Clase 09-11-21

martes, 9 de noviembre de 2021 10:52 a. m.

Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivos
- Reconocer sistemas de ecuaciones lineales de n variables.
- Encontrar una representación paramétrica de un conjunto solución.
- Determinar cuándo un sistema de ecuaciones lineales es consistente o inconsistente.
- Utilizar la sustitución hacia atrás para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Ecuación: Una ecuación con variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una proposición abierta que establece una igualdad entre dos expresiones matemáticas.

Ejemplos.

1. $x + y = 1$. variables x, y.

Si $x = 2, y = 1 \Rightarrow 2 + 1 = 3 \neq 1$.

Si $x = 3, y = -2 \Rightarrow 3 + (-2) = 1$

$1 = 1$

2. $3x_1^2 + 2x_2 = 5x_1 - 5x_3$ Variables: x_1, x_2, x_3.

3. $x - 2y + 3z = r + s - 3$ r y s son constantes reales (parámetros)

4. $7 - 5 = 2$

- Puede considerarse con el número de variables que se quiera.
- Por ejemplo: $7 + 0x + 0y^2 - 5 = 1 + 0z$

$0x_1 + 7 + 0x_2 = 5$.

Solución de una ecuación.

Definición 2 [*Solución de una ecuación*]. Una solución de una ecuación con variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es una n-upla[3] tal que, al sustituir cada una de las variables de la ecuación por las componentes respectivas de la n-upla, obtenemos una identidad[4]. Al conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación lo llamamos *conjunto solución.*

$$\begin{array}{cccc} (r_1, & r_2, & \ldots, & r_n) \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ x_1 & x_2 & & x_n \end{array}$$ n-upla: lista ordenada de n números.

Ejemplos.

1. ¿ la tripla $(1,-2,1)$ es solución de

$$3x_1^2 - x_2 = 4x_1 + x_3 \quad ?$$

$$3\cdot 1^2 - (-2) \stackrel{?}{=} 4\cdot 1 + 1.$$

$$5 = 5$$ proposición cierta

RTA: Si es solución.

2. $(3s+3r, s+r, -1)$ es solución de

$$x - 2y + 3z + 1 = s + r - 2.$$

En efecto, $$3s+3r - 2(s+r) + 3(-1) + 1 \stackrel{?}{=} s+r-2$$

$$\underline{3s} + 3r - \underline{2s} - 2r - 2 \stackrel{?}{=} s+r-2$$

$$s + r - 2 = s + r - 2 \;//$$

3. $$8 - 3 = 5$$ Siempre tiene solución.

$$5 = 5$$

4. $3+1=2$ No tiene solución.

$4=2$ Falso.

Definición (Ecuación lineal).

Una **ecuación lineal en n variables** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Los **coeficientes** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales y el **término constante** b es un número real. El número a_1 es el **coeficiente principal** y x_1 es la **variable principal**.

Observaciones

- Las ecuaciones lineales no tienen productos o raíces de variables; tampoco variables que aparezcan en funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas. Las variables aparecen elevadas sólo a la primera potencia.
- Al primer coeficiente diferente de cero lo llamamos pivote de la ecuación y a la variable correspondiente, variable pivotal de la ecuación.
- Cuando b = 0, a la ecuación la denominamos ecuación lineal homogénea.
- La variable pivotal se puede despejar en función de las demás variables. Sin embargo, la variable pivotal no siempre es la única variable que se puede despejar en término de las demás.
- Dada una ecuación lineal con término independiente b, definimos la ecuación lineal homogénea asociada (EHA) a la ecuación dada, como la ecuación con las mismas variables, de coeficientes iguales y término independiente b = 0.

Ejemplos.

1. $3x + 2y = 7$ es lineal.

- 3 es el coeficiente de x.
- x es la variable pivotal.
- 2 es el coeficiente de y.
- 7 es el término constante (independiente).
- $3x + 2y = 0$ ecuación homogénea asociada (EHA).

2. $\frac{1}{3}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ es lineal.

$\frac{1}{3}x + y - \pi z = 0$ EHA.

3. $(\cos \pi) x_1 - 4x_2 = e^2$ es lineal.

$(\cos \pi) x_1 - 4x_2 = 0$ EHA.

$$\left.\begin{array}{ll} 4. & xy + z = 2 \\ 5. & e^x - 2y = 4 \\ 6. & \tan x_1 + 2x_2 = 3x_3 \end{array}\right\} \text{no son lineales.}$$

Representación paramétrica de un conjunto solución.

Resolver la ecuación $x + 2y = 4$ (1)

Solución:

- Despejar una variable en términos de la otra(s).

$$x = 4 - 2y.$$

- observe que x depende de y. Como y puede tomar cualquier valor, se le llama variable libre.

$$y = t, \quad t \text{ es un parámetro.}$$

$$x = 4 - 2t$$

- Si $t = 1$, $x = 4 - 2(1) = 2 \Rightarrow (2,1)$ es solución de (1).
- Todas las soluciones de (1) son de la forma:

$$(4-2t, t) \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Conjunto solución: $\{ (4-2t, t) : t \in \mathbb{R} \}$.

Pero esta no es la única formo de representar el c.s.

$$x + 2y = 4$$

$$2y = 4 - x$$

$$y = \frac{4-x}{2}$$ x es la variable lible.

$x = t$, t parámetro.

$$y = \frac{4-t}{2}$$

Luego, el c.s. de (1) también puede escribirse como:

$$\text{c.s.}: \left\{ \left(t, \frac{4-t}{2} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

En efecto,

$$x + 2y = t + 2\left(\frac{4-t}{2}\right) = t + 4 - t = 4 \;\checkmark\checkmark$$