Análisis y Diseño de Algoritmos II

Jesús Alexander Aranda Ph.D   Robinson Duque, Ph.D
Juan Francisco Díaz, Ph. D

Universidad del Valle

jesus.aranda@correounivalle.edu.co
robinson.duque@correounivalle.edu.co
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Overview

Programación Lineal- Generalidades

- En general, el término restricción lineal denota igualdades lineales o desigualdades lineales.
- Formalmente, un problema de programación lineal es el problema de minimizar o maximizar una función lineal sujeto a un conjunto finito de restricciones lineales.
- Así mismo, un programa lineal en forma de holgura corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a *igualdades lineales*.
- Un programa lineal en forma estándar corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a *desigualdades lineales*.

Programación Lineal- Generalidades

- Para programas lineales con tres o más variables la misma intuición de los ejercicios para dos variables se mantiene.
- Si tenemos tres variables, entonces cada restricción corresponde a un semi-espacio[1] en el espacio tridimensional:
  - La intersección de estos semiespacios forma la región factible.
  - El conjunto de puntos para el cual la función objetivo da un valor dado es ahora un plano.

---

[1] Se denomina semiespacio, a cada una de las dos partes en que un espacio queda dividido por un plano contenido en él.

Programación Lineal- Simplex

- Como en el caso de 2 dimensiones, dado que la región factible es convexa, el conjunto de puntos que alcanza el óptimo valor objetivo debe incluir un vértice de la región factible.
- De forma similar, si tenemos n variables, cada restricción define un semi-espacio en un espacio n-dimensional.
- Se denomina simplex a la región factible formada por la intersección de dichos semi-espacios.
- La función objetivo en este caso define un hiperplano

Programación Lineal- Simplex

- En un espacio unidimensional (como una recta), un hiperplano es un punto: divide una línea en dos líneas. En un espacio bidimensional, un hiperplano es una recta. En un espacio tridimensional, un hiperplano es un plano...
- Un hiperplano en un espacio n-dimensional puede ser descrito por una ecuación lineal no degenerada con la siguiente forma:

  $$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

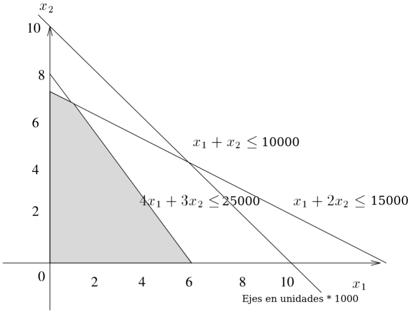
  Aquí no degenerada significa que no todas las a_i son 0. Si b=0, se obtiene un hiperplano lineal, que pasa a través del origen.
- Las dos mitades del espacio definidas por un hiperplano en espacios de n-dimensiones son:

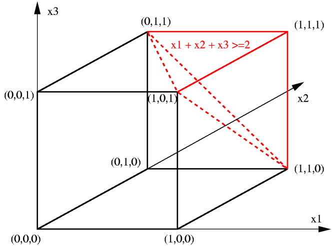
  $$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$$

  $$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b$$

Programación Lineal- Simplex

Ejemplos:





Programación Lineal- Simplex

- El algoritmo simplex toma como entrada un programa lineal y retorna una solución óptima.
- Este algoritmo comienza en algún vértice del simplex y desarrolla una secuencia de iteraciones.
- En cada iteración, el algoritmo se mueve hacia un vertice del simplex desde el vértice actual.

Programación Lineal- Simplex

- Dicho vértice usualmente tiene un mejor valor objetivo.
- El algoritmo termina cuando alcanza un máximo local, el cual es un vértice para el que todos sus vértices vecinos tienen un valor objetivo más pequeño.
- Este máximo local, es en realidad un óptimo global.

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

Un programa lineal está en forma estándar si tiene la siguiente estructura:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
 & \\
\texttt{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq b_i \ \ \texttt{para} \ \ i = 1, 2, ..., m \\
 & x_j \geq 0 \ \ \texttt{para} \ \ j = 1, 2, ..., n
\end{array}
$$

O utilizando representación con vectores y matrices:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & c^T x \\
 & \\
\texttt{subject to} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

- Es posible convertir un programa lineal dado como la minimización o maximización de una función lineal sujeta a restricciones lineales a la forma estándar.
- Un programa lineal no está en forma estándar por cualquiera de las siguientes razones:
  1. La función objetivo es una minimización en lugar de una maximización.
  2. Hay variables para las cuales no hay restricciones de no negatividad.
  3. Hay restricciones de igualdad.
  4. Hay restricciones de desigualdad con el signo $\geq$.

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & -2x_1 + 3x_2 \\
& \\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2 = 7 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0
\end{array}
$$

Forma estándar: Función objetivo. Claramente este programa no está en forma estándar.

- Para convertir la función objetivo es suficiente con negar los coeficientes.

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

$$\begin{array}{ll} \texttt{maximize} & 2x_1 - 3x_2 \\ \\ \texttt{subject to} & x_1 + x_2 = 7 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

Forma estándar: Función objetivo. Claramente este programa no está en forma estándar.

- Para convertir la función objetivo es suficiente con negar los coeficientes.
- Como resultado se obtiene un LP equivalente

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

maximize	$2x_1 - 3x_2$
subject to	$x_1 + x_2 = 7$
	$x_1 - 2x_2 \leq 4$
	$x_1 \geq 0$

Forma estándar: Restricciones de no negatividad. Claramente este programa no está en forma estándar.

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual para cada variable haya una restricción de no negatividad se realiza lo siguiente:

- Se reemplaza cada ocurrencia de la variable x_2 por $x_2^+ - x_2^-$.
- Se añaden las restricciones de no negatividad $x_2^+ \geq 0$ y $x_2^- \geq 0$.

En general, lo anterior debe ser realizado para cada variable que no tenga restricción de no negatividad.

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

$$\begin{array}{ll} \texttt{maximize} & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\ \\ \texttt{subject to} & x_1 + x_2^+ - x_2^- = 7 \\ & x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq 4 \\ & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0 \end{array}$$

Forma estándar: Restricciones de no negatividad. Claramente este programa no está en forma estándar.
Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual para cada variable haya una restricción de no negatividad se realiza lo siguiente:

- Se reemplaza cada ocurrencia de la variable x_2 por $x_2^+ - x_2^-$.
- Se añaden las restricciones de no negatividad $x_2^+ \geq 0$ y $x_2^- \geq 0$.

En general, lo anterior debe ser realizado para cada variable que no tenga restricción de no negatividad.

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\
\\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2^+ - x_2^- = 7 \\
& x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq 4 \\
& x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0
\end{array}
$$

Forma estándar: Convirtiendo restricciones. Claramente este programa no está en forma estándar.

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual todas las restricciones sean $\leq$, se realiza lo siguiente:

- Puesto que $x = y$ es equivalente a $x \geq y$ y $x \leq y$. Entonces, es posible sustituir cada restricción de igualdad $f(x_1, x_2, ..., x_n) = b$ por las restricciones $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b$ y $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b$.

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\
\\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 7 \\
 & x_1 + x_2^+ - x_2^- \geq 7 \\
 & x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq 4 \\
 & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0
\end{array}
$$

Forma estándar: Convirtiendo restricciones. Claramente este programa no está en forma estándar.

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual todas las restricciones sean $\leq$, se realiza lo siguiente:

- Luego se debe convertir cada restricción $\geq$ a restricciones $\leq$, multiplicando por -1:

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\
\\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 7 \\
 & -x_1 - x_2^+ + x_2^- \leq -7 \\
 & x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq 4 \\
 & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0
\end{array}
$$

Forma estándar: Convirtiendo restricciones. Claramente este programa no está en forma estándar.
Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual todas las restricciones sean $\leq$, se realiza lo siguiente:

- Luego se debe convertir cada restricción $\geq$ a restricciones $\leq$, multiplicando por -1:

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

$$\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & 2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- \\
 & \\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 7 \\
 & -x_1 - x_2^+ + x_2^- \leq -7 \\
 & x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- \leq 4 \\
 & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0
\end{array}$$

Forma estándar: este programa ya está en forma estándar. Renombramos las variables x_2^+ y x_2^- por x_2 y x_3 respectivamente.

Forma Estándar y de Holgura- Forma Estándar

maximize $2x_1 - 3x_2 + 3x_3$

subject to
$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 7$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 \leq -7$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma estándar: este programa ya está en forma estándar. Renombramos las variables x_2^+ y x_2^- por x_2 y x_3 respectivamente.

Forma Estándar y de Holgura- Forma de Holgura

Un programa lineal está en forma holgura si tiene la siguiente estructura:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \\
\\
\texttt{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j = b_i \quad \texttt{para} \quad i = 1, 2, ..., m \\
 & x_j \geq 0 \quad \texttt{para} \quad j = 1, 2, ..., n
\end{array}
$$

O utilizando representación con vectores y matrices:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & c^T x \\
\\
\texttt{subject to} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Forma Estándar y de Holgura- Forma de Holgura

- En la forma de holgura, cada restricción de un programa lineal es una restricción de igualdad.
- Cada restricción de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \leq b_i$$

es convertida a restricciones:

$$x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

Forma Estándar y de Holgura- Forma de Holgura

De esta manera, el siguiente programa en forma estándar:

maximize $2x_1 - 3x_2 + 3x_3$

subject to
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &\leq 7 \\
-x_1 - x_2 + x_3 &\leq -7 \\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Forma Estándar y de Holgura- Forma de Holgura

Es equivalente al siguiente programa en forma holgura:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & z = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\
\\
\texttt{subject to} & x_4 = 7 - x_1 - x_2 + x_3 \\
& x_5 = -7 + x_1 + x_2 - x_3 \\
& x_6 = 4 - x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Forma Estándar y de Holgura- Ejercicios

Convertir el siguiente programa lineal a forma estándar y luego a forma de holgura:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & 2x_1 + 7x_2 + x_3 \\
\\
\texttt{subject to} & x_1 - x_3 = 7 \\
 & 3x_1 + x_2 \geq 24 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18 \\
 & x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Forma Estándar y de Holgura- Ejercicios

Convertir el siguiente programa lineal a forma estándar y luego a forma de holgura:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \\
\\
\texttt{subject to} & 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \\
 & x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 20 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 \leq 100 \\
 & x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 4 \\
 & x_1, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Fin de la Presentación

¿Preguntas?