Clase 01-02-22

martes, 1 de febrero de 2022 10:52 a. m.

Subespacio vectorial

Definición [*Subespacio vectorial*]. Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto de V. Si W es espacio vectorial con los mismos escalares y las mismas operaciones que V, decimos que W es un *subespacio* de V.

Teorema [*Caracterización de subespacio*].

Si W es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, entonces W es un subespacio de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones de cerradura.

1. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en W.
2. Si $\mathbf{u}$ está en W y c es cualquier escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

Notación: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \ \ 3)^T$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \ x_2 \ \ldots \ x_n)^T$$

Ejemplos.

1. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ es subespacio de $V = \mathbb{R}^3$.

$$= \{ (x \ \ y \ \ 0)^T : x, y \in \mathbb{R} \}$$

- observe que $(0 \ \ 0 \ \ 0)^T \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$.

- Sean $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \qquad \begin{matrix} x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \\ y_1 + y_2 \in \mathbb{R}. \end{matrix}$$

$(x_1 \quad (\alpha x_1 \qquad \alpha x_1 \in \mathbb{R}$

$$\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha y_1\\0\end{pmatrix}\in W \qquad \begin{matrix}\alpha x_1\in\mathbb{R}\\\alpha y_1\in\mathbb{R}.\end{matrix}$$

Luego, W es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2. ¿ $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}: x\in\mathbb{R}\right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$?

- $\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y\\y+1\end{pmatrix}\in H.$

$$\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\y+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x+y+2\end{pmatrix}\notin H$$

- $\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=0\\x+1=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}x=0\\x=-1\end{matrix}$ contradicción.

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\notin H.$

Por lo anterior, H no es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

3. Mostrar que $H=\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2: a_0=0, a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ es subespacio de $\mathbb{P}_2$

- $p(x)=0+x=x\in H \Rightarrow H\neq\phi.$
- Sean $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2\in H$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$p(x)+q(x)=(\underbrace{a_0+b_0}_{0})+(\underbrace{a_1+b_1}_{\in\mathbb{R}})x+(\underbrace{a_2+b_2}_{\in\mathbb{R}})x^2\in H.$$

$$\alpha p(x)=(\underbrace{\lambda a_0}_{0})+(\lambda a_1)x+(\lambda a_2)x^2\in H.$$

Entonces H es subespacio de $\mathcal{P}_2$ y, por tanto, un espacio vectorial.

4. Si $u_1, u_2, \ldots, u_K \in \mathbb{R}^n$, entonces $G = \mathrm{Gen}\{u_1, u_2, \ldots, u_K\}$ es un espacio vectorial.

- claramente $G \neq \phi$.
- Sean u y $v \in G$.

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_K u_K.$$

$$v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_K u_K.$$

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + (\alpha_2 + \beta_2) u_2 + \cdots + (\alpha_K + \beta_K) u_K \in G.$$

si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u = \lambda (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_K u_K)$.

$$= (\lambda \alpha_1) u_1 + (\lambda \alpha_2) u_2 + \cdots + (\lambda \alpha_K) u_K \in G.$$

5. $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a-2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

Dado que $\begin{pmatrix} a \\ a-2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

entonces $W = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a-2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Por ejemplo anterio, se concluye que W es un e.v.

Definición [*Combinación lineal*]. Dados V, un espacio vectorial, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, vectores de V, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, escalares, decimos que

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$$

es una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. A los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ se les llama *coeficientes* de la combinación lineal. Si todos los escalares son cero, diremos que tenemos la *combinación lineal trivial* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Ejemplos:

1. $W = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{V_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{V_4} \right\}$

observe que V_1 es c.l. de V_2, V_3 y V_4. En efecto,

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 + 2V_3 - V_4 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. ¿El polinomio $-2x + x^2$ es c.l. de los polinomios $1 - 2x + x^2$ y $3 + x^2$?

Veamos existen escalares α y β tales que

$$\alpha(1 - 2x + x^2) + \beta(3 + x^2) = -2x + x^2$$

$$\underline{\alpha} - 2\alpha x + \underline{\underline{\alpha x^2}} + \underline{3\beta} + \underline{\underline{\beta x^2}} = -2x + x^2$$

$$(\alpha + 3\beta) - 2\alpha x + (\alpha + \beta)x^2 = -2x + x^2$$

$$(1) \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 1. \Rightarrow \beta = 1 - \alpha = 0. \end{cases}$$

$$\alpha - 3\beta = 0$$

$$1 = 0 \quad \text{Falso.}$$

Dado que (1) es inconsistente, $-2x + x^2$ no es c.L. de $1 - 2x + x^2$ y $3 + x^2$.

Definición [*Conjunto generado y conjunto generador*]. Sean V, un espacio vectorial, y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores de V. Definimos *conjunto generado* por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, lo que representaremos por

$$Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k : \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Además, si $H = Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, diremos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un *conjunto generador* de H.

Ejemplos.

1. Mostrar que $\{1-x, x^2, 1+x\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{P}_2$.

Sea $a + bx + cx^2 \in \mathbb{P}_2$. Veamos si existen α, β y λ tales que

$$\alpha(1-x) + \beta x^2 + \lambda(1+x) = a + bx + cx^2$$

$$(\alpha + \lambda) + (-\alpha + \lambda)x + \beta x^2 = a + bx + cx^2$$

$$(2)\begin{cases} \alpha + \lambda = a \\ -\alpha + \lambda = b \\ \beta = c \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha + 0\beta + \lambda = a \\ -\alpha + 0\beta + \lambda = b \\ 0\alpha + \beta + 0\lambda = c \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 2 & a+b \end{array}\right)$$

Dado que (2) es consistente para cada $(a\ b\ c)^T$, entonces

$$Gen\{1-x, x^2, 1+x\} = \mathbb{P}_2.$$