Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Método de reducción de orden

Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

Método de reducción de orden

Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

queremos obtener una solución de la forma

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Método de reducción de orden

Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

queremos obtener una solución de la forma

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Derivando obtenemos $y_2' = v'y_1 + vy_1'$ y $y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$ y sustituyendo en la ecuación (1)

Método de reducción de orden

Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

queremos obtener una solución de la forma

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Derivando obtenemos $y_2' = v'y_1 + vy_1'$ y $y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$ y sustituyendo en la ecuación (1) tenemos que

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(v'y_1 + vy_1') + qvy_1 = 0$$

Método de reducción de orden

Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

queremos obtener una solución de la forma

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Derivando obtenemos $y_2' = v'y_1 + vy_1'$ y $y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$ y sustituyendo en la ecuación (1) tenemos que

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(v'y_1 + vy_1') + qvy_1 = 0$$

Reagrupando y usando que $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$

Método de reducción de orden

Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

queremos obtener una solución de la forma

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

Derivando obtenemos $y_2' = v'y_1 + vy_1'$ y $y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$ y sustituyendo en la ecuación (1) tenemos que

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(v'y_1 + vy_1') + qvy_1 = 0$$

Reagrupando y usando que $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$ obtenemos que

$$v''y_1 + 2v'y_1' + pv'y_1 = 0.$$

Renombrando $w = v'$

Renombrando $w = v'$ y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos la ecuación

$$\frac{dw}{dx} y_1 + w(2y_1' + py_1) = 0,$$

Renombrando $w = v'$ y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos la ecuación

$$\frac{dw}{dx} y_1 + w(2y_1' + py_1) = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{w} dw = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right) dx.$$

Renombrando $w = v'$ y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos la ecuación

$$\frac{dw}{dx}y_1 + w(2y_1' + py_1) = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{w}dw = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)dx.$$

Integrando $\ln|w| = lny_1^{-2} - \int p\,dx + C_1$

Renombrando $w = v'$ y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos la ecuación

$$\frac{dw}{dx} y_1 + w(2y_1' + py_1) = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{w} dw = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right) dx.$$

Integrando $\ln|w| = lny_1^{-2} - \int p\, dx + C_1$ y se sigue que

$$v' = w = C_1 \frac{e^{-\int p\, dx}}{y_1^2}.$$

Renombrando $w = v'$ y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos la ecuación

$$\frac{dw}{dx} y_1 + w(2y_1' + py_1) = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{w} dw = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right) dx.$$

Integrando $\ln|w| = lny_1^{-2} - \int p\,dx + C_1$ y se sigue que

$$v' = w = C_1 \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}.$$

Integrando de nuevo encontramos que

$$v(x) = C_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx + C_2.$$

Dado que encontramos v encontramos y_2 en la cual pueden aparecer las constantes reales C_1 y C_2 debido a los procesos de integración.

Dado que encontramos v encontramos y_2 en la cual pueden aparecer las constantes reales C_1 y C_2 debido a los procesos de integración.

Si queremos un conjunto fundamental de soluciones debemos elegir las constantes de integración de modo que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ sean linealmente independientes.

Dado que encontramos v encontramos y_2 en la cual pueden aparecer las constantes reales C_1 y C_2 debido a los procesos de integración.

Si queremos un conjunto fundamental de soluciones debemos elegir las constantes de integración de modo que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ sean linealmente independientes. Una forma es tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, en efecto, en ese caso

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\, dx}}{y_1^2} dx$$

Dado que encontramos v encontramos y_2 en la cual pueden aparecer las constantes reales C_1 y C_2 debido a los procesos de integración.

Si queremos un conjunto fundamental de soluciones debemos elegir las constantes de integración de modo que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ sean linealmente independientes. Una forma es tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, en efecto, en ese caso

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx$$

y así

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \int \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx + y_1 \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} \end{vmatrix}$$

Dado que encontramos v encontramos y_2 en la cual pueden aparecer las constantes reales C_1 y C_2 debido a los procesos de integración.

Si queremos un conjunto fundamental de soluciones debemos elegir las constantes de integración de modo que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ sean linealmente independientes. Una forma es tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, en efecto, en ese caso

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx$$

y así

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \int \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx + y_1 \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} \end{vmatrix} = e^{-\int p\,dx} \neq 0.$$

Dado que encontramos v encontramos y_2 en la cual pueden aparecer las constantes reales C_1 y C_2 debido a los procesos de integración.

Si queremos un conjunto fundamental de soluciones debemos elegir las constantes de integración de modo que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ sean linealmente independientes. Una forma es tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, en efecto, en ese caso

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx$$

y así

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \int \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx + y_1 \dfrac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} \end{vmatrix} = e^{-\int p\,dx} \neq 0.$$

Concluimos que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación (1).

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = e^{2x}$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = e^{2x}$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = e^{2x}$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Tenemos que $y_2(x) = v(x)e^{2x}$, luego

$$y_2' = v'e^{2x} + 2ve^{2x} \quad \text{y} \quad y_2'' = v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x}.$$

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = e^{2x}$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Tenemos que $y_2(x) = v(x)e^{2x}$, luego

$$y_2' = v'e^{2x} + 2ve^{2x} \quad \text{y} \quad y_2'' = v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x}.$$

sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x} - 4(v'e^{2x} + 2ve^{2x}) + 4ve^{2x} = v''e^{2x} = 0.$$

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = e^{2x}$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Tenemos que $y_2(x) = v(x)e^{2x}$, luego

$$y_2' = v'e^{2x} + 2ve^{2x} \quad \text{y} \quad y_2'' = v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x}.$$

sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x} - 4(v'e^{2x} + 2ve^{2x}) + 4ve^{2x} = v''e^{2x} = 0.$$

Se sigue que $v'' = 0$, de donde $v' = C_1$ y $v = C_1x + C_2$.

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = e^{2x}$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Tenemos que $y_2(x) = v(x)e^{2x}$, luego

$$y_2' = v'e^{2x} + 2ve^{2x} \quad \text{y} \quad y_2'' = v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x}.$$

sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$v''e^{2x} + 4v'e^{2x} + 4ve^{2x} - 4(v'e^{2x} + 2ve^{2x}) + 4ve^{2x} = v''e^{2x} = 0.$$

Se sigue que $v'' = 0$, de donde $v' = C_1$ y $v = C_1x + C_2$. Tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ tenemos que $v = x$ y

$$y_2(x) = xe^{2x}.$$

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = x$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4xy' + 4y = 0,$$

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = x$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4xy' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = x$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4xy' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Tenemos que $y_2(x) = v(x)x$, luego

$$y_2' = v'x + v \quad \text{y} \quad y_2'' = v''x + 2v'.$$

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = x$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4xy' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Tenemos que $y_2(x) = v(x)x$, luego

$$y_2' = v'x + v \quad \text{y} \quad y_2'' = v''x + 2v'.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$v''x + 2v' - 4x(v'x + v) + 4vx = v''x + 2v' - 4x^2v' = 0.$$

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = x$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4xy' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Tenemos que $y_2(x) = v(x)x$, luego

$$y_2' = v'x + v \quad \text{y} \quad y_2'' = v''x + 2v'.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$v''x + 2v' - 4x(v'x + v) + 4vx = v''x + 2v' - 4x^2v' = 0.$$

Sustituyendo $w = v'$, se sigue que

$$x\frac{dw}{dx} = w(4x^2 - 2).$$

Ejemplo

Dada la función $y_1(x) = x$ solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 4xy' + 4y = 0,$$

hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Tenemos que $y_2(x) = v(x)x$, luego

$$y_2' = v'x + v \quad \text{y} \quad y_2'' = v''x + 2v'.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$v''x + 2v' - 4x(v'x + v) + 4vx = v''x + 2v' - 4x^2v' = 0.$$

Sustituyendo $w = v'$, se sigue que

$$x\frac{dw}{dx} = w(4x^2 - 2).$$

O equivalentemente,

$$\frac{1}{w}dw = (4x - \frac{2}{x})dx.$$

Integrando $\ln w = 2x^2 - \ln\, x^2 = 2x^2 + \ln\, x^{-2}$

Integrando $\ln w = 2x^2 - \ln\, x^2 = 2x^2 + \ln\, x^{-2}$ y se sigue que

$$v' = w = x^{-2} e^{2x^2}.$$

Integrando $\ln w = 2x^2 - \ln\, x^2 = 2x^2 + \ln\, x^{-2}$ y se sigue que

$$v' = w = x^{-2} e^{2x^2}.$$

Dado que no podemos calcular la integral escribimos

$$v(x) = \int_0^x t^{-2} e^{2t^2} dt$$

Integrando $\ln w = 2x^2 - \ln\, x^2 = 2x^2 + \ln\, x^{-2}$ y se sigue que

$$v' = w = x^{-2}e^{2x^2}.$$

Dado que no podemos calcular la integral escribimos

$$v(x) = \int_0^x t^{-2}e^{2t^2}dt$$

y así

$$y_2(x) = x\int_0^x t^{-2}e^{2t^2}dt.$$

Integrando $\ln w = 2x^2 - \ln\, x^2 = 2x^2 + \ln\, x^{-2}$ y se sigue que

$$v' = w = x^{-2}e^{2x^2}.$$

Dado que no podemos calcular la integral escribimos

$$v(x) = \int_0^x t^{-2}e^{2t^2}dt$$

y así

$$y_2(x) = x\int_0^x t^{-2}e^{2t^2}dt.$$

Podríamos obtener una aproximación de y_2 al calcularla en series de potencias.

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que esta ecuación tiene soluciones con dominio $\mathbb{R}$.

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que esta ecuación tiene soluciones con dominio $\mathbb{R}$. Buscaremos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$ con $r \in \mathbb{R}$,

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que esta ecuación tiene soluciones con dominio $\mathbb{R}$. Buscaremos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$ con $r \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que esta ecuación tiene soluciones con dominio $\mathbb{R}$. Buscaremos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$ con $r \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2) tenemos

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que esta ecuación tiene soluciones con dominio $\mathbb{R}$. Buscaremos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$ con $r \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2) tenemos

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx}$ es una solución de (2)

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que el teorema de existencia y unicidad nos garantiza que esta ecuación tiene soluciones con dominio $\mathbb{R}$. Buscaremos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$ con $r \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2) tenemos

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx}$ es una solución de (2) si r satisface

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3}$$

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo de los valores de estas raíces tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2).

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo de los valores de estas raíces tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2).

Tenemos tres posibilidades:

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo de los valores de estas raíces tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2).

Tenemos tres posibilidades:

Raíces reales distintas ($b^2 - 4ac > 0$).

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo de los valores de estas raíces tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2).

Tenemos tres posibilidades:

Raíces reales distintas ($b^2 - 4ac > 0$).

Raíces reales iguales ($b^2 - 4ac = 0$).

Llamaremos a la ecuación (3) ecuación auxiliar de la ecuación (2).

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo de los valores de estas raíces tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2).

Tenemos tres posibilidades:

Raíces reales distintas ($b^2 - 4ac > 0$).

Raíces reales iguales ($b^2 - 4ac = 0$).

Raíces complejas ($b^2 - 4ac < 0$).

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas,

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas, un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$,

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas, un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$, en efecto, verifiquemos que su Wronskiano es diferente de cero

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix}$$

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas, un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$, en efecto, verifiquemos que su Wronskiano es diferente de cero

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{r_1 x} e^{r_2 x}$$

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas, un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$, en efecto, verifiquemos que su Wronskiano es diferente de cero

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{r_1 x} e^{r_2 x} \neq 0.$$

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas, un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$, en efecto, verifiquemos que su Wronskiano es diferente de cero

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{r_1 x} e^{r_2 x} \neq 0.$$

Entonces, la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$.

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$av''e^{rx} + 2arv'e^{rx} + avr^2e^{rx} + bv'e^{rx} + bvre^{rx} + cve^{rx} = 0.$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$av''e^{rx} + 2arv'e^{rx} + avr^2e^{rx} + bv'e^{rx} + bvre^{rx} + cve^{rx} = 0.$$

Usando que $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$av''e^{rx} + 2arv'e^{rx} + avr^2e^{rx} + bv'e^{rx} + bvre^{rx} + cve^{rx} = 0.$$

Usando que $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ y $r = -\frac{b}{2a}$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$av''e^{rx} + 2arv'e^{rx} + avr^2e^{rx} + bv'e^{rx} + bvre^{rx} + cve^{rx} = 0.$$

Usando que $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ y $r = -\frac{b}{2a}$ tenemos que

$$av''e^{rx} + (2ar + b)v'e^{rx}$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$av''e^{rx} + 2arv'e^{rx} + avr^2e^{rx} + bv'e^{rx} + bvre^{rx} + cve^{rx} = 0.$$

Usando que $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ y $r = -\frac{b}{2a}$ tenemos que

$$av''e^{rx} + (2ar + b)v'e^{rx} = e^{rx}av''$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$av''e^{rx} + 2arv'e^{rx} + avr^2e^{rx} + bv'e^{rx} + bvre^{rx} + cve^{rx} = 0.$$

Usando que $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ y $r = -\frac{b}{2a}$ tenemos que

$$av''e^{rx} + (2ar + b)v'e^{rx} = e^{rx}av'' = 0.$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$av''e^{rx} + 2arv'e^{rx} + avr^2e^{rx} + bv'e^{rx} + bvre^{rx} + cve^{rx} = 0.$$

Usando que $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ y $r = -\frac{b}{2a}$ tenemos que

$$av''e^{rx} + (2ar + b)v'e^{rx} = e^{rx}av'' = 0.$$

Dado que $ae^{rx} \neq 0$ tenemos que $v'' = 0$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (2) es $y_1 = e^{rx}$. Usando el método de reducción de orden busquemos $y_2 = v(x)e^{rx}$ luego

$$y' = v'e^{rx} + vre^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = v''e^{rx} + 2rv'e^{rx} + vr^2e^{rx}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$av''e^{rx} + 2arv'e^{rx} + avr^2e^{rx} + bv'e^{rx} + bvre^{rx} + cve^{rx} = 0.$$

Usando que $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ y $r = -\frac{b}{2a}$ tenemos que

$$av''e^{rx} + (2ar + b)v'e^{rx} = e^{rx}av'' = 0.$$

Dado que $ae^{rx} \neq 0$ tenemos que $v'' = 0$ y así $v(x) = x$.

Concluimos que

$$y_2 = xe^{rx}.$$

Concluimos que

$$y_2 = xe^{rx}.$$

Verifiquemos que $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ es un conjunto fundamental,

Concluimos que

$$y_2 = xe^{rx}.$$

Verifiquemos que $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ es un conjunto fundamental, en efecto, su wronskiano es difrerente de cero

$$W(e^{rx}, xe^{rx})(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + rxe^{rx} \end{vmatrix}$$

Concluimos que

$$y_2 = xe^{rx}.$$

Verifiquemos que $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ es un conjunto fundamental, en efecto, su wronskiano es difrerente de cero

$$W(e^{rx}, xe^{rx})(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + rxe^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx}$$

Concluimos que

$$y_2 = xe^{rx}.$$

Verifiquemos que $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ es un conjunto fundamental, en efecto, su wronskiano es difrerente de cero

$$W(e^{rx}, xe^{rx})(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + rxe^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0.$$

Concluimos que

$$y_2 = xe^{rx}.$$

Verifiquemos que $\{e^{rx}, xe^{rx}\}$ es un conjunto fundamental, en efecto, su wronskiano es difrerente de cero

$$W(e^{rx}, xe^{rx})(x) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + rxe^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0.$$

Entonces, la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 xe^{rx}.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -2 \quad \text{y} \quad r_2 = -1.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -2 \quad \text{y} \quad r_2 = -1.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{-2x}, e^{-x}\}$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -2 \quad \text{y} \quad r_2 = -1.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{-2x}, e^{-x}\}$$

y la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuyas raíz es

$$r = -1.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuyas raíz es

$$r = -1.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{-x}, xe^{-x}\}$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuyas raíz es

$$r = -1.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{-x}, xe^{-x}\}$$

y la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$