Clase 01-03-22

martes, 1 de marzo de 2022 10:53 a. m.

# Subespacios y matriz asociados a una transformación lineal

Ejemplo. Sea $T: P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una T.L. tal que

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}.$$

- $Nu(T)$:

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a+b+c=0 \implies a+0+0=0 \implies a=0.$$

$$b+c=0 \implies b=0$$

$$c=0$$

Luego, $Nu(T) = \{0+0x+0x^2\} = \{\Theta\}$

- $Im(T)$: Sea $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$a+b+c=p \qquad b+c=q \qquad c=r.$$

$$b+r=q$$

$$b = q - r$$

$$a + (\cancel{q - r}) + \cancel{r} = p$$

$$a = p - q.$$

observe que

$$T[\underbrace{(p-q)}_{a} + \underbrace{(q-r)}_{b}x + \underbrace{r}_{c}x^2] = \begin{pmatrix} p-q+q-r+r \\ q-r+r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Hemos mostrado que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, tiene un preimagen en $P_2$ de la forma

$$(p-q) + (q-r)x + rx^2.$$

Por tanto, $Im(T) = \mathbb{R}^3$.

**Teorema 4** [*Subespacios asociados a una transformación lineal*]. Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

1. $Nu(T)$ es subespacio vectorial de $V$.
2. $Im(T)$ es subespacio vectorial de $W$.

$$Nu(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

Sean $u, v \in Nu(T) \Rightarrow T(u) = 0$ y $T(v) = 0$

veamos que $u + v \in Nu(T)$. En efecto,

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0.$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0 = 0. \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in Nu(T).$

Además, $0 \in Nu(T)$ y $Nu(T) \neq \phi$.

En consecuencia $Nu(T)$ es e.v.

Matriz asociada a una T.L.

**Definición 4** [*Matriz asociada a una transformación lineal respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$*]. Dadas la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ y las bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}'$ de $V$ y $W$, respectivamente, definimos como *matriz asociada a la transformación lineal $T$ respecto a las bases* $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ a la matriz

$$[A_T]_{BB'} = [[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} \; [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} \cdots [T(\mathbf{v}_n)]_{B'}] .$$

$$T : V \longrightarrow W$$

$\mathcal{B}$ $\quad$ $\mathcal{B}'$ bases.

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$$A_T = [A_T]_{BB'} = \left( [T(v_1)]_{B'} \; [T(v_2)]_{B'} \cdots [T(v_n)]_{B'} \right).$$

Ejemplo. $\cdot$ $T : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una T.L. tal que

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix}$$

$\cdot$ $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x-x^2\}$ base $P_2$.

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

Encontra la matriz asociada a la transformación $T$, respecto a las bases dadas.

Solución:

Matriz asociada a $T$.

$$A_T = [A_T]_{BB'} = \left( [T(1)]_{B'} \quad [T(1+x)]_{B'} \quad [T(1+x-x^2)]_{B'} \right).$$

Dado que $T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix}$, entoces:

- $T(1) = T(1+0x+0x^2) = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\quad [T(1)]_{B'} = ?$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T(1). \quad \Rightarrow [T(1)]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\alpha = 1$ y $\beta = 0$

- $T(1+x) = T(1+x+0x^2) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T(1+x) \Rightarrow [T(1+x)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\alpha = 0$ y $\beta = 0$

- $T(1+x-x^2) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(1+x-x^2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

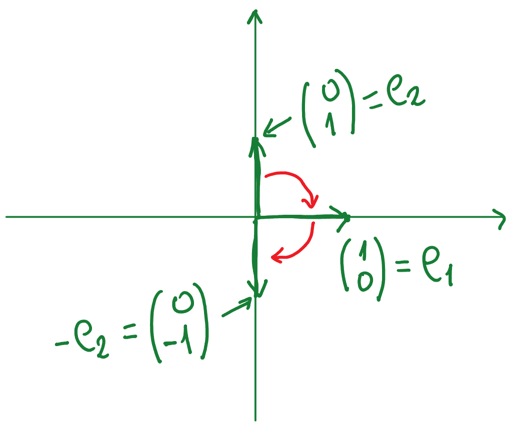
Por tanto, $\qquad [A_T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Ejemplo. Sean $\cdot\ B = \left\{ \underset{\substack{\downarrow \\ e_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{\downarrow \\ e_2}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

$\cdot\ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la T.L. que a cada vector del plano lo rota $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj.

Calcular la matriz asociada a $S$, respecto a la base $B$.

Solución




$$S(e_1) = S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_2.$$

$$S(e_2) = S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1.$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = S(e_1). \quad \Rightarrow \quad [S(e_1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0, \ \beta = -1$

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S(e_2) \quad \Rightarrow \quad [S(e_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1, \ \beta = 0$

Luego, $A_S = \big( [S(e_1)]_B \ \ [S(e_2)]_B \big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ //

Observacion: En terminos de los vectores de coordenadas, todas las T.L. resultan ser matriciales.

**Teorema 5** [*Caracterización de la matriz asociada a una transformación lineal*].
Dadas la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, con $V$ y $W$ espacios vectoriales de dimensión finita y las bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}'$ de $V$ y $W$, respectivamente, $A_T$, la matriz asociada a la transformación $T$ respecto de estas bases, es la única matriz tal que, para todo $\mathbf{v} \in V$,

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'} = A_T[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \\ v \arrow[d, dotted] & T(v) \arrow[d, dotted] \\ B \quad [v]_B \arrow[r, "A_T"] & B' \quad [T(v)]_{B'} = A_T [v]_B . \end{tikzcd}$$

Ejemplo. $T: P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix}.$

$B = \{ 1, \ 1 + x, \ 1 + x - x^2 \}$. base de $P_2$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^2.$$

Sabemos que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Verificar que $[T(v)]_{B'} = A_T [v]_B$

Solución.

Sea $v = a + bx + cx^2 \in \mathbb{P}_2$ (arbitrario). Veamos que

$$[T(a+bx+cx^2)]_{B'} = A_T [a+bx+cx^2]_B.$$

$$\alpha(1) + \beta(1+x) + \delta(1+x-x^2) = a + bx + cx^2$$

$\alpha + \beta + \delta = a \qquad \beta + \delta = b \qquad -\delta = c.$

$\delta = -c$

$\beta - c = b$

$\beta = b + c$

$\alpha + b + \cancelto{0}{c - c} = a$

$\alpha = a - b.$

Entonces $[a + bx + cx^2]_B = \begin{pmatrix} a-b \\ b+c \\ -c \end{pmatrix}$.

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a-b \\ c \end{pmatrix}.$$

$\alpha = a - b$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\c\end{pmatrix}. \Rightarrow \quad \beta = c.$$

$$[T(a+bx+cx^2)]_{B'} = \begin{pmatrix}a-b\\c\end{pmatrix}. \quad (1)$$

$$A_T\,[a+bx+cx^2]_B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-b\\b+c\\-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b\\c\end{pmatrix} \quad (2)$$

De (1) y (2) se concluye que

$$[T(a+bx+cx^2)]_{B'} = A_T\,[a+bx+cx^2]_B \;//$$