Matemáticas Discretas I

Sistemas Formales

Juan Francisco Díaz Frias

Profesor Titular (1993-hoy)
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Edif. B13 - 4009
Universidad del Valle

Noviembre 2021

Plan

Plan

Plan

Introducción

Sistema

Realidad en la que ciertos elementos se agrupan por alguna razón que depende de un observador (v.gr. Sistemas solar, Sistema bancario, Sistema académico, . . .)

Cómo entender una realidad

Cuando se pretende entender una realidad, de manera que se pueda explicar y razonar sobre ella, es necesario establecer un lenguaje que permita denotar sus objetos y sus eventuales cambios.

Sistema Formal

Es un conjunto de elementos simbólicos que pueden manipularse de manera adecuada de suerte que reflejen una realidad deseada.

Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Introducción

Sistema

Realidad en la que ciertos elementos se agrupan por alguna razón que depende de un observador (v.gr. Sistemas solar, Sistema bancario, Sistema académico, . . .)

Cómo entender una realidad

Cuando se pretende entender una realidad, de manera que se pueda explicar y razonar sobre ella, es necesario establecer un lenguaje que permita denotar sus objetos y sus eventuales cambios.

Sistema Formal

Es un conjunto de elementos simbólicos que pueden manipularse de manera adecuada de suerte que reflejen una realidad deseada.

Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Introducción

Sistema

Realidad en la que ciertos elementos se agrupan por alguna razón que depende de un observador (v.gr. Sistemas solar, Sistema bancario, Sistema académico, . . .)

Cómo entender una realidad

Cuando se pretende entender una realidad, de manera que se pueda explicar y razonar sobre ella, es necesario establecer un lenguaje que permita denotar sus objetos y sus eventuales cambios.

Sistema Formal

Es un conjunto de elementos simbólicos que pueden manipularse de manera adecuada de suerte que reflejen una realidad deseada.

Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Lenguaje formal

Con el que se denotan los elementos de la realidad modelada. Tres componentes:

- Alfabeto: especifica qué símbolos se utilizan en el lenguaje
- Sintaxis: indica cómo los símbolos pueden juntarse para constituir elementos del lenguaje.
- Semántica: permite darle significado a las palabras de un lenguaje.

Aparato deductivo

Sirve para establecer elementos de la realidad que tienen alguna cualidad interesante (v.gr., valor numérico, ser o no verdaderos, ...).

Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Lenguaje formal

Con el que se denotan los elementos de la realidad modelada. Tres componentes:

- Alfabeto: especifica qué símbolos se utilizan en el lenguaje
- Sintaxis: indica cómo los símbolos pueden juntarse para constituir elementos del lenguaje.
- Semántica: permite darle significado a las palabras de un lenguaje.

Aparato deductivo

Sirve para establecer elementos de la realidad que tienen alguna cualidad interesante (v.gr., valor numérico, ser o no verdaderos, ...).

Plan

1. Introducción
2. Lenguaje formal
   - Alfabetos
   - Sintaxis
   - Semántica
3. Aparato deductivo
   - Generalidades
   - Ejemplos

Alfabetos

Alfabeto

Un alfabeto A es un conjunto finito de símbolos, no vacío, usualmente entendido con alguna notación intuitiva

Ejemplos de alfabetos

- para simbolizar números reales no negativos, v.gr., 3.14159, o para denotar secciones de un libro, v.gr., 1.2.2, considérese el alfabeto que incluye los diez dígitos decimales más el símbolo '.':
  {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.}
- para expresar notas musicales, v.gr., Do$\#$:
  {Do,Re,Mi,Fa,Sol,La,Si,$\#$,b}

Alfabetos

Alfabeto

Un alfabeto A es un conjunto finito de símbolos, no vacío, usualmente entendido con alguna notación intuitiva

Ejemplos de alfabetos

- para simbolizar números reales no negativos, v.gr., 3.14159, o para denotar secciones de un libro, v.gr., 1.2.2, considérese el alfabeto que incluye los diez dígitos decimales más el símbolo '.':
  {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.}
- para expresar notas musicales, v.gr., Do# : {Do,Re,Mi,Fa,Sol,La,Si,#,b}

Alfabetos

Alfabeto

Un alfabeto A es un conjunto finito de símbolos, no vacío, usualmente entendido con alguna notación intuitiva

Ejemplos de alfabetos

- para simbolizar números reales no negativos, v.gr., 3.14159, o para denotar secciones de un libro, v.gr., 1.2.2, considérese el alfabeto que incluye los diez dígitos decimales más el símbolo '.':
  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.\}$
- para expresar notas musicales, v.gr., Do# : {Do,Re,Mi,Fa,Sol,La,Si,#,b}

Alfabetos

Alfabeto

Un alfabeto A es un conjunto finito de símbolos, no vacío, usualmente entendido con alguna notación intuitiva

Ejemplos de alfabetos

- para simbolizar números reales no negativos, v.gr., 3.14159, o para denotar secciones de un libro, v.gr., 1.2.2, considérese el alfabeto que incluye los diez dígitos decimales más el símbolo '.':
  {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.}
- para expresar notas musicales, v.gr., Do# :
  {Do,Re,Mi,Fa,Sol,La,Si,#,b}

Plan

Sintaxis

Fórmulas o palabras [bien formadas]

- Una fórmula o palabra es una secuencia de 0 o más símbolos del alfabeto
- A^* es el conjunto de todas las palabras posibles
- ϵ es la fórmula sin símbolos
- La sintaxis establece cuáles fórmulas son bien formadas: las que satisfacen las reglas.
- 0, 1.2, 1234.94, 6.28 son números reales no negativos, 0, 1.2, 12.3.4, 6.28 son secciones de libros, pero 12.3.4 no es un número real no negativo.

Lenguaje

Subconjunto de A^*, constituido por las fórmulas que la sintaxis establezca.

Sintaxis

Fórmulas o palabras [bien formadas]

- Una fórmula o palabra es una secuencia de 0 o más símbolos del alfabeto
- A^* es el conjunto de todas las palabras posibles
- ϵ es la fórmula sin símbolos
- La sintaxis establece cuáles fórmulas son bien formadas: las que satisfacen las reglas.
- 0, 1.2, 1234.94, 6.28 son números reales no negativos, 0, 1.2, 12.3.4, 6.28 son secciones de libros, pero 12.3.4 no es un número real no negativo.

Lenguaje

Subconjunto de A^*, constituido por las fórmulas que la sintaxis establezca.

Ejemplo de lenguaje sencillo: L

Alfabeto

$A = \{x, y\}$

Regla sintáctica (en lenguaje natural)

Una fórmula de L es cualquier cadena finita de 0 o más símbolos x, seguidos por uno a tres símbolos y, o una cadena de uno o más símbolos x.

Fórmulas en L y Fórmulas fuera de L

- Fórmulas en L: $y, xy, xyyy, xxxxxxxx$
- Fórmulas fuera de L: $xyyyyy, xyxy$
- [Socrative]¿Qué piensan de $xxxxy$?

Ejemplo de lenguaje sencillo: L

Alfabeto

$A = \{x, y\}$

Regla sintáctica (en lenguaje natural)

Una fórmula de L es cualquier cadena finita de 0 o más símbolos x, seguidos por uno a tres símbolos y, o una cadena de uno o más símbolos x.

Fórmulas en L y Fórmulas fuera de L

- Fórmulas en L: $y, xy, xyyy, xxxxxxxx$
- Fórmulas fuera de L: $xyyyyy, xyxy$
- [Socrative]¿Qué piensan de $xxxxy$?

Ejemplo de lenguaje sencillo: L

Alfabeto

$A = \{x, y\}$

Regla sintáctica (en lenguaje natural)

Una fórmula de L es cualquier cadena finita de 0 o más símbolos x, seguidos por uno a tres símbolos y, o una cadena de uno o más símbolos x.

Fórmulas en L y Fórmulas fuera de L

- Fórmulas en L: $y, xy, xyyy, xxxxxxxx$
- Fórmulas fuera de L: $xyyyyy, xyxy$
- [Socrative]¿Qué piensan de $xxxxy$?

Reglas sintácticas: Definición por medio de Gramáticas

Gramática BNF(Backus-Naur Form): definición

Una gramática BNF para L es una cuádrupla $G = (A, N, \Sigma, P)$, donde

- A es el alfabeto del lenguaje L. Son los símbolos terminales
- N es un alfabeto de símbolos auxiliares, diferentes de los de A. Son los símbolos no terminales
- Σ es un elemento distinguido dentro de N. Se llama el símbolo inicial.
- P es un conjunto de producciones
- * $V = A \cup N$ es el alfabeto que reúne los símbolos terminales con los no terminales.
- Una producción es una regla de la forma $\alpha \rightarrow \beta$, α, β en V^*, pero α no está en A^*.
- L es el conjunto de fórmulas en A^*, derivables de Σ por un número finito de producciones.

Reglas sintácticas: Definición por medio de Gramáticas

Gramática BNF(Backus-Naur Form): definición

Una gramática BNF para L es una cuádrupla $G = (A, N, \Sigma, P)$, donde

- A es el alfabeto del lenguaje L. Son los símbolos terminales
- N es un alfabeto de símbolos auxiliares, diferentes de los de A. Son los símbolos no terminales
- Σ es un elemento distinguido dentro de N. Se llama el símbolo inicial.
- P es un conjunto de producciones
- * $V = A \cup N$ es el alfabeto que reúne los símbolos terminales con los no terminales.
- Una producción es una regla de la forma $\alpha \to \beta$, α, β en V^*, pero α no está en A^*.
- L es el conjunto de fórmulas en A^*, derivables de Σ por un número finito de producciones.

Reglas sintácticas: Definición por medio de Gramáticas

Gramática BNF(Backus-Naur Form): definición

Una gramática BNF para L es una cuádrupla $G = (A, N, \Sigma, P)$, donde

- A es el alfabeto del lenguaje L. Son los símbolos terminales
- N es un alfabeto de símbolos auxiliares, diferentes de los de A. Son los símbolos no terminales
- Σ es un elemento distinguido dentro de N. Se llama el símbolo inicial.
- P es un conjunto de producciones
- * $V = A \cup N$ es el alfabeto que reúne los símbolos terminales con los no terminales.
- Una producción es una regla de la forma $\alpha \to \beta$, α, β en V^*, pero α no está en A^*.
- L es el conjunto de fórmulas en A^*, derivables de Σ por un número finito de producciones.

Reglas sintácticas: Definición por medio de Gramáticas

Gramática BNF(Backus-Naur Form): definición

Una gramática BNF para L es una cuádrupla $G = (A, N, \Sigma, P)$, donde

- A es el alfabeto del lenguaje L. Son los símbolos terminales
- N es un alfabeto de símbolos auxiliares, diferentes de los de A. Son los símbolos no terminales
- Σ es un elemento distinguido dentro de N. Se llama el símbolo inicial.
- P es un conjunto de producciones
- * $V = A \cup N$ es el alfabeto que reúne los símbolos terminales con los no terminales.
- Una producción es una regla de la forma $\alpha \to \beta$, α, β en V^*, pero α no está en A^*.
- L es el conjunto de fórmulas en A^*, derivables de Σ por un número finito de producciones.

Reglas sintácticas: Definición por medio de Gramáticas

Gramática BNF(Backus-Naur Form): definición

Una gramática BNF para L es una cuádrupla $G = (A, N, \Sigma, P)$, donde

- A es el alfabeto del lenguaje L. Son los símbolos terminales
- N es un alfabeto de símbolos auxiliares, diferentes de los de A. Son los símbolos no terminales
- Σ es un elemento distinguido dentro de N. Se llama el símbolo inicial.
- P es un conjunto de producciones

* $V = A \cup N$ es el alfabeto que reúne los símbolos terminales con los no terminales.

- Una producción es una regla de la forma $\alpha \rightarrow \beta$, α, β en V^*, pero α no está en A^*.
- L es el conjunto de fórmulas en A^*, derivables de Σ por un número finito de producciones.

Reglas sintácticas: Definición por medio de Gramáticas

Gramática BNF(Backus-Naur Form): definición

Una gramática BNF para L es una cuádrupla $G = (A, N, \Sigma, P)$, donde

- A es el alfabeto del lenguaje L. Son los símbolos terminales
- N es un alfabeto de símbolos auxiliares, diferentes de los de A. Son los símbolos no terminales
- Σ es un elemento distinguido dentro de N. Se llama el símbolo inicial.
- P es un conjunto de producciones
- * $V = A \cup N$ es el alfabeto que reúne los símbolos terminales con los no terminales.
- Una producción es una regla de la forma $\alpha \to \beta$, α, β en V^*, pero α no está en A^*.
- L es el conjunto de fórmulas en A^*, derivables de Σ por un número finito de producciones.

Reglas sintácticas: Definición por medio de Gramáticas

Gramática BNF(Backus-Naur Form): definición

Una gramática BNF para L es una cuádrupla $G = (A, N, \Sigma, P)$, donde

- A es el alfabeto del lenguaje L. Son los símbolos terminales
- N es un alfabeto de símbolos auxiliares, diferentes de los de A. Son los símbolos no terminales
- Σ es un elemento distinguido dentro de N. Se llama el símbolo inicial.
- P es un conjunto de producciones

* $V = A \cup N$ es el alfabeto que reúne los símbolos terminales con los no terminales.

- Una producción es una regla de la forma $\alpha \to \beta$, α, β en V^*, pero α no está en A^*.
- L es el conjunto de fórmulas en A^*, derivables de Σ por un número finito de producciones.

Reglas sintácticas: Gramáticas (2)

Gramática BNF: notaciones para producciones o reglas $\alpha \to \beta$

- $\alpha \to \beta_1|\beta_2|\dots|\beta_n$
  abrevia (conjunto de n reglas)
  $\alpha \to \beta_1$
  $\alpha \to \beta_2$
  $\vdots$
  $\alpha \to \beta_n$
- $\alpha \to \beta[\gamma]$
  abrevia (elementos opcionales)
  $\alpha \to \beta$
  $\alpha \to \beta\gamma$
- $\alpha \to \gamma^n$
  abrevia (elementos repetidos n veces)
  $\alpha \to \underbrace{\gamma\gamma\dots\gamma}_{n}$

Reglas sintácticas: Gramáticas (2)

Gramática BNF: notaciones para producciones o reglas $\alpha \to \beta$

- $\alpha \to \beta_1|\beta_2|\ldots|\beta_n$
  abrevia (conjunto de n reglas)
  $\alpha \to \beta_1$
  $\alpha \to \beta_2$
  $\vdots$
  $\alpha \to \beta_n$
- $\alpha \to \beta[\gamma]$
  abrevia (elementos opcionales)
  $\alpha \to \beta$
  $\alpha \to \beta\gamma$
- $\alpha \to \gamma^n$
  abrevia (elementos repetidos n veces)
  $\alpha \to \underbrace{\gamma\gamma\ldots\gamma}_{n}$

Reglas sintácticas: Gramáticas (2)

Gramática BNF: notaciones para producciones o reglas $\alpha \to \beta$

- $\alpha \to \beta_1|\beta_2|\dots|\beta_n$
  abrevia (conjunto de n reglas)
  $\alpha \to \beta_1$
  $\alpha \to \beta_2$
  $\vdots$
  $\alpha \to \beta_n$
- $\alpha \to \beta[\gamma]$
  abrevia (elementos opcionales)
  $\alpha \to \beta$
  $\alpha \to \beta\gamma$
- $\alpha \to \gamma^n$
  abrevia (elementos repetidos n veces)
  $\alpha \to \underbrace{\gamma\gamma\dots\gamma}_{n}$

Reglas sintácticas: Gramáticas (3)

Gramática BNF: notaciones para producciones o reglas $\alpha \to \beta$

- ϵ es la fórmula vacía
- $\alpha \to \gamma^*$
  abrevia (elementos repetidos 0 o más veces)
  $\alpha \to \epsilon$
  $\alpha \to \gamma\alpha$
- $\alpha \to \gamma^+$
  abrevia (elementos repetidos 1 o más veces)
  $\alpha \to \gamma$
  $\alpha \to \gamma\alpha$
- Los símbolos no terminales diferentes de Σ se distinguen porque se enmarcan en paréntesis angulares $\langle\rangle$.

Reglas sintácticas: Gramáticas (3)

Gramática BNF: notaciones para producciones o reglas $\alpha \to \beta$

- ϵ es la fórmula vacía
- $\alpha \to \gamma^*$
  abrevia (elementos repetidos 0 o más veces)
  $\alpha \to \epsilon$
  $\alpha \to \gamma\alpha$
- $\alpha \to \gamma^+$
  abrevia (elementos repetidos 1 o más veces)
  $\alpha \to \gamma$
  $\alpha \to \gamma\alpha$
- Los símbolos no terminales diferentes de Σ se distinguen porque se enmarcan en paréntesis angulares $\langle\rangle$.

Reglas sintácticas: Gramáticas (3)

Gramática BNF: notaciones para producciones o reglas $\alpha \rightarrow \beta$

- ϵ es la fórmula vacía
- $\alpha \rightarrow \gamma^*$
  abrevia (elementos repetidos 0 o más veces)
  $\alpha \rightarrow \epsilon$
  $\alpha \rightarrow \gamma\alpha$
- $\alpha \rightarrow \gamma^+$
  abrevia (elementos repetidos 1 o más veces)
  $\alpha \rightarrow \gamma$
  $\alpha \rightarrow \gamma\alpha$
- Los símbolos no terminales diferentes de Σ se distinguen porque se enmarcan en paréntesis angulares $\langle\rangle$.

Reglas sintácticas: Gramáticas (3)

Gramática BNF: notaciones para producciones o reglas $\alpha \rightarrow \beta$

- ϵ es la fórmula vacía
- $\alpha \rightarrow \gamma^*$
  abrevia (elementos repetidos 0 o más veces)
  $\alpha \rightarrow \epsilon$
  $\alpha \rightarrow \gamma\alpha$
- $\alpha \rightarrow \gamma^+$
  abrevia (elementos repetidos 1 o más veces)
  $\alpha \rightarrow \gamma$
  $\alpha \rightarrow \gamma\alpha$
- Los símbolos no terminales diferentes de Σ se distinguen porque se enmarcan en paréntesis angulares $\langle\rangle$.

Reglas sintácticas: Gramáticas (4)

Gramática BNF para L

- $L \rightarrow x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
- Lo que es lo mismo que:
  - $P_1 : L \rightarrow \langle L_1 \rangle$
  - $P_2 : L \rightarrow \langle L_2 \rangle$
  - $P_3 : L \rightarrow \langle L_3 \rangle$
  - $P_4 : L \rightarrow \langle L_4 \rangle$
  - $P_5 : \langle L_1 \rangle \rightarrow y$
  - $P_6 : \langle L_1 \rangle \rightarrow x \langle L_1 \rangle$
  - $P_7 : \langle L_2 \rangle \rightarrow yy$
  - $P_8 : \langle L_2 \rangle \rightarrow x \langle L_2 \rangle$
  - $P_9 : \langle L_3 \rangle \rightarrow yyy$
  - $P_{10} : \langle L_3 \rangle \rightarrow x \langle L_3 \rangle$
  - $P_{11} : \langle L_4 \rangle \rightarrow x$
  - $P_{12} : \langle L_4 \rangle \rightarrow x \langle L_4 \rangle$

Una derivación de y

$$\begin{aligned} L &\xrightarrow{P_1} \langle L_1 \rangle \\ &\xrightarrow{P_5} y \end{aligned}$$

Una derivación de xyy

$$\begin{aligned} L &\xrightarrow{P_2} \langle L_2 \rangle \\ &\xrightarrow{P_8} x \langle L_2 \rangle \\ &\xrightarrow{P_7} xyy \end{aligned}$$

Una derivación de xxx

$$\begin{aligned} L &\xrightarrow{P_4} \langle L_4 \rangle \\ &\xrightarrow{P_{12}} x \langle L_4 \rangle \\ &\xrightarrow{P_{12}} xx \langle L_4 \rangle \\ &\xrightarrow{P_{11}} xxx \end{aligned}$$

Reglas sintácticas: Gramáticas (4)

Gramática BNF para L

- $L \to x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
- Lo que es lo mismo que:
  - $P_1 : L \to \langle L_1 \rangle$
  - $P_2 : L \to \langle L_2 \rangle$
  - $P_3 : L \to \langle L_3 \rangle$
  - $P_4 : L \to \langle L_4 \rangle$
  - $P_5 : \langle L_1 \rangle \to y$
  - $P_6 : \langle L_1 \rangle \to x \langle L_1 \rangle$
  - $P_7 : \langle L_2 \rangle \to yy$
  - $P_8 : \langle L_2 \rangle \to x \langle L_2 \rangle$
  - $P_9 : \langle L_3 \rangle \to yyy$
  - $P_{10} : \langle L_3 \rangle \to x \langle L_3 \rangle$
  - $P_{11} : \langle L_4 \rangle \to x$
  - $P_{12} : \langle L_4 \rangle \to x \langle L_4 \rangle$

Una derivación de y

$$L \xrightarrow{P_1} \langle L_1 \rangle \xrightarrow{P_5} y$$

Una derivación de xyy

$$L \xrightarrow{P_2} \langle L_2 \rangle \xrightarrow{P_8} x \langle L_2 \rangle \xrightarrow{P_7} xyy$$

Una derivación de xxx

$$L \xrightarrow{P_4} \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{12}} x \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{12}} xx \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{11}} xxx$$

Reglas sintácticas: Gramáticas (4)

Gramática BNF para L

- $L \rightarrow x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
- Lo que es lo mismo que:
  - $P_1 : L \rightarrow \langle L_1 \rangle$
  - $P_2 : L \rightarrow \langle L_2 \rangle$
  - $P_3 : L \rightarrow \langle L_3 \rangle$
  - $P_4 : L \rightarrow \langle L_4 \rangle$
  - $P_5 : \langle L_1 \rangle \rightarrow y$
  - $P_6 : \langle L_1 \rangle \rightarrow x \langle L_1 \rangle$
  - $P_7 : \langle L_2 \rangle \rightarrow yy$
  - $P_8 : \langle L_2 \rangle \rightarrow x \langle L_2 \rangle$
  - $P_9 : \langle L_3 \rangle \rightarrow yyy$
  - $P_{10} : \langle L_3 \rangle \rightarrow x \langle L_3 \rangle$
  - $P_{11} : \langle L_4 \rangle \rightarrow x$
  - $P_{12} : \langle L_4 \rangle \rightarrow x \langle L_4 \rangle$

Una derivación de y

$$L \xrightarrow{P_1} \langle L_1 \rangle \xrightarrow{P_5} y$$

Una derivación de xyy

$$L \xrightarrow{P_2} \langle L_2 \rangle \xrightarrow{P_8} x\langle L_2 \rangle \xrightarrow{P_7} xyy$$

Una derivación de xxx

$$L \xrightarrow{P_4} \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{12}} x\langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{12}} xx\langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{11}} xxx$$

Reglas sintácticas: Gramáticas (4)

Gramática BNF para L

- $L \rightarrow x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
- Lo que es lo mismo que:
  - $P_1 : L \rightarrow \langle L_1 \rangle$
  - $P_2 : L \rightarrow \langle L_2 \rangle$
  - $P_3 : L \rightarrow \langle L_3 \rangle$
  - $P_4 : L \rightarrow \langle L_4 \rangle$
  - $P_5 : \langle L_1 \rangle \rightarrow y$
  - $P_6 : \langle L_1 \rangle \rightarrow x \langle L_1 \rangle$
  - $P_7 : \langle L_2 \rangle \rightarrow yy$
  - $P_8 : \langle L_2 \rangle \rightarrow x \langle L_2 \rangle$
  - $P_9 : \langle L_3 \rangle \rightarrow yyy$
  - $P_{10} : \langle L_3 \rangle \rightarrow x \langle L_3 \rangle$
  - $P_{11} : \langle L_4 \rangle \rightarrow x$
  - $P_{12} : \langle L_4 \rangle \rightarrow x \langle L_4 \rangle$

Una derivación de y

$$L \xrightarrow{P_1} \langle L_1 \rangle \xrightarrow{P_5} y$$

Una derivación de xyy

$$L \xrightarrow{P_2} \langle L_2 \rangle \xrightarrow{P_8} x \langle L_2 \rangle \xrightarrow{P_7} xyy$$

Una derivación de xxx

$$L \xrightarrow{P_4} \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{12}} x \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{12}} xx \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{11}} xxx$$

Reglas sintácticas: Gramáticas (4)

Gramática BNF para L

- $L \rightarrow x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
- Lo que es lo mismo que:
  - $P_1 : L \rightarrow \langle L_1 \rangle$
  - $P_2 : L \rightarrow \langle L_2 \rangle$
  - $P_3 : L \rightarrow \langle L_3 \rangle$
  - $P_4 : L \rightarrow \langle L_4 \rangle$
  - $P_5 : \langle L_1 \rangle \rightarrow y$
  - $P_6 : \langle L_1 \rangle \rightarrow x \langle L_1 \rangle$
  - $P_7 : \langle L_2 \rangle \rightarrow yy$
  - $P_8 : \langle L_2 \rangle \rightarrow x \langle L_2 \rangle$
  - $P_9 : \langle L_3 \rangle \rightarrow yyy$
  - $P_{10} : \langle L_3 \rangle \rightarrow x \langle L_3 \rangle$
  - $P_{11} : \langle L_4 \rangle \rightarrow x$
  - $P_{12} : \langle L_4 \rangle \rightarrow x \langle L_4 \rangle$

Una derivación de y

$$L \xrightarrow{P_1} \langle L_1 \rangle \xrightarrow{P_5} y$$

Una derivación de xyy

$$L \xrightarrow{P_2} \langle L_2 \rangle \xrightarrow{P_8} x \langle L_2 \rangle \xrightarrow{P_7} xyy$$

Una derivación de xxx

$$L \xrightarrow{P_4} \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{12}} x \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{12}} xx \langle L_4 \rangle \xrightarrow{P_{11}} xxx$$

Ejemplos de Gramáticas (1)

Dígitos binarios: $\langle db \rangle$

$\langle db \rangle \rightarrow 0|1$

Dígitos: $\langle digito \rangle$

- $\langle digito \rangle \rightarrow 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje: $\langle digito \rangle \rightarrow \langle db \rangle\,|2|3|4|5|6|7|8|9$

$\langle 4dig \rangle$

- $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle\langle digito \rangle\langle digito \rangle\langle digito \rangle$

Ejemplos de Gramáticas (1)

Dígitos binarios: $\langle db \rangle$

$\langle db \rangle \rightarrow 0|1$

Dígitos: $\langle digito \rangle$

- $\langle digito \rangle \rightarrow 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje: $\langle digito \rangle \rightarrow \langle db \rangle\ |2|3|4|5|6|7|8|9$

$\langle 4dig \rangle$

- $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle\ \langle digito \rangle\ \langle digito \rangle\ \langle digito \rangle$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje: $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle^4$

Ejemplos de Gramáticas (1)

Dígitos binarios: $\langle db \rangle$

$\langle db \rangle \rightarrow 0|1$

Dígitos: $\langle digito \rangle$

- $\langle digito \rangle \rightarrow 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje: $\langle digito \rangle \rightarrow \langle db \rangle\ |2|3|4|5|6|7|8|9$

$\langle 4dig \rangle$

- $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle \langle digito \rangle \langle digito \rangle \langle digito \rangle$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje: $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle^4$

Ejemplos de Gramáticas (1)

Dígitos binarios: $\langle db \rangle$

$\langle db \rangle \rightarrow 0|1$

Dígitos: $\langle digito \rangle$

- $\langle digito \rangle \rightarrow 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje: $\langle digito \rangle \rightarrow \langle db \rangle\ |2|3|4|5|6|7|8|9$

$\langle 4dig \rangle$

- $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle \langle digito \rangle \langle digito \rangle \langle digito \rangle$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje: $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle^4$

Ejemplos de Gramáticas (1)

Dígitos binarios: $\langle db \rangle$

$\langle db \rangle \rightarrow 0|1$

Dígitos: $\langle digito \rangle$

- $\langle digito \rangle \rightarrow 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje:
  $\langle digito \rangle \rightarrow \langle db \rangle\ |2|3|4|5|6|7|8|9$

$\langle 4dig \rangle$

- $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle \langle digito \rangle \langle digito \rangle \langle digito \rangle$
- Otra manera de describir el mismo lenguaje:
  $\langle 4dig \rangle \rightarrow \langle digito \rangle^4$

Ejemplos de Gramáticas (2)

Números reales no negativos $\langle real\ no\_neg \rangle$

El siguiente lenguaje denota números reales no negativos, expresados en notación decimal:

$$
\begin{array}{lcl}
\langle real\ no\_neg \rangle & \rightarrow & \langle entero\ sin\ signo \rangle \mid \\
 & & \langle fraccion\ decimal \rangle \mid \\
 & & \langle entero\ sin\ signo \rangle\ \langle fraccion\ decimal \rangle \\
\langle fraccion\ decimal \rangle & \rightarrow & .\langle entero\ sin\ signo \rangle \\
\langle entero\ sin\ signo \rangle & \rightarrow & \langle digito \rangle^{+}
\end{array}
$$

Bin: Lenguaje que representa los números binarios

- Alfabeto $B = \{0, 1\}$
- Gramática:
  $\langle db \rangle \rightarrow 0|1$
  $\langle num\_bin \rangle \rightarrow \langle db \rangle \mid \langle num\_bin \rangle\ \langle db \rangle$
- $Bin = \mathcal{L}(\langle num\_bin \rangle) = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\}$

Ejemplos de Gramáticas (2)

Números reales no negativos $\langle real\ no\_neg \rangle$

El siguiente lenguaje denota números reales no negativos, expresados en notación decimal:

$$
\begin{array}{lcl}
\langle real\ no\_neg \rangle & \rightarrow & \langle entero\ sin\ signo \rangle \mid \\
 & & \langle fraccion\ decimal \rangle \mid \\
 & & \langle entero\ sin\ signo \rangle\ \langle fraccion\ decimal \rangle \\
\langle fraccion\ decimal \rangle & \rightarrow & .\langle entero\ sin\ signo \rangle \\
\langle entero\ sin\ signo \rangle & \rightarrow & \langle digito \rangle^{+}
\end{array}
$$

Bin: Lenguaje que representa los números binarios

- Alfabeto $B = \{0, 1\}$
- Gramática:
  $\langle db \rangle \rightarrow 0|1$
  $\langle num\_bin \rangle \rightarrow \langle db \rangle \mid \langle num\_bin \rangle\ \langle db \rangle$
- $Bin = \mathcal{L}(\langle num\_bin \rangle) = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\}$

Ejemplos de Gramáticas (3)

Nat: Lenguaje que representa los naturales

- Alfabeto $A_1 = \{S, 0\}$
- Gramática:
  $\langle Nat \rangle \to 0 | S \langle Nat \rangle$
- $Nat = \mathcal{L}(\langle Nat \rangle) = \{0, S0, SS0, SS0, \ldots\}$

SNat: Lenguaje que representa sumas de naturales

- Alfabeto $A_2 = \{S, 0, +\}$
- Gramática:
  $\langle SNat \rangle \to \langle Nat \rangle \mid \langle SNat \rangle + \langle Nat \rangle$
- $SNat = \mathcal{L}(\langle SNat \rangle) = \{0, S0, SS0, SS0, \ldots, 0+0, 0+S0, 0+SS0, \ldots, S0+0, S0+S0, S0+SS0, \ldots\}$

[Socrative]

Ejemplos de Gramáticas (3)

Nat: Lenguaje que representa los naturales

- Alfabeto $A_1 = \{S, 0\}$
- Gramática:
  $\langle Nat \rangle \rightarrow 0 | S \langle Nat \rangle$
- $Nat = \mathcal{L}(\langle Nat \rangle) = \{0, S0, SS0, SS0, \ldots\}$

SNat: Lenguaje que representa sumas de naturales

- Alfabeto $A_2 = \{S, 0, +\}$
- Gramática:
  $\langle SNat \rangle \rightarrow \langle Nat \rangle \mid \langle SNat \rangle + \langle Nat \rangle$
- $SNat = \mathcal{L}(\langle SNat \rangle) = \{0, S0, SS0, SS0, \ldots, 0+0, 0+S0, 0+SS0, \ldots, S0+0, S0+S0, S0+SS0, \ldots\}$

[Socrative]

Ejemplos de Gramáticas (3)

Nat: Lenguaje que representa los naturales

- Alfabeto $A_1 = \{S, 0\}$
- Gramática:
  $\langle Nat\rangle \to 0|S\ \langle Nat\rangle$
- $Nat = \mathcal{L}(\langle Nat\rangle) = \{0, S0, SS0, SS0, \ldots\}$

SNat: Lenguaje que representa sumas de naturales

- Alfabeto $A_2 = \{S, 0, +\}$
- Gramática:
  $\langle SNat\rangle \to \langle Nat\rangle \mid \langle SNat\rangle + \langle Nat\rangle$
- $SNat = \mathcal{L}(\langle SNat\rangle) = \{0, S0, SS0, SS0, \ldots, 0+0, 0+S0, 0+SS0, \ldots, S0+0, S0+S0, S0+SS0, \ldots\}$

[Socrative]

Plan

1. Introducción
2. Lenguaje formal
   - Alfabetos
   - Sintaxis
   - Semántica
3. Aparato deductivo
   - Generalidades
   - Ejemplos

Semántica

Definición

- Una semántica para un lenguaje es una asociación que hace corresponder fórmulas del lenguaje con objetos de una realidad".
- Si todo objeto de esa realidad" tiene al menos una fórmula que lo represente, el lenguaje es suficientemente expresivo.

Ejemplo de semántica del lenguaje sencillo

Para el lenguaje definido por:
$L \rightarrow x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
Considere la siguiente semántica que da significado a fórmulas de L en los números naturales:
$I(w)$ es el número de x multiplicada por 3 más el número de y multiplicada por 2.

- I(y)=2
- I(xy)=5
- I(xyyy)=9
- ¿Será que todo número natural n tiene al menos una palabra en L que lo represente?

Semántica

Definición

- Una semántica para un lenguaje es una asociación que hace corresponder fórmulas del lenguaje con objetos de una realidad".
- Si todo objeto de esa realidad"tiene al menos una fórmula que lo represente, el lenguaje es suficientemente expresivo.

Ejemplo de semántica del lenguaje sencillo

Para el lenguaje definido por:
$L \rightarrow x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
Considere la siguiente semántica que da significado a fórmulas de L en los números naturales:
$I(w)$ es el número de x multiplicada por 3 más el número de y multiplicada por 2.

- I(y)=2
- I(xy)=5
- I(xyyy)=9
- ¿Será que todo número natural n tiene al menos una palabra en L que lo represente?

Semántica

Definición

- Una semántica para un lenguaje es una asociación que hace corresponder fórmulas del lenguaje con objetos de una realidad".
- Si todo objeto de esa realidad" tiene al menos una fórmula que lo represente, el lenguaje es suficientemente expresivo.

Ejemplo de semántica del lenguaje sencillo

Para el lenguaje definido por:
$L \rightarrow x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
Considere la siguiente semántica que da significado a fórmulas de L en los números naturales:
$I(w)$ es el número de x multiplicada por 3 más el número de y multiplicada por 2.

- I(y)=2
- I(xy)=5
- I(xyyy)=9
- ¿Será que todo número natural n tiene al menos una palabra en L que lo represente?

Semántica

Definición

- Una semántica para un lenguaje es una asociación que hace corresponder fórmulas del lenguaje con objetos de una realidad".
- Si todo objeto de esa realidad"tiene al menos una fórmula que lo represente, el lenguaje es suficientemente expresivo.

Ejemplo de semántica del lenguaje sencillo

Para el lenguaje definido por:
$L \to x^*y|x^*yy|x^*yyy|x^+$
Considere la siguiente semántica que da significado a fórmulas de L en los números naturales:
$I(w)$ es el número de x multiplicada por 3 más el número de y multiplicada por 2.

- I(y)=2
- I(xy)=5
- I(xyyy)=9
- ¿Será que todo número natural n tiene al menos una palabra en L que lo represente?

Semántica de *Nat* y *SNat*

Nat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural. $\underbrace{SSS\ldots S}_{k}0$ asociada a k
- Formalmente, sea J la semántica de *Nat*:
  $J(0) = 0$
  $J(S\alpha) = 1 + J(\alpha)$
- $J(SSS0) = 1 + J(SS0) = 1 + 1 + J(S0) = 1 + 1 + 1 + J(0) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$

SNat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.

Semántica de *Nat* y *SNat*

Nat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
  $\underbrace{SSS\ldots S}_{k}0$ asociada a k
- Formalmente, sea J la semántica de *Nat*:
  $J(0) = 0$
  $J(S\alpha) = 1 + J(\alpha)$
- $J(SSS0) = 1 + J(SS0) = 1 + 1 + J(S0) = 1 + 1 + 1 + J(0) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$

SNat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
- Formalmente, sea H la semántica de *SNat*:
  $H(0) = 0$
  $H(S\alpha) = 1 + H(\alpha)$
  $H(\alpha + \beta) = H(\alpha) + H(\beta)$
- $H(SS0 + 0 + SSS0) = H(SS0 + 0) + H(SSS0) = H(SS0) + H(0) + H(SSS0)$
  $= 2 + 0 + 3 = 5$

Semántica de *Nat* y *SNat*

Nat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
  $\underbrace{SSS\ldots S}_{k}0$ asociada a k
- Formalmente, sea J la semántica de *Nat*:
  $J(0) = 0$
  $J(S\alpha) = 1 + J(\alpha)$
- $J(SSS0) = 1 + J(SS0) = 1 + 1 + J(S0) = 1 + 1 + 1 + J(0) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$

SNat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
- Formalmente, sea H la semántica de *SNat*:
  $H(0) = 0$
  $H(S\alpha) = 1 + H(\alpha)$
  $H(\alpha + \beta) = H(\alpha) + H(\beta)$
- $H(SS0 + 0 + SSS0) = H(SS0 + 0) + H(SSS0) = H(SS0) + H(0) + H(SSS0) = \ldots = 2 + 0 + 3 = 5$

Semántica de *Nat* y *SNat*

Nat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
  $\underbrace{SSS\ldots S}_{k}0$ asociada a k
- Formalmente, sea J la semántica de *Nat*:
  $J(0) = 0$
  $J(S\alpha) = 1 + J(\alpha)$
- $J(SSS0) = 1 + J(SS0) = 1 + 1 + J(S0) = 1 + 1 + 1 + J(0) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$

SNat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
- Formalmente, sea H la semántica de *SNat*:
  $H(0) = 0$
  $H(S\alpha) = 1 + H(\alpha)$
  $H(\alpha + \beta) = H(\alpha) + H(\beta)$
- $H(SS0 + 0 + SSS0) = H(SS0 + 0) + H(SSS0) = H(SS0) + H(0) + H(SSS0) = \ldots = 2 + 0 + 3 = 5$

Semántica de *Nat* y *SNat*

Nat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
  $\underbrace{SSS\ldots S}_{k}0$ asociada a k
- Formalmente, sea J la semántica de *Nat*:
  $J(0) = 0$
  $J(S\alpha) = 1 + J(\alpha)$
- $J(SSS0) = 1 + J(SS0) = 1 + 1 + J(S0) = 1 + 1 + 1 + J(0) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$

SNat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
- Formalmente, sea H la semántica de *SNat*:
  $H(0) = 0$
  $H(S\alpha) = 1 + H(\alpha)$
  $H(\alpha + \beta) = H(\alpha) + H(\beta)$
- $H(SS0 + 0 + SSS0) = H(SS0 + 0) + H(SSS0) = H(SS0) + H(0) + H(SSS0) = \ldots = 2 + 0 + 3 = 5$

Semántica de *Nat* y *SNat*

Nat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
  $\underbrace{SSS\dots S}_{k}0$ asociada a k
- Formalmente, sea J la semántica de *Nat*:
  $J(0) = 0$
  $J(S\alpha) = 1 + J(\alpha)$
- $J(SSS0) = 1 + J(SS0) = 1 + 1 + J(S0) = 1 + 1 + 1 + J(0) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$

SNat

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural.
- Formalmente, sea H la semántica de *SNat*:
  $H(0) = 0$
  $H(S\alpha) = 1 + H(\alpha)$
  $H(\alpha + \beta) = H(\alpha) + H(\beta)$
- $H(SS0 + 0 + SSS0) = H(SS0 + 0) + H(SSS0) = H(SS0) + H(0) + H(SSS0) = \dots = 2 + 0 + 3 = 5$

Semántica de números binarios

Semántica de *Bin*

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural
- Formalmente, sea B la semántica de Bin:
  $B(0) = 0$
  $B(1) = 1$
  $B(\alpha b) = 2 * B(\alpha) + B(b)$
- Ejemplo:

$$\begin{aligned} B(1001) &= 2 * B(100) + B(1) \\ &= 2 * (2 * B(10) + B(0)) + B(1) \\ &= 4 * B(10) + 2 * B(0) + B(1) \\ &= 8 * B(1) + 4 * B(0) + 2 * B(0) + B(1) \\ &= 8 + 0 + 0 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

[Socrative]

Semántica de números binarios

Semántica de *Bin*

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural
- Formalmente, sea B la semántica de Bin:
  $B(0) = 0$
  $B(1) = 1$
  $B(\alpha b) = 2 * B(\alpha) + B(b)$
- Ejemplo:

$$\begin{aligned} B(1001) &= 2 * B(100) + B(1) \\ &= 2 * (2 * B(10) + B(0)) + B(1) \\ &= 4 * B(10) + 2 * B(0) + B(1) \\ &= 8 * B(1) + 4 * B(0) + 2 * B(0) + B(1) \\ &= 8 + 0 + 0 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

[Socrative]

Semántica de números binarios

Semántica de *Bin*

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural
- Formalmente, sea B la semántica de *Bin*:
  $B(0) = 0$
  $B(1) = 1$
  $B(\alpha b) = 2 * B(\alpha) + B(b)$
- Ejemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
B(1001) & = & 2 * B(100) + B(1) \\
 & = & 2 * (2 * B(10) + B(0)) + B(1) \\
 & = & 4 * B(10) + 2 * B(0) + B(1) \\
 & = & 8 * B(1) + 4 * B(0) + 2 * B(0) + B(1) \\
 & = & 8 + 0 + 0 + 1 \\
 & = & 9
\end{array}
$$

[Socrative]

Semántica de números binarios

Semántica de *Bin*

- Intuición: cada fórmula del lenguaje asociada con un número natural
- Formalmente, sea B la semántica de *Bin*:
  $B(0) = 0$
  $B(1) = 1$
  $B(\alpha b) = 2 * B(\alpha) + B(b)$
- Ejemplo:

$$\begin{aligned} B(1001) &= 2 * B(100) + B(1) \\ &= 2 * (2 * B(10) + B(0)) + B(1) \\ &= 4 * B(10) + 2 * B(0) + B(1) \\ &= 8 * B(1) + 4 * B(0) + 2 * B(0) + B(1) \\ &= 8 + 0 + 0 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

[Socrative]

Plan

Generalidades

- Los objetos denotados por un lenguaje formal pueden, a su vez, resultar interesantes por tener alguna cualidad que dependa de la realidad.
- El aparato (o cálculo) deductivo es el mecanismo para inferir, derivar o deducir si una fórmula tiene o no la cualidad. Sus componentes son:
  - Axiomas: Fórmulas que tienen la cualidad. No se deducen.
  - Reglas de inferencia: reglas que permiten inferir fórmulas que tienen la cualidad, a partir de fórmulas que ya las tienen (como los axiomas, por ejemplo) y según ciertas condiciones.
- Una deducción o derivación es el proceso de aplicación de reglas de inferencia, para deducir nuevas fórmulas que tengan la cualidad. Estas últimas se llaman teoremas.

Generalidades

- Los objetos denotados por un lenguaje formal pueden, a su vez, resultar interesantes por tener alguna cualidad que dependa de la realidad.
- El aparato (o cálculo) deductivo es el mecanismo para inferir, derivar o deducir si una fórmula tiene o no la cualidad. Sus componentes son:
  - Axiomas: Fórmulas que tienen la cualidad. No se deducen.
  - Reglas de inferencia: reglas que permiten inferir fórmulas que tienen la cualidad, a partir de fórmulas que ya las tienen (como los axiomas, por ejemplo) y según ciertas condiciones.
- Una deducción o derivación es el proceso de aplicación de reglas de inferencia, para deducir nuevas fórmulas que tengan la cualidad. Estas últimas se llaman teoremas.

Generalidades

- Los objetos denotados por un lenguaje formal pueden, a su vez, resultar interesantes por tener alguna cualidad que dependa de la realidad.
- El aparato (o cálculo) deductivo es el mecanismo para inferir, derivar o deducir si una fórmula tiene o no la cualidad. Sus componentes son:
  - Axiomas: Fórmulas que tienen la cualidad. No se deducen.
  - Reglas de inferencia: reglas que permiten inferir fórmulas que tienen la cualidad, a partir de fórmulas que ya las tienen (como los axiomas, por ejemplo) y según ciertas condiciones.
- Una deducción o derivación es el proceso de aplicación de reglas de inferencia, para deducir nuevas fórmulas que tengan la cualidad. Estas últimas se llaman teoremas.

Generalidades

- Los objetos denotados por un lenguaje formal pueden, a su vez, resultar interesantes por tener alguna cualidad que dependa de la realidad.
- El aparato (o cálculo) deductivo es el mecanismo para inferir, derivar o deducir si una fórmula tiene o no la cualidad. Sus componentes son:
  - Axiomas: Fórmulas que tienen la cualidad. No se deducen.
  - Reglas de inferencia: reglas que permiten inferir fórmulas que tienen la cualidad, a partir de fórmulas que ya las tienen (como los axiomas, por ejemplo) y según ciertas condiciones.
- Una deducción o derivación es el proceso de aplicación de reglas de inferencia, para deducir nuevas fórmulas que tengan la cualidad. Estas últimas se llaman teoremas.

Generalidades

- Los objetos denotados por un lenguaje formal pueden, a su vez, resultar interesantes por tener alguna cualidad que dependa de la realidad.
- El aparato (o cálculo) deductivo es el mecanismo para inferir, derivar o deducir si una fórmula tiene o no la cualidad. Sus componentes son:
  - Axiomas: Fórmulas que tienen la cualidad. No se deducen.
  - Reglas de inferencia: reglas que permiten inferir fórmulas que tienen la cualidad, a partir de fórmulas que ya las tienen (como los axiomas, por ejemplo) y según ciertas condiciones.
- Una deducción o derivación es el proceso de aplicación de reglas de inferencia, para deducir nuevas fórmulas que tengan la cualidad. Estas últimas se llaman teoremas.

Intuición: inferencias sobre *SNat*

Axioma

Recuerde $SNat = \mathcal{L}(\langle SNat \rangle) =$
$\{0, S0, SS0, SS0, \ldots, 0+0, 0+S0, 0+SS0, \ldots, S0+0, S0+S0, S0+SS0, \ldots\}$
Según la semántica de *Nat* y de *SNat* realmente los dos representan la misma realidad: los números naturales.

Podemos inferir eso?

Reglas de inferencia

Considere las siguientes dos reglas de inferencia (x y y son fórmulas de *SNat*):

- $[+1] : \frac{0+x}{x}$
- $[+2] : \frac{Sx+y}{x+Sy}$

Deducción

$$SS0+SSS0 \xrightarrow{[+2]} S0+SSSS0 \xrightarrow{[+2]} 0+SSSSS0 \xrightarrow{[+1]} SSSSS0$$

Intuición: inferencias sobre *SNat*

Axioma

Recuerde $SNat = \mathcal{L}(\langle SNat \rangle) =$
$\{0, S0, SS0, SS0, \ldots, 0+0, 0+S0, 0+SS0, \ldots, S0+0, S0+S0, S0+SS0, \ldots\}$
Según la semántica de *Nat* y de *SNat* realmente los dos representan la misma realidad: los números naturales.

Podemos inferir eso?

Reglas de inferencia

Considere las siguientes dos reglas de inferencia (x y y son fórmulas de *SNat*):

- $[+1] : \frac{0+x}{x}$
- $[+2] : \frac{Sx+y}{x+Sy}$

Deducción

$$SS0 + SSS0 \overset{[+2]}{\rightarrow} S0 + SSSS0 \overset{[+2]}{\rightarrow} 0 + SSSSS0 \overset{[+1]}{\rightarrow} SSSSS0$$

Intuición: inferencias sobre *SNat*

Axioma

Recuerde $SNat = \mathcal{L}(\langle SNat \rangle) =$
$\{0, S0, SS0, SS0, \ldots, 0+0, 0+S0, 0+SS0, \ldots, S0+0, S0+S0, S0+SS0, \ldots\}$
Según la semántica de *Nat* y de *SNat* realmente los dos representan la misma realidad: los números naturales.

Podemos inferir eso?

Reglas de inferencia

Considere las siguientes dos reglas de inferencia (x y y son fórmulas de *SNat*):

- $[+1] : \frac{0+x}{x}$
- $[+2] : \frac{Sx+y}{x+Sy}$

Deducción

$$SS0 + SSS0 \overset{[+2]}{\to} S0 + SSSS0$$
$$\overset{[+2]}{\to} 0 + SSSSS0$$
$$\overset{[+1]}{\to} SSSSS0$$

Intuición: inferencias sobre *SNat*

Axioma

Recuerde $SNat = \mathcal{L}(\langle SNat \rangle) =$
$\{0, S0, SS0, SS0, \ldots, 0+0, 0+S0, 0+SS0, \ldots, S0+0, S0+S0, S0+SS0, \ldots\}$
Según la semántica de *Nat* y de *SNat* realmente los dos representan la misma realidad: los números naturales.

Podemos inferir eso?

Reglas de inferencia

Considere las siguientes dos reglas de inferencia (x y y son fórmulas de *SNat*):

- $[+1] : \frac{0+x}{x}$
- $[+2] : \frac{Sx+y}{x+Sy}$

Deducción

$$\begin{aligned} SS0 + SSS0 &\overset{[+2]}{\rightarrow} S0 + SSSS0 \\ &\overset{[+2]}{\rightarrow} 0 + SSSSS0 \\ &\overset{[+1]}{\rightarrow} SSSSS0 \end{aligned}$$

Intuición: inferencias sobre *SNat*

Axioma

Recuerde $SNat = \mathcal{L}(\langle SNat \rangle) =$
$\{0, S0, SS0, SS0, \ldots, 0+0, 0+S0, 0+SS0, \ldots, S0+0, S0+S0, S0+SS0, \ldots\}$
Según la semántica de *Nat* y de *SNat* realmente los dos representan la misma realidad: los números naturales.

Podemos inferir eso?

Reglas de inferencia

Considere las siguientes dos reglas de inferencia (x y y son fórmulas de *SNat*):

- $[+1] : \frac{0+x}{x}$
- $[+2] : \frac{Sx+y}{x+Sy}$

Deducción

$$
\begin{array}{lcl}
SS0 + SSS0 & \overset{[+2]}{\rightarrow} & S0 + SSSS0 \\
 & \overset{[+2]}{\rightarrow} & 0 + SSSSS0 \\
 & \overset{[+1]}{\rightarrow} & SSSSS0
\end{array}
$$

Definiciones formales

- Una regla de inferencia tiene la forma:

$$\langle \mathit{Identificador} \rangle \; \frac{\overbrace{\mathit{Hip}_1, \mathit{Hip}_2, \ldots, \mathit{Hip}_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \; \Bigg| \; \langle \mathit{Condiciones} \rangle$$

- Un teorema es un axioma o la conclusión de una regla aplicada a un conjunto de hipótesis que ya sean teoremas.
- Una demostración de un teorema C es una secuencia de deducciones que termina con C como última conclusión.
- Si las reglas de inferencia reflejan la forma en que la realidad se comporta, se dice que son correctas. El cálculo deductivo como tal se dice correctosi todas sus reglas lo son.
- Si hay fórmulas interesantes de la realidad que no se pueden deducir, se dice que el cálculo deductivo es incompleto.

Definiciones formales

- Una regla de inferencia tiene la forma:

$$\langle \mathit{Identificador} \rangle \; \frac{\overbrace{\mathit{Hip}_1, \mathit{Hip}_2, \ldots, \mathit{Hip}_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \; \Bigg| \; \langle \mathit{Condiciones} \rangle$$

- Un teorema es un axioma o la conclusión de una regla aplicada a un conjunto de hipótesis que ya sean teoremas.
- Una demostración de un teorema C es una secuencia de deducciones que termina con C como última conclusión.
- Si las reglas de inferencia reflejan la forma en que la realidad se comporta, se dice que son correctas. El cálculo deductivo como tal se dice correctosi todas sus reglas lo son.
- Si hay fórmulas interesantes de la realidad que no se pueden deducir, se dice que el cálculo deductivo es incompleto.

Definiciones formales

- Una regla de inferencia tiene la forma:

$$\langle \mathit{Identificador} \rangle \; \frac{\overbrace{Hip_1, Hip_2, \ldots, Hip_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \Bigg| \; \langle \mathit{Condiciones} \rangle$$

- Un teorema es un axioma o la conclusión de una regla aplicada a un conjunto de hipótesis que ya sean teoremas.
- Una demostración de un teorema C es una secuencia de deducciones que termina con C como última conclusión.
- Si las reglas de inferencia reflejan la forma en que la realidad se comporta, se dice que son correctas. El cálculo deductivo como tal se dice correctosi todas sus reglas lo son.
- Si hay fórmulas interesantes de la realidad que no se pueden deducir, se dice que el cálculo deductivo es incompleto.

Definiciones formales

- Una regla de inferencia tiene la forma:

$$\langle Identificador \rangle \; \left. \frac{\overbrace{Hip_1, Hip_2, \ldots, Hip_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \right| \; \langle Condiciones \rangle$$

- Un teorema es un axioma o la conclusión de una regla aplicada a un conjunto de hipótesis que ya sean teoremas.
- Una demostración de un teorema C es una secuencia de deducciones que termina con C como última conclusión.
- Si las reglas de inferencia reflejan la forma en que la realidad se comporta, se dice que son correctas. El cálculo deductivo como tal se dice correctosi todas sus reglas lo son.
- Si hay fórmulas interesantes de la realidad que no se pueden deducir, se dice que el cálculo deductivo es incompleto.

Definiciones formales

- Una regla de inferencia tiene la forma:

$$\langle \mathit{Identificador} \rangle \quad \frac{\overbrace{Hip_1, Hip_2, \ldots, Hip_k}^{\text{Hipótesis}}}{\underbrace{C}_{\text{Conclusión}}} \;\Bigg|\; \langle \mathit{Condiciones} \rangle$$

- Un teorema es un axioma o la conclusión de una regla aplicada a un conjunto de hipótesis que ya sean teoremas.
- Una demostración de un teorema C es una secuencia de deducciones que termina con C como última conclusión.
- Si las reglas de inferencia reflejan la forma en que la realidad se comporta, se dice que son correctas. El cálculo deductivo como tal se dice correctosi todas sus reglas lo son.
- Si hay fórmulas interesantes de la realidad que no se pueden deducir, se dice que el cálculo deductivo es incompleto.

Plan

1. Introducción
2. Lenguaje formal
   - Alfabetos
   - Sintaxis
   - Semántica
3. Aparato deductivo
   - Generalidades
   - Ejemplos

Lenguajes formales como resultado de deducciones

Dado un alfabeto A y una gramática $G = (A, N, \Sigma, P)$, considere el siguiente cálculo deductivo:

Axioma

Σ

Reglas de inferencia

Para cada producción $\alpha \to \beta$, se define una regla:

$$\langle \alpha \to \beta \rangle \quad \frac{\alpha}{\beta}$$

Lenguaje $\equiv$ Teoremas

El lenguaje definido por la gramática, es el conjunto de fórmulas de A^* derivables a partir de Σ.

Lenguajes formales como resultado de deducciones

Dado un alfabeto A y una gramática $G = (A, N, \Sigma, P)$, considere el siguiente cálculo deductivo:

Axioma

Σ

Reglas de inferencia

Para cada producción $\alpha \to \beta$, se define una regla:

$$\langle \alpha \to \beta \rangle \quad \frac{\alpha}{\beta}$$

Lenguaje $\equiv$ Teoremas

El lenguaje definido por la gramática, es el conjunto de fórmulas de A^* derivables a partir de Σ.

Lenguajes formales como resultado de deducciones

Dado un alfabeto A y una gramática $G = (A, N, \Sigma, P)$, considere el siguiente cálculo deductivo:

Axioma

Σ

Reglas de inferencia

Para cada producción $\alpha \to \beta$, se define una regla:

$$\langle \alpha \to \beta \rangle \quad \frac{\alpha}{\beta}$$

Lenguaje $\equiv$ Teoremas

El lenguaje definido por la gramática, es el conjunto de fórmulas de A^* derivables a partir de Σ.

SABIO como sistema formal

Recordemos que: Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Lenguaje Formal de SABIO

- Alfabeto: equipos, relaciones, números
- Sintaxis: Suposiciones
- Semántica: El fútbol

Aparato deductivo

- Axiomas: Tabla de posiciones actual, Puntaje actual,
- Reglas de inferencia: cómo se reparten los puntos, cómo calcular el puntaje final, cómo calcular la posición final, cómo asegurar posiciones relativas

SABIO como sistema formal

Recordemos que: Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Lenguaje Formal de SABIO

- Alfabeto: equipos, relaciones, números
- Sintaxis: Suposiciones
- Semántica: El fútbol

Aparato deductivo

- Axiomas: Tabla de posiciones actual, Puntaje actual,

SABIO como sistema formal

Recordemos que: Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Lenguaje Formal de SABIO

- Alfabeto: equipos, relaciones, números
- Sintaxis: Suposiciones
- Semántica: El fútbol

Aparato deductivo

- Axiomas: Tabla de posiciones actual, Puntaje actual,
- Reglas de inferencia: cómo se reparten los puntos, cómo calcular el puntaje final, cómo calcular la posición final, cómo asegurar posiciones relativas.

SABIO como sistema formal

Recordemos que: Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Lenguaje Formal de SABIO

- Alfabeto: equipos, relaciones, números
- Sintaxis: Suposiciones
- Semántica: El fútbol

Aparato deductivo

- Axiomas: Tabla de posiciones actual, Puntaje actual,
- Reglas de inferencia: cómo se reparten los puntos, cómo calcular el puntaje final, cómo calcular la posición final, cómo asegurar posiciones relativas

SABIO como sistema formal

Recordemos que: Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Lenguaje Formal de SABIO

- Alfabeto: equipos, relaciones, números
- Sintaxis: Suposiciones
- Semántica: El fútbol

Aparato deductivo

- Axiomas: Tabla de posiciones actual, Puntaje actual,
- Reglas de inferencia: cómo se reparten los puntos, cómo calcular el puntaje final, cómo calcular la posición final, cómo asegurar posiciones relativas

SABIO como sistema formal

Recordemos que: Sistema Formal = Lenguaje Formal + Aparato deductivo

Lenguaje Formal de SABIO

- Alfabeto: equipos, relaciones, números
- Sintaxis: Suposiciones
- Semántica: El fútbol

Aparato deductivo

- Axiomas: Tabla de posiciones actual, Puntaje actual,
- Reglas de inferencia: cómo se reparten los puntos, cómo calcular el puntaje final, cómo calcular la posición final, cómo asegurar posiciones relativas