus. Sin embargo, cuando P es grande, el término $-bP$ no puede despreciarse. Notemos que $P(t) \equiv 0$ y $P(t) \equiv \frac{a}{b}$ son soluciones de la ecuación, dado que la población no cambia estas son llamadas soluciones de equilibrio. Para resolver la ecuación, procedemos a separar variables e integrar

$$\int \frac{1}{P(a-bP)} dP = \int dt.$$

Utilizando variables separables tenemos que el lado izquierdo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{P(a-bP)} dP &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{P} + \frac{b}{a-bP} dP \\ &= \frac{1}{a} \left(\ln |P| - \ln |a-bP| \right) \end{aligned}$$

Note: que para valores pequeños de P, tenemos que $\dfrac{dP}{dt} \approx aP$ y por tanto este se ve como una corrección del modelo de Malthus. Sin embargo, cuando P es grande, el término $-bP$ no puede despreciarse. Notemos que $P(t) \equiv 0$ y $P(t) \equiv \frac{a}{b}$ son soluciones de la ecuación, dado que la población no cambia estas son llamadas soluciones de equilibrio. Para resolver la ecuación, procedemos a separar variables e integrar

$$\int \frac{1}{P(a-bP)} dP = \int dt.$$

Utilizando variables separables tenemos que el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{P(a-bP)} dP &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{P} + \frac{b}{a-bP} dP \\
&= \frac{1}{a} \left(\ln |P| - \ln |a-bP| \right) \\
&= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{P}{a-bP} \right|
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = t + C.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = t + C.$$

Multiplicando por a y aplicando exponencial tenemos

$$\frac{P}{a-bP} = Ce^{at}. \tag{1}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = t + C.$$

Multiplicando por a y aplicando exponencial tenemos

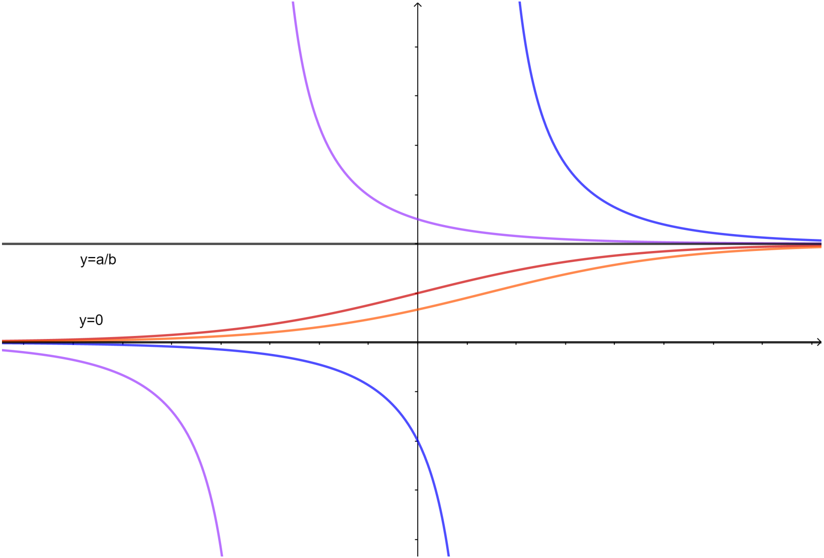
$$\frac{P}{a-bP} = Ce^{at}. \tag{1}$$

Despejando P obtenemos

$$P(t) = \frac{Cae^{at}}{1+Cbe^{at}}. \tag{2}$$

Tenemos el siguiente comportamiento de las soluciones

Tenemos el siguiente comportamiento de las soluciones



Ejemplo

En 2005 Colombia se estimó una población de 42.888.592 de personas y en 2018 se estimó de 48.258.494.

Ejemplo

En 2005 Colombia se estimó una población de 42.888.592 de personas y en 2018 se estimó de 48.258.494. Usando el modelo de Malthus estimemos la población de Colombia para el 2021 y el 2022.

Ejemplo

En 2005 Colombia se estimó una población de 42.888.592 de personas y en 2018 se estimó de 48.258.494. Usando el modelo de Malthus estimemos la población de Colombia para el 2021 y el 2022.
Usando el modelo de Malthus tenemos que la población $P(t)$, donde t es número de años desde el 2005,

Ejemplo

En 2005 Colombia se estimó una población de 42.888.592 de personas y en 2018 se estimó de 48.258.494. Usando el modelo de Malthus estimemos la población de Colombia para el 2021 y el 2022.
Usando el modelo de Malthus tenemos que la población $P(t)$, donde t es número de años desde el 2005, satisface

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad P(0) = 42.888.592, \quad P(13) = 48.258.494.$$

Ejemplo

En 2005 Colombia se estimó una población de 42.888.592 de personas y en 2018 se estimó de 48.258.494. Usando el modelo de Malthus estimemos la población de Colombia para el 2021 y el 2022.
Usando el modelo de Malthus tenemos que la población $P(t)$, donde t es número de años desde el 2005, satisface

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad P(0) = 42.888.592, \quad P(13) = 48.258.494.$$

Dado que $P(0) = 42.888.592$ tenemos que P es de la forma
$P(t) = 42.888.592e^{kt}$,

Ejemplo

En 2005 Colombia se estimó una población de 42.888.592 de personas y en 2018 se estimó de 48.258.494. Usando el modelo de Malthus estimemos la población de Colombia para el 2021 y el 2022.
Usando el modelo de Malthus tenemos que la población $P(t)$, donde t es número de años desde el 2005, satisface

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad P(0) = 42.888.592, \quad P(13) = 48.258.494.$$

Dado que $P(0) = 42.888.592$ tenemos que P es de la forma $P(t) = 42.888.592e^{kt}$, y usando $P(13) = 48.258.494$ encontramos que

Ejemplo

En 2005 Colombia se estimó una población de 42.888.592 de personas y en 2018 se estimó de 48.258.494. Usando el modelo de Malthus estimemos la población de Colombia para el 2021 y el 2022.
Usando el modelo de Malthus tenemos que la población $P(t)$, donde t es número de años desde el 2005, satisface

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad P(0) = 42.888.592, \quad P(13) = 48.258.494.$$

Dado que $P(0) = 42.888.592$ tenemos que P es de la forma $P(t) = 42.888.592e^{kt}$, y usando $P(13) = 48.258.494$ encontramos que

$$k = \frac{\ln \dfrac{48.258.494}{42.888.592}}{13}$$

Ejemplo

En 2005 Colombia se estimó una población de 42.888.592 de personas y en 2018 se estimó de 48.258.494. Usando el modelo de Malthus estimemos la población de Colombia para el 2021 y el 2022.
Usando el modelo de Malthus tenemos que la población $P(t)$, donde t es número de años desde el 2005, satisface

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad \text{donde} \quad P(0) = 42.888.592, \quad P(13) = 48.258.494.$$

Dado que $P(0) = 42.888.592$ tenemos que P es de la forma $P(t) = 42.888.592e^{kt}$, y usando $P(13) = 48.258.494$ encontramos que

$$k = \frac{\ln \frac{48.258.494}{42.888.592}}{13} = \frac{\ln(1,1252)}{13} = 0,009.$$

Por tanto $P(t) = 42.888.592e^{0,009t}$

Por tanto $P(t) = 42.888.592e^{0,009t}$

$$P(16) = 42.888.592e^{0,144} = 42.888.592 \times 1,155 = 49.531.353$$

y

Por tanto $P(t) = 42.888.592e^{0,009t}$

$$P(16) = 42.888.592e^{0,144} = 42.888.592 \times 1,155 = 49.531.353$$

y

$$P(17) = 42.888.592e^{0,153} = 42.888.592 \times 1,165 = 49.979.147$$

Ejemplo

Supongamos que 2000 estudiantes deciden ir al campus universitario de Melendez y deciden quedarse allí por un tiempo indeterminado sin elementos de bioseguridad.

Ejemplo

Supongamos que 2000 estudiantes deciden ir al campus universitario de Melendez y deciden quedarse allí por un tiempo indeterminado sin elementos de bioseguridad. Supongamos que uno de ellos es portador de coronavirus y que dos días después hay 10 contagiados.

Ejemplo

Supongamos que 2000 estudiantes deciden ir al campus universitario de Melendez y deciden quedarse allí por un tiempo indeterminado sin elementos de bioseguridad. Supongamos que uno de ellos es portador de coronavirus y que dos días después hay 10 contagiados. Si la tasa de cambio del contagio es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de estudiantes no contagiados,

Ejemplo

Supongamos que 2000 estudiantes deciden ir al campus universitario de Melendez y deciden quedarse allí por un tiempo indeterminado sin elementos de bioseguridad. Supongamos que uno de ellos es portador de coronavirus y que dos días después hay 10 contagiados. Si la tasa de cambio del contagio es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de estudiantes no contagiados, determinar cuantos contagiados hay en ocho días.

Ejemplo

Supongamos que 2000 estudiantes deciden ir al campus universitario de Melendez y deciden quedarse allí por un tiempo indeterminado sin elementos de bioseguridad. Supongamos que uno de ellos es portador de coronavirus y que dos días después hay 10 contagiados. Si la tasa de cambio del contagio es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de estudiantes no contagiados, determinar cuantos contagiados hay en ocho días.

Sea $P(t)$ el número de estudiantes contagiados en el tiempo t (medido en días), de lo anterior tenemos que

$$\frac{dP}{dt} = kP(2000 - P)$$

Ejemplo

Supongamos que 2000 estudiantes deciden ir al campus universitario de Melendez y deciden quedarse allí por un tiempo indeterminado sin elementos de bioseguridad. Supongamos que uno de ellos es portador de coronavirus y que dos días después hay 10 contagiados. Si la tasa de cambio del contagio es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de estudiantes no contagiados, determinar cuantos contagiados hay en ocho días.

Sea $P(t)$ el número de estudiantes contagiados en el tiempo t (medido en días), de lo anterior tenemos que

$$\frac{dP}{dt} = kP(2000 - P) = P(2000k - kP).$$

Usando la ecuación (1) tenemos que

$$\frac{P}{2000k - kP} = Ce^{2000kt}$$

o equivalentemente

$$\frac{P}{2000 - P} = kCe^{2000kt}.$$

o equivalentemente

$$\frac{P}{2000 - P} = kCe^{2000kt}.$$

Usando $P(0) = 1$, tenemos que $\frac{1}{1999} = kC$

o equivalentemente

$$\frac{P}{2000-P} = kCe^{2000kt}.$$

Usando $P(0) = 1$, tenemos que $\frac{1}{1999} = kC$ y así

$$\frac{P}{2000-P} = \frac{1}{1999}e^{2000kt}.$$

o equivalentemente

$$\frac{P}{2000-P} = kCe^{2000kt}.$$

Usando $P(0) = 1$, tenemos que $\frac{1}{1999} = kC$ y así

$$\frac{P}{2000-P} = \frac{1}{1999}e^{2000kt}.$$

Reemplazando $P(2) = 10$ tenemos $\frac{10}{1990} = \frac{1}{1999}e^{4000k}$.

o equivalentemente

$$\frac{P}{2000-P} = kCe^{2000kt}.$$

Usando $P(0)=1$, tenemos que $\frac{1}{1999} = kC$ y así

$$\frac{P}{2000-P} = \frac{1}{1999}e^{2000kt}.$$

Reemplazando $P(2)=10$ tenemos $\frac{10}{1990} = \frac{1}{1999}e^{4000k}$. Despejando k obtenemos que

$$k = \frac{\ln(\frac{1999}{199})}{4000}$$

o equivalentemente

$$\frac{P}{2000-P} = kCe^{2000kt}.$$

Usando $P(0) = 1$, tenemos que $\frac{1}{1999} = kC$ y así

$$\frac{P}{2000-P} = \frac{1}{1999}e^{2000kt}.$$

Reemplazando $P(2) = 10$ tenemos $\frac{10}{1990} = \frac{1}{1999}e^{4000k}$. Despejando k obtenemos que

$$k = \frac{\ln(\frac{1999}{199})}{4000} = 5,7677 \times 10^{-4}$$

o equivalentemente

$$\frac{P}{2000-P} = kCe^{2000kt}.$$

Usando $P(0) = 1$, tenemos que $\frac{1}{1999} = kC$ y así

$$\frac{P}{2000-P} = \frac{1}{1999}e^{2000kt}.$$

Reemplazando $P(2) = 10$ tenemos $\frac{10}{1990} = \frac{1}{1999}e^{4000k}$. Despejando k obtenemos que

$$k = \frac{\ln(\frac{1999}{199})}{4000} = 5,7677 \times 10^{-4}$$

Tenemos que se satisface

$$\frac{P}{2000-P} = \frac{1}{1999}e^{1,1535t}.$$

Encontremos $P(8)$, tenemos que

$$\frac{P(8)}{2000 - P(8)} = \frac{1}{1999} e^{9,2284}$$

Encontremos $P(8)$, tenemos que

$$\frac{P(8)}{2000 - P(8)} = \frac{1}{1999} e^{9,2284} = 5,0937.$$

Encontremos $P(8)$, tenemos que

$$\frac{P(8)}{2000 - P(8)} = \frac{1}{1999} e^{9,2284} = 5,0937.$$

Luego

$$P(8)(1 + 5,0937) = 2000 \times 5,0937 = 10187,4.$$

Encontremos $P(8)$, tenemos que

$$\frac{P(8)}{2000 - P(8)} = \frac{1}{1999}e^{9,2284} = 5,0937.$$

Luego

$$P(8)(1 + 5,0937) = 2000 \times 5,0937 = 10187,4.$$

Finalmente

$$P(8) = 1.671,79 \approx 1.672.$$