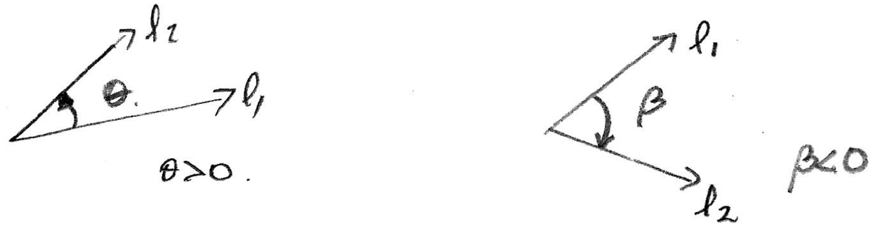
Martha Pazos
Univ. del Valle

TRIGONOMETRÍA

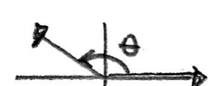
Para definir las funciones trigonométricas necesitamos definir unos conceptos previamente.

<u>DEF:</u> Se define ángulo como la porción del plano limitada por dos segmentos de recta con un punto común llamado vértice.

Se dice que el ángulo es orientado si uno de los lados se fija como lado inicial y el otro como lado terminal, el ángulo está orientado positivamente si para hacer coincidir el lado inicial con el terminal, se gira en sentido contrario a las manecillas del reloj. Está orientado negativamente si el giro se hace en el mismo sentido.

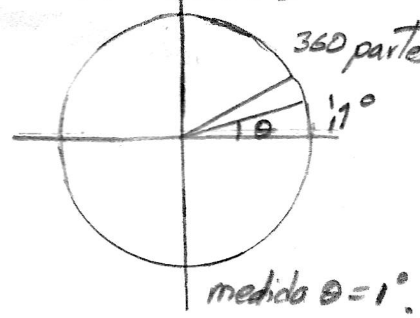


Un ángulo está en posición standard, si el lado inicial coincide con el semieje positivo de las x.



<u>MEDIDA DE ÁNGULOS</u>: Los ángulos se pueden medir en grados o radianes. (Grado sexagesimal cuando la circunferencia se divide en 360°. Grado centesimal la circunf se divide en 400°). (Escalas)

Definición: Un ángulo mide un grado 1° si se obtiene de girar $\frac{1}{360}$ parte de giro completo.



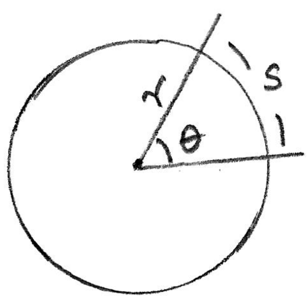
Esto significa que un giro completo proporciona un ángulo de 360°.

Ej: $1/4$ de giro completo proporciona un ángulo de

$$\theta = \frac{1}{4} 360^\circ = 90^\circ.$$

$1/2$ giro es $\theta = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ$.

Definición: Un ángulo θ mide 1 radian si la longitud del arco subtendido por dicho ángulo es igual al radio



La medida de θ es 1 radián si $r = s$.

Por geometría, se sabe que la longitud de un arco subtendido por un ángulo θ es $s = r\theta$. Luego $\theta = \frac{s}{r}$.

Si $s = r$, $\theta = 1$ radian.

Cómo convertir radianes a grados y grados a radianes?

Conversión de medidas

Recuerde que un giro completo proporciona un ángulo $\theta = 360^\circ$. De otro lado, la longitud de una

circunferencia de radio r es $L = 2\pi r$.
Pero la longitud de arco es $r\theta$, entonces $2\pi r = r\theta$
de donde $\theta = 2\pi$. Así, 2π equivale a $360°$.

como $2\pi = 360°$, $\pi = 180°$, de donde:

$$1° = \frac{\pi}{180} \quad y \quad 1 \text{ radian} = \frac{180°}{\pi}.$$

Ej: Halle $\theta = 30°$ en radianes y $\theta = \pi/4$ en grados.

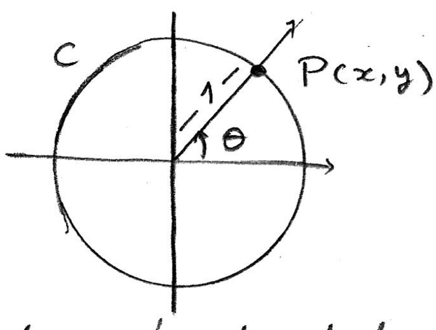
S/

$$30° = 30° \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180°}{4} = 45°.$$

<u>Funciones Trigonométricas</u>

Sea C un circulo unitario centrado en el origen y θ un ángulo en posición standard.



Sea $P(x,y)$ el punto de intersección del lado terminal de θ con la circunferencia C.

Todo ángulo determina un único Punto P sobre C, es decir a cada ángulo θ se le puede asociar un punto P sobre la circonf. C. Pero a cada punto P se le puede asociar una pareja (x,y) y a cada pareja se le puede asociar

El valor de la abscisa x ó el valor de la ordenada
Así se tiene:

$$\theta \longrightarrow P \longrightarrow (x,y) \begin{cases} \longrightarrow x \\ \longrightarrow y \end{cases}$$

Por lo tanto a cada ángulo θ le corresponde el valor de x $(\theta \rightarrow x)$ ó el valor de y $(\theta \rightarrow y)$. Este par de correspondencias definen dos funciones

$$f(\theta)=x \quad \text{ó}, \quad g(\theta)=y.$$

A x se le llama $\cos\theta$.
a y se le llama $\operatorname{sen}\theta$.

Así,
$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1] \qquad\qquad g: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$$
$$\theta \rightarrow f(\theta)=\cos\theta = x \qquad\qquad \theta \rightarrow g(\theta)=\operatorname{sen}\theta = y.$$

Ambas funciones tienen dominio $\mathbb{R}$ y rango $[-1,1]$.

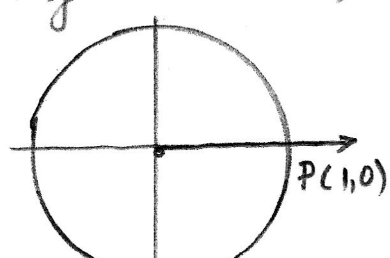
Definidas este par de funciones, se definen las otras funciones trigonométricas.

$$\operatorname{Tan}\theta = \frac{\operatorname{Sen}\theta}{\cos\theta}, \ \cos\theta \neq 0, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \ \cos\theta \neq 0,$$

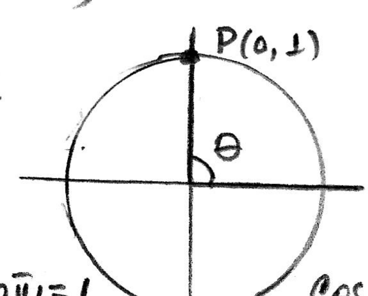
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \ \operatorname{sen}\theta \neq 0, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\operatorname{Tan}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{Sen}\theta}, \ \operatorname{sen}\theta \neq 0.$$

Calculamos algunos valores para $\operatorname{Sen}\theta$, $\cos\theta$.

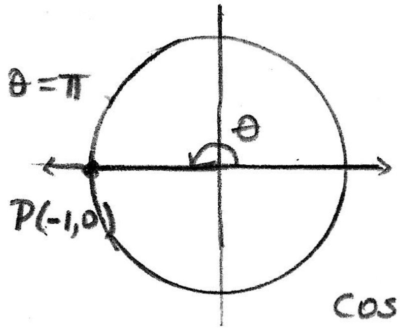
Si $\theta = 0$,



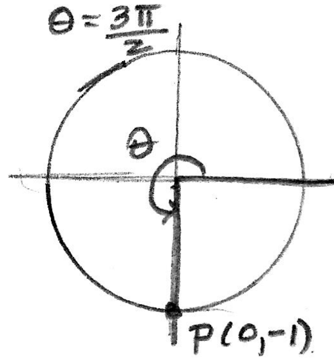
$\theta = \frac{\pi}{2}$



$\operatorname{Sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. $\qquad$ $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ $\qquad$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

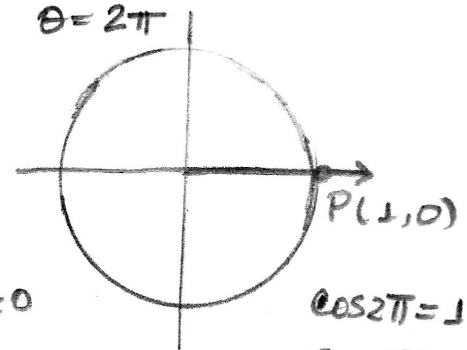


$\cos \pi = -1$
$\operatorname{Sen} \pi = 0$

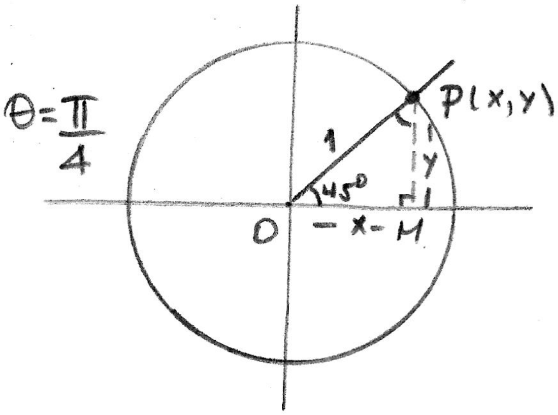


$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

$\operatorname{Sen} \frac{3\pi}{2} = -1$



$\cos 2\pi = 1$
$\operatorname{Sen} 2\pi = 0.$



El Triángulo OMP es isosceles, luego $x = y$.

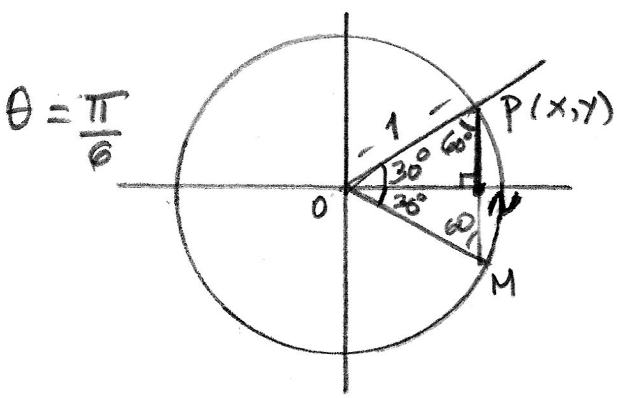
Por Teorema de pitágoras $1 = x^2 + y^2$

como $x = y$, se tiene $1 = x^2 + x^2 = 2x^2$

Entonces $x^2 = 1/2$, de donde $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Como $x > 0$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pero $x = y$, luego $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Así, $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{Sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2$.



El triángulo MOP es equilátero luego la longitud de $\overline{MP}$ es 1.

Por tanto $NP = 1/2$. Pero $NP = y$ luego $y = 1/2$.

Por T. de pitágoras $1 = x^2 + (\frac{1}{2})^2$

$1 = x^2 + 1/4 \rightarrow x^2 = 1 - 1/4 = 3/4 \rightarrow x = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Pues $x > 0$.

en consecuencia $\operatorname{Sen} \pi/6 = 1/2$
$\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$

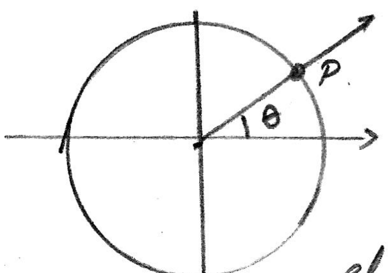
Veamos una Tabla de valores en la cuál se registran el valor del senθ y cosθ para unos ángulos especiales que se conocen como ángulos notables.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{sen}\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0

Propiedades:

- Una función $f(x)$ es periódica si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+k) = f(x)$. El mínimo valor positivo de k para el cuál se cumple la igualdad se llama periodo.

En el círculo unitario, el lado terminal de θ y $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ son el mismo, luego

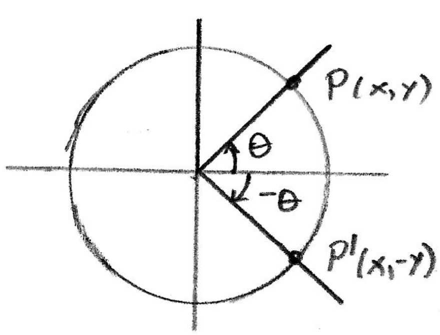


$\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi) = \operatorname{sen}\theta$, $n \in \mathbb{Z}$.
$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$.

El mínimo valor positivo de $k = 2n\pi$ para el cuál se cumple la igualdad es 2π.

$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$
$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$.

Luego senθ y cosθ son periódicas de periodo 2π.

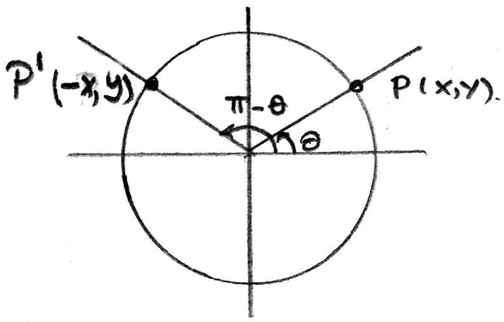
- 

P y P' son simétricos respecto al eje x luego P' tiene coordenadas $(x,-y)$

Así, $\cos\theta = \cos(-\theta)$
$\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(-\theta)$.

Así, $\cos\theta$ es par y $\operatorname{sen}\theta$ es impar.

- Si los ángulos son θ y $\pi-\theta$.



Los puntos P y P' son simétricos respecto al eje y, luego P' tiene coordenadas $(-x,y)$

Entonces: $\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta$
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$.

Pues $\cos\theta = x$
$\cos(\pi-\theta) = -x \to \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$.
$\operatorname{sen}\theta = x = \operatorname{sen}(\pi-\theta)$.

- $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1 \to |\operatorname{sen}\theta| \leq 1$. Si $\operatorname{sen}\theta \neq 0$,

$$1 \leq \frac{1}{|\operatorname{sen}\theta|} = |\csc\theta|$$

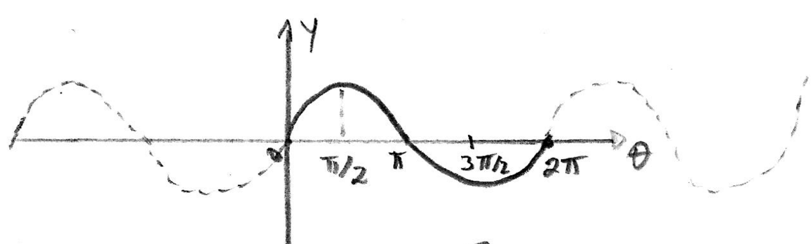
entonces $|\csc\theta| \geq 1$.

$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \to |\cos\theta| \leq 1 \to$ Si $\cos\theta \neq 0$,

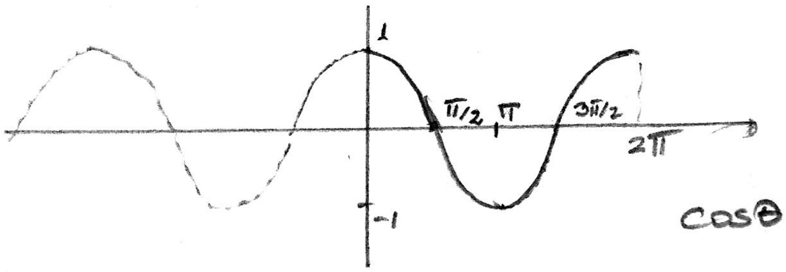
$$1 \leq \frac{1}{|\cos\theta|} = |\sec\theta|$$

luego $|\sec\theta| \geq 1$.

Gráficas:



Senθ



$y = \text{Tan}\,\theta$. $\text{Tan}\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$.

Consideramos $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

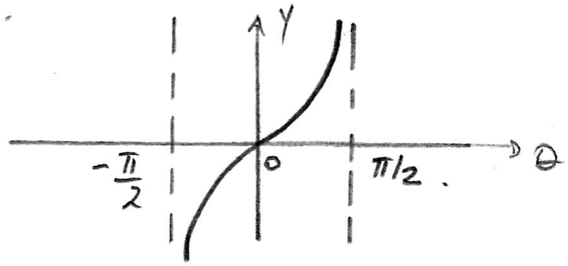
Si $\theta \to -\pi/2$ por valores mayores, $\text{sen}\,\theta \to -1$
$\cos\theta \to 0$ (posit.)

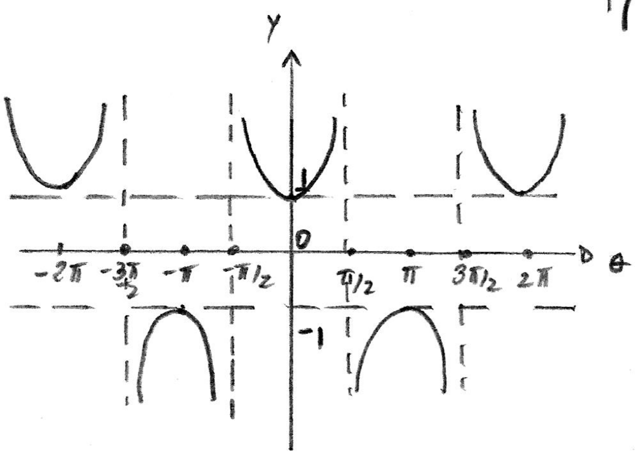
luego $\tan\theta \to -\infty$.

Si $\theta \to \pi/2$ por valores menores, $\text{sen}\,\theta \to 1$
$\cos\theta \to 0$ (positivam.)

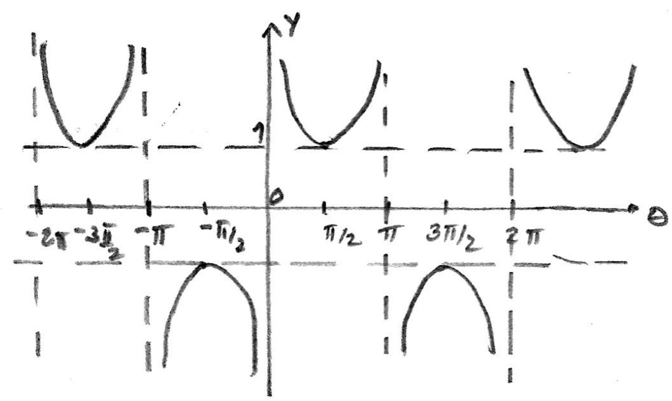
luego $\tan\theta \to \infty$

$\text{Tan}\,0 = \dfrac{\text{sen}\,0}{\cos 0} = \dfrac{0}{1} = 0.$





Secθ



cscθ