UNIVERSIDAD DEL VALLE
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
Ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales:

$$\text{(a)}\ x^2y' + 2xy = e^{3x}; \qquad \text{(b)}\ xy' - 3y = x^4 \ \operatorname{sen}\ x; \qquad \text{(c)}\ y' - \frac{y}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas:

$$\text{(a)}\ y' - (\tan x)y = x\sec x, \quad y(0) = \sqrt{\pi}; \qquad \text{(b)}\ y' + e^{-x}y = e^{e^{-x}}, \quad y(0) = e.$$

3. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

   - $y' - y\tan x = e^{-\operatorname{sen} x}$.
   - $y\,' \ + \ (\cos x)y \ = \ \cos x$.
   - $xy' + y = y^2 \ln x$.
   - $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$.
   - $(\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 1$.

4. Hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas:

   (a) $y\,' \ = \ e^x \cos^2 \ y, \qquad y(0) \ = \ \frac{\pi}{4}$

   (b) $xy' + 3y = \dfrac{1}{x}e^x, \qquad y(1) = 1$

   (c) $\left(\sqrt{y} \ + \ 1\right) dx \ + \ \left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} \ + \ 1\right) dy \ = \ 0, \qquad y(1) \ = \ 4$

   (d) $(y \ + \ x \ + \ 2)dx \ + \ dy \ = \ 0, \qquad y(0) \ = \ 2$

   (e) $y\,' \ + \ \dfrac{1}{\sqrt{1 \ - \ x^2}}\,y \ = \ \dfrac{3}{\sqrt{1 \ - \ x^2}}, \qquad y(0) \ = \ 4$

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

$$\text{(a)}\ y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{3}x^4y^4; \qquad \text{(b)}\ y' - xy = 2x\sqrt{y};$$

$$\text{(c)}\ 3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}; \qquad \text{(d)}\ y' + \frac{y}{x} = \frac{4x^3}{y}.$$

6. Resolver las siguientes ecuaciones de Clairaut

$$a)\ y = xy' + 2\sqrt{1+(y')^2} \quad b)\ y = xy' + 1 - \ln y' \quad c)\ xy' = y + e^{y'} \quad d)\ xy'' + (y'')^2 = y'$$

7. Obtener las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

$$\text{(a)}\ y^2 - x^2 = c; \qquad \text{(b)}\ y^2 = 2cx + 4.$$

8. Obtener las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas:

$$\text{(a)}\ y^2 - x^2 + 4xy - 2Cx = 0; \qquad \text{(b)}\ 2x^2 + y^2 = 4Cx.$$

9. Para la familia $y^2 = 2cx$ (parábolas que pasan por el origen), determinar qué curva de las trayectorias ortogonales pasa por el punto $(2, 4)$.

10. Para la familia $x + y = Ce^y$, determinar qué curva de las trayectorias ortogonales pasa por el punto $(0, 5)$.

11. Sabemos que un material radiactivo se desintegra proporcionalmente a la cantidad existente en cada momento. En una prueba realizada con 60 mg de este material, se observó que después de 3 horas, solamente el 80 % de la masa permanecía en ese momento. Hallar:
(a) La ecuación que exprese la cantidad restante de masa en un tiempo t.
(b) ¿Qué cantidad permanece cuando $t = 5$ horas?
(c) ¿Para qué valor de t, la cantidad de material es $1/4$ de la cantidad inicial?

12. El Pb-209, isótropo radiactivo del plomo, se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo t y tiene vida media de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿ cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre 90 %? *Nota:* la vida media de una sustancia radiactiva es, simplemente, el tiempo que transcurre para que desintegre o transmute la mitad de los átomos en una muestra inicial.

13. Los experimentos demuestran que la rapidez de conversión del azúcar de caña en solución diluida es proporcional a la concentración de azúcar aún no diluida. Supongamos que en $t = 0$ la concentración de azúcar es $\frac{1}{150}$ y en $t = 5$ horas es $\frac{1}{200}$. Hallar la ecuación que da la concentración de azúcar sin diluir en función del tiempo.

14. En un cultivo de levadura la rapidez de cambio es proporcional a la cantidad existente. Si la cantidad de cultivo se duplica en 4 horas, ¿qué cantidad puede esperarse al cabo de 12 horas, con la misma rapidez de crecimiento?

15. Hallar el tiempo necesario para que una cantidad de dinero aumente al doble al 15 % por año, con un interés compuesto continuo.

16. Sea $ds/dt = 0{,}4s$ la variación de cantidad de dinero s con respecto al tiempo, donde 0.4 representa el 40 % de interés compuesto durante un año. Calcular:
(a) El tiempo necesario para que se duplique la cantidad.
(b) La cantidad inicial, si en 10 años el capital es de dos millones.

17. Se desea enfriar una sustancia, la cual se introduce en un refrigerador que está a una temperatura constante de 5^oC. Al cabo de 30 minutos, la sustancia está a 8^oC y después de 40 minudos está a 6^oC. Hallar la temperatura inicial de la sustancia.

18. Un cuerpo a una temperatura de 30^oC está inmerso en un baño cuya temperatura se mantiene en 50^oC. Después de una hora la temperatura del cuerpo es de 40^oC. Hallar:
(a) la temperatura del cuerpo después de 2 horas a partir de la imersión;
(b) el tiempo que se necesita para que la temperatura del cuerpo sea de 48^oC.

19. La población de cierta ciudad aumenta proporcionalmente al número de habitantes que hay en un momento dado en ella. Si después de 5 años la población se ha triplicado y después de 8 años la población es de 45 000 habitantes, hallar el número de habitantes que había inicialmente en la ciudad.

20. En 1990, el Departamento de Recursos Naturales arrojó en un lago 1000 ejemplares de una especie de pez híbrido. En 1997 se calculó que la población de esta especie en el lago era de 3000. Suponiendo que la población de peces crece proporcionalmente a la cantidad presente de los ejemplares, calcule la población de estos peces en el lago en 2000.

21. En una cueva en Sudáfrica se encontró un creneo humanoide junto con los restos de una fogata. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo es igual a la de la fogata. Se ha establecido que solamente un $2\,\%$ de la cantidad original de carbono $14C$ queda en la madera quemada en la fogata. Calcule la edad aproximada del cráneo.

22. Considere que la rapidez con que crece cierto rumor entre los habitantes de una población es proporcional al número de individuos que conocen la noticia por el número de los que no la conocen. Supongamos que en el instante $t = 0$, la mitad de la población de 100000 personas han óido cierto rumor y que el número de las que han óido crece en ese momento a razón de 1000 personas por día. ¿ Cuánto tiempo pasará para que el rumor se extienda al $75\,\%$ de la población?