PRÁCTICA DE LABORATORIO
ENERGÍA EN EL SISTEMA MASA RESORTE

1. OBJETIVOS

- Medir la constante elástica de un resorte.
- Estudiar el comportamiento de las energías presentes en un sistema bajo la acción de una fuerza elástica y la fuerza gravitatoria.

2. SISTEMA EXPERIMENTAL

2.1 Materiales requeridos.

Materiales requeridos.

- Prensa universal + varilla + nuez.
- Cuerda liviana y resistente de 1m.
- Resorte helicoidal.
- Balanza
- Portapesas + pesas.
- Cinta métrica o flexómetro
- Cronómetro de Laboratorio (CronoLab) + Polea
- Celular con SO Android para instalar aplicación CronoLab (estudiante)
- Computador con Excel (estudiante).

2.2 Montaje Experimental.

El sistema experimental, mostrado en esquema en la Figura 1, está conformado por un resorte con un extremo fijo, amarrado a una masa de 1kg en reposo sobre el suelo y una pesa de masa ***m*** que cuelga del otro extremo, mediante una cuerda que pasa por la polea del CronoLab. Inicialmente el resorte se estira bajando la pesa desde la posición de equilibrio hasta la altura inicial (***y=0***), la pesa se suelta y se registra el movimiento oscilante de la masa durante unos 2 ciclos.

Figura 1: Esquema ilustrativo del montaje experimental y sus principales elementos.

3. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

3.1 Modelo mecánico del resorte.

Un resorte lineal es aquel que ejerce una fuerza, Fr, proporcional a la distancia que se deforma, ya sea que se estire o se comprima. El sentido de dicha fuerza es, siempre, contrario al sentido de la deformación sufrida. Designando por x la distancia que se estira o comprime el resorte, a partir de su longitud natural, la fuerza puede expresarse como:

$$F_r = -kx \tag{1}$$

siendo ***k*** la constante de proporcionalidad cuya magnitud dependerá de las características del resorte. Para que un resorte, anclado por su extremo superior, pueda soportar un objeto atado en el extremo inferior, necesita estar estirado una cierta distancia. Puesto que ponemos a oscilar nuestro sistema masa resorte, suponemos un movimiento armónico simple, donde se conoce que la relación entre la frecuencia angular, la masa y constante de resorte es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

Despejando, $k = m\,\omega^2$.

3.2 Dinámica del sistema

La masa se suelta desde el reposo desde la altura inicial en ***y=0*** para la masa y $\boldsymbol{x_{max}}$ para el resorte y llega sin rapidez hasta $\boldsymbol{y_{max}}$, mientras que el resorte se encoge hasta $\boldsymbol{x_{min}}$ (ver Figura 2).

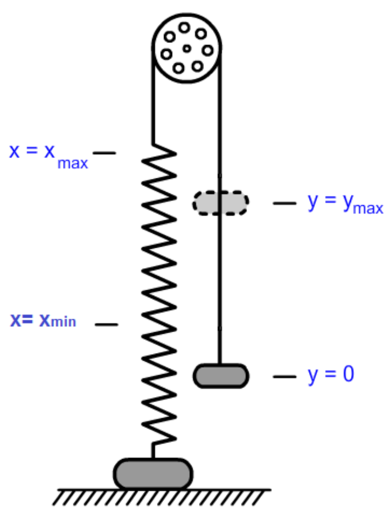


Figura 2: Diagrama del sistema masa-resorte.

Debido al trabajo hecho sobre el resorte para deformarlo, en él se almacena energía potencial elástica $\boldsymbol{U_E}$ dada por $kx^2/2$; de otra parte, como la cuerda que ata la masa al resorte es inextensible, entre la deformación del resorte y la altura de la masa existe la relación $x = x_{max} - y$, se tiene:

$$U_E = \frac{1}{2}k(x_{max} - y)^2 \tag{3}$$

En la primera mitad del recorrido, la fuerza de recuperación, mayor que el peso, acelera positivamente el cuerpo, la rapidez del sistema aumenta hasta su valor máximo que se da cuando la masa alcanza la altura de equilibrio (la mitad del recorrido $\boldsymbol{y_{max}/2}$); a esta altura, la fuerza de recuperación iguala al peso, la aceleración es nula y la energía cinética del sistema, es decir, la suma de las energías de movimiento del resorte, del cuerpo y de la polea es también máxima. En la otra mitad del movimiento, cuando la altura va desde $\boldsymbol{y_{max}/2}$ a $\boldsymbol{y_{max}}$, la fuerza de recuperación del resorte es menor que el peso, la aceleración es negativa y la rapidez disminuye hasta cero cuando la altura es máxima.

En cualquier instante del movimiento, la energía mecánica total del sistema, $\boldsymbol{E_T}$, es la suma de las energías cinética del sistema $\boldsymbol{E_K}$, potencial gravitacional de la masa colgante, $\boldsymbol{U_G = mgy}$, y potencial elástica debida a la deformación del resorte, $\boldsymbol{U_E}$.

$$E_T = E_K + U_G + U_E, \tag{4}$$

La energía cinética del sistema proviene del movimiento de las masas que lo conforman, la masa colgante, la polea y el resorte (suponemos que la cuerda es inextensible y muy ligera):

$$E_K = E_{Km} + E_{Kp} + E_{Kr}, \tag{5}$$

En términos de la velocidad de la masa colgante, su energía cinética es:

$$E_{Km} = \frac{1}{2}mv^2; \tag{6}$$

la magnitud de $\boldsymbol{v}$ es en esta expresión es la *rapidez del sistema*, esto es, la rapidez, tanto del extremo móvil del resorte, como tangencial de la polea. La energía cinética de la polea puede expresarse en términos de la velocidad del sistema y de su momento de inercia:

$$E_{Kp} = \frac{1}{2}I_p\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I_p}{R_p^2}v^2 \approx \frac{1}{2}\frac{m_p}{2}v^2, \tag{7}$$

siendo I_p y R_P el momento de inercia y el radio de la polea respectivamente. Obsérvese que el cociente I_p/R_p^2, la *masa efectiva* de la polea, en primera aproximación es la mitad de la masa, tratando la polea como un disco de momento de inercia $m_pR_p^2/2$.

El cálculo de la energía cinética del resorte en un instante dado es algo más elaborado, pues debe tenerse en cuenta que la rapidez del resorte no es única, cambia a lo largo de él, varía, desde el reposo en el extremo fijo, hasta la velocidad del sistema $\boldsymbol{v}$, la rapidez del extremo móvil (Figura 3).

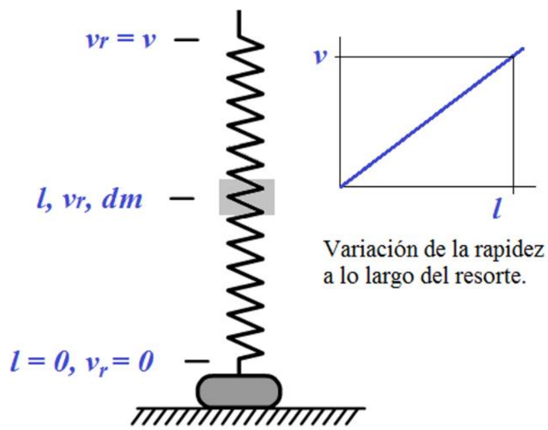


Figura 3: Perfil de velocidad a lo largo del resorte

Suponiendo lineal el cambio de la rapidez a lo largo del resorte, la velocidad $\boldsymbol{v_r}$ de un elemento diferencial de masa ***dm***, localizado a una distancia ***l*** del extremo fijo, será proporcional a la del sistema:

$$v_r = \frac{l}{long} v \qquad (8)$$

donde *long,* es la posición del extremo móvil, es decir, la longitud instantánea del resorte. La energía cinética del diferencial de masa en consideración es $dE_{Kr} = (dm)v_r^2/2$, usando (8) puede expresarse como:

$$dE_{Kr} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{long} v\right)^2 (dm) \qquad (9)$$

La energía cinética instantánea se obtiene por integración de esta expresión a lo largo del resorte, para lo cual es necesario conocer la dependencia funcional de la masa con la longitud, esto es, la distribución o densidad longitudinal de masa que en primera aproximación se asume constante; bajo este supuesto se tiene:

$$dm = \frac{m_r}{long} dl, \qquad (10)$$

siendo m_r la masa del resorte y el cociente $m_r/long$ la densidad lineal de masa. Así se llega a:

$$dE_{Kr} = \frac{1}{2}\frac{m_r v^2}{long^3} l^2 dl.$$

Integrando:

$$E_{Kr} = \int dE_{Kr} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_r v^2}{long^3}\right)\int_0^{long} l^2 dl, \qquad (11)$$

encontramos para la energía cinética instantánea del resorte la expresión:

$$E_{Kr} = \frac{1}{2}\frac{m_r}{3} v^2. \qquad (12)$$

Usando las relaciones (6), (7) y (12) en la ecuación (5) se encuentra que la energía cinética del sistema es:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_p}{2} + \frac{m_r}{3}\right) v^2, \tag{13}$$

el término entre paréntesis es la *masa efectiva* del sistema.

Utilizando las expresiones para las energías cinética (13), potencial gravitacional y potencial elástica (3), estamos ahora en condiciones de calcular la energía total del sistema en función de la altura de la masa pues hemos expresado las tres formas de energía que en él se encuentran (cinética, potencial gravitacional y potencial elástica) en términos de esta variable. De esta forma tenemos que la energía total es:

$$E_T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_p}{2} + \frac{m_r}{3}\right) v^2 + mgy + \frac{1}{2}k(x_{max} - y)^2. \tag{14}$$

Debido a que en los extremos del movimiento el cuerpo está instantáneamente en reposo, la energía cinética en $y = 0$ y en $y = y_{max}$ es cero. La energía total en $y = 0$ es:

$$E_T(y = 0) = \frac{1}{2}kx_{max}^2. \tag{15}$$

La energía total en y_{max} es:

$$E_T\ (y = y_{max}) = mgy_{max} + \frac{1}{2}k(x_{max} - y_{max})^2. \tag{16}$$

Como la energía total se conserva podemos igualar las ecuaciones (13) y (14), obteniendo:

$$\frac{1}{2}kx_{max}^2 = mgy_{max} + \frac{1}{2}k(x_{max} - y_{max})^2 \quad . \tag{17}$$

De donde encontramos que:

$$x_{max} = \frac{mg}{k} + \frac{1}{2}y_{max}. \tag{18}$$

Reemplazando este resultado en (14), se obtiene la expresión final para la **energía total**:

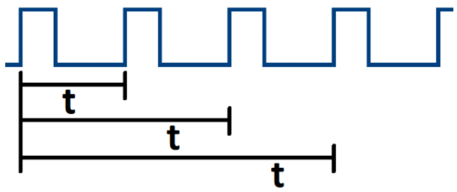
$$E_T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_p}{2} + \frac{m_r}{3}\right) v^2 + mgy + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + \frac{1}{2}y_{max} - y\right)^2 \tag{19}$$

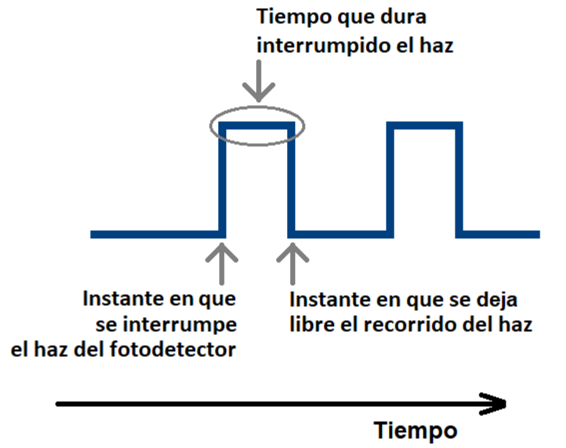
PROCEDIMIENTO

- Utilice para el valor de masa colgante 150 g aproximadamente. El sistema debe oscilar de manera estable y con la mayor amplitud posible, pero sin saltos del resorte. Identifique el valor inicial ***y=0*** en que debe soltar el resorte antes de iniciar con la medición.

- Programe el número de medidas del cronómetro en 120 y el modo de medición como se indica en la figura.

El modo de medición:





- Lleve los datos registrados a la tabla en la hoja electrónica.
- Repita el procedimiento con las mismas condiciones otras 2 veces.

ANALISIS

- Es necesario utilizar una hoja de Excel para analizar la información. La hoja electrónica calcula los valores de la velocidad según la siguiente expresión:

$$v_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

- De los datos registrados, separe los correspondientes a la trayectoria de subida y bajada de la masa colgante y calcule los valores de las energías cinética, potencial elástica, potencial gravitatoria y energía total. En una misma grafica represente el comportamiento de las energías en función de la posición.
- Describa detalladamente las gráficas obtenidas, discuta las fuentes de error y escriba las conclusiones del experimento