

# Departamento de Matemáticas

## Cálculo I

### Taller N°9: Límites y continuidad



Profesoras: Martha Pinzón y Daniela Vásquez.

Abril 16 de 2021

1. Calcule los siguientes límites si existen

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$$

$$d) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta - \sec \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x^2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{3 \operatorname{sen} x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{\operatorname{sen} 3x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(5x - 5)}{x^3 - 1}$$

2. Halle si existen, asíntotas horizontales y verticales de las funciones dadas.

$$a) f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$b) f(x) = 7x^6 - 3x^4 + 8$$

$$c) f(x) = \frac{|x + 2|}{x + 2}$$

3. Pruebe que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^{1/x}}{1 + 2^{1/x}}$  no existe.

4. Use el teorema del sandwich para calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \operatorname{cos} \frac{1}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$$

5. Suponga que  $f(x)$  es una función acotada (es decir, existe una constante real  $M > 0$ , tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in D_f$ ). Use el teorema del Sandwich para probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$ .

**Definición:** Sea  $f$  una función y  $a$  un número real perteneciente al dominio de  $f$ . Se dice que  $f$  es continua en  $a$  si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Si  $f$  no es continua en un punto  $a$ , se dice que  $f$  es discontinua en  $a$ .

6. Muestre que las siguientes funciones son continuas en  $x = a$ .

$$a) f(x) = -5x^3 - 3x^2 + x - 2; a = 2.$$

$$b) f(x) = \tan x; a = \frac{\pi}{4}.$$

7. Sea  $f(x) = |x|$ . Muestre que  $f$  es continua en  $x = 0$ . Es  $f$  es derivable en  $x = 0$ ?

8. Muestre que las siguientes funciones son continuas en  $x = a$ .

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \in [0, 3], x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}; \quad a = 1.$$

b)  $f(x) = |x| - x$ ;  $a = 0$ .

9. Determine si la función  $f$  es continua en  $x = 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 5}{x + 3} & \text{si } x \in (-3, 0] \\ \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

10. Halle los valores de la constante  $a$  para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} -2a^2 + x + 5 & \text{si } x \geq -2 \\ \frac{5a}{x+1} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

es continua en  $x = -2$ .

11. Halle los valores de la constante  $m$ , para que la función sea continua en  $x = m$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 7 & \text{si } x \leq m \\ -2x + 3 & \text{si } x > m \end{cases}$$

12. Halle la ecuación de la recta tangente y normal a la curva  $y = \sqrt{x}$  en  $x = 4$ . (La recta normal a la curva en un punto  $P$ , es la recta perpendicular a la recta tangente a la curva en  $P$ ).