Análisis y Diseño de Algoritmos II

Juan Francisco Díaz, Ph.D   Robinson Duque, Ph.D
Jesús Aranda Ph.D

Universidad del Valle

juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
robinson.duque@correounivalle.edu.co
jesus.aranda@correounivalle.edu.co

Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Overview

Programación Lineal- Introducción

Recordemos...

- Programación lineal (LP) es el término utilizado para definir una amplia gama de problemas de optimización
- la función objetivo que se debe minimizar o maximizar es lineal en las variables desconocidas
- las restricciones son una combinación de igualdades y desigualdades lineales

Programación Lineal- Introducción

Recordemos...

- los problemas de LP ocurren en muchas situaciones de la vida real donde los beneficios deben maximizarse o los costos deben minimizarse con límites de restricción de recursos
- en este curso estudiaremos el método símplex para solucionar problemas de LP. Sin embargo, nos enfocaremos principalmente en el modelado de problemas debido a que se vuelve necesario el uso de computadoras incluso para un pequeño número de variables
- comúnmente utilizado en problemas que involucran decisiones de dieta, transporte, producción y manufactura, combinación de productos, análisis de límites de ingeniería en diseño, programación de aerolíneas, etc.

Programación Lineal- Forma general

La forma general de un problema de programación lineal tiene una función objetivo y un conjunto de restricciones:

```
maximize     c1x1 + c2x2 + c3x3 + ... + cnxn
subject to :

% Restricciones LE (i = 1...l)
ai1x1 + ai2x2 + ai3x3 + ... + ainxn ≤ bi

% Restricciones GE (j = l + 1...l + r)
aj1x1 + aj2x2 + aj3x3 + ... + ajnxn ≥ bj

% Restricciones EQ (k = l + r + 1...l + r + q)
ak1x1 + ak2x2 + ak3x3 + ... + aknxn = bk

x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, ..., xn ≥ 0  % Restricciones de no
    negatividad
```

$$\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \quad (i = 1 \ldots l)$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \ge b_j \quad (j = l+1 \ldots l+r)$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \quad (k = l+r+1 \ldots l+r+q)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

Programación Lineal- Forma general

- El número de restricciones es $m = l + r + q$
- c_j y a_{ij} son coeficientes constantes
- b_j son constantes reales fijas, los cuales están ajustados a valores no negativos
- x_j son variables de decisión
- los límites de i y j son: $i = 1 \ldots m$ equivalente al número de restricciones; $j = 1 \ldots n$ equivalente al número de variables

Los problemas LP son problemas convexos, lo que implica que un máximo local es de hecho un máximo global.

Metodología y Ejemplo Introductorio

Metodología para modelar problemas de optimización (también para satisfacción de restricciones):

- Formulación del problema
- Construcción del modelo:
  - Identificación de parámetros (lo utilizaremos más adelante para modelos genéricos)
  - Identificación de variables de decisión
  - Identificación de restricciones
  - Identificación de función objetivo (para problemas de optimización)

Una vez se tiene el modelo se puede:

- Implementar el modelo en algún lenguaje de modelado (e.g., MiniZinc, CPLEX de IBM, Gecode, etc)
- Validar el modelo (posibles usos para toma de decisiones)

Metodología y Ejemplo Introductorio

Una empresa que fabrica computadores de mesa y notebook desea saber cuántos computadores debe producir para maximizar sus ganancias:

- Cada computador (de mesa o notebook) requiere de un chip de procesamiento. La empresa cuenta con 10.000 chips.
- Cada computador requiere memoria. La memoria viene en chips de 16MB, un notebook requiere 1 chip (16MB), mientras un computador de mesa requiere de 2 chips (32MB). Se cuenta con un inventario de 15.000 chips.
- Cada computador requiere tiempo de ensamblaje, un notebook toma 4 minutos y uno de mesa toma 3 minutos. Se tienen 25.000 minutos de ensamblaje disponibles.
- Cada notebook genera $750 de ganancia y uno de mesa genera $1000.

Metodología y Ejemplo Introductorio

...Después de seguir la metodología construimos el siguiente modelo:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & f = 750x_1 + 1000x_2 \\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2 \leq 10000 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 15000 \\
 & 4x_1 + 3x_2 \leq 25000 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Para reflexionar:

Observe que el modelo es dependiente de los datos del problema (instancia en particular). ¿Que sucedería si por ejemplo cambia la restricción del número de chips por computador? o ¿que pasa si si cambian los tiempos de ensamblaje? o...si en general se tiene otra instancia del problema.

Programación Lineal- Metodología y Ejemplo Introductorio

Y esta fue nuestra implementación en MiniZinc:

```
var int: x_1;   % Variable entera sin cota superior
var int: x_2;   % Variable entera sin cota superior

constraint x_1 + x_2 <= 10000;
constraint x_1 + 2*x_2 <= 15000;
constraint 4*x_1 + 3*x_2 <= 25000;
constraint x_1 >= 0;
constraint x_2 >= 0;

solve maximize 750*x_1 + 1000*x_2;

output ["x_1=", show(x_1),"\n x_2=",show(x_2)];
```

Solución: $x_1 = 1000$ y $x_2 = 7000$

Solución de LPs de dos variables

Para modelos con dos variables es posible resolver el problema de manera gráfica sin una computadora. Se debe dibujar la región factible Ω y determinar cómo se optimiza el objetivo en esa región.

Recordemos que los LPs son problemas convexos, lo que implica que un máximo local es de hecho un máximo global. Las restricciones definen una región factible que puede ser:

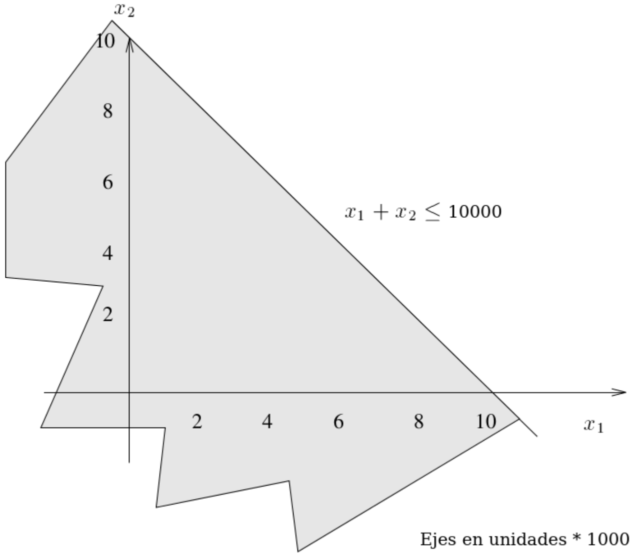
- acotada
- no acotada
- inconsistente (en cuyo caso, no existe una solución)

Solución de LPs de dos variables

Retomemos nuestro ejemplo de producción de computadores:

- Podemos representar un modelo con dos variables etiquetando los ejes de un gráfico con cada una de las variables.
- Las restricciones están representadas por líneas en el gráfico, con la región factible situada en un lado de la línea. La siguiente figura ilustra esto con la restricción $x_1 + x_2 \leq 10000$.

Solución de LPs de dos variables



Solución de LPs de dos variables

- Se deben hallar los interceptos con los ejes x_1, x_2. Para esto se utiliza una igualdad $x_1 + x_2 = 10000$ y se evalúa con $x_1 = 0$ para hallar el intercepto sobre x_2; de igual forma se procede para hallar el intercepto sobre x_1.
- Se evalúa el lado factibe de la restricción $x_1 + x_2 \leq 10000$ igualando x_1 y x_2 a cero.

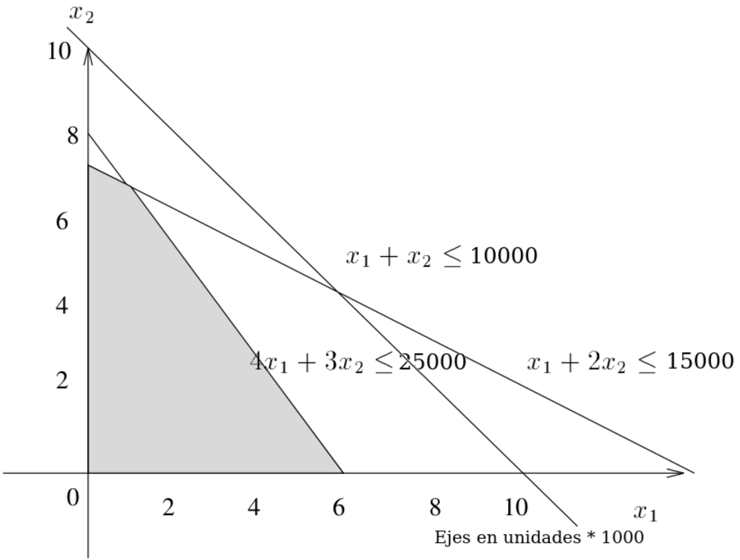
Solución de LPs de dos variables

- Podemos continuar este proceso y agregar todas las restricciones.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \leq 10000 \\
&x_1 + 2x_2 \leq 15000 \\
&4x_1 + 3x_2 \leq 25000 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Dado que cada restricción debe ser satisfecha, la región factible resultante es la intersección de la región factible para cada restricción. Esto se muestra en la siguiente figura.

Solución de LPs de dos variables



Solución de LPs de dos variables

Interesante...

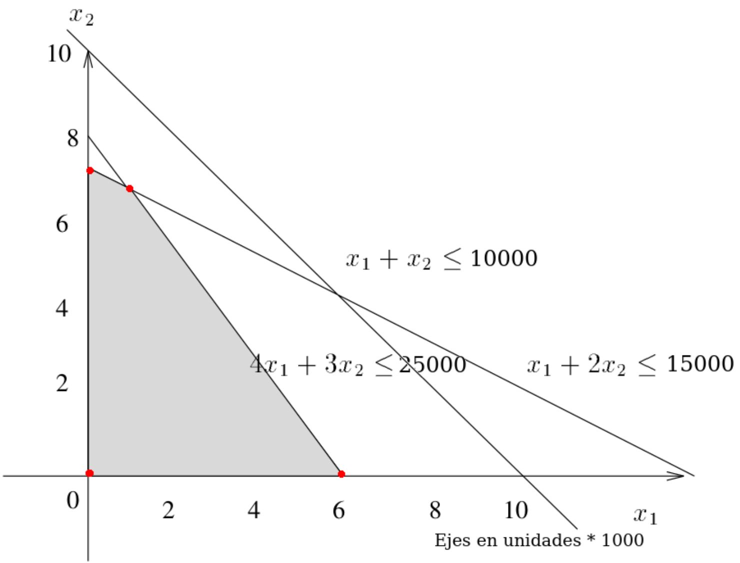
- Tenga en cuenta que solo graficar el modelo nos da información que no teníamos antes. Parece que la restricción de Chip ($x_1 + x_2 \leq 10000$) juega poco papel en este modelo. Esta restricción está dominada por otras restricciones.

Ahora, ¿cómo podemos encontrar la solución óptima?

`maximize`	$f = 750x_1 + 1000x_2$

- Se deben encontrar los valores de los puntos de intersección en la región factible y evaluar la función objetivo.

Solución de LPs de dos variables



Solución de LPs de dos variables

Puntos de intersección:

- Existe un punto en (0,0).
- Hallar el intercepto de $x_1 + 2x_2 \leq 15000$ sobre el eje x_2. Entonces, si $x_1 + 2x_2 = 15000$ y $x_1 = 0$, se tiene que $x_2 = 7500$. Por consiguiente el intercepto está en $(0, 7500)$.
- Hallar el intercepto de $4x_1 + 3x_2 \leq 25000$ sobre el eje x_1. Entonces, si $4x_1 + 3x_2 = 25000$ y $x_2 = 0$, se tiene que $x_1 = 7500$. Por consiguiente el intercepto está en $(6250, 0)$.
- Hallar el intercepto entre:

$$x_1 + 2x_2 = 15000$$

$$4x_1 + 3x_2 = 25000$$

Para esto se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene (1000,7000).

Solución de LPs de dos variables

Al evaluar los puntos {(0,0), (0,7500), (6250,0), (1000,7000)} con la función:

`maximize`	$f = 750x_1 + 1000x_2$

Se obtiene la solución óptima para $x_1 = 1000, x_2 = 7000$ donde la función toma su valor máximo.

Solución de LPs de dos variables

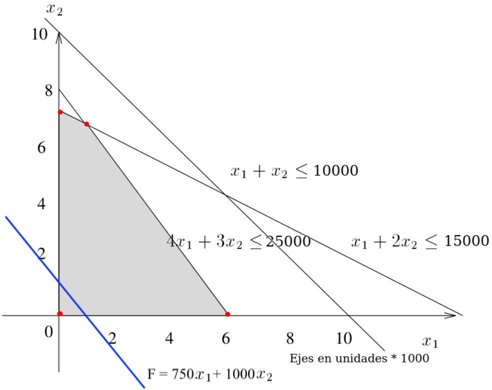
¿Porqué la solución óptima de un LP se encuentra en uno de los vértices?

Theorem

Sea Ω la región factible (de un polígono convexo) de un LP y sea $f = ax + by$ la función objetivo. Cuando f tenga un valor óptimo (máximo o mínimo) donde las variables x y y estén sujetas a las restricciones de desigualdad descritas en el LP, su valor óptimo debe ocurrir en alguno de los vértices (esquinas) de la región factible.

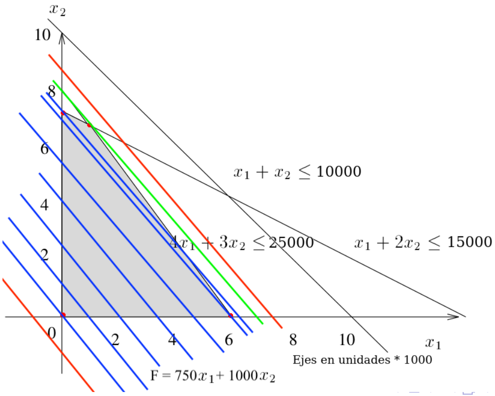
Solución de LPs de dos variables

Intuitivamente: si se escoge algún punto dentro de la región factible, siempre podremos mejorar moviendonos en alguna dirección que mejore la función objetivo. Observa la función objetivo (color azul):



Solución de LPs de dos variables

Intuitivamente: Si desplazamos la función objetivo, sólo las lineas que cortan la región factible satisfacen todas las restricciones (observa las líneas azules vs las rojas). También se puede observar que el máximo de la función (color verde) ocurre en alguno de los interceptos de la región factible:



Solución de LPs de dos variables

Para reflexionar: En este ejemplo la solución en el punto (1000,7000) nos da como resultado una solución entera $x_1 = 1000$ y $x_2 = 7000$ lo cual está bien puesto que no podríamos producir fracciones de computadores. Sin embargo:

- no siempre tendremos resultados enteros, un LP puede resultar en valores contínuos. Por ejemplo, un leve cambio en las restricciones y nuestro modelo conlleva a soluciones sobre los reales:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & f = 750x_1 + 1000x_2 \\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2 \leq 10000 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 14903 \quad \text{\% Cambio} \\
 & 4x_1 + 3x_2 \leq 25000 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$x_1 = 1058{,}200000000001$ y $x_2 = 6922{,}399999999999$

Solución de LPs de dos variables- Ejercicio

Se requiere mezclar dos tipos de alimentos X y Y para alimentar ganado (se pueden mezclar porciones de ambos tipos de alimento). Cada porción requiere de por lo menos 60 gramos de proteina y por lo menos 30 gramos de grasa. Un paquete de X cuesta $80 y contiene 15 gramos de de proteina y 10 gramos de grasa; Un paquete de Y cuesta $50 y contiene 20 gramos de proteina y 5 gramos de grasa.

¿Cuánto de cada tipo X y Y se debe usar para minimizar el costo de la producción de alimento?

- Modele el problema como un LP
- Encuentre la solución óptima utilizando el método presentado para dos variables
- *Implemente la solución en MiniZinc y verifique su resultado

Solución de LPs de dos variables- Ejercicio

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 80X + 50Y \\
\texttt{subject to} & 15X + 20Y \geq 60 \\
 & 10X + 5Y \geq 30 \\
 & X \geq 0 \\
 & Y \geq 0
\end{array}
$$

Solución de LPs de dos variables- Ejercicio

Implementación en MiniZinc:

```
var float: X;
var float: Y;
var float: C;

constraint 15*X + 20*Y >= 60;
constraint 10*X + 5*Y >= 30;
constraint X>=0;
constraint Y>=0;
constraint C=80*X+50*Y;
solve minimize C;
output ["X=", show(X), "\n Y=", show(Y), "\n C=",
    show(C)];
```

Solución: X=2.4, Y=1.2, C=252.0

Fin de la Presentación

¿Preguntas?

[Belegundu and Chandrupatla, 2019]

References I

Belegundu, A. D. and Chandrupatla, T. R. (2019).
Optimization concepts and applications in engineering.
Cambridge University Press.