Clase 25-02-22

viernes, 25 de febrero de 2022 10:49 a. m.

Transformaciones lineales continuación

Ejemplo. Sea $T: V \longrightarrow W$ una función tal que

$$T(v) = \odot$$

- Sean u y $v \in V$. $T(u+v) = \odot$

  $T(u) + T(v) = \odot + \odot = \odot$

Luego, $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

- Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in V$. $T(\alpha u) = \odot$

  $\alpha T(u) = \alpha \odot = \odot$

Así que $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Ejemplo. $T: V \longrightarrow W$

$$T(v) = v.$$

- $T(u+v) = u + v = T(u) + T(v)$.
- $T(\alpha u) = \alpha u = \alpha T(u)$.

Teorema 1 [*Transformación lineal de combinaciones lineales*].
Sean $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores de V y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ escalares de $\mathbb{R}$. Entonces,

$$T(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n) = \lambda_1 T(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{v}_2) + \ldots + \lambda_n T(\mathbf{v}_n).$$

$$T(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) = T(\lambda_1 V_1) + T(\lambda_2 V_2)$$
$$= \lambda_1 T(V_1) + \lambda_2 T(V_2).$$

$$T(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3) = T[\underbrace{(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2)} + \underbrace{\lambda_3 V_3}]$$
$$= T(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) + T(\lambda_3 V_3).$$
$$= \lambda_1 T(V_1) + \lambda_2 T(V_2) + \lambda_3 T(V_3).$$

Corolario 1.1 [*Condición necesaria de una transformación lineal*].
Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

$$T \text{ es un T.L.} \Rightarrow T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Ejemplo.

① $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+c)x + 2bx^2$ es un T.L.

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0+0)x + 2(0)x^2 = 0x + 0x^2 = \mathbf{0}$$

② $T\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 1 + \alpha x + 2\beta x^2.$

② $T\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 1 + \alpha x + 2\beta x^2.$

$T\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = 1 + 0x + 2(0)x^2 = 1 \neq \vec{0}$

$T\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow T$ no es un T.L.

Teorema 2 [*Caracterización de la igualdad de transformaciones lineales*].
Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V y $T : V \longrightarrow W$ y $S : V \longrightarrow W$ dos transformaciones lineales.

$$T = S, \text{ si y sólo si,}$$
$$S(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_1), S(\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_2), \ldots, S(\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}_n).$$

$T = S$ si y solo si $S(V_1) = T(V_1),\ S(V_2) = T(V_2), \ldots, S(V_n) = T(V_n)$

($\Rightarrow$) Como $T = S$ entonces
$$T(V_1) = S(V_1)$$
$$T(V_2) = S(V_2)$$
$$\vdots$$
$$T(V_n) = S(V_n) \,/\!/$$

($\Leftarrow$) Sea $v \in V$. Se debe mostrar que $T(v) = S(v)$.
Dado que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

$$T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n)$$

$= \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \cdots + \lambda_n T(v_n)$ por teorema 1.

$= \lambda_1 S(v_1) + \lambda_2 S(v_2) + \cdots + \lambda_n S(v_n)$ por la hipótesis.

$= S(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n)$ por ser S un T.L.

$= S(v)$

Por tanto $T(v) = S(v)$ para cada $v \in V$ //

$T = S$.

Teorema 3 [*Determinación de una transformación lineal*].
Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base del espacio vectorial V, $\boxed{\text{existe}}$ una $\boxed{\text{única}}$ transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, tal que $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{v}_1), \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathbf{w}_n = T(\mathbf{v}_n)$, con $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$.

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V

Exis una única $T : V \longrightarrow W$

$$\begin{aligned} v_1 &\longrightarrow T(v_1) = w_1 \\ v_2 &\longrightarrow T(v_2) = w_2 \\ &\vdots \\ v_n &\longrightarrow T(v_n) = w_n. \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $T : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un T.L. tal que

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar $T(a + bx + cx^2)$.

Solución.

Sea $B = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de P_2.

$$T(a + bx + cx^2) = T(a) + T(bx) + T(cx^2).$$
$$= T(a \cdot 1) + T(bx) + T(cx^2).$$
$$= a\,T(1) + b\,T(x) + c\,T(x^2).$$
$$= a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} //$$

Ejemplo. Sean $u = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$H = \{ w \in \mathbb{R} : w = tu + sv;\ t, s \in \mathbb{R} \}$ plano de $\mathbb{R}^3$.

Encontrar un T.L. T de $\mathbb{R}^2$ en H.

Solución.

Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

y sean $u, v \in H$ (u, v son vectores arbitrarios de H).

Podemos definir $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = u$ y $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = v$

Entonces para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right]$$

$$= T\left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

$$= T\left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + T\left[y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

$$= xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$= x\cdot u + yv \qquad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

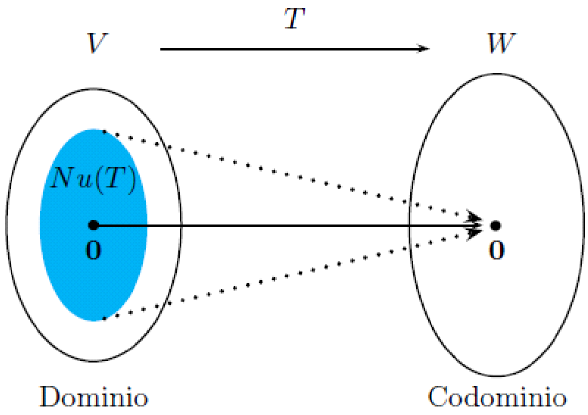
$$= x\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x + 2y \\ 3x \\ -2x + y \end{pmatrix}_{//}$$

Espacios vectoriales asociados a una T. L.

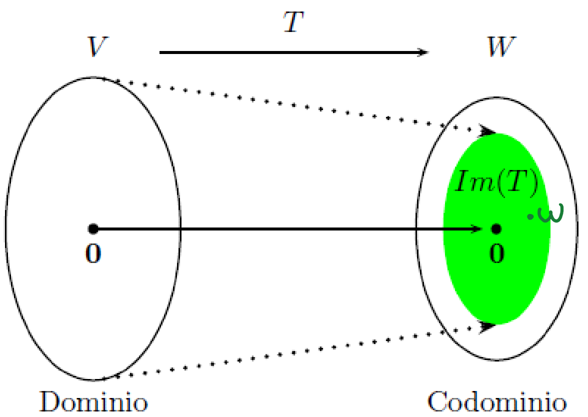
Definición 2 [*Núcleo de una transformación lineal*]. Dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, definimos $Nu(T)$, el *núcleo de* T, como el conjunto de todos los vectores de V cuya imagen es el vector $\mathbf{0}$ de W. En otras palabras,

$$Nu(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$



Definición 3 [*Imagen de una transformación lineal*]. Dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, definimos $Im(T)$, la *imagen de* T, como el conjunto de todos los vectores $\mathbf{w}$ de W para los cuales existe un vector $\mathbf{v}$ de V, tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. En otras palabras,

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W : \text{ existe } \mathbf{v} \in V \text{ tal que } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}.$$



Ejemplo. Sea $T : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$ un T.L. tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c+d \end{pmatrix}.$$

Encontrar $Nu(T)$ y $Im(T)$.

- Para encontrar $Nu(T)$ hay que resolver

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \Rightarrow a=0, b=0, \ c+d=0$$
$$c=-d.$$

Luego, $Nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a=b=0, \ c=-d; \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d & d \end{pmatrix} : d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \qquad d = t \in \mathbb{R}.$$

observe que:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \odot \in M_{2\times 2}.$$

- Encontrar $Im(T)$.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c+d \end{pmatrix}.$$

Sean $a = r$, $b = s$, $d = \alpha$ y $c + d = t$.

$c + \alpha = t$

$c = t - \alpha.$

Luego, las imágenes de T son de la forma $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} r & s \\ t-\alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t-\alpha+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Así que $Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R}. \right\}$.