

3. Entendimos IP - ADA II - NP 2025-I

1. Considere el siguiente problema de programación entera:

Variables enteras: x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

$$x_1 \leq 1 \quad x_2 \leq 1 \quad x_3 \leq 1 \quad x_4 \leq 1$$

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 10$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4$$

$$B=25$$

Entre las siguientes, escoja las que son soluciones:

☐ (A) $x_1=0$

$$x_2=1$$

$$x_3=1$$

$$x_4=0$$

☐ (B) $x_1=0$

$$x_2=0$$

$$x_3=1$$

$$x_4=1$$

☒ (C) $x_1=1$

$$x_2=0$$

$$x_3=1$$

$$x_4=0$$

☐ (D) $x_1=1$

$$x_2=0$$

$$x_3=1$$

$$x_4=1$$

☒ (E) $x_1=1$

$$x_2=1$$

$$x_3=0$$

$$x_4=0$$

2. Considere el siguiente problema de programación entera:

Variables enteras: x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

$$x_1 \leq 1 \quad x_2 \leq 1 \quad x_3 \leq 1 \quad x_4 \leq 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 5x_4 \leq 12$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4$$

$$B=63$$

Entre las siguientes, escoja las afirmaciones correctas:

- ☐ (A) Esta es una instancia positiva de IP
- ☒ (B) Esta es una instancia negativa de IP
- ☐ (C) Esta es una instancia a veces positiva y a veces negativa de IP

3. Considere el siguiente problema de programación entera:

Variables enteras: x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

$$x_1 \leq 1 \quad x_2 \leq 1 \quad x_3 \leq 1 \quad x_4 \leq 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 5x_4 \leq 12$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4$$

$$B=62$$

Entre las siguientes, escoja las afirmaciones correctas:

- ☒ (A) Esta es una instancia positiva de IP
- ☐ (B) Esta es una instancia negativa de IP
- ☐ (C) Esta es una instancia a veces positiva y a veces negativa de IP

4. Considere la siguiente instancia de 3SAT:

$$(a \vee -b \vee c) \wedge (b \vee -c \vee a) \wedge (-a \vee -b \vee -c)$$

El problema de programación entera asociado por la reducción propuesta en la figura es:

(A) $ap \geq 0, an \geq 0, bp \geq 0, bn \geq 0, cp \geq 0, cn \geq 0$

$$ap \leq 1, an \leq 1, bp \leq 1, bn \leq 1, cp \leq 1, cn \leq 1$$

$$1 \leq ap + an \leq 1$$

$$1 \leq bp + bn \leq 1$$

$$1 \leq cp + cn \leq 1$$

$$ap + bn + cp \geq 1$$

$$bp + cn + ap \geq 1$$

$$an + bn + cn \geq 1$$

$$f(ap, an, bp, bn, cp, cn) = ap$$

$$B=1$$

(B) $ap \geq 0, an \geq 0, bp \geq 0, bn \geq 0, cp \geq 0, cn \geq 0$

$$ap \leq 1, an \leq 1, bp \leq 1, bn \leq 1, cp \leq 1, cn \leq 1$$

$$ap + bn + cp \geq 1$$

$$bp + cn + ap \geq 1$$

$$an + bn + cn \geq 1$$

$$f(ap, an, bp, bn, cp, cn) = ap$$

$$B=0$$

(C) $ap \geq 0, an \geq 0, bp \geq 0, bn \geq 0, cp \geq 0, cn \geq 0$

$$ap \leq 1, an \leq 1, bp \leq 1, bn \leq 1, cp \leq 1, cn \leq 1$$

$$1 \leq ap + an \leq 1$$

$$1 \leq bp + bn \leq 1$$

$$1 \leq cp + cn \leq 1$$

$$ap + bn + cp \geq 1$$

$$bp + cn + ap \geq 1$$

$$an + bn + cn \geq 1$$

$$f(ap, an, bp, bn, cp, cn) = an$$

$$B=0$$

(D) $ap \geq 0, an \geq 0, bp \geq 0, bn \geq 0, cp \geq 0, cn \geq 0$

$$ap \leq 1, an \leq 1, bp \leq 1, bn \leq 1, cp \leq 1, cn \leq 1$$

$$1 \leq ap + an \leq 1$$

$$1 \leq bp + bn \leq 1$$

$$1 \leq cp + cn \leq 1$$

$$ap + bn + cp \geq 1$$

$$bp + cn + ap \geq 1$$

$$an + bn + cn \geq 1$$

$$f(ap, an, bp, bn, cp, cn) = ap + an$$

$$B=0$$

(E) $ap \geq 0, an \geq 0, bp \geq 0, bn \geq 0, cp \geq 0, cn \geq 0$

$$ap \leq 1, an \leq 1, bp \leq 1, bn \leq 1, cp \leq 1, cn \leq 1$$

$$1 \leq ap + an \leq 1$$

Comprobar Soluciones

¿Esta IP es NP?

¿Es IP NP-Hard?

¿Es NP Completo?

¿Es NP?

¿Es IP NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea: Simular cada variable booleana x de 3-SAT con un par de variables enteras x y \bar{x} de valor 0 (falso) o 1 (verdadero), representando el valor booleano de la variable y de su negación. Se requieren las siguientes restricciones para que esas variables enteras jueguen el rol de booleanas:

- $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq \bar{x} \leq 1$, ambas variables estarán restringidas a valores 0 o 1. Lo cual las hace equivalentes a variables booleanas true/false.
- $1 \leq x + \bar{x} \leq 1$, exactamente una variable es asociada al valor de 1. Esto asegura que sólo una de las dos variables x y \bar{x} puede ser verdadera y que la una es el complemento de la otra.
- Por cada cláusula $C_i = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ en la instancia de 3-SAT, construya una desigualdad: $l_1 + l_2 + l_3 \geq 1$, donde $l_j = x$ si $l_j = x$ y $l_j = \bar{x}$ si $l_j = \neg x$. Esto garantizará que mínimo una variable de la cláusula sea asignada el valor 1 (i.e., verdadera).

Comprobar Soluciones

¿Esta IP es NP?

¿Es IP NP-Hard?

¿Es NP Completo?

¿Es NP?

¿Es IP NP-Hard? Definiendo la reducción

La función objetivo no es importante en este caso puesto que se busca una asignación de valores a variables que satisfaga todas las cláusulas de 3-SAT, es decir, las desigualdades de IP. Por consiguiente, definimos una que siempre se cumple:

$$f(v) = v_1, B = 0$$

$$1 \leq bp + bn \leq 1$$

$$1 \leq cp + cn \leq 1$$

$$ap + bn + cp \geq 1$$

$$bp + cn + ap \geq 1$$

$$an + bn + cn \geq 1$$

$$f(ap, an, bp, bn, cp, cn) = ap$$

$$B=0$$