Departamento de Matemáticas
Cálculo I

Taller N°10: Teorema del valor intermedio, reglas de derivación y regla de la cadena

Profesoras: Martha Pinzón y Daniela Vásquez. **Abril 23 de 2021**

---

1. *a*) Pruebe que la ecuación $x^7 - 3x^4 = -3$ tiene solución en el intervalo $[-1, 0]$.

   b) Pruebe que la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8$ tiene un cero real.

2. Sea f una función continua en $[0, 1]$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$. Muestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. (Sugerencia, considere la función $g(x) = f(x) - x$).

   Reglas de Derivación. Si f y g son funciones derivables en $x = a$, entonces las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g con $g(a) \neq 0$, son derivables en $x = a$. Además,

   a) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

   b) $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

   c) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

   d) $(cf)'(a) = cf'(a)$, con c constante

   e) $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$

3. Halle $f'(x)$ si:

   a) $f(x) = 5x^5 - 2x^3 + x - 1$

   b) $f(x) = (3x^4 + 2x - 1)(-2x^3 + 5)$

   c) $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}$

   d) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2}{x - 1}$

4. Sean $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$. Halle los valores de las constantes a, b y c para los cuales las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto $(1, 2)$ y tienen la misma tangente en dicho punto.

5. Calcule la derivada de f en el valor indicado, si existe.

   a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + 4 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 7x^2 - 5x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$; $\quad x = 1.$

   b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3x^2 - 9x + 5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$; $\quad x = 2.$

   c) $f(x) = \begin{cases} senx + 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ cosx - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$; $\quad x = 0.$

6. Encuentre los valores de las constantes a y b, para los cuales la función es derivable en el valor indicado

   a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x + 5 & \text{si} \quad x < -1 \\ -bx + 1 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases} \quad ; \quad x = -1.$

   b) $f(x) = \begin{cases} 2bx^2 - 8ax + 34 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \quad ; \quad x = 3.$

   Recuerde que:

   - $\dfrac{d}{dx}(senx) = cosx,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(cosx) = -senx,$
   - $\dfrac{d}{dx}(tanx) = sec^2x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(secx) = secx\,tanx,$
   - $\dfrac{d}{dx}(cotx) = -csc^2x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(cscx) = -cscx\,cotx,$

7. Halle $\dfrac{dy}{dx}$ si:

   a) $y = 2(x^3 + 2x - 1)^{10}$

   b) $y = \sqrt{x^4 - 3x^2 + x}$

   c) $y = (3x^4 - x)^3(2x + 1)^5$

   d) $y = \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{x+1}{\sqrt{2x}}$

   e) $y = \dfrac{(3x-1)^2}{tan^2x}$

   f) $y = x\sqrt{(x^2-3)^3}$

   g) $y = sen^3(5x - 2)$

   h) $y = sec^2(1 - 2x)$

8. Sea $y = u^{15} - 2u$ y $u = x^3 - 2$. Halle $\dfrac{dy}{dx}$ en $x = 1$.

9. Sea g una función derivable. Halle $f'(x)$ si:

   a) $f(x) = xg^2(x^3 - 1)$

   b) $f(x) = \sqrt{1 + g(2x)}$

10. Si f y g son funciones diferenciables tales que $f(t) = (g^2(-t) - 3t)^4$, $g(-1) = \sqrt{2}$, $g'(-1) = -\sqrt{2}$, calcule $f'(1)$.

11. Encuentre los puntos sobre la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+4}$, donde la recta tangente es paralela a la recta $x - 4y - 3 = 0$.

12. Pruebe que la derivada de una función par es una función impar y que la derivada de una función impar es par.