Matemáticas Discretas I

Inducción

Juan Francisco Díaz Frias

Profesor Titular (1993-hoy)
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Edif. B13 - 4009
Universidad del Valle

Febrero 2022

Plan

Plan

1. Motivación
2. La naturaleza de $\mathbb{N}$
3. El principio de inducción matemática
   - Inducción simple
   - Inducción fuerte
   - Ejercicios en clase

Plan

Motivación (Video 3.7.1)

Suponga que hemos organizado un gran numero de fichas de dominó de tal manera que:

HI Si se cae la ficha k entonces se cae la ficha $k+1$
$(\forall k| : Cae(k) \implies Cae(k+1))$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

CB Se cae la ficha 0 $(Cae(0) \equiv true)$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

$(CB \wedge HI) \implies \forall k| : Cae(k)$ Piezas de dominó cayendo

Motivación (Video 3.7.1)

Suponga que hemos organizado un gran numero de fichas de dominó de tal manera que:

HI Si se cae la ficha k entonces se cae la ficha $k+1$
$(\forall k| : Cae(k) \implies Cae(k+1))$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

CB Se cae la ficha 0 ($Cae(0) \equiv true$).
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

$(CB \wedge HI) \implies \forall k| : Cae(k)$ Piezas de dominó cayendo

Motivación (Video 3.7.1)

Suponga que hemos organizado un gran numero de fichas de dominó de tal manera que:

HI Si se cae la ficha k entonces se cae la ficha $k+1$
$(\forall k| : Cae(k) \implies Cae(k+1))$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

CB Se cae la ficha 0 $(Cae(0) \equiv true)$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

$(CB \wedge HI) \implies \forall k| : Cae(k)$ Piezas de dominó cayendo

Motivación (Video 3.7.1)

Suponga que hemos organizado un gran numero de fichas de dominó de tal manera que:

HI Si se cae la ficha k entonces se cae la ficha $k+1$
$(\forall k| : Cae(k) \implies Cae(k+1))$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

CB Se cae la ficha 0 ($Cae(0) \equiv true$).
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

$(CB \wedge HI) \implies \forall k| : Cae(k)$ Piezas de dominó cayendo

Motivación (Video 3.7.1)

Suponga que hemos organizado un gran numero de fichas de dominó de tal manera que:

HI Si se cae la ficha k entonces se cae la ficha $k+1$
$(\forall k| : Cae(k) \implies Cae(k+1))$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

CB Se cae la ficha 0 $(Cae(0) \equiv true)$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

$(CB \wedge HI) \implies \forall k| : Cae(k)$ Piezas de dominó cayendo

Motivación (Video 3.7.1)

Suponga que hemos organizado un gran numero de fichas de dominó de tal manera que:

HI Si se cae la ficha k entonces se cae la ficha $k+1$ $(\forall k| : Cae(k) \implies Cae(k+1))$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

CB Se cae la ficha 0 $(Cae(0) \equiv true)$.
¿Podemos afirmar que todas las fichas se caerán? $(\forall k| : Cae(k))$

$(CB \wedge HI) \implies \forall k| : Cae(k)$ Piezas de dominó cayendo

La naturaleza de $\mathbb{N}$ (1)

Recordemos, los axiomas de Peano, los cuales definen de manera exacta al conjunto de los números naturales.
El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es el conjunto de elementos que se pueden construir a partir de una constante, 0, y una función sucesor, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y los siguientes 5 axiomas fundamentales:

1. $0 \in \mathbb{N}$ — 0 es un número natural
2. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \in \mathbb{N}$ — si n es natural, su sucesor también lo es
3. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 0$ — el 0 no es sucesor de ningún natural
4. $\forall n, m | n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \implies n = m$ — S es $1-1$
5. $\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$ — Inducción

La naturaleza de $\mathbb{N}$ (1)

Recordemos, los axiomas de Peano, los cuales definen de manera exacta al conjunto de los números naturales.
El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es el conjunto de elementos que se pueden construir a partir de una constante, 0, y una función sucesor, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y los siguientes 5 axiomas fundamentales:

1. $0 \in \mathbb{N}$ — 0 es un número natural
2. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \in \mathbb{N}$ — si n es natural, su sucesor también lo es
3. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 0$ — el 0 no es sucesor de ningún natural
4. $\forall n, m | n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \implies n = m$ — S es $1-1$
5. $\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$ — Inducción

La naturaleza de $\mathbb{N}$ (1)

Recordemos, los axiomas de Peano, los cuales definen de manera exacta al conjunto de los números naturales.
El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es el conjunto de elementos que se pueden construir a partir de una constante, 0, y una función sucesor, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y los siguientes 5 axiomas fundamentales:

1. $0 \in \mathbb{N}$ — 0 es un número natural
2. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \in \mathbb{N}$ — si n es natural, su sucesor también lo es
3. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 0$ — el 0 no es sucesor de ningún natural
4. $\forall n, m | n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \implies n = m$ — S es $1-1$
5. $\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$ — Inducción

La naturaleza de $\mathbb{N}$ (1)

Recordemos, los axiomas de Peano, los cuales definen de manera exacta al conjunto de los números naturales.
El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es el conjunto de elementos que se pueden construir a partir de una constante, 0, y una función sucesor, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y los siguientes 5 axiomas fundamentales:

1. $0 \in \mathbb{N}$ — 0 es un número natural
2. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \in \mathbb{N}$ — si n es natural, su sucesor también lo es
3. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 0$ — el 0 no es sucesor de ningún natural
4. $\forall n, m | n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \implies n = m$ — S es $1-1$
5. $\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \land (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$ — Inducción

La naturaleza de $\mathbb{N}$ (1)

Recordemos, los axiomas de Peano, los cuales definen de manera exacta al conjunto de los números naturales.
El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es el conjunto de elementos que se pueden construir a partir de una constante, 0, y una función sucesor, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y los siguientes 5 axiomas fundamentales:

1. $0 \in \mathbb{N}$ — 0 es un número natural
2. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \in \mathbb{N}$ — si n es natural, su sucesor también lo es
3. $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 0$ — el 0 no es sucesor de ningún natural
4. $\forall n, m | n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \implies n = m$ — S es $1-1$
5. $\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$ — Inducción

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  [illegible]
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. $\times$**1**: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. $\times$**2**: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:
  Ax. <1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (0 < n) \equiv (0 \neq n)$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) < 0 \equiv false$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (S(n) < S(m)) \equiv (n < m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) < S(0) = S(0) < 0 = false$

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:
  Ax. <1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (0 < n) \equiv (0 \neq n)$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) < 0 \equiv false$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (S(n) < S(m)) \equiv (n < m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) < S(0) = S(0) < 0 = false$

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:
  Ax. <1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (0 < n) \equiv (0 \neq n)$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) < 0 \equiv \mathit{false}$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (S(n) < S(m)) \equiv (n < m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) < S(0) = S(0) < 0 \equiv \mathit{false}$

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:
  Ax. <1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (0 < n) \equiv (0 \neq n)$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) < 0 \equiv \mathit{false}$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (S(n) < S(m)) \equiv (n < m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) < S(0) = S(0) < 0 \equiv \mathit{false}$

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. $\times$**1**:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. $\times$**2**: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:
  Ax. <1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (0 < n) \equiv (0 \neq n)$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) < 0 \equiv \mathit{false}$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (S(n) < S(m)) \equiv (n < m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) < S(0) = S(0) < 0 \equiv \mathit{false}$

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. ×1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. ×2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:
  Ax. <1:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (0 < n) \equiv (0 \neq n)$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) < 0 \equiv \mathit{false}$
  Ax. <2:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (S(n) < S(m)) \equiv (n < m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) < S(0) = S(0) < 0 \equiv \mathit{false}$

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

Suma, multiplicación y orden en $\mathbb{N}$

- Una vez entendida la naturaleza de $\mathbb{N}$ podemos definir operaciones básicas sobre ellos, como la suma, la multiplicación, o relaciones básicas, como la relación de orden.
- Definamos la suma $n + m$ de dos números naturales:
  Ax. +1: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + 0 = n$
  Ax. +2: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n + S(m) = S(n + m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) + S(0) = S(S(S(0)) + 0) = S(S(S(0)))$
- Definamos la multiplicación $n \times m$ de dos números naturales:
  Ax. $\times$**1**:$\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times 0 = 0$
  Ax. $\times$**2**: $\forall n | n \in \mathbb{N} : n \times S(m) = (n \times m) + n$
  Por ejemplo:
  $S(S(0)) \times S(0) = (S(S(0)) \times 0) + S(S(0)) = 0 + S(S(0)) = \ldots = S(S(0))$
- Definamos la relación de orden $n < m$ entre dos números naturales:
  Ax. $<$**1**:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (0 < n) \equiv (0 \neq n)$
  Ax. $<$**2**:$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(n) < 0 \equiv false$
  Ax. $<$**2**:$\forall n | n \in \mathbb{N} : (S(n) < S(m)) \equiv (n < m)$
  Por ejemplo: $S(S(0)) < S(0) = S(0) < 0 \equiv false$

¿Podremos demostrar, con estos axiomas y definiciones, que $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$?

$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

Recordemos el axioma 5 de Peano (Inducción):

$$\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n\}$. Vamos a demostrar que $A = \mathbb{N}$, usando ese axioma.

1. Demostraremos que $0 \in A$. Para ellos debemos demostrar que $S(0) \times 0 = 0$
   Ese es precisamente el axioma **Ax.** $\times$**1**
2. Demostraremos que $\forall n | n \in A : S(n) \in A$ o lo que es lo mismo
   $\forall n | : n \in A \implies S(n) \in A$. De acuerdo a la definición de A debemos demostrar:

$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

Recordemos el axioma 5 de Peano (Inducción):

$$\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n\}$. Vamos a demostrar que $A = \mathbb{N}$, usando ese axioma.

1. Demostraremos que $0 \in A$. Para ellos debemos demostrar que $S(0) \times 0 = 0$
   Ese es precisamente el axioma **Ax.** $\times$**1**
2. Demostraremos que $\forall n | n \in A : S(n) \in A$ o lo que es lo mismo
   $\forall n | : n \in A \implies S(n) \in A$. De acuerdo a la definición de A debemos demostrar:

$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

Recordemos el axioma 5 de Peano (Inducción):

$$\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n\}$. Vamos a demostrar que $A = \mathbb{N}$, usando ese axioma.

1. Demostraremos que $0 \in A$. Para ellos debemos demostrar que $S(0) \times 0 = 0$
   Ese es precisamente el axioma **Ax.** $\times$**1**
2. Demostraremos que $\forall n | n \in A : S(n) \in A$ o lo que es lo mismo
   $\forall n | : n \in A \implies S(n) \in A$. De acuerdo a la definición de A debemos demostrar:

$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

Recordemos el axioma 5 de Peano (Inducción):

$$\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n\}$. Vamos a demostrar que $A = \mathbb{N}$, usando ese axioma.

1. Demostraremos que $0 \in A$. Para ellos debemos demostrar que $S(0) \times 0 = 0$
   Ese es precisamente el axioma **Ax.** $\times$**1**
2. Demostraremos que $\forall n | n \in A : S(n) \in A$ o lo que es lo mismo
   $\forall n | : n \in A \implies S(n) \in A$. De acuerdo a la definición de A debemos demostrar:

$$\forall n | : S(0) \times n = n \implies S(0) \times S(n) = S(n)$$

Teo:	$S(0) \times S(n) = S(n)$	
Hip.:	$HI : S(0) \times n = n$	
	Exp.	Just.
	$S(0) \times S(n)$	
$=$	$(S(0) \times n) + S(0)$	**Ax.** $\times$**2**
$=$	$n + S(0)$	**HI**
$=$	$S(n + 0)$	**Ax.** +**2**
$=$	$S(n)$	**Ax.** +**1**, Leibniz
		$\diamond$

Hemos demostrado: $0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)$. Por lo tanto, un Modus Ponens con el Axioma 5 de Peano nos permite concluir: $A = \mathbb{N}$ lo cual es equivalente a $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

Recordemos el axioma 5 de Peano (Inducción):

$$\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n\}$. Vamos a demostrar que $A = \mathbb{N}$, usando ese axioma.

1. Demostraremos que $0 \in A$. Para ellos debemos demostrar que $S(0) \times 0 = 0$
   Ese es precisamente el axioma **Ax.** $\times$**1**
2. Demostraremos que $\forall n | n \in A : S(n) \in A$ o lo que es lo mismo
   $\forall n | : n \in A \implies S(n) \in A$. De acuerdo a la definición de A debemos demostrar:

$$\forall n | : S(0) \times n = n \implies S(0) \times S(n) = S(n)$$

Teo:	$S(0) \times S(n) = S(n)$	
Hip.:	$HI : S(0) \times n = n$	
	Exp.	Just.
	$S(0) \times S(n)$	
$=$	$(S(0) \times n) + S(0)$	**Ax.** $\times$**2**
$=$	$n + S(0)$	**HI**
$=$	$S(n + 0)$	**Ax.** $+$**2**
$=$	$S(n)$	**Ax.** $+$**1**, Leibniz
		$\diamond$

Hemos demostrado: $0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)$. Por lo tanto, un Modus Ponens con el Axioma 5 de Peano nos permite concluir: $A = \mathbb{N}$ lo cual es equivalente a $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

Recordemos el axioma 5 de Peano (Inducción):

$$\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n\}$. Vamos a demostrar que $A = \mathbb{N}$, usando ese axioma.

1. Demostraremos que $0 \in A$. Para ellos debemos demostrar que $S(0) \times 0 = 0$
   Ese es precisamente el axioma **Ax.** $\times$**1**
2. Demostraremos que $\forall n | n \in A : S(n) \in A$ o lo que es lo mismo
   $\forall n | : n \in A \implies S(n) \in A$. De acuerdo a la definición de A debemos demostrar:

$$\forall n | : S(0) \times n = n \implies S(0) \times S(n) = S(n)$$

Teo:	$S(0) \times S(n) = S(n)$	
Hip.:	$HI : S(0) \times n = n$	
	Exp.	Just.
	$S(0) \times S(n)$	
$=$	$(S(0) \times n) + S(0)$	**Ax.** $\times$**2**
$=$	$n + S(0)$	**HI**
$=$	$S(n + 0)$	**Ax.** $+$**2**
$=$	$S(n)$	**Ax.** $+$**1**, Leibniz
		$\diamond$

Hemos demostrado: $0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)$. Por lo tanto, un Modus Ponens con el Axioma 5 de Peano nos permite concluir: $A = \mathbb{N}$ lo cual es equivalente a $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

$\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

Recordemos el axioma 5 de Peano (Inducción):

$$\forall A | A \subseteq \mathbb{N} : (0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)) \implies A = \mathbb{N}$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n\}$. Vamos a demostrar que $A = \mathbb{N}$, usando ese axioma.

1. Demostraremos que $0 \in A$. Para ellos debemos demostrar que $S(0) \times 0 = 0$
   Ese es precisamente el axioma **Ax.** $\times$**1**
2. Demostraremos que $\forall n | n \in A : S(n) \in A$ o lo que es lo mismo
   $\forall n | : n \in A \implies S(n) \in A$. De acuerdo a la definición de A debemos demostrar:

$$\forall n | : S(0) \times n = n \implies S(0) \times S(n) = S(n)$$

Teo:	$S(0) \times S(n) = S(n)$	
Hip.:	$HI : S(0) \times n = n$	
	Exp.	Just.
	$S(0) \times S(n)$	
$=$	$(S(0) \times n) + S(0)$	**Ax.** $\times$**2**
$=$	$n + S(0)$	**HI**
$=$	$S(n + 0)$	**Ax.** $+$**2**
$=$	$S(n)$	**Ax.** $+$**1**, Leibniz
		$\diamond$

Hemos demostrado: $0 \in A \wedge (\forall n | n \in A : S(n) \in A)$. Por lo tanto, un Modus Ponens con el Axioma 5 de Peano nos permite concluir: $A = \mathbb{N}$ lo cual es equivalente a $\forall n | n \in \mathbb{N} : S(0) \times n = n$

Plan

1. Motivación
2. La naturaleza de $\mathbb{N}$
3. El principio de inducción matemática
   - Inducción simple
   - Inducción fuerte
   - Ejercicios en clase

El principio de inducción matemática (Video 3.7.2)

En general, supongamos que queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : P(n)$$

donde $P(n)$ es un predicado sobre $\mathbb{N}$.
Usaremos el principio de inducción matemática de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
  Para esto usaremos el metateorema de la deducción: $P(k) \vdash P(k+1)$
  $P(k)$ se denomina la Hipótesis de inducción
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} : P(n)$ justificado en el Axioma 5 de Peano (Inducción)

El principio de inducción matemática (Video 3.7.2)

En general, supongamos que queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : P(n)$$

donde $P(n)$ es un predicado sobre $\mathbb{N}$.
Usaremos el principio de inducción matemática de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$. Para esto usaremos el metateorema de la deducción: $P(k) \vdash P(k+1)$
  $P(k)$ se denomina la Hipótesis de inducción
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} : P(n)$ justificado en el Axioma 5 de Peano (Inducción)

El principio de inducción matemática (Video 3.7.2)

En general, supongamos que queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : P(n)$$

donde $P(n)$ es un predicado sobre $\mathbb{N}$.
Usaremos el principio de inducción matemática de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
  Para esto usaremos el metateorema de la deducción: $P(k) \vdash P(k+1)$
  $P(k)$ se denomina la Hipótesis de inducción
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} : P(n)$ justificado en el Axioma 5 de Peano (Inducción)

El principio de inducción matemática (Video 3.7.2)

En general, supongamos que queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : P(n)$$

donde $P(n)$ es un predicado sobre $\mathbb{N}$.
Usaremos el principio de inducción matemática de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$. Para esto usaremos el metateorema de la deducción: $P(k) \vdash P(k+1)$
  $P(k)$ se denomina la Hipótesis de inducción
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} : P(n)$ justificado en el Axioma 5 de Peano (Inducción)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=0}^{k+1} i$	
$=$	$(\sum_{i=0}^{k} i) + (k+1)$	**Partir rango**
$=$	$(\frac{k(k+1)}{2}) + (k+1)$	**HI**
$=$	$(k+1)(\frac{k}{2}+1)$	**Aritmética**
$=$	$(k+1)(\frac{k+2}{2})$	**Aritmética**
$=$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	**Aritmética**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=0}^{k+1} i$	
$=$	$(\sum_{i=0}^{k} i) + (k+1)$	Partir rango
$=$	$(\frac{k(k+1)}{2}) + (k+1)$	HI
$=$	$(k+1)(\frac{k}{2}+1)$	Aritmética
$=$	$(k+1)(\frac{k+2}{2})$	Aritmética
$=$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	Aritmética
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo $(P(k+1))$:	$\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$	
Hip. Ind. $(P(k))$:	$HI : \sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=0}^{k+1} i$	
$=$	$(\sum_{i=0}^{k} i) + (k+1)$	**Partir rango**
$=$	$(\frac{k(k+1)}{2}) + (k+1)$	**HI**
$=$	$(k+1)(\frac{k}{2}+1)$	**Aritmética**
$=$	$(k+1)(\frac{k+2}{2})$	**Aritmética**
$=$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	**Aritmética**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (1) (Video 3.7.3)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(1)}{2} \equiv \sum_{i=0}^{0} i = 0 \equiv 0 = 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=0}^{k+1} i$	
$=$	$(\sum_{i=0}^{k} i) + (k+1)$	**Partir rango**
$=$	$(\frac{k(k+1)}{2}) + (k+1)$	**HI**
$=$	$(k+1)(\frac{k}{2}+1)$	**Aritmética**
$=$	$(k+1)(\frac{k+2}{2})$	**Aritmética**
$=$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	**Aritmética**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1$ $\equiv 1 = 1 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1$ $\equiv 1 = 1 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1 \equiv 1 = 1 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1$
  $\equiv 1 = 1 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- [Caso de inducción] Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} (2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2 * 0 + 1) = 1$
  $\equiv 1 = 1 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} (2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1$ $\equiv 1 = 1 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1$
  $\equiv 1 = 1 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1) = (k+2)^2$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=0}^{k}(2i+1) = (k+1)^2$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1)$	
$=$	$(\sum_{i=0}^{k}(2i+1)) + (2(k+1)+1)$	**Partir rango**
$=$	$(k+1)^2 + 2(k+1) + 1$	**HI**
$=$	$((k+1)+1)^2$	**Aritmética**
$=$	$(k+2)^2$	**Aritmética**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1$
  $\equiv 1 = 1 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1) = (k+2)^2$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=0}^{k}(2i+1) = (k+1)^2$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1)$	
$=$	$(\sum_{i=0}^{k}(2i+1)) + (2(k+1)+1)$	**Partir rango**
$=$	$(k+1)^2 + 2(k+1) + 1$	**HI**
$=$	$((k+1)+1)^2$	**Aritmética**
$=$	$(k+2)^2$	**Aritmética**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1$ $\equiv 1 = 1 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1) = (k+2)^2$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=0}^{k}(2i+1) = (k+1)^2$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1)$	
$=$	$(\sum_{i=0}^{k}(2i+1)) + (2(k+1)+1)$	**Partir rango**
$=$	$(k+1)^2 + 2(k+1) + 1$	**HI**
$=$	$((k+1)+1)^2$	**Aritmética**
$=$	$(k+2)^2$	**Aritmética**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (2) (Video 3.7.4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv \sum_{i=0}^{0} (2i+1) = (0+1)^2 \equiv (2*0+1) = 1$ $\equiv 1 = 1 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1) = (k+2)^2$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=0}^{k}(2i+1) = (k+1)^2$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1)$	
$=$	$(\sum_{i=0}^{k}(2i+1)) + (2(k+1)+1)$	**Partir rango**
$=$	$(k+1)^2 + 2(k+1) + 1$	**HI**
$=$	$((k+1)+1)^2$	**Aritmética**
$=$	$(k+2)^2$	**Aritmética**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$(k+1)^3 - (k+1) \equiv_3 0$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : k^3 - k \equiv_3 0$	
	Exp.	Just.
	$(k+1)^3 - (k+1)$	
$=$	$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$	Aritmética
$=$	$(k^3 - k) + 3(k^2 + k)$	Aritmética
$\equiv_3$	$3(k^2 + k)$	HI
$\equiv_3$	0	$m * x \equiv_m 0$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$(k+1)^3 - (k+1) \equiv_3 0$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : k^3 - k \equiv_3 0$	
	Exp.	Just.
	$(k+1)^3 - (k+1)$	
$=$	$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$	**Aritmética**
$=$	$(k^3 - k) + 3(k^2 + k)$	**Aritmética**
$\equiv_3$	$3(k^2 + k)$	**HI**
$\equiv_3$	0	$m * x \equiv_m 0$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$(k+1)^3 - (k+1) \equiv_3 0$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : k^3 - k \equiv_3 0$	
	Exp.	Just.
	$(k+1)^3 - (k+1)$	
$=$	$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$	**Aritmética**
$=$	$(k^3 - k) + 3(k^2 + k)$	**Aritmética**
$\equiv_3$	$3(k^2 + k)$	**HI**
$\equiv_3$	0	$m * x \equiv_m 0$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv \mathit{true}$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$(k+1)^3 - (k+1) \equiv_3 0$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : k^3 - k \equiv_3 0$	
	Exp.	Just.
	$(k+1)^3 - (k+1)$	
$=$	$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$	**Aritmética**
$=$	$(k^3 - k) + 3(k^2 + k)$	**Aritmética**
$\equiv_3$	$3(k^2 + k)$	**HI**
$\equiv_3$	0	$m * x \equiv_m 0$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Uso del principio de inducción (3) (Video 3.7.5)

Probar que $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \geq 0$, es decir:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv n^3 - n \equiv_3 0$
- **[Caso base]** Demostrar $P(0) \equiv 0^3 - 0 \equiv_3 0 \equiv 0 \equiv_3 0 \equiv true$
  El caso base es obvio pues: $P(0) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$.

Teo ($P(k+1)$):	$(k+1)^3 - (k+1) \equiv_3 0$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : k^3 - k \equiv_3 0$	
	Exp.	Just.
	$(k+1)^3 - (k+1)$	
$=$	$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$	**Aritmética**
$=$	$(k^3 - k) + 3(k^2 + k)$	**Aritmética**
$\equiv_3$	$3(k^2 + k)$	**HI**
$\equiv_3$	0	$m * x \equiv_m 0$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} : n^3 - n \equiv_3 0$ por Inducción (Ax. 5, Peano)

Una variación al principio de inducción matemática (Video 3.7.6)

A veces, lo que queremos probar es

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$$

donde $a \in \mathbb{N}$ es el número natural a partir del cual se cumple el predicado $P(n)$. Usaremos el principio de inducción matemática de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq a$.
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$

Una variación al principio de inducción matemática (Video 3.7.6)

A veces, lo que queremos probar es

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$$

donde $a \in \mathbb{N}$ es el número natural a partir del cual se cumple el predicado $P(n)$. Usaremos el principio de inducción matemática de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq a$.
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$

Una variación al principio de inducción matemática (Video 3.7.6)

A veces, lo que queremos probar es

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$$

donde $a \in \mathbb{N}$ es el número natural a partir del cual se cumple el predicado $P(n)$. Usaremos el principio de inducción matemática de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq a$.
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$

Una variación al principio de inducción matemática (Video 3.7.6)

A veces, lo que queremos probar es

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$$

donde $a \in \mathbb{N}$ es el número natural a partir del cual se cumple el predicado $P(n)$. Usaremos el principio de inducción matemática de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq a$.
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por Inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$
  $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por Inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por Inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$
  $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv \mathit{true}$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv \mathit{true}$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k}$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2}$	
$=$	$(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}) + \frac{1}{(k+1)^2}$	**Partir rango**
$<$	$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$	**HI**
$<$	$2 - \frac{1}{k+1}$	**Lema:** $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por Inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

Teo ($P(k+1)$):	$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k}$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2}$	
$=$	$(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}) + \frac{1}{(k+1)^2}$	**Partir rango**
$<$	$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$	**HI**
$<$	$2 - \frac{1}{k+1}$	**Lema:** $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por Inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

Teo ($P(k+1)$): $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$

Hip. Ind. ($P(k)$): $HI : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k}$

	Exp.	Just.
	$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2}$	
$=$	$(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}) + \frac{1}{(k+1)^2}$	**Partir rango**
$<$	$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$	**HI**
$<$	$2 - \frac{1}{k+1}$	**Lema:** $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por Inducción

Uso del principio de inducción (4)

Probar que

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2} \equiv 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$ $\equiv \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \equiv true$
  El caso base queda demostrado pues: $P(2) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 2$.

Teo $(P(k+1))$:	$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$	
Hip. Ind. $(P(k))$:	$HI : \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k}$	
	Exp.	Just.
	$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2}$	
$=$	$(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}) + \frac{1}{(k+1)^2}$	**Partir rango**
$<$	$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$	**HI**
$<$	$2 - \frac{1}{k+1}$	**Lema:** $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)^2}$
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$ por Inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por Inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por inducción.

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por inducción.

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.
- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.

Teo ($P(k+1)$):	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k+1$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \exists g_1, g_2 \in \mathbb{N} \| 2g_1 + 5g_2 = k$	
Por casos:	$g_2 > 0, g_2 = 0$	
	Exp.	Just.
Caso $g_2 > 0$		
	$k+1$	
$=$	$(2g_1 + 5g_2) + 1$	**HI**
$=$	$(2g_1 + 5(g_2 - 1) + 5) + 1$	$g_2 > 0$
$=$	$(2g_1 + 5(g_2 - 1)) + 6$	**Aritmética**
$=$	$2(g_1 + 3) + 5(g_2 - 1)$	**Aritmética**
$\implies$	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k+1$	**Gen. Existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por Inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.

Teo ($P(k+1)$):	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k+1$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \exists g_1, g_2 \in \mathbb{N} \| 2g_1 + 5g_2 = k$	
Por casos:	$g_2 > 0, g_2 = 0$	
	Exp.	Just.
Caso $g_2 > 0$		
	$k+1$	
$=$	$(2g_1 + 5g_2) + 1$	**HI**
$=$	$(2g_1 + 5(g_2 - 1) + 5) + 1$	$g_2 > 0$
$=$	$(2g_1 + 5(g_2 - 1)) + 6$	**Aritmética**
$=$	$2(g_1 + 3) + 5(g_2 - 1)$	**Aritmética**
$\implies$	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k+1$	**Gen. Existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por Inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.

Teo ($P(k+1)$):	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k+1$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \exists g_1, g_2 \in \mathbb{N} \| 2g_1 + 5g_2 = k$	
Por casos:	$g_2 > 0, g_2 = 0$	
	Exp.	Just.
Caso $g_2 > 0$		
	$k+1$	
$=$	$(2g_1 + 5g_2) + 1$	**HI**
$=$	$(2g_1 + 5(g_2 - 1) + 5) + 1$	$g_2 > 0$
$=$	$(2g_1 + 5(g_2 - 1)) + 6$	**Aritmética**
$=$	$2(g_1 + 3) + 5(g_2 - 1)$	**Aritmética**
$\implies$	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k+1$	**Gen. Existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por Inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.

Teo ($P(k+1)$):	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k+1$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \exists g_1, g_2 \in \mathbb{N} \| 2g_1 + 5g_2 = k$	
Por casos:	$g_2 > 0, g_2 = 0$	
	Exp.	Just.
Caso $g_2 = 0$		
	$k+1$	
$=$	$(2g_1 + 5g_2) + 1$	**HI**
$=$	$2g_1 + 1$	$g_2 = 0$
$=$	$2(g_1 - 2) + 4 + 1$	$k \geq 4 \wedge g_2 = 0 \implies g_1 \geq 2$
$=$	$2(g_1 - 2) + 5$	**Aritmética**
$\implies$	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k+1$	**Gen. Existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por Inducción

Uso del principio de inducción (5) (Video 3.7.7)

Probar que cualquier cantidad superior a 3 dólares se puede conseguir con billetes de 2 y 5 dólares. Formalmente eso significa:

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción matemática:

- $P(n) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(4) \equiv (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4)$
  $2 * 2 + 5 * 0 = 4 \implies \exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = 4$
  Por tanto: $P(4) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $P(k) \vdash P(k+1)$ para cualquier $k \geq 4$.

Teo ($P(k+1)$):	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k + 1$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : \exists g_1, g_2 \in \mathbb{N} \| 2g_1 + 5g_2 = k$	
Por casos:	$g_2 > 0, g_2 = 0$	
	Exp.	Just.
Caso $g_2 > 0$		
	$k + 1$	
$=$	$(2g_1 + 5g_2) + 1$	**HI**
$=$	$(2g_1 + 5(g_2 - 1) + 5) + 1$	$g_2 > 0$
$=$	$(2g_1 + 5(g_2 - 1)) + 6$	**Aritmética**
$=$	$2(g_1 + 3) + 5(g_2 - 1)$	**Aritmética**
$\implies$	$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} \| 2h_1 + 5h_2 = k + 1$	**Gen. Existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ por Inducción

Plan

1. Motivación
2. La naturaleza de $\mathbb{N}$
3. El principio de inducción matemática
   - Inducción simple
   - Inducción fuerte
   - Ejercicios en clase

Inducción fuerte (Video 3.7.8)

A veces, queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$$

pero, suponer $P(k)$ no es suficiente para demostrar (fácilmente) $P(k+1)$
Usaremos el principio de inducción fuerte de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$. O sea, $(P(a) \wedge P(a+1) \wedge \ldots \wedge P(k)) \implies P(k+1)$
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$

La inducción y la inducción fuerte son equivalentes

Inducción fuerte (Video 3.7.8)

A veces, queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq a : P(n)$$

pero, suponer $P(k)$ no es suficiente para demostrar (fácilmente) $P(k+1)$
Usaremos el principio de inducción fuerte de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$. O sea, $(P(a) \land P(a+1) \land \ldots \land P(k)) \implies P(k+1)$
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq a : P(n)$

La inducción y la inducción fuerte son equivalentes

Inducción fuerte (Video 3.7.8)

A veces, queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq a : P(n)$$

pero, suponer $P(k)$ no es suficiente para demostrar (fácilmente) $P(k+1)$
Usaremos el principio de inducción fuerte de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$. O sea, $(P(a) \land P(a+1) \land \ldots \land P(k)) \implies P(k+1)$
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq a : P(n)$

La inducción y la inducción fuerte son equivalentes

Inducción fuerte (Video 3.7.8)

A veces, queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq a : P(n)$$

pero, suponer $P(k)$ no es suficiente para demostrar (fácilmente) $P(k+1)$
Usaremos el principio de inducción fuerte de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$. O sea, $(P(a) \land P(a+1) \land \ldots \land P(k)) \implies P(k+1)$
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq a : P(n)$

La inducción y la inducción fuerte son equivalentes

Inducción fuerte (Video 3.7.8)

A veces, queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$$

pero, suponer $P(k)$ no es suficiente para demostrar (fácilmente) $P(k+1)$
Usaremos el principio de inducción fuerte de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$. O sea, $(P(a) \wedge P(a+1) \wedge \ldots \wedge P(k)) \implies P(k+1)$
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$

La inducción y la inducción fuerte son equivalentes

Inducción fuerte (Video 3.7.8)

A veces, queremos probar

$$\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$$

pero, suponer $P(k)$ no es suficiente para demostrar (fácilmente) $P(k+1)$
Usaremos el principio de inducción fuerte de la siguiente manera:

- Establecer clara y formalmente $P(n)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(a)$, usando las técnicas de demostración conocidas.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \implies P(k+1)$ para cualquier $k \geq 0$. O sea, $(P(a) \wedge P(a+1) \wedge \ldots \wedge P(k)) \implies P(k+1)$
- Se concluirá $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a : P(n)$

La inducción y la inducción fuerte son equivalentes

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (1) (Video 3.8)

Considere el siguiente juego para dos jugadores:

- Hay dos pilas de n fichas, $n \geq 1$.
- En su turno, un jugador escoge una de las pilas, y retira el número de fichas que quiera de ella.
- El ganador es quien retira la última ficha.

Jueguen el juego 5 minutos en parejas. ¿Hay una estrategia ganadora?
Demuestre que el jugador que juega de segundo, tiene una estrategia ganadora siempre.

Es decir: Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (1) (Video 3.8)

Considere el siguiente juego para dos jugadores:

- Hay dos pilas de n fichas, $n \geq 1$.
- En su turno, un jugador escoge una de las pilas, y retira el número de fichas que quiera de ella.
- El ganador es quien retira la última ficha.

Jueguen el juego 5 minutos en parejas. ¿Hay una estrategia ganadora?
Demuestre que el jugador que juega de segundo, tiene una estrategia ganadora siempre.

Es decir: Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (1) (Video 3.8)

Considere el siguiente juego para dos jugadores:

- Hay dos pilas de n fichas, $n \geq 1$.
- En su turno, un jugador escoge una de las pilas, y retira el número de fichas que quiera de ella.
- El ganador es quien retira la última ficha.

Jueguen el juego 5 minutos en parejas. ¿Hay una estrategia ganadora?
Demuestre que el jugador que juega de segundo, tiene una estrategia ganadora siempre.

Es decir: Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (1) (Video 3.8)

Considere el siguiente juego para dos jugadores:

- Hay dos pilas de n fichas, $n \geq 1$.
- En su turno, un jugador escoge una de las pilas, y retira el número de fichas que quiera de ella.
- El ganador es quien retira la última ficha.

Jueguen el juego 5 minutos en parejas. ¿Hay una estrategia ganadora?
Demuestre que el jugador que juega de segundo, tiene una estrategia ganadora siempre.

Es decir: Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (1) (Video 3.8)

Considere el siguiente juego para dos jugadores:

- Hay dos pilas de n fichas, $n \geq 1$.
- En su turno, un jugador escoge una de las pilas, y retira el número de fichas que quiera de ella.
- El ganador es quien retira la última ficha.

Jueguen el juego 5 minutos en parejas. ¿Hay una estrategia ganadora?
Demuestre que el jugador que juega de segundo, tiene una estrategia ganadora siempre.

Es decir: Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (1) (Video 3.8)

Considere el siguiente juego para dos jugadores:

- Hay dos pilas de n fichas, $n \geq 1$.
- En su turno, un jugador escoge una de las pilas, y retira el número de fichas que quiera de ella.
- El ganador es quien retira la última ficha.

Jueguen el juego 5 minutos en parejas. ¿Hay una estrategia ganadora?
Demuestre que el jugador que juega de segundo, tiene una estrategia ganadora siempre.

Es decir: Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto, $P(1) \equiv true$.
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto: $P(1) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto: $P(1) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto: $P(1) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto:
  $P(1) \equiv$ *true*
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
  1. Suponga que se comienza el juego con dos pilas de $k+1$ fichas.
  2. El primer jugador escoge tomar r fichas de una de las pilas, quedando ésta con $k+1-r$ fichas.
  3. Si $r = k+1$, el jugador 2, simplemente toma el mismo número de la otra pila, y gana.
  4. Sino, el jugador 2 toma también r fichas de la otra pila, quedando entonces un juego con dos pilas de $k+1-r$ fichas, y el turno del jugador 1.
  5. Como $k+1-r < k+1$, entonces por hipótesis de inducción $P(k+1-r)$ se cumple. Por tanto, el jugador 2 tiene una estrategia ganadora.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto: $P(1) \equiv \textit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
  - Suponga que se comienza el juego con dos pilas de $k+1$ fichas.
  - El primer jugador escoge tomar r fichas de una de las pilas, quedando ésta con $k+1-r$ fichas.
  - Si $r = k+1$, el jugador 2, simplemente toma el mismo número de la otra pila, y gana.
  - Sino, el jugador 2 toma también r fichas de la otra pila, quedando entonces un juego con dos pilas de $k+1-r$ fichas, y el turno del jugador 1.
  - Como $k+1-r < k+1$, entonces por hipótesis de inducción $P(k+1-r)$ se cumple. Por tanto, el jugador 2 tiene una estrategia ganadora.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto:
  $P(1) \equiv true$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
  - Suponga que se comienza el juego con dos pilas de $k+1$ fichas.
  - El primer jugador escoge tomar r fichas de una de las pilas, quedando ésta con $k+1-r$ fichas.
  - Si $r = k+1$, el jugador 2, simplemente toma el mismo número de la otra pila, y gana.
  - Sino, el jugador 2 toma también r fichas de la otra pila, quedando entonces un juego con dos pilas de $k+1-r$ fichas, y el turno del jugador 1.
  - Como $k+1-r < k+1$, entonces por hipótesis de inducción $P(k+1-r)$ se cumple. Por tanto, el jugador 2 tiene una estrategia ganadora.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto:
  $P(1) \equiv$ *true*
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
  - Suponga que se comienza el juego con dos pilas de $k+1$ fichas.
  - El primer jugador escoge tomar r fichas de una de las pilas, quedando ésta con $k+1-r$ fichas.
  - Si $r = k+1$, el jugador 2, simplemente toma el mismo número de la otra pila, y gana.
  - Sino, el jugador 2 toma también r fichas de la otra pila, quedando entonces un juego con dos pilas de $k+1-r$ fichas, y el turno del jugador 1.
  - Como $k+1-r < k+1$, entonces por hipótesis de inducción $P(k+1-r)$ se cumple. Por tanto, el jugador 2 tiene una estrategia ganadora.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto:
  $P(1) \equiv \mathit{true}$
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
  - Suponga que se comienza el juego con dos pilas de $k+1$ fichas.
  - El primer jugador escoge tomar r fichas de una de las pilas, quedando ésta con $k+1-r$ fichas.
  - Si $r = k+1$, el jugador 2, simplemente toma el mismo número de la otra pila, y gana.
  - Sino, el jugador 2 toma también r fichas de la otra pila, quedando entonces un juego con dos pilas de $k+1-r$ fichas, y el turno del jugador 1.
  - Como $k+1-r < k+1$, entonces por hipótesis de inducción $P(k+1-r)$ se cumple. Por tanto, el jugador 2 tiene una estrategia ganadora.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto: $P(1) \equiv$ *true*
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
  - Suponga que se comienza el juego con dos pilas de $k+1$ fichas.
  - El primer jugador escoge tomar r fichas de una de las pilas, quedando ésta con $k+1-r$ fichas.
  - Si $r = k+1$, el jugador 2, simplemente toma el mismo número de la otra pila, y gana.
  - Sino, el jugador 2 toma también r fichas de la otra pila, quedando entonces un juego con dos pilas de $k+1-r$ fichas, y el turno del jugador 1.
  - Como $k+1-r < k+1$, entonces por hipótesis de inducción $P(k+1-r)$ se cumple. Por tanto, el jugador 2 tiene una estrategia ganadora.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto:
  $P(1) \equiv$ *true*
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
  - Suponga que se comienza el juego con dos pilas de $k+1$ fichas.
  - El primer jugador escoge tomar r fichas de una de las pilas, quedando ésta con $k+1-r$ fichas.
  - Si $r = k+1$, el jugador 2, simplemente toma el mismo número de la otra pila, y gana.
  - Sino, el jugador 2 toma también r fichas de la otra pila, quedando entonces un juego con dos pilas de $k+1-r$ fichas, y el turno del jugador 1.
  - Como $k+1-r < k+1$, entonces por hipótesis de inducción $P(k+1-r)$ se cumple. Por tanto, el jugador 2 tiene una estrategia ganadora.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

Estrategia ganadora en juego de pilas de fichas (2) (Video 3.8)

Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas.
- **[Caso base]** Demostrar $P(1) \equiv$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de 1 fichas.
  Nótese que el primer jugador sólo tienen una primera jugada posible: escoger la única ficha de una de las pilas. Entonces, el segundo jugador tomará la única ficha que queda y gana el juego. Por tanto:
  $P(1) \equiv$ *true*
- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 1$.
  - Suponga que se comienza el juego con dos pilas de $k+1$ fichas.
  - El primer jugador escoge tomar r fichas de una de las pilas, quedando ésta con $k+1-r$ fichas.
  - Si $r = k+1$, el jugador 2, simplemente toma el mismo número de la otra pila, y gana.
  - Sino, el jugador 2 toma también r fichas de la otra pila, quedando entonces un juego con dos pilas de $k+1-r$ fichas, y el turno del jugador 1.
  - Como $k+1-r < k+1$, entonces por hipótesis de inducción $P(k+1-r)$ se cumple. Por tanto, el jugador 2 tiene una estrategia ganadora.
- Por tanto, Para todo $n \geq 1$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el juego comienza con dos pilas de n fichas, por Inducción fuerte

El teorema fundamental de la aritmética (1)

$$\forall \in \mathbb{N} | n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$

$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (2 = p_1 p_2 \ldots p_j)$
  $primo(2) \wedge 2 = 2 \implies \exists p_1 | primo(p_1) \wedge 2 = p_1$
  Por tanto: $P(2) = true$

El teorema fundamental de la aritmética (1)

$$\forall \in \mathbb{N} | n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$
$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (2 = p_1 p_2 \ldots p_j)$
  $primo(2) \wedge 2 = 2 \implies \exists p_1 | primo(p_1) \wedge 2 = p_1$
  Por tanto: $P(2) \equiv true$

El teorema fundamental de la aritmética (1)

$$\forall \in \mathbb{N}|n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N}\exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N}|primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$
$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv (\exists j \in \mathbb{N}\exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N}|primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv (\exists j \in \mathbb{N}\exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N}|primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (2 = p_1 p_2 \ldots p_j)$
  $primo(2) \wedge 2 = 2 \implies \exists p_1|primo(p_1) \wedge 2 = p_1$
  Por tanto: $P(2) \equiv true$

El teorema fundamental de la aritmética (1)

$$\forall \in \mathbb{N} | n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$

$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (2 = p_1 p_2 \ldots p_j)$
  $primo(2) \wedge 2 = 2 \implies \exists p_1 | primo(p_1) \wedge 2 = p_1$
  Por tanto: $P(2) \equiv true$

El teorema fundamental de la aritmética (1)

$$\forall \in \mathbb{N} | n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$

$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (2 = p_1 p_2 \ldots p_j)$
  $primo(2) \wedge 2 = 2 \implies \exists p_1 | primo(p_1) \wedge 2 = p_1$
  Por tanto: $P(2) \equiv true$

El teorema fundamental de la aritmética (1)

$$\forall \in \mathbb{N} | n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$

$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- $P(n) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$
- **[Caso base]** Demostrar $P(2) \equiv (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (2 = p_1 p_2 \ldots p_j)$
  $primo(2) \wedge 2 = 2 \implies \exists p_1 | primo(p_1) \wedge 2 = p_1$
  Por tanto: $P(2) \equiv true$

El teorema fundamental de la aritmética (2)

$$\forall \in \mathbb{N}|n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N}|primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$
$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j|a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 2$.

Teo ($P(k+1)$):	$(\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N}\|primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$ $(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge ((k+1) = p_1 p_2 \ldots p_j)$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : (\exists i \in \mathbb{N} \exists q_1, q_2, \ldots, q_i \in \mathbb{N}\|primo(q_1) \wedge \ldots \wedge primo(q_i)) : (q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_i) \wedge (k = q_1 q_2 \ldots q_i)$	
Por casos:	$primo(k+1), \neg primo(k+1)$	
	Exp.	Just.
Caso $\neg primo(k+1)$		
1	$\exists a, b \in \mathbb{N}\|1 < a, b < k+1 : (k+1) = ab$	$\neg primo(k+1)$
2	$(\exists i \in \mathbb{N} \exists q_1, q_2, \ldots, q_i \in \mathbb{N}\|primo(q_1) \wedge \ldots \wedge primo(q_i)) :$ $(q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_i) \wedge (a = q_1 q_2 \ldots q_i)$	**HI**
3	$(\exists l \in \mathbb{N} \exists r_1, r_2, \ldots, r_l \in \mathbb{N}\|primo(r_1) \wedge \ldots \wedge primo(r_l)) :$ $(r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_l) \wedge (b = r_1 r_2 \ldots r_l)$	**HI**
4	$k+1 = (q_1 q_2 \ldots q_i)(r_1 r_2 \ldots r_l) \wedge primo(q_1) \wedge \ldots \wedge primo(q_i) \wedge$ $primo(r_1) \wedge \ldots \wedge primo(r_l)$	(1), (2), (3)
5	$(\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N}\|primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$ $(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge ((k+1) = p_1 p_2 \ldots p_j)$	**Gen. Existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n|n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N}|primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$ por Inducción fuerte

El teorema fundamental de la aritmética (2)

$$\forall \in \mathbb{N} | n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 2$.

Teo ($P(k+1)$):	$(\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} \| primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge ((k+1) = p_1 p_2 \ldots p_j)$	
Hip. Ind. ($P(k)$):	$HI : (\exists i \in \mathbb{N} \exists q_1, q_2, \ldots, q_i \in \mathbb{N} \| primo(q_1) \wedge \ldots \wedge primo(q_i)) : (q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_i) \wedge (k = q_1 q_2 \ldots q_i)$	
Por casos:	$primo(k+1), \neg primo(k+1)$	
	Exp.	Just.
Caso $\neg primo(k+1)$		
1	$\exists a, b \in \mathbb{N} \| 1 < a, b < k+1 : (k+1) = ab$	$\neg primo(k+1)$
2	$(\exists i \in \mathbb{N} \exists q_1, q_2, \ldots, q_i \in \mathbb{N} \| primo(q_1) \wedge \ldots \wedge primo(q_i)) : (q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_i) \wedge (a = q_1 q_2 \ldots q_i)$	**HI**
3	$(\exists l \in \mathbb{N} \exists r_1, r_2, \ldots, r_l \in \mathbb{N} \| primo(r_1) \wedge \ldots \wedge primo(r_l)) : (r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_l) \wedge (b = r_1 r_2 \ldots r_l)$	**HI**
4	$k+1 = (q_1 q_2 \ldots q_i)(r_1 r_2 \ldots r_l) \wedge primo(q_1) \wedge \ldots \wedge primo(q_i) \wedge primo(r_1) \wedge \ldots \wedge primo(r_l)$	(1), (2), (3)
5	$(\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} \| primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge ((k+1) = p_1 p_2 \ldots p_j)$	**Gen. Existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$ por Inducción fuerte

El teorema fundamental de la aritmética (2)

$$\forall \in \mathbb{N} | n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$
$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 2$.

Teo $(P(k+1))$**:**	$(\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} \| primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j))$: $(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge ((k+1) = p_1 p_2 \ldots p_j)$	
Hip. Ind. $(P(k))$**:**	$HI : (\exists i \in \mathbb{N} \exists q_1, q_2, \ldots, q_i \in \mathbb{N} \| primo(q_1) \wedge \ldots \wedge primo(q_i)) : (q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_i) \wedge (k = q_1 q_2 \ldots q_i)$	
Por casos:	$primo(k+1), \neg primo(k+1)$	
	Exp.	Just.
Caso $primo(k+1)$		
	$primo(k+1) \wedge k+1 = k+1$	
$\Longrightarrow$	$\exists p_1 \| primo(p_1) \wedge (k+1) = p_1$	**Gen. existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$ por Inducción fuerte

El teorema fundamental de la aritmética (2)

$$\forall \in \mathbb{N} | n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) :$$
$$(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$$

Lo probaremos usando el principio de inducción fuerte:

- **[Caso de inducción]** Demostrar $(\forall j | a \leq j \leq k : P(j)) \vdash P(k+1)$ para $k \geq 2$.

Teo $(P(k+1))$:	$(\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} \| primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j))$: $(p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge ((k+1) = p_1 p_2 \ldots p_j)$	
Hip. Ind. $(P(k))$:	$HI : (\exists i \in \mathbb{N} \exists q_1, q_2, \ldots, q_i \in \mathbb{N} \| primo(q_1) \wedge \ldots \wedge primo(q_i)) : (q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_i) \wedge (k = q_1 q_2 \ldots q_i)$	
Por casos:	$primo(k+1), \neg primo(k+1)$	
	Exp.	Just.
Caso $primo(k+1)$		
	$primo(k+1) \wedge k+1 = k+1$	
$\Longrightarrow$	$\exists p_1 \| primo(p_1) \wedge (k+1) = p_1$	**Gen. existencial**
		$\diamond$

- Por tanto, $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 : (\exists j \in \mathbb{N} \exists p_1, p_2, \ldots, p_j \in \mathbb{N} | primo(p_1) \wedge \ldots \wedge primo(p_j)) : (p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_j) \wedge (n = p_1 p_2 \ldots p_j)$ por Inducción fuerte

Plan

1. Motivación
2. La naturaleza de $\mathbb{N}$
3. El principio de inducción matemática
   - Inducción simple
   - Inducción fuerte
   - Ejercicios en clase

Ejercicios en clase

[Socrative]

Resuelvan los siguientes ejercicios:

1. $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$ (Use inducción simple)
2. $\forall n | n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ (use inducción fuerte)

Ejercicios en clase

[Socrative]

Resuelvan los siguientes ejercicios:

1. $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$ (Use inducción simple)
2. $\forall n | n \in \mathbb{N} \land n \geq 4 : (\exists h_1, h_2 \in \mathbb{N} | 2h_1 + 5h_2 = n)$ (use inducción fuerte)