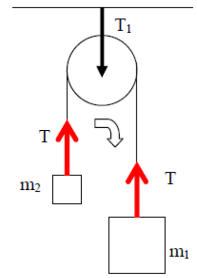
25/02/2022

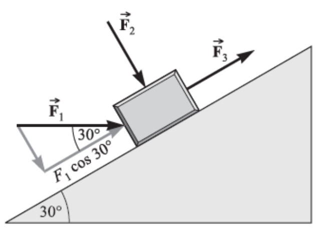
Temas Taller Física 1 (Química):

Trabajo y Energía; Cantidad de movimiento lineal -Colisiones; Movimiento Rotacional; Cantidad de Movimiento angular.

E1. Dos masas, $m_1 > m_2$ cuelgan de una polea sin fricción, como se muestra en la figura. A) Determine el trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre cada masa por separado cuando la masa m_1 se desplaza una distancia d hacia abajo. B) Cual es el trabajo total realizado por cada masa, incluido el efectuado por la fuerza de la cuerda. C) Redacte un comentario acerca de cualquier relación que haya descubierto entre estas cantidades. (Tomado y modificado del Prob7.4 Serway 4ta ed.)

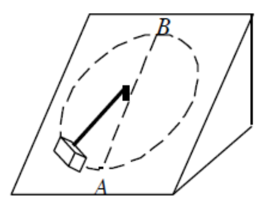


E2. Una fuerza $F = (4x\hat{\imath} + 3y\hat{\jmath})$ actúa sobre un objeto cuando este se mueve en la dirección x_0 del origen a x_1. Encuentre el trabajo efectuado por la fuerza sobre el objeto. (Tomado y modificado del Prob7.22 Serway 4ta ed.)

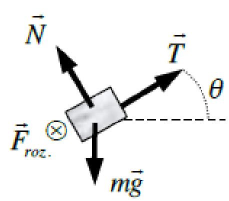


E3. Un bloque se mueve hacia arriba por un plano inclinado a θ grados bajo la acción de las tres fuerzas que se muestran en la figura. $\vec{F}_1$es horizontal, $\vec{F}_2$es normal al plano y $\vec{F}_3$ es paralela al plano. Determine el trabajo realizado por cada una de las fuerzas, cuando el y el punto de aplicación de cada fuerza se mueve una distancia x hacia arriba del plano inclinado. (Tomado y modificado del Prob6.2(I) Física Gral Schaun 10ma ed.)

E4. Un objeto de masa *m* se ata al extremo de una cuerda fina de longitud l y se desliza por una rampa de θ grados con la que tiene un coeficiente de fricción μ. En un instante determinado el objeto pasa por el punto más bajo, ***A***, y la tensión de la cuerda es *T*. A) Determine la velocidad del objeto en dicho instante. Cuando el objeto asciende, al pasar por ***B*** determina: B) el módulo de la velocidad, C) la tensión de la cuerda, D) la potencia desarrollada por la fuerza de rozamiento sobre el objeto. Suponer que el módulo de la velocidad en el punto más bajo es v_o. E) Determinar el valor mínimo de v_o para que el objeto pueda completar su trayectoria circular. (Apuntes de trabajo y energía, Colisiones)



a) Teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas para el bloque y aplicando la segunda ley de Newton para las componentes a lo largo del plano:



$$T - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = ma_n = m\frac{V_A^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V_A = \left[R\left(\frac{T}{m} - g\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right]^{1/2} = \boxed{8.02\ \mathrm{m/s}}$$

b) Teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento va a realizar trabajo y tomando el origen de energía potencial gravitatoria en A:

$$W_{roz.} = \Delta E \quad , \quad F_{roz.} = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad -\mu mg\cos\theta(\pi R) = \left[\frac{1}{2}mV_B^2 + mg(2R\,\text{sen}\,\theta)\right] - \left[\frac{1}{2}mV_A^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad V_B = \left[V_A^2 - gR(4\,\text{sen}\,\theta + 2\pi\mu\cos\theta)\right]^{1/2} = \boxed{6.12\ \text{m/s}}$$

c) Planteando ahora la segunda ley de Newton en el punto más alto:

$$T + mg\,\text{sen}\,\theta = ma_n = m\frac{V_B^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad T = m\left(\frac{V_B^2}{R} - g\,\text{sen}\,\theta\right) = \boxed{527.8\ \text{N}}$$

d) La potencia desarrollada por la fuerza de rozamiento será:

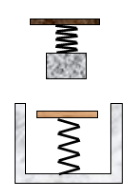
$$P_{roz.} = \vec{F}_{roz.}\cdot\vec{V}_B = -F_{roz.}V_B = -\mu mg\cos\theta V_B = \boxed{-143.6\ \text{W}}$$

e) La velocidad mínima que el móvil puede poseer en la posición B se correspondería con una tensión nula en la cuerda con lo que, según se ha determinado en el apartado c), tenemos que:

$$T_{mín.} = m\left(\frac{V_{B,mín.}^2}{R} - g\,\text{sen}\,\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{B,mín.} = \sqrt{gR\,\text{sen}\,\theta}$$

y teniendo en cuenta el resultado del apartado b) y que dicha velocidad mínima en B se alcanzaría con la velocidad mínima v_0 en A

E5. Un cuerpo de masa m_1 se encuentra colgado de un muelle 1 (resorte) de constante de elasticidad k_1, d metros más abajo se encuentra una plataforma de masa m_2 apoyada sobre un muelle 2 (resorte) de constante k_2. A) Calcular la energía elástica almacenada en el muelle 1. B) si en un momento determinado se suelta el enganche que sujeta a m_1, calcular la velocidad con la que choca con la plataforma. C) Si el choque entre m_1 y la plataforma quedan pegados y se conserva el movimiento lineal, calcular cuanto se comprime el muelle 2. (Apuntes de trabajo y energía, Colisiones)



a) El cuerpo colgado del muelle se encuentra en reposo con lo cual su peso está equilibrado con la fuerza elástica del muelle que tira hacia arriba. Si llamamos Δl_1 al alargamiento sufrido por el muelle 1:

$$k_1 \, \Delta l_1 = m_1 g \quad \Rightarrow \quad \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k_1}$$

La energía potencial elástica acumulada en el muelle será:

$$E_{pot.elástica\,1} = \frac{1}{2} k_1 (\Delta l_1)^2 = \boxed{\frac{m_1^2 g^2}{2k_1}}$$

b) Vamos a tomar el origen de energías potenciales gravitatorias a la altura a la que se encuentra la plataforma. Planteando la conservación de la energía entre la situación inicial (el enganche se acaba de soltar) y la situación final (el cuerpo impacta contra la plataforma) y teniendo en cuenta que durante su desplazamiento la única fuerza que realiza trabajo sobre el bloque es la de la gravedad (no actúan fuerzas elásticas y no habrá por lo tanto que considerar energías potenciales elásticas, la energía potencial elástica acumulada en el muelle 1 sigue en él, y se transformará en energía cinética del muelle ya que empezará a oscilar arriba y abajo):

$$\left.\begin{array}{l} E_{inicial} = m_1 g d \\[2ex] E_{final} = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 \end{array}\right\} \quad E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \boxed{\sqrt{2gd}}$$

(En la solución anterior se ha tomado el sentido positivo de movimiento hacia abajo para el movimiento unidimensional)

c) Si aplicamos la conservación del momento lineal en el choque (las velocidades que aparecen en la ecuación son componentes y no módulos, en nuestro caso con la elección del sentido positivo del movimiento las dos velocidades serán positivas):

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{conjunto} \quad \Rightarrow \quad v_{conjunto} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \sqrt{2gd}$$

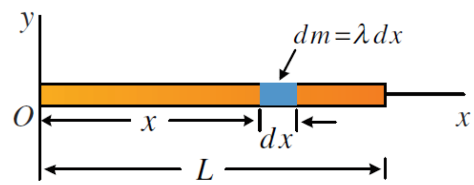
Si la compresión máxima que se produce en el muelle 2 es $\Delta l_{2,máx.}$ y aplicamos el principio de conservación de la energía teniendo en cuenta que inicialmente el muelle 2 ya estaba comprimido debido al peso de la plataforma $\Delta l_2 = \dfrac{m_2 g}{k_2}$ (resultado que se calcula igual que en el primer apartado):

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2_{conjunto} + \frac{1}{2}k_2(\Delta l_2)^2 = \left(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\right) gd + \frac{m_2^2 g^2}{2k_2}$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}k_2\left(\Delta l_{2,máx.}\right)^2 - (m_1 + m_2)g\left(\Delta l_{2,máx.} - \Delta l_2\right)$$

$$E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_{2,máx.} = \boxed{\left(\frac{m_1 + m_2}{k_2}\right) g \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{m_2(2m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2 g} + \frac{2m_1^2 k_2 d}{(m_1 + m_2)^3 g}} \right\}}$$

E6. Una varilla horizontal tiene una masa $\boldsymbol{M}$ y longitud $\boldsymbol{L}$. Encuentre la posición del centro de masa desde el extremo izquierdo: a) si la varilla tiene una masa uniforme por unidad de longitud λ, y b) si la varilla tiene una masa por unidad de longitud λ que incrementa linealmente desde su lado izquierdo de acuerdo con la relación $\lambda = \alpha x$, α donde es una constante. (Tomado Fisica Sci&Eng Springer)



Solution: (a) According to the geometry of Fig. 7.15, $y_{CM} = z_{CM} = 0$. For a uniform rod $\lambda = M/L$. If we divide the rod into infinitesimal elements of length dx, then the mass of each element is $dm = \lambda\, dx$.

Accordingly, Eq. 7.34 gives:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda\, dx = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x\, dx = \frac{1}{L}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{1}{L}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

where we used $\lambda = M/L$. Thus, as expected, the center of mass of a uniform ı is at its center.

(b) In this case, λ is not a constant. Therefore, Eq. 7.34 gives:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda\, dx = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\, dx = \frac{\alpha}{M}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

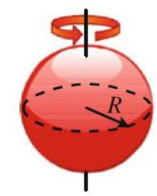
We can eliminate α by writing M in terms of α and L as follows:

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda \, dx = \int_0^L \alpha \, x \, dx = \alpha \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L = \alpha \frac{L^2}{2}$$

Substituting this result into the expression of x_{CM}, we get:

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\alpha L^3}{3M} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \frac{2}{3} L$$

E7. Demuestre que el momento de inercia de una esfera de radio R y masa M alrededor de un eje que pasa por el centro es $I = \frac{2}{5} M R^2$. (Tomado apuntes de H. Massmann)



Encontremos el momento de inercia de una esfera uniforme de radio R y masa M alrededor de un eje que pasa por el centro.

La densidad de masa de la esfera viene dada por

$$\rho_0 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \ .$$

Para encontrar el momento de inercia de una esfera supongamos que ella está constituida por numerosos discos infinitesimales de grosor dz (ver figura 9.5). El radio del disco infinitesimal que se encuentra a una altura z viene dado por $\sqrt{R^2 - z^2}$. El área de tal disco es por lo tanto

$$A = \pi(R^2 - z^2) \ .$$

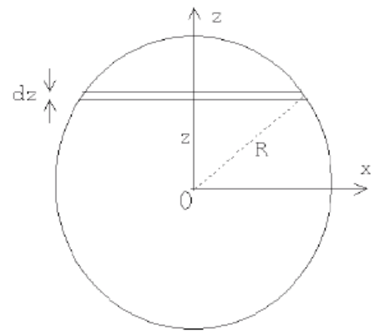


Figura 9.5

Para la masa dM (que es el volumen del disco infinitesimal multiplicado por su densidad) se obtiene

$$dM = \rho_0 \, \pi(R^2 - z^2) \, dz \ .$$

La contribución de tal disco al momento de inercia de la esfera es (ver ejemplo 3)

$$dI = \frac{1}{2} dM \, (R^2 - z^2) = \frac{\rho_0 \pi}{2} \, (R^2 - z^2)^2 \, dz \ .$$

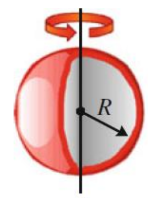
Sumando la contribución de todos los discos desde $z = -R$ hasta $z = R$ se encuentra

$$\begin{aligned} I = \int dI &= \int_{-R}^{R} dI = \frac{\rho_0 \pi}{2} \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 \, dz \\ &= \frac{\rho_0 \pi}{2} \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) \, dz \\ &= \frac{\rho_0 \pi}{2} \left(R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{-R}^{R} \\ &= \frac{\rho_0 \pi}{2} \, 2 \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) \\ &= \rho_0 \pi \, R^5 \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión para ρ_0 se obtiene finalmente

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \, .$$

E8. Demuestre que el momento de inercia de una cascara esférica radio R y masa M alrededor de un eje que pasa por su centro es $I = \frac{2}{3} M R^2$. (Tomado apuntes H. Massmann)



Para resolver este problema usamos el resultado del ejemplo anterior, evaluándolo en el límite $R_i \longrightarrow R_e$. Para encontrar este límite pongamos $R_i = R_e - \epsilon$ con ϵ muy pequeño. Se tiene:

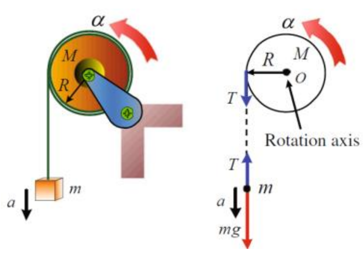
$$\begin{aligned} R_e^3 - R_i^3 &= R_e^3 - (R_e - \epsilon)^3 \\ &= R_e^3 - R_e^3\left(1 - \frac{\epsilon}{R_e}\right)^3 \\ &\simeq R_e^3 - R_e^3\left(1 - 3\frac{\epsilon}{R_e}\right) \\ &\simeq 3R_e^2\epsilon \, . \end{aligned}$$

De la misma manera se encuentra que

$$R_e^5 - R_i^5 = 5R_e^4\epsilon \, .$$

Reemplazando estos resultados en la expresión para el momento de inercia, e igualando R_e con R, se encuentra (para el momento de inercia de una cáscara esférica)

$$I = \frac{2}{3}MR^2 \, .$$



E9. Una polea de masa $\boldsymbol{M}$ y radio $\boldsymbol{R}$ es montada sobre un eje sin fricción, ver figura. Un cordel de masa despreciable es atado alrededor de la polea mientras que su otro extremo soporta un bloque de masa $\boldsymbol{m}$. si el cordel no se desliza, encuentre la aceleración lineal del bloque, la aceleración angular de la polea, y la tensión de la cuerda. (Tomado Fisica Sci&Eng Springer)

Solution: For a downward motion of the block with acceleration a, the weight $m\,g$ must be greater than the tension T, see the free-body diagram of Fig. 8.16. Therefore, from Newton's second law of linear motion, we get:

$$(1) \quad m\,g - T = m\,a$$

From the free-body diagram of Fig. 8.16, we see that the torque τ that acts on the pulley is $R\,T$. Applying Newton's second law in angular form, Eq. 8.32, we obtain:

$$\Sigma\tau = I\,\alpha \quad \Rightarrow \quad R\,T = \left(\tfrac{1}{2}M\,R^2\right)\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \tfrac{1}{2}M\,R\,\alpha$$

where the moment of inertia of the pulley $I = \frac{1}{2}MR^2$ is taken from Fig. 8.15. The linear acceleration of the block is equal to the tangential acceleration of the pulley, i.e., $a_t = a$. Since $a_t = R\alpha$, then the last equation reduces to:

$$(2) \quad T = \tfrac{1}{2}M\,a$$

Eliminating the tension from Eqs. (1) and (2), we get:

$$a = \frac{2m}{2m+M}g = \frac{2\times(3\,\text{kg})}{2\times(3\,\text{kg})+6\,\text{kg}}\times(10\,\text{m/s}^2) = 5\,\text{m/s}^2$$

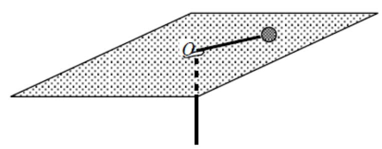
The angular acceleration of the pulley is thus:

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{a}{R} = \frac{5\text{m/s}^2}{0.2\,\text{m}} = 25\,\text{rad/s}^2$$

We use Eq. (2) to find the tension in the cord as follows:

$$T = \tfrac{1}{2}M\,a = \tfrac{1}{2}\times(6\,\text{kg})(5\,\text{m/s}^2) = 15\ \text{N}$$

E10. Una esfera de masa m está unida a una cuerda elástica de constante k, que está sin deformar cuando la esfera se encuentra en el origen O. Si la esfera puede deslizar sin rozamiento sobre la superficie horizontal y en el instante inicia, $t_o = 0$, su distancia de origen era de x_o, y su velocidad v_o formando un ángulo θ con el vector posición. Determinar las distancias máximas y mínimas de la esfera al origen O y los valores correspondientes a su velocidad. Ayuda: en los puntos de máximo acercamiento o de máximo alejamiento los vectores posición y de velocidad tienen que ser forzosamente perpendiculares.



(Apuntes de trabajo y energía, Colisiones, momento angular)

Sobre la esfera actúan el peso y la normal, que se anulan entre sí, y la fuerza elástica dirigida en todo momento hacia el punto O. Al ser esta última fuerza conservativa y

central se conservarán en nuestro problema la energía total de la esfera, suma de la energía cinética y potencial elástica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kr_0^2 = 132.5\ \text{J}$$

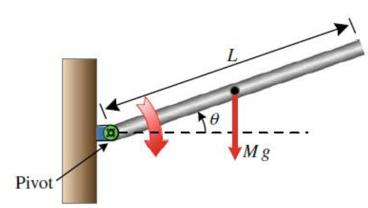
y el momento angular calculado respecto al punto O:

$$L_O = mvr\,\mathrm{sen}\,\theta = mv_0 r_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = 5.196\ \mathrm{kg\ m^2/s}$$

donde θ es el ángulo entre el vector de posición y el vector velocidad.
Teniendo en cuenta la expresión de la energía, cuando la esfera alcance la distancia mínima la velocidad debe tomar un valor máximo, y viceversa. Teniendo en cuenta que en estos casos los vectores posición y velocidad son perpendiculares (téngase en cuenta que cuando la distancia al origen sea mínima o máxima la velocidad no puede tener componente radial $\frac{dr}{dt}$, ya que si la tuviera la distancia radial seguiría disminuyendo o aumentando):

$$\left.\begin{aligned} L_O &= mv_{máx.}r_{mín.} \\ L_O &= mv_{mín.}r_{máx.} \\ E &= \frac{1}{2}mv^2_{máx.} + \frac{1}{2}kr^2_{mín.} \\ E &= \frac{1}{2}mv^2_{mín.} + \frac{1}{2}kr^2_{máx.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} v_{máx.} &= m^{-1/2}\left[E + \left(E^2 - \frac{kL_O^2}{m}\right)^{1/2}\right]^{1/2} = \boxed{20.28\ \mathrm{m/s}} \\ v_{mín.} &= m^{-1/2}\left[E - \left(E^2 - \frac{kL_O^2}{m}\right)^{1/2}\right]^{1/2} = \boxed{5.513\ \mathrm{m/s}} \\ r_{máx.} &= m^{-1/2}L_O\left[E + \left(E^2 - \frac{kL_O^2}{m}\right)^{1/2}\right]^{-1/2} = \boxed{1.571\ \mathrm{m}} \\ r_{máx.} &= m^{-1/2}L_O\left[E + \left(E^2 - \frac{kL_O^2}{m}\right)^{1/2}\right]^{-1/2} = \boxed{0.427\ \mathrm{m}} \end{aligned}\right.$$

E11. Una varilla uniforme de masa M y longitud L está atada a un pivote sin fricción como se muestra en la figura. La varilla es libre de rotar en su posición vertical. A) determine la aceleración angular de la varilla como una función de θ para $-90° \le \theta \le 90°$ y encuentre su máximo valor. B) encuentre el ángulo donde la aceleración tangencial es igual a la gravedad g. (Tomado Fisica Sci&Eng Springer)



Solution: (a) The moment arm of the force exerted by the pivot on the rod is zero. Therefore, the only force that contributes to the torque is the gravitational force $M\vec{g}$ with moment arm $\frac{1}{2}L\cos\theta$. Consequently, the angular acceleration is not constant because the torque exerted on the rod varies with θ. Call clockwise torques positive. Then the magnitude of this clockwise torque is:

$$\tau = \left(\tfrac{1}{2}L\cos\theta\right) M\,g$$

By applying Newton's second law in its angular form, $\sum\tau = I\,\alpha$, and taking $I = \frac{1}{3}M\,L^2$ from Fig. 8.15 for the axis of rotation at one end, we obtain:

$$\left(\tfrac{1}{2}L\cos\theta\right) M\,g = \left(\tfrac{1}{3}M\,L^2\right)\alpha$$

Thus:
$$\alpha = \frac{3g}{2L}\cos\theta$$

At any angle θ, all points on the rod have this angular acceleration and the maximum value of α occurs at $\theta = 0$. Thus:

$$\alpha_{\max} = \frac{3g}{2L}\cos 0^\circ = \frac{3(10\,\mathrm{m/s^2})}{2(20\times 10^{-2}\,\mathrm{m})} = 75\,\mathrm{rad/s^2}$$

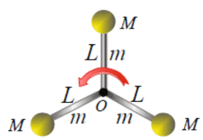
The dependence of α on the angle θ indicates that the angular acceleration starts from zero when $\theta = 90^\circ$, then increases with decreasing θ, becomes maximum of 75 rad/s at $\theta = 0$, then decreases for negative values of θ, and reaches zero again at $\theta = -90^\circ$.

(b) To find the tangential acceleration of the free end of the rod at any angle θ, we use the relation $a_t = L\alpha$ and substitute with α to get:

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g\cos\theta$$

Note that a_t does not depend on the length of the rod L. Now, setting $a_t = g$ in the previous relation, we find the value of θ to be:

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} = 48.2°$$



E12. Tres esferas de masa $\boldsymbol{M}$ están atadas a tres idénticas varillas cada una de masa $\boldsymbol{m}$ y longitud $\boldsymbol{L}$, como se ilustra en la figura. El sistema rota con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ cerca a un eje que es perpendicular a la pagina y pasa a través de ***O***. Encuentre el momento de inercia del sistema y su energía cinética a través de su eje de rotación. (Tomado Fisica Sci&Eng Springer)

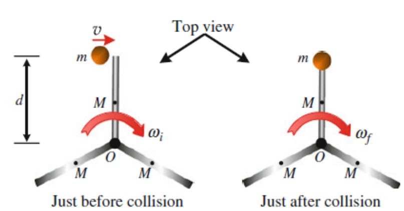
Solution: Using I from Eq. 8.27 and taking $\frac{1}{3}mL^2$ as the moment of inertia of each rod about O, the system's moment of inertia will be:

$$I = 3(ML^2) + 3(\tfrac{1}{3}mL^2) = (3M + m)L^2$$

Therefore, the rotational kinetic energy of the system about O will be:

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(3M + m)L^2\omega^2$$

E13. La figura muestra la vista superior de 3 varillas identicas que estan rigidamente conectadas al final del punto ***O*** y hacen un angulo de 120 ° entre ellas. Cada varilla tiene una masa $\boldsymbol{M}$ y una longitud $\boldsymbol{L}$, y el sistema completo esta rotando horizontalmente con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega_i}$ cerca del eje vertical pasando a través del punto ***O***. Una bola de masa $\boldsymbol{m}$ moviendose horizontalmente con una velocidad $\boldsymbol{v}$ colisiona perpendicularmente con la punta de una de las varillas y queda pegada en ella (colision completamente inelastica). ¿Cuál es la velocidad angular del sistema? (Tomado Fisica Sci&Eng Springer)



Solution: Just before the collision, the initial angular momentum of the clay about O is clockwise with magnitude $L_{c,i} = mvd$ and the initial angular momentum of the rod assembly is also clockwise with magnitude $L_{r,i} = I_r \omega_i$. We have $I_r = 3(Md^2/3) = Md^2$ as obtained from Fig 9.12. Thus, $L_{r,i} = Md^2\omega_i$ and the total initial angular momentum of the system about the axle is:

$$L_i = L_{c,i} + L_{r,i} = mvd + Md^2\omega_i$$

Just after collision, the system is composed of the clay with moment of inertia md^2 attached to the assembly having moment of inertia $I_r = Md^2$. Thus, the system has moment of inertia $I_{sys} = md^2 + Md^2$ and the total angular momentum of the system about the axle is:

$$L_f = I_{sys}\omega_f = (m+M)d^2\omega_f$$

During the impact (internal forces cancel), no external forces acting on the system have a torque about the rotational axis. Thus, conservation of angular momentum before and after the collision gives:

$$L_f = L_i \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{mvd + Md^2\omega_i}{(m+M)d^2}$$