Martha Quiza
Elaiv del Valle

Polinomios

En situaciones de modelamiento, aparecen expresiones de la forma $f(x) = x^2+1$, $2x^3-3x$, $(x+1)^2-2, \ldots$ las cuales se conocen como polinomios.

Def: Un polinomio de grado n, n entero no negativo es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

y $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0 \ldots n$.

Los a_i son los coeficientes del polinomio.

Ej: Identificar los polinomios

$2x^7 - 6x$	✓	grado 7			
$4x^{-2}+1$	*			$\tan x + x^2$	*
$\frac{1}{2}x + 5$	✓	grado 1		-6	grado 0
$e^x + x$	*			0	No tiene grado

observe: Todo polinomio define una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Casos particulares de las funciones polinómicas son las funciones Lineales y cuadráticas.

FUNCIÓN LINEAL: Una función lineal es una función polinómica de grado 1, de la forma

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Ej: $f(x) = -\sqrt{5}x + 8$, $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$.

Propiedades de la función lineal. $f(x)=ax+b, a\neq 0$.

i) $D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\mathbb{R}$

ii) La gráfica de f es una recta con pendiente a y corte con el eje y en b.

iii) f es creciente si $a>0$, f es decreciente si $a<0$
f es una función monótona

iv) f es inyectiva, luego es invertible.

$$f(x)=ax+b \to y=ax+b \to f^{-1}(x)=\frac{1}{a}(x-b).$$

Se verifica que efectivamente tal función es la inversa. Veamos una de las dos composiciones.

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left(\frac{1}{a}(x-b)\right)=a\,\frac{1}{a}(x-b)+b=x-b+b=x$$
$$\forall x\in R_f=\mathbb{R}.$$

Ejemplo: Halle la función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $P(1/2,-1)$, $Q(2,3)$.

S// Sea $f(x)=ax+b$.

como $(1/2,-1)\in G_f$ ent $f(1/2)=-1=\frac{1}{2}a+b$
$(2,3)\in G_f$ ent $f(2)=3=2a+b$.

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones se tiene:

$$-1=\tfrac{1}{2}a+b \quad (1)$$
$$3=2a+b \quad (2)$$

1−2 $\quad -4=\frac{1}{2}a-2a=-\frac{3}{2}a \to a=-8/-3=8/3$

reemplazando el valor de a en la ecuación (2) por ejemplo

$$3=2(8/3)+b \to 3=16/3+b \to b=3-16/3=\frac{9-16}{3}=\frac{-7}{3}$$

Así

$$f(x)=\frac{8}{3}x-\frac{7}{3}$$

Funciones cuadráticas:

Una función cuadrática es una función polinómica de grado 2 de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Ej: Son funciones cuadráticas

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1, \quad \pi x^2, \quad (4x-3)^2.$$

De la geometría se puede probar que el lugar geométrico determinado por una ecuación del tipo $y = a(x-h)^2 + k$, $a, h, k \in \mathbb{R}$ es una parábola con eje de simetría la recta $x = h$ y vértice en $V = (h, k)$.

Para estudiar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se lleva a la forma canónica y para ello procedemos completando cuadrados.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Se toma el coeficiente de x, b/a, se divide por 2 $b/2a$, se eleva al cuadrado, $\frac{b^2}{4a^2}$ se suma y resta dicha cantidad.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

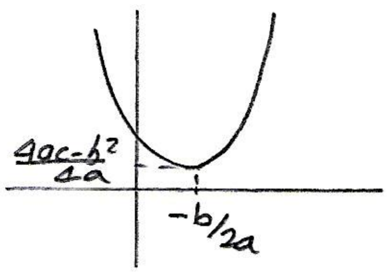
$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

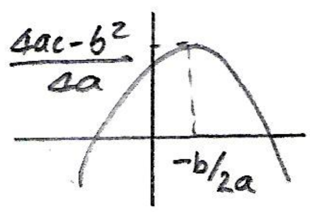
Por lo tanto, la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

representa una parábola con vértice en $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ y eje de simetría la recta $x = -b/2a$.

i) Si $a>0$, la parábola abre hacia arriba, tiene rango $R_f = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right)$.
Crece en el intervalo $[-b/2a, \infty)$ y decrece en $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$
Alcanza su valor mínimo en $x=-b/2a$ y vale $\frac{4ac-b^2}{4a}$.



ii) Si $a<0$, la parábola abre hacia abajo, tiene rango $R_f = \left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.
Crece en $(-\infty, -b/2a]$ y decrece en $[-b/2a, \infty)$
Alcanza su valor máximo en $x=-b/2a$ y es igual a $\frac{4ac-b^2}{4a}$.



Como f no es una función inyectiva, no es invertible. Sin embargo si el dominio se restringe a $[-b/2a, \infty)$ ó a $(-\infty, 2a]$ si lo es.

Ejemplo: Esbozar la gráfica de la función $f(x) = -2x^2+2x+4$, indicando: Dominio, rango, intervalos de crecimiento, de decrecimiento, valor máximo ó mínimo según corresponda, cortes con ejes.

S// $f(x) = -2x^2+2x+4$. Completamos cuadrados.

$$y = -2(x^2-x-2)$$
$$= -2\left(x^2-x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}-2\right)$$
$$= -2\left(\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}\right)$$
$$= -2\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{9}{2}$$

$V = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{9}{2}\right)$

Usando la fórmula,

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-2)}$$
$$x = \tfrac{1}{2}$$
$$y = -2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+2\left(\tfrac{1}{2}\right)+4$$
$$= -\tfrac{1}{2}+1+4$$
$$= -\tfrac{1}{2}+5 = \tfrac{9}{2}$$
$$V = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{9}{2}\right)$$

Parábola abre hacia abajo.

Rango $(-\infty, 9/2]$

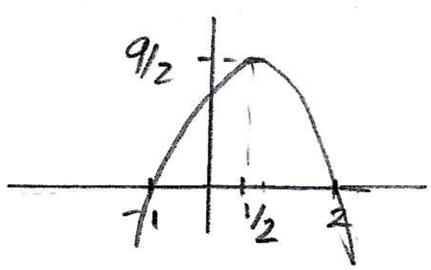
Crece en $(-\infty, 1/2]$, Decrece en $[1/2, \infty)$

Alcanza su máximo valor en $x = 1/2$ y es igual a $9/2$.

Cortes con ejes.

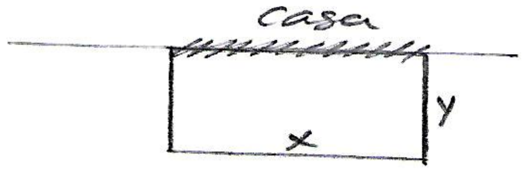
Eje x: $y = -2x^2+2x+4 \rightarrow$

$$-2x^2+2x+4=0.$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$
$$x=2,\ x=-1.$$



esta teoría puede aplicarse para resolver problemas de aplicación.

Prob: Una persona dispone de 60 mts de alambre para cercar su jardín rectangular usando la casa como uno de sus lados.
¿ Cuáles son las dimensiones del jardín para que el área sea máxima?



S// Definimos vbles x: long base
y: long altura

$A = xy$. Como se tienen 60 mt de cerca,

$x + 2y = 60. \to x = 60 - 2y \geq 0$
$0 \leq y \leq 30$

$A = (60-2y)y = -2y^2 + 60y; \quad y \in [0,30]$

La parábola abre hacia abajo, luego el máximo se alcanza en $y = -b/2a = \frac{-60}{2(-2)} = 15$, $15 \in [0,30]$

Como $x = 60 - 2y \to x = 60 - 2(15) = 60 - 30 = 30.$

El jardín de máxima área tiene base $x = 30$ mt y altura $y = 15$.