Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Estudiaremos algunas ecuaciones diferenciales de orden 1 o primer orden.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Estudiaremos algunas ecuaciones diferenciales de orden 1 o primer orden.

Forma general

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0.$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Estudiaremos algunas ecuaciones diferenciales de orden 1 o primer orden.

Forma general

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0.$$

Forma normal

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Estudiaremos algunas ecuaciones diferenciales de orden 1 o primer orden.

Forma general

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0.$$

Forma normal

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

También escribimos por

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

a la ecuación diferencial de primer orden

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Estudiaremos algunas ecuaciones diferenciales de orden 1 o primer orden.

Forma general

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0.$$

Forma normal

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

También escribimos por

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

a la ecuación diferencial de primer orden

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Ecuación de variables separables

Una ecuación separable o de variables separables es una ecuación diferencial que se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(y)h(x) \tag{1}$$

Ecuación de variables separables

Una ecuación separable o de variables separables es una ecuación diferencial que se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(y)h(x) \tag{1}$$

o de la forma

$$p(x)q(y)dx + r(x)s(y)dy = 0.$$

Supongamos que la ecuación diferencial está escrita de la forma (1) y $g(y) \neq 0$.

Ecuación de variables separables

Una ecuación separable o de variables separables es una ecuación diferencial que se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(y)h(x) \tag{1}$$

o de la forma

$$p(x)q(y)dx + r(x)s(y)dy = 0.$$

Supongamos que la ecuación diferencial está escrita de la forma (1) y $g(y) \neq 0$. Para solucionarla podemos separar las variables x y y a lados diferentes de la igualdad

$$\frac{1}{g(y)}dy = h(x)dx.$$

Integrando en ambas lados de la igualdad tenemos

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

Integrando en ambas lados de la igualdad tenemos

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx.$$

Calculando estas integrales obtenemos la solución implícita de la forma

$$G(y) = H(x) + C.$$

Integrando en ambas lados de la igualdad tenemos

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

Calculando estas integrales obtenemos la solución implícita de la forma

$$G(y) = H(x) + C.$$

También debemos considerar las soluciones constantes de la forma $y \equiv y_0$ donde $g(y_0) = 0$.

Integrando en ambas lados de la igualdad tenemos

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx.$$

Calculando estas integrales obtenemos la solución implícita de la forma

$$G(y) = H(x) + C.$$

También debemos considerar las soluciones constantes de la forma $y \equiv y_0$ donde $g(y_0) = 0$.

Nota: en el proceso se pueden perder soluciones con las operaciones algebraicas. Por tanto, hay que comprobar si alguna de ellas es o no solución y añadirla para obtener la solución general.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación diferencial $y^2\dfrac{dy}{dx} - x + 1 = 0$.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación diferencial $y^2\dfrac{dy}{dx} - x + 1 = 0$. Separando las variables, tenemos:

$$y^2 dy = (x-1)dx$$

Ejemplo

Resolvamos la ecuación diferencial $y^2 \dfrac{dy}{dx} - x + 1 = 0$. Separando las variables, tenemos:

$$y^2 dy = (x-1)dx$$

e integrando ambos lados,

$$\int y^2 dy = \int x - 1 dx.$$

Ejemplo

Resolvamos la ecuación diferencial $y^2\dfrac{dy}{dx} - x + 1 = 0$. Separando las variables, tenemos:

$$y^2 dy = (x-1)dx$$

e integrando ambos lados,

$$\int y^2 dy = \int x - 1 dx.$$

Obtenemos la solución escrita de manera implícita:

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - x + C_1$$

Ejemplo

Resolvamos la ecuación diferencial $y^2\dfrac{dy}{dx} - x + 1 = 0$. Separando las variables, tenemos:

$$y^2 dy = (x-1)dx$$

e integrando ambos lados,

$$\int y^2 dy = \int x - 1dx.$$

Obtenemos la solución escrita de manera implícita:

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - x + C_1$$

Despejando y y tomando $C = 3C_1$, obtenemos la solución explícita:

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 3x + C}$$

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2}{y^2+1}$ y $y(0) = -1$.

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2}{y^2+1}$ y $y(0) = -1$.

Separando las variables, tenemos:

$$(y^2+1)dy = (x+2)dx$$

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2}{y^2+1}$ y $y(0) = -1$.

Separando las variables, tenemos:

$$(y^2+1)dy = (x+2)dx$$

e integrando ambos lados,

$$\int y^2 + 1\, dy = \int x + 2\, dx.$$

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2}{y^2+1}$ y $y(0) = -1$.
Separando las variables, tenemos:

$$(y^2+1)dy = (x+2)dx$$

e integrando ambos lados,

$$\int y^2 + 1\, dy = \int x + 2\, dx.$$

Obtenemos la solución escrita de manera implícita:

$$\frac{y^3}{3} + y = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2}{y^2+1}$ y $y(0) = -1$.
Separando las variables, tenemos:

$$(y^2 + 1)dy = (x + 2)dx$$

e integrando ambos lados,

$$\int y^2 + 1\, dy = \int x + 2\, dx.$$

Obtenemos la solución escrita de manera implícita:

$$\frac{y^3}{3} + y = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

Reemplazando la condición $y(0) = -1$

$$\frac{y^3}{3} + y - \frac{x^2}{2} - 2x = -\frac{4}{3}$$

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\dfrac{x}{2}\dfrac{dy}{dx} - 2 - y = 0$ y $y(1) = 1$.

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\dfrac{x}{2}\dfrac{dy}{dx} - 2 - y = 0$ y $y(1) = 1$.
Separando las variables, tenemos:

$$\frac{1}{y+2}dy = \frac{2}{x}dx$$

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\frac{x}{2}\frac{dy}{dx} - 2 - y = 0$ y $y(1) = 1$.
Separando las variables, tenemos:

$$\frac{1}{y+2}dy = \frac{2}{x}dx$$

e integrando ambos lados obtenemos:

$$\ln|y+2| = 2\ln|x| + C.$$

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\frac{x}{2}\frac{dy}{dx} - 2 - y = 0$ y $y(1) = 1$.
Separando las variables, tenemos:

$$\frac{1}{y+2}dy = \frac{2}{x}dx$$

e integrando ambos lados obtenemos:

$$\ln|y+2| = 2\ln|x| + C.$$

Luego

$$|y+2| = Cx^2, \quad C > 0.$$

Ejemplo

Resolvamos el problema de valor inicial $\frac{x}{2}\frac{dy}{dx} - 2 - y = 0$ y $y(1) = 1$.
Separando las variables, tenemos:

$$\frac{1}{y+2}dy = \frac{2}{x}dx$$

e integrando ambos lados obtenemos:

$$\ln|y+2| = 2\ln|x| + C.$$

Luego

$$|y+2| = Cx^2, \quad C > 0.$$

Por tanto,

$$y = Cx^2 - 2, \quad C \in \mathbb{R}$$

y utilizando la condición inicial $y(1) = 1$ obtenemos

$$y = 3x^2 - 2.$$

Funciones homogéneas

Una función de dos variables $f(x, y)$ es **homogénea** de grado n si para todo $\lambda > 0$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Funciones homogéneas

Una función de dos variables $f(x, y)$ es **homogénea** de grado n si para todo $\lambda > 0$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Ejemplo: La función $h(x, y) = \cos(\frac{y}{x})$ es homogénea de grado cero.

Una función de dos variables $f(x, y)$ es **homogénea** de grado n si para todo $\lambda > 0$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Ejemplo: La función $h(x, y) = \cos(\frac{y}{x})$ es homogénea de grado cero. En efecto,

$$h(\lambda x, \lambda y)$$

Funciones homogéneas

Una función de dos variables $f(x, y)$ es **homogénea** de grado n si para todo $\lambda > 0$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Ejemplo: La función $h(x, y) = \cos(\frac{y}{x})$ es homogénea de grado cero. En efecto,

$$h(\lambda x, \lambda y) = \cos(\frac{\lambda y}{\lambda x})$$

Una función de dos variables $f(x, y)$ es **homogénea** de grado n si para todo $\lambda > 0$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Ejemplo: La función $h(x, y) = \cos(\frac{y}{x})$ es homogénea de grado cero. En efecto,

$$h(\lambda x, \lambda y) = \cos(\frac{\lambda y}{\lambda x}) = \cos(\frac{y}{x})$$

Funciones homogéneas

Una función de dos variables $f(x, y)$ es **homogénea** de grado n si para todo $\lambda > 0$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Ejemplo: La función $h(x, y) = \cos(\frac{y}{x})$ es homogénea de grado cero. En efecto,

$$h(\lambda x, \lambda y) = \cos(\frac{\lambda y}{\lambda x}) = \cos(\frac{y}{x}) = h(x, y)$$

Una función de dos variables $f(x,y)$ es **homogénea** de grado n si para todo $\lambda > 0$, se tiene que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Ejemplo: La función $h(x,y) = \cos(\frac{y}{x})$ es homogénea de grado cero. En efecto,

$$h(\lambda x, \lambda y) = \cos(\frac{\lambda y}{\lambda x}) = \cos(\frac{y}{x}) = h(x,y)$$

Ejemplo: Una función $h(x,y) = G(\frac{y}{x})$ es homogénea de grado cero.

Ejemplo: El polinomio en dos variables $g(x,y) = xy^2 + x^3 + y^3$ es homogéneo de grado tres.

Ejemplo: El polinomio en dos variables $g(x,y) = xy^2 + x^3 + y^3$ es homogéneo de grado tres. En efecto,

$$g(\lambda x, \lambda y) \quad = \lambda x(\lambda y)^2 + (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3$$

Ejemplo: El polinomio en dos variables $g(x,y) = xy^2 + x^3 + y^3$ es homogéneo de grado tres. En efecto,

$$\begin{aligned} g(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x(\lambda y)^2 + (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 \\ &= \lambda^3 xy^2 + \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 \end{aligned}$$

Ejemplo: El polinomio en dos variables $g(x,y) = xy^2 + x^3 + y^3$ es homogéneo de grado tres. En efecto,

$$\begin{aligned} g(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x(\lambda y)^2 + (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 \\ &= \lambda^3 xy^2 + \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 \\ &= \lambda^3 (xy^2 + x^3 + y^3) \end{aligned}$$

Ejemplo: El polinomio en dos variables $g(x,y) = xy^2 + x^3 + y^3$ es homogéneo de grado tres. En efecto,

$$\begin{aligned} g(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x(\lambda y)^2 + (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 \\ &= \lambda^3 xy^2 + \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 \\ &= \lambda^3(xy^2 + x^3 + y^3) \\ &= \lambda^3 g(x,y) \end{aligned}$$

Ejemplo: El polinomio en dos variables $g(x,y) = xy^2 + x^3 + y^3$ es homogéneo de grado tres. En efecto,

$$\begin{aligned} g(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x(\lambda y)^2 + (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 \\ &= \lambda^3 xy^2 + \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 \\ &= \lambda^3 (xy^2 + x^3 + y^3) \\ &= \lambda^3 g(x,y) \end{aligned}$$

En general, un polinomio de varias dos variables es homogéneo si todos los monomios que lo componen son del mismo grado.

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es **homogénea** si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es **homogénea** si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Si la ecuación está escrita de la forma normal

$$y' = f(x,y)$$

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es **homogénea** si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Si la ecuación está escrita de la forma normal

$$y' = f(x,y)$$

es homogénea si $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es **homogénea** si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Si la ecuación está escrita de la forma normal

$$y' = f(x,y)$$

es homogénea si $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.
Para resolver una ecuación diferencial homogénea hacemos la sustitución

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{o} \quad y = xz.$$

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es **homogénea** si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Si la ecuación está escrita de la forma normal

$$y' = f(x,y)$$

es homogénea si $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.
Para resolver una ecuación diferencial homogénea hacemos la sustitución

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{o} \quad y = xz.$$

Dado que y depende de x, entonces z también depende de x.

Luego, derivamos con respecto a x y obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \quad \text{o} \quad dy = zdx + xdz.$$

Luego, derivamos con respecto a x y obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \quad \text{o} \quad dy = zdx + xdz.$$

Las sustituciones de y y su derivada en la ecuación diferencial nos conducen a una ecuación diferencial separable.

Luego, derivamos con respecto a x y obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \quad \text{o} \quad dy = zdx + xdz.$$

Las sustituciones de y y su derivada en la ecuación diferencial nos conducen a una ecuación diferencial separable.

Resolvemos la ecuación en términos de x y z.

Luego, derivamos con respecto a x y obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \quad \text{o} \quad dy = zdx + xdz.$$

Las sustituciones de y y su derivada en la ecuación diferencial nos conducen a una ecuación diferencial separable.

Resolvemos la ecuación en términos de x y z.

Finalmente, usamos $y = xz$ en la solución anterior para encontrar la solución en términos de x y y.

Ejemplos

Resolvamos la ecuación

$$(xy + x^2)dx - x^2 dy = 0.$$

Ejemplos

Resolvamos la ecuación

$$(xy + x^2)dx - x^2dy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$,

Ejemplos

Resolvamos la ecuación

$$(xy + x^2)dx - x^2 dy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$, reemplazando en la ecuación:

$$(xzx + x^2)dx - x^2(zdx + xdz) = 0.$$

Ejemplos

Resolvamos la ecuación

$$(xy + x^2)dx - x^2dy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$, reemplazando en la ecuación:

$$(xzx + x^2)dx - x^2(zdx + xdz) = 0.$$

Así,

$$x^2zdx + x^2dx - x^2zdx - x^3dz = 0.$$

Ejemplos

Resolvamos la ecuación

$$(xy + x^2)dx - x^2dy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$, reemplazando en la ecuación:

$$(xzx + x^2)dx - x^2(zdx + xdz) = 0.$$

Así,

$$x^2zdx + x^2dx - x^2zdx - x^3dz = 0.$$

Simplificando

$$x^2dx - x^3dz = 0,$$

o equivalentemente

$$dz = \frac{1}{x}dx.$$

o equivalentemente

$$dz = \frac{1}{x} dx.$$

Integrando obtenemos

$$z = \ln |x| + C.$$

o equivalentemente

$$dz = \frac{1}{x} dx.$$

Integrando obtenemos

$$z = \ln|x| + C.$$

Usando $z = \frac{y}{x}$ concluimos que

$$y = x\ln|x| + Cx.$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + y^2)}{xy}.$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + y^2)}{xy}.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$,

Ejemplo

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + y^2)}{xy}.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$, reemplazando en la ecuación:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{(x^2 + x^2 z^2)}{x^2 z} =$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + y^2)}{xy}.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$, reemplazando en la ecuación:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{(x^2 + x^2z^2)}{x^2z} = \frac{1}{z} + z$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + y^2)}{xy}.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$, reemplazando en la ecuación:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{(x^2 + x^2 z^2)}{x^2 z} = \frac{1}{z} + z$$

Luego

$$zdz = \frac{1}{x}dx.$$

Integrando obtenemos

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C$$

Integrando obtenemos

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C$$

o

$$z^2 = 2\ln|x| + C = \ln x^2 + C.$$

Integrando obtenemos

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C$$

o

$$z^2 = 2\ln|x| + C = \ln x^2 + C.$$

Usando $z = \frac{y}{x}$ concluimos que

$$y^2 = x^2 \ln x^2 + Cx^2.$$

Ejemplo

El ejemplo anterior se puede expresar como la ecuación diferencial

$$-(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$$

Ejemplo

El ejemplo anterior se puede expresar como la ecuación diferencial

$$-(x^2+y^2)dx + xydy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$,

Ejemplo

El ejemplo anterior se puede expresar como la ecuación diferencial

$$-(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$, reemplazando en la ecuación:

$$-(x^2 + x^2z^2)dx + x^2z(zdx + xdz) = 0.$$

Ejemplo

El ejemplo anterior se puede expresar como la ecuación diferencial

$$-(x^2+y^2)dx + xydy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$, reemplazando en la ecuación:

$$-(x^2+x^2z^2)dx + x^2z(zdx+xdz) = 0.$$

Así,

$$-x^2dx - x^2z^2dx + x^2z^2dx + x^3zdz = 0.$$

Ejemplo

El ejemplo anterior se puede expresar como la ecuación diferencial

$$-(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$, reemplazando en la ecuación:

$$-(x^2 + x^2z^2)dx + x^2z(zdx + xdz) = 0.$$

Así,

$$-x^2dx - x^2z^2dx + x^2z^2dx + x^3zdz = 0.$$

Simplificando

$$-x^2dx + x^3zdz = 0$$

Ejemplo

El ejemplo anterior se puede expresar como la ecuación diferencial

$$-(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$$

Hacemos el cambio $y = zx$, así $dy = zdx + xdz$, reemplazando en la ecuación:

$$-(x^2 + x^2z^2)dx + x^2z(zdx + xdz) = 0.$$

Así,

$$-x^2dx - x^2z^2dx + x^2z^2dx + x^3zdz = 0.$$

Simplificando

$$-x^2dx + x^3zdz = 0$$

o equivalentemente

$$zdz = \frac{1}{x}dx.$$