Martha Pinzón
Univ. del Valle.

Funciones Continuas

En los ejemplos de límites se apreció que el límite en un punto puede: • No existir,
• existir y no estar definida la función
• Existir y estando definida, ser diferente al valor de la función
• existir y coincidir con el valor de la función

Las funciones donde se presenta la última situación se llaman funciones continuas.

DEFINICIÓN: Sea f una función y $x=a$ un número real.
f es continua en $x=a$ si

i) f está definida en $x=a$.

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

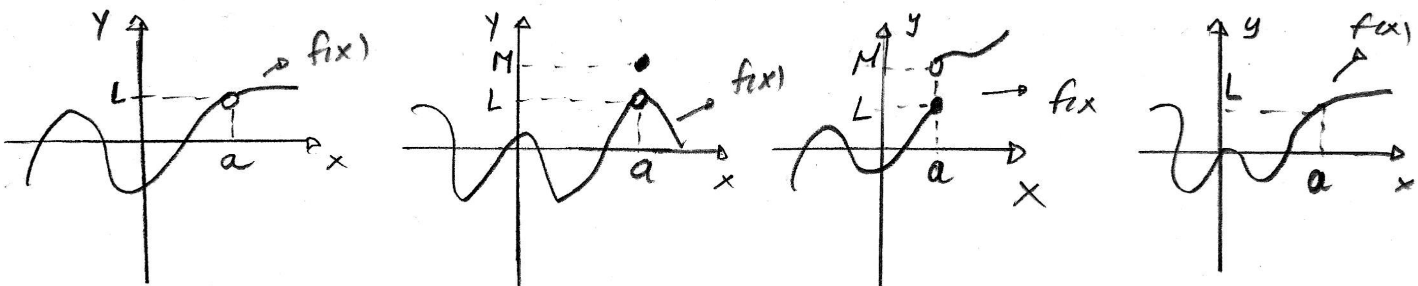
iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si una de las condiciones falla, se dice que la función es discontinua en $x=a$.

Las tres condiciones de continuidad, puede recogerse prácticamente en una.

f es continua en $x=a$ si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ej: De las siguientes funciones, determine cuales son continuas en $x=a$.



(a) (b) (c) (d)

(a) f no es continua en $x=a$, pues $f(a)$ no existe.

(b) f no es continua en $x=a$. $f(a)=M$ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ $L \neq M$.

(c) f no es continua en $x=a$. $f(a)=L$. $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

(d) f es continua en $x=a$ $\lim_{x\to a} f(x) = L = f(a)$

Ej1: Determine si $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ es continua en $x=0$.

S// $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, luego $f(0)$ existe.

Ahora, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)} = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$

Además $f(0) = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$. Luego $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x+1} = f(0)$

y por tanto f es continua en $x=0$.

Ej2: Determine si $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq -1 \\ \dfrac{x^2-4}{x+2} & x > -1 \end{cases}$ es continua en $x=-1$

S// f es continua en $x=-1$ sii $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$.

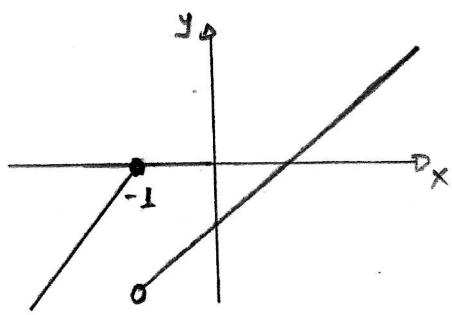
Por ser f una función a trozos, y presentar por la continuidad en el punto de cambio de los intervalos, se debe calcular límites laterales.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (2x+2) = 2(-1)+2 = 0.$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to -1^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} =$$

$$\lim_{x \to -1^+} (x-2) = -1-2 = -3$$

Como los límites laterales son diferentes, $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe, luego f no es continua en $x=-1$.



La discontinuidad se llama discontinuidad de salto (finito)

Ej 3: Determine si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x \neq -3 \\ 2 & x = -3 \end{cases}$

es continua en $x=-3$.

Sol En primer lugar f está definida en $x=-3$. En efecto, $f(-3)=2$.

Buscamos $\lim_{x \to -3} f(x)$.

$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{1}{x+3}$ No existe. Por tanto f

es discontinua en $x=-3$.

Veamos que sucede con los limites laterales.

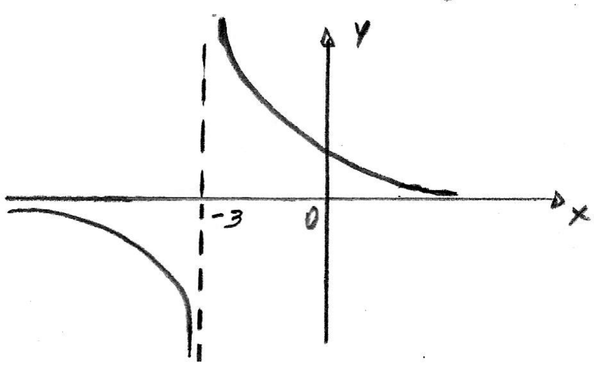
$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = \infty.$$

Estos limites muestran que existe asintota vertical en $x = -3$.

De otro lado, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x+3} = 0 = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x+3}$.

Luego hay A. horizontal en $y=0$.



Esta discontinuidad se conoce como discontinuidad de salto infinito.

Observe: La discontinuidad de una función en $x=a$ puede presentarse por:

i) Existir el límite, pero no coincidir con el valor de la función en $x=a$, ya sea porque no está f definida en a, ó por tener un valor diferente al límite.

ó ii) por no existir el límite.

Si la discontinuidad se debe a (i) la discontinuidad

Se llama Removible ó evitable.
En este caso la función se puede redefinir de tal forma que la función se vuelva continua. Basta definir el valor de f en $x=a$ como el valor del límite.

Si la discontinuidad se debe a (ii), se llama esencial o no evitable. En este caso la función no se puede redefinir de manera continua.

Ej: Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 13 & x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ 5x - 7 & x > 2 \end{cases}$

Determine si f es continua en $x=2$. En caso negativo, clasificar la discontinuidad.

f es continua en $x=2$ si $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Buscamos límites laterales.

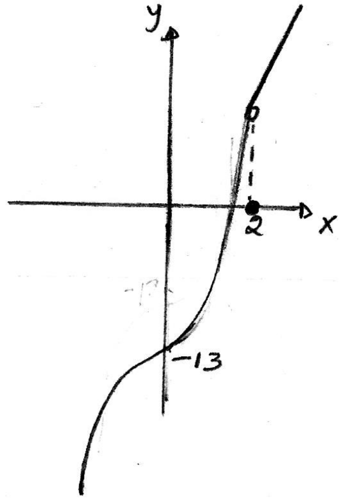
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x^3 - 13) = 2(2)^3 - 13 = 16 - 13 = 3.$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5x - 7) = 5(2) - 7 = 10 - 7 = 3.$$

Luego $\lim_{x \to 2} f(x) = 3.$

como $f(2) = 0$, $\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \neq f(2) = 0.$

Por existir el límite, la discontinuidad es evitable.



Como la discontinuidad falla por ser $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ distinto de $f(2)$, se puede redefinir la función asignándole en $x=2$ el valor del límite.

Así, definimos
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2x^3-13 & x<2 \\ 3 & x=2 \\ 5x-7 & x>2 \end{cases}$$

ó
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2x^3-13 & x\leq 2 \\ 5x-7 & x>2 \end{cases}$$
Extensión continua de f.

Sabemos que significa continuidad en un punto, veamos que significa continuidad en todo el dominio.

__DEFINICIÓN__: Una función es continua en todo el dominio de definición, si es continua en cada uno de sus puntos.

Ej: Demostrar que $f(x) = -3x^2+2$ es continua en $\mathbb{R}$.

Sol Sea c un real arbitrario. Mostraremos que f es continua en $x=c$.

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (-3x^2+2) = -3c^2+2 = f(c).$$

f es continua en c. Como c es arbitrario en $\mathbb{R}$, f es continua en $\mathbb{R}$

Como la continuidad se define en términos de un límite y hay límites laterales, también se tiene continuidad lateral.

DEFINICIÓN: Una función f es continua en $x=a$ por la izquierda si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Es continua por la derecha de a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Claramente, f es continua en $x=a$ si lo es tanto por izquierda, como por derecha.

Este concepto permite definir continuidad en un intervalo cerrado $[a,b]$.

DEFINICIÓN: Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ si f es continua en el abierto (a,b) y f es continua en a por derecha y en b por izquierda, es decir $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Ejemplo: Probar que $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ es continua en su dominio.

Si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4-x^2 \geq 0\}$

$$4-x^2 \geq 0 \leftrightarrow x^2 \leq 4 \leftrightarrow |x| \leq 2 \leftrightarrow x \in [-2,2]$$

Se debe probar que f es continua en $[-2,2]$

Veamos primero que f es continua en $(-2,2)$.

Sea $c \in (-2,2)$. Mostraremos que f es continua en $x=c$. entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x \to c} (4-x^2)} =$$

$$\sqrt{4-c^2} = f(c).$$

Como c es arbitrario en $(-2,2)$, f es continua en $(-2,2)$.

Ahora, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x \to -2^+} (4-x^2)} = 0 = f(-2)$

por tanto f es continua en -2 por derecha.

Veamos que es continua en $x=2$ por izquierda.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x \to 2^-} (4-x^2)} = \sqrt{0} = 0 = f(2)$$

así f es continua en $x=2$ por izquierda.

Como f es continua en el abierto $(-2,2)$ en $x=-2$ por derecha y en $x=2$ por izquierda, f es continua en $[-2,2]$.

Ej: Las funciones polinómicas, racionales, trigonométricas ($\operatorname{sen} x, \cos x$), exponenciales y logarítmicas son continuas en el dominio de definición.

Los siguientes Teoremas hablan sobre funciones continuas.