

# Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

## Ejemplo del péndulo

Consideraremos un péndulo simple, el cual consta de una masa  $m$  suspendida por un cuerda de masa despreciable y longitud  $l$ , tal que la cuerda se mantiene siempre recta y la masa queda oscila en un plano vertical.

## Ejemplo del péndulo

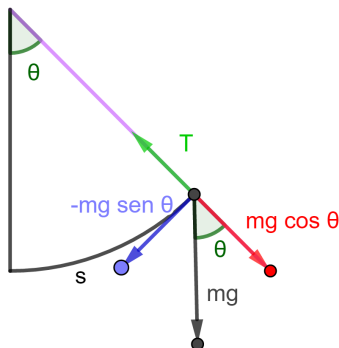
Consideraremos un péndulo simple, el cual consta de una masa  $m$  suspendida por un cuerda de masa despreciable y longitud  $l$ , tal que la cuerda se mantiene siempre recta y la masa queda oscila en un plano vertical.

Queremos describir la posición de la masa en cada instante. Sea  $\theta(t)$  el ángulo que forma el cable con la vertical en el instante  $t$ .

## Ejemplo del péndulo

Consideraremos un péndulo simple, el cual consta de una masa  $m$  suspendida por un cuerda de masa despreciable y longitud  $l$ , tal que la cuerda se mantiene siempre recta y la masa queda oscila en un plano vertical.

Queremos describir la posición de la masa en cada instante. Sea  $\theta(t)$  el ángulo que forma el cable con la vertical en el instante  $t$ .



Puesto que la masa se desplaza sobre una circunferencia, la fuerza resultante es un vector que actúa tangente a ella.

Puesto que la masa se desplaza sobre una circunferencia, la fuerza resultante es un vector que actúa tangente a ella. Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son:

- a) La tensión,  $T$ , dirigida hacia arriba en la dirección del cable.
- b) El peso de la masa, en la dirección de la vertical y dirigido hacia abajo, de módulo  $mg$ .

Puesto que la masa se desplaza sobre una circunferencia, la fuerza resultante es un vector que actúa tangente a ella. Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son:

- a) La tensión,  $T$ , dirigida hacia arriba en la dirección del cable.
- b) El peso de la masa, en la dirección de la vertical y dirigido hacia abajo, de módulo  $mg$ . La fuerza ejercida por el peso de la masa tiene dos componentes: La tangencial y la normal que es opuesta a la tensión.

Puesto que la masa se desplaza sobre una circunferencia, la fuerza resultante es un vector que actúa tangente a ella. Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son:

- a) La tensión,  $T$ , dirigida hacia arriba en la dirección del cable.
- b) El peso de la masa, en la dirección de la vertical y dirigido hacia abajo, de módulo  $mg$ . La fuerza ejercida por el peso de la masa tiene dos componentes: La tangencial y la normal que es opuesta a la tensión.

Sea  $s$  es la longitud de arco desde de la vertical que indica la posición de la masa.

Puesto que la masa se desplaza sobre una circunferencia, la fuerza resultante es un vector que actúa tangente a ella. Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son:

- a) La tensión,  $T$ , dirigida hacia arriba en la dirección del cable.
- b) El peso de la masa, en la dirección de la vertical y dirigido hacia abajo, de módulo  $mg$ . La fuerza ejercida por el peso de la masa tiene dos componentes: La tangencial y la normal que es opuesta a la tensión.

Sea  $s$  es la longitud de arco desde de la vertical que indica la posición de la masa. Dado que  $s = l\theta$  tenemos que la aceleración es

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

De la segunda ley de Newton tenemos que

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta,$$

De la segunda ley de Newton tenemos que

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta,$$

o equivalentemente, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0.$$

De la segunda ley de Newton tenemos que

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta,$$

o equivalentemente, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Esta ecuación es una no lineal y difícil de resolver, sin embargo para ángulos  $\theta$  pequeños tenemos que  $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ ,

De la segunda ley de Newton tenemos que

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta,$$

o equivalentemente, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Esta ecuación es una no lineal y difícil de resolver, sin embargo para ángulos  $\theta$  pequeños tenemos que  $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ , así utilizamos su linealización

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \tag{1}$$

Notemos que  $\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  y  $\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  son soluciones de la ecuación (1),

Notemos que  $\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  y  $\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  son soluciones de la ecuación (1), más aún para  $C_1$  y  $C_2$  constantes arbitrarias tenemos

Notemos que  $\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  y  $\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  son soluciones de la ecuación (1), más aún para  $C_1$  y  $C_2$  constantes arbitrarias tenemos

$$\theta(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \quad (2)$$

es una solución de la ecuación (1).

Notemos que  $\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  y  $\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  son soluciones de la ecuación (1), más aún para  $C_1$  y  $C_2$  constantes arbitrarias tenemos

$$\theta(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \quad (2)$$

es una solución de la ecuación (1). De hecho cualquier solución de la ecuación (1) debe tener esta forma.

Notemos que  $\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  y  $\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  son soluciones de la ecuación (1), más aún para  $C_1$  y  $C_2$  constantes arbitrarias tenemos

$$\theta(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \quad (2)$$

es una solución de la ecuación (1). De hecho cualquier solución de la ecuación (1) debe tener esta forma. Si obtenemos condiciones iniciales  $\theta(0)$  y  $\theta'(0)$  podemos determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$ .

Notemos que  $\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  y  $\sen(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  son soluciones de la ecuación (1), más aún para  $C_1$  y  $C_2$  constantes arbitrarias tenemos

$$\theta(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + C_2 \sen(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \quad (2)$$

es una solución de la ecuación (1). De hecho cualquier solución de la ecuación (1) debe tener esta forma. Si obtenemos condiciones iniciales  $\theta(0)$  y  $\theta'(0)$  podemos determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$ .

Notemos que las soluciones (2) son periódicas y el periodo es

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Notemos que  $\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  y  $\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$  son soluciones de la ecuación (1), más aún para  $C_1$  y  $C_2$  constantes arbitrarias tenemos

$$\theta(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \quad (2)$$

es una solución de la ecuación (1). De hecho cualquier solución de la ecuación (1) debe tener esta forma. Si obtenemos condiciones iniciales  $\theta(0)$  y  $\theta'(0)$  podemos determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$ .

Notemos que las soluciones (2) son periódicas y el periodo es

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

El movimiento descrito por las funciones en (2) se llama **movimiento armónico simple**.

# Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3)$$

# Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3)$$

El término lineal es debido a que el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces

# Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3)$$

El término lineal es debido a que el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

# Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3)$$

El término lineal es debido a que el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

es lineal.

# Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3)$$

El término lineal es debido a que el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

es lineal. Esto quiere decir que

$$L(\lambda y) = \lambda L(y)$$

# Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3)$$

El término lineal es debido a que el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

es lineal. Esto quiere decir que

$$L(\lambda y) = \lambda L(y) \quad \text{y} \quad L(y + z) = L(y) + L(z),$$

# Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  es de la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3)$$

El término lineal es debido a que el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y,$$

es lineal. Esto quiere decir que

$$L(\lambda y) = \lambda L(y) \quad \text{y} \quad L(y + z) = L(y) + L(z),$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y funciones  $n$  diferenciables  $y$  y  $z$ .

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes;

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes; de lo contrario diremos que la ecuación es de **coeficientes variables**.

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes; de lo contrario diremos que la ecuación es de **coeficientes variables**. Si  $g(x) \equiv 0$ , se dice que la ecuación es **homogénea**.

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes; de lo contrario diremos que la ecuación es de **coeficientes variables**. Si  $g(x) \equiv 0$ , se dice que la ecuación es **homogénea**. Si  $g(x) \neq 0$ , se llama ecuación **no homogénea**

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes; de lo contrario diremos que la ecuación es de **coeficientes variables**. Si  $g(x) \equiv 0$ , se dice que la ecuación es **homogénea**. Si  $g(x) \neq 0$ , se llama ecuación **no homogénea** y el término  $g(x)$  se denomina **término no homogéneo**.

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes; de lo contrario diremos que la ecuación es de **coeficientes variables**. Si  $g(x) \equiv 0$ , se dice que la ecuación es **homogénea**. Si  $g(x) \neq 0$ , se llama ecuación **no homogénea** y el término  $g(x)$  se denomina **término no homogéneo**.

Supongamos que  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), g(x)$  funciones continuas en el intervalo  $(a, b)$  y que  $a_n(x) \neq 0$  en  $(a, b)$ , podemos dividir por  $a_n(x)$  y expresar la ecuación en forma normal

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = g(x),$$

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes; de lo contrario diremos que la ecuación es de **coeficientes variables**. Si  $g(x) \equiv 0$ , se dice que la ecuación es **homogénea**. Si  $g(x) \neq 0$ , se llama ecuación **no homogénea** y el término  $g(x)$  se denomina **término no homogéneo**.

Supongamos que  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), g(x)$  funciones continuas en el intervalo  $(a, b)$  y que  $a_n(x) \neq 0$  en  $(a, b)$ , podemos dividir por  $a_n(x)$  y expresar la ecuación en forma normal

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = g(x), \quad (4)$$

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes; de lo contrario diremos que la ecuación es de **coeficientes variables**. Si  $g(x) \equiv 0$ , se dice que la ecuación es **homogénea**. Si  $g(x) \neq 0$ , se llama ecuación **no homogénea** y el término  $g(x)$  se denomina **término no homogéneo**.

Supongamos que  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), g(x)$  funciones continuas en el intervalo  $(a, b)$  y que  $a_n(x) \neq 0$  en  $(a, b)$ , podemos dividir por  $a_n(x)$  y expresar la ecuación en forma normal

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = g(x), \quad (4)$$

donde  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  y  $g(x)$  son continuas en un intervalo  $(a, b)$ .

Diremos que la ecuación es de **coeficientes constantes**, si los coeficientes  $a_i(x)$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  son constantes; de lo contrario diremos que la ecuación es de **coeficientes variables**. Si  $g(x) \equiv 0$ , se dice que la ecuación es **homogénea**. Si  $g(x) \neq 0$ , se llama ecuación **no homogénea** y el término  $g(x)$  se denomina **término no homogéneo**.

Supongamos que  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), g(x)$  funciones continuas en el intervalo  $(a, b)$  y que  $a_n(x) \neq 0$  en  $(a, b)$ , podemos dividir por  $a_n(x)$  y expresar la ecuación en forma normal

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = g(x), \quad (4)$$

donde  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  y  $g(x)$  son continuas en un intervalo  $(a, b)$ .

En el caso de  $n = 2$ , en lugar de la ecuación (4) escribimos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x).$$

# Teorema de existencia y unicidad

Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  y  $g(x)$  son continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ ; entonces, para cualquier  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  existe una única solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = g(x),$$

# Teorema de existencia y unicidad

Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  y  $g(x)$  son continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ ; entonces, para cualquier  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  existe una única solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = g(x),$$

# Teorema de existencia y unicidad

Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  y  $g(x)$  son continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ ; entonces, para cualquier  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  existe una única solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = g(x),$$

con las  $n$  condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1}.$$

## Ejemplo

Determinemos el máximo intervalo para el cual el teorema anterior nos asegura la existencia y unicidad de una solución del problema de valor inicial

## Ejemplo

Determinemos el máximo intervalo para el cual el teorema anterior nos asegura la existencia y unicidad de una solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \frac{dy}{dx} + \ln(6-x)y = (6-x)^{\frac{1}{4}}, \quad y(4) = 1, y'(4) = 3.$$

## Ejemplo

Determinemos el máximo intervalo para el cual el teorema anterior nos asegura la existencia y unicidad de una solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \frac{dy}{dx} + \ln(6-x)y = (6-x)^{\frac{1}{4}}, \quad y(4) = 1, y'(4) = 3.$$

Tenemos  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ ,  $q(x) = \ln(6-x)$  y  $g(x) = (6-x)^{\frac{1}{4}}$ , están definidas alrededor de 4 en los intervalos  $(2, \infty)$ ,  $(-\infty, 6)$  y  $(-\infty, 6]$ , respectivamente.

## Ejemplo

Determinemos el máximo intervalo para el cual el teorema anterior nos asegura la existencia y unicidad de una solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \frac{dy}{dx} + \ln(6-x)y = (6-x)^{\frac{1}{4}}, \quad y(4) = 1, y'(4) = 3.$$

Tenemos  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ ,  $q(x) = \ln(6-x)$  y  $g(x) = (6-x)^{\frac{1}{4}}$ , están definidas alrededor de 4 en los intervalos  $(2, \infty)$ ,  $(-\infty, 6)$  y  $(-\infty, 6]$ , respectivamente. La intersección de estos últimos conjuntos es  $(2, 6)$  y el Teorema de existencia y unicidad nos garantiza la unicidad de la solución en  $(2, 6)$ .

# Ecuaciones homogéneas

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (5)$$

# Ecuaciones homogéneas

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (5)$$

Entonces, cualquier combinación lineal  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , con  $C_1, C_2$  constantes arbitrarias, también es solución de (5).

# Ecuaciones homogéneas

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (5)$$

Entonces, cualquier combinación lineal  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , con  $C_1, C_2$  constantes arbitrarias, también es solución de (5).

Una consecuencia es que tenemos lo mismo para  $m$  funciones  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  soluciones de la ecuación lineal homogénea (5).

# Ecuaciones homogéneas

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (5)$$

Entonces, cualquier combinación lineal  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , con  $C_1, C_2$  constantes arbitrarias, también es solución de (5).

Una consecuencia es que tenemos lo mismo para  $m$  funciones  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  soluciones de la ecuación lineal homogénea (5).

En este caso, para cualquier constantes  $C_1, \dots, C_m$

# Ecuaciones homogéneas

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (5)$$

Entonces, cualquier combinación lineal  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , con  $C_1, C_2$  constantes arbitrarias, también es solución de (5).

Una consecuencia es que tenemos lo mismo para  $m$  funciones  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  soluciones de la ecuación lineal homogénea (5).

En este caso, para cualquier constantes  $C_1, \dots, C_m$  cualquier combinación lineal  $C_1 y_1(x) + \cdots + C_m y_m(x)$  también es solución de (5).

Consideremos el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces

Consideremos el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Consideremos el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Dado que  $L$  es lineal tenemos que

Consideremos el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Dado que  $L$  es lineal tenemos que

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2)$$

Consideremos el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Dado que  $L$  es lineal tenemos que

$$\begin{aligned} L(C_1 y_1 + C_2 y_2) &= L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) \\ &= C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) \end{aligned}$$

Consideremos el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Dado que  $L$  es lineal tenemos que

$$\begin{aligned} L(C_1 y_1 + C_2 y_2) &= L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) \\ &= C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) \\ &= C_1 0 + C_2 0 \end{aligned}$$

Consideremos el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Dado que  $L$  es lineal tenemos que

$$\begin{aligned} L(C_1 y_1 + C_2 y_2) &= L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) \\ &= C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) \\ &= C_1 0 + C_2 0 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Consideremos el operador  $L$  que a una función diferenciable  $n$  veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Dado que  $L$  es lineal tenemos que

$$\begin{aligned} L(C_1 y_1 + C_2 y_2) &= L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) \\ &= C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) \\ &= C_1 0 + C_2 0 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Una pregunta pendiente es ¿cuántas funciones se necesitan para encontrar una solución general de la ecuación?

## Ejemplo

Dadas las funciones  $y_1(x) = e^x \cos x$  e  $y_2(x) = e^x \sin x$  que son soluciones de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 0,$$

## Ejemplo

Dadas las funciones  $y_1(x) = e^x \cos x$  e  $y_2(x) = e^x \sin x$  que son soluciones de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una solución de dicha ecuación diferencial de segundo orden que verifica las condiciones iniciales  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$ .

## Ejemplo

Dadas las funciones  $y_1(x) = e^x \cos x$  e  $y_2(x) = e^x \sin x$  que son soluciones de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una solución de dicha ecuación diferencial de segundo orden que verifica las condiciones iniciales  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$ .

Por la linealidad toda combinación de estas soluciones,

$$y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x,$$

es solución de dicha ecuación.

## Ejemplo

Dadas las funciones  $y_1(x) = e^x \cos x$  e  $y_2(x) = e^x \sin x$  que son soluciones de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una solución de dicha ecuación diferencial de segundo orden que verifica las condiciones iniciales  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$ .

Por la linealidad toda combinación de estas soluciones,

$$y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x,$$

es solución de dicha ecuación. Encontremos  $C_1$  y  $C_2$  adecuadas usando las condiciones iniciales dadas.

## Ejemplo

Dadas las funciones  $y_1(x) = e^x \cos x$  e  $y_2(x) = e^x \sin x$  que son soluciones de la ecuación diferencial

$$2y'' - 4y' + 4y = 0,$$

hallemos una solución de dicha ecuación diferencial de segundo orden que verifica las condiciones iniciales  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$ .

Por la linealidad toda combinación de estas soluciones,

$$y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x,$$

es solución de dicha ecuación. Encontremos  $C_1$  y  $C_2$  adecuadas usando las condiciones iniciales dadas. Tenemos que

$$y' = C_1(e^x \cos x - e^x \sin x) + C_2(e^x \sin x + e^x \cos x). \quad (7)$$

Usando que  $y(0) = 2$  y  $y'(0) = -1$

Usando que  $y(0) = 2$  y  $y'(0) = -1$  obtenemos las siguientes ecuaciones

$$C_1 = 2$$

Usando que  $y(0) = 2$  y  $y'(0) = -1$  obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}C_1 &= 2 \\C_1 + C_2 &= -1\end{aligned}$$

Usando que  $y(0) = 2$  y  $y'(0) = -1$  obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}C_1 &= 2 \\C_1 + C_2 &= -1\end{aligned}$$

Se sigue que  $C_2 = -3$

Usando que  $y(0) = 2$  y  $y'(0) = -1$  obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}C_1 &= 2 \\C_1 + C_2 &= -1\end{aligned}$$

Se sigue que  $C_2 = -3$  y así la solución es

$$y(x) = 2e^x \cos x - 3e^x \sin x.$$

Consideremos la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0. \quad (8)$$

Consideremos la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0. \quad (8)$$

Tenemos que  $y_1 = \operatorname{sen} x$  y  $y_2 = \operatorname{cos} x$  son soluciones. Dado que toda combinación lineal de la forma

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$$

también es solución.

Consideremos la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0. \quad (8)$$

Tenemos que  $y_1 = \operatorname{sen} x$  y  $y_2 = \operatorname{cos} x$  son soluciones. Dado que toda combinación lineal de la forma

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$$

también es solución. Supongamos ahora que  $\phi(x)$  es otra solución.

Consideremos la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0. \quad (8)$$

Tenemos que  $y_1 = \operatorname{sen} x$  y  $y_2 = \operatorname{cos} x$  son soluciones. Dado que toda combinación lineal de la forma

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$$

también es solución. Supongamos ahora que  $\phi(x)$  es otra solución. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  y supongamos que tenemos constantes  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $y(x_0) = \phi(x_0)$  y  $y'(x_0) = \phi'(x_0)$ ,

Consideremos la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0. \quad (8)$$

Tenemos que  $y_1 = \operatorname{sen} x$  y  $y_2 = \operatorname{cos} x$  son soluciones. Dado que toda combinación lineal de la forma

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$$

también es solución. Supongamos ahora que  $\phi(x)$  es otra solución. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  y supongamos que tenemos constantes  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $y(x_0) = \phi(x_0)$  y  $y'(x_0) = \phi'(x_0)$ , es decir, tenemos que

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{sen} x_0 + C_2 \operatorname{cos} x_0 &= \phi(x_0) \\ C_1 \operatorname{cos} x_0 - C_2 \operatorname{sen} x_0 &= \phi'(x_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Por tanto,  $y$  y  $\phi$  son dos soluciones de (8). Por el teorema de existencia y unicidad ellas coinciden,

Consideremos la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0. \quad (8)$$

Tenemos que  $y_1 = \operatorname{sen} x$  y  $y_2 = \operatorname{cos} x$  son soluciones. Dado que toda combinación lineal de la forma

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$$

también es solución. Supongamos ahora que  $\phi(x)$  es otra solución. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  y supongamos que tenemos constantes  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $y(x_0) = \phi(x_0)$  y  $y'(x_0) = \phi'(x_0)$ , es decir, tenemos que

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{sen} x_0 + C_2 \operatorname{cos} x_0 &= \phi(x_0) \\ C_1 \operatorname{cos} x_0 - C_2 \operatorname{sen} x_0 &= \phi'(x_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Por tanto,  $y$  y  $\phi$  son dos soluciones de (8). Por el teorema de existencia y unicidad ellas coinciden, es decir,

$$\phi(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$$

Para que existan  $C_1$  y  $C_2$  que verifican el sistema (9),

Para que existan  $C_1$  y  $C_2$  que verifican el sistema (9), debemos tener que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x_0 & \cos x_0 \\ \cos x_0 & -\operatorname{sen} x_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Para que existan  $C_1$  y  $C_2$  que verifican el sistema (9), debemos tener que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x_0 & \cos x_0 \\ \cos x_0 & -\operatorname{sen} x_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Hemos visto que dos soluciones particulares de la ecuación (8) son  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$ .

Para que existan  $C_1$  y  $C_2$  que verifican el sistema (9), debemos tener que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x_0 & \cos x_0 \\ \cos x_0 & -\operatorname{sen} x_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Hemos visto que dos soluciones particulares de la ecuación (8) son  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$ . También, todas las soluciones se puede expresar como combinación lineal de estás dos soluciones particulares.

Para que existan  $C_1$  y  $C_2$  que verifican el sistema (9), debemos tener que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x_0 & \cos x_0 \\ \cos x_0 & -\operatorname{sen} x_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Hemos visto que dos soluciones particulares de la ecuación (8) son  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$ . También, todas las soluciones se puede expresar como combinación lineal de estás dos soluciones particulares.

En general, esta propiedad se cumple para ecuaciones lineales de orden dos,

Para que existan  $C_1$  y  $C_2$  que verifican el sistema (9), debemos tener que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x_0 & \cos x_0 \\ \cos x_0 & -\operatorname{sen} x_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Hemos visto que dos soluciones particulares de la ecuación (8) son  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$ . También, todas las soluciones se puede expresar como combinación lineal de éstas dos soluciones particulares.

En general, esta propiedad se cumple para ecuaciones lineales de orden dos, si las soluciones dadas,  $y_1$  y  $y_2$  satisfacen determinada condición que vemos en el siguiente teorema.

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ .

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Si en algún punto  $x_0 \in (a, b)$  se satisface:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12)$$

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Si en algún punto  $x_0 \in (a, b)$  se satisface:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12)$$

entonces, toda solución de (11) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (13)$$

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Si en algún punto  $x_0 \in (a, b)$  se satisface:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12)$$

entonces, toda solución de (11) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (13)$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Si en algún punto  $x_0 \in (a, b)$  se satisface:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12)$$

entonces, toda solución de (11) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (13)$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Al conjunto  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  lo llamaremos **conjunto fundamental** de soluciones de la ecuación (11),

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Si en algún punto  $x_0 \in (a, b)$  se satisface:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12)$$

entonces, toda solución de (11) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (13)$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Al conjunto  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  lo llamaremos **conjunto fundamental** de soluciones de la ecuación (11), donde  $y_1$  e  $y_2$  son las funciones que satisfacen las condiciones del teorema anterior.

**Teorema:** Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Si en algún punto  $x_0 \in (a, b)$  se satisface:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (12)$$

entonces, toda solución de (11) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (13)$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Al conjunto  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  lo llamaremos **conjunto fundamental** de soluciones de la ecuación (11), donde  $y_1$  e  $y_2$  son las funciones que satisfacen las condiciones del teorema anterior. La combinación lineal dada en (13) la llamaremos es la **solución general** de (11).

Notemos que la función idénticamente nula  $y \equiv 0$  es solución de la ecuación (11),

Notemos que la función idénticamente nula  $y \equiv 0$  es solución de la ecuación (11), por el teorema de existencia y unicidad sería la única que satisface  $y(x_0) = 0$  y  $y'(x_0) = 0$ .

Notemos que la función idénticamente nula  $y \equiv 0$  es solución de la ecuación (11), por el teorema de existencia y unicidad sería la única que satisface  $y(x_0) = 0$  y  $y'(x_0) = 0$ .

La solución  $y \equiv 0$  corresponde al caso particular de la solución general donde  $C_1 = C_2 = 0$ .

Notemos que la función idénticamente nula  $y \equiv 0$  es solución de la ecuación (11), por el teorema de existencia y unicidad sería la única que satisface  $y(x_0) = 0$  y  $y'(x_0) = 0$ .

La solución  $y \equiv 0$  corresponde al caso particular de la solución general donde  $C_1 = C_2 = 0$ .

Adicionalmente,  $y_1$  y  $y_2$  del conjunto fundamental no pueden ser la función nula.

Notemos que la función idénticamente nula  $y \equiv 0$  es solución de la ecuación (11), por el teorema de existencia y unicidad sería la única que satisface  $y(x_0) = 0$  y  $y'(x_0) = 0$ .

La solución  $y \equiv 0$  corresponde al caso particular de la solución general donde  $C_1 = C_2 = 0$ .

Adicionalmente,  $y_1$  y  $y_2$  del conjunto fundamental no pueden ser la función nula.

Resolver la ecuación (11) consiste en hallar un conjunto fundamental de soluciones  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  que nos dará la solución general (13).

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ ,

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** de  $y_1$  y  $y_2$  a la función dada por

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** de  $y_1$  y  $y_2$  a la función dada por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** de  $y_1$  y  $y_2$  a la función dada por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Con la notación anterior, una pareja de soluciones  $y_1$  e  $y_2$  de la ecuación diferencial (11) en un intervalo  $(a, b)$  es un conjunto fundamental de soluciones

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** de  $y_1$  y  $y_2$  a la función dada por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Con la notación anterior, una pareja de soluciones  $y_1$  e  $y_2$  de la ecuación diferencial (11) en un intervalo  $(a, b)$  es un conjunto fundamental de soluciones si se cumple que  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ , para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** de  $y_1$  y  $y_2$  a la función dada por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Con la notación anterior, una pareja de soluciones  $y_1$  e  $y_2$  de la ecuación diferencial (11) en un intervalo  $(a, b)$  es un conjunto fundamental de soluciones si se cumple que  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ , para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Diremos que dos funciones  $y_1$  y  $y_2$  son **linealmente dependientes** en un intervalo  $(a, b)$

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** de  $y_1$  y  $y_2$  a la función dada por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Con la notación anterior, una pareja de soluciones  $y_1$  e  $y_2$  de la ecuación diferencial (11) en un intervalo  $(a, b)$  es un conjunto fundamental de soluciones si se cumple que  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ , para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Diremos que dos funciones  $y_1$  y  $y_2$  son **linealmente dependientes** en un intervalo  $(a, b)$  si existen constantes  $C_1$  y  $C_2$ , no simultáneamente nulas,

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** de  $y_1$  y  $y_2$  a la función dada por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Con la notación anterior, una pareja de soluciones  $y_1$  e  $y_2$  de la ecuación diferencial (11) en un intervalo  $(a, b)$  es un conjunto fundamental de soluciones si se cumple que  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ , para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Diremos que dos funciones  $y_1$  y  $y_2$  son **linealmente dependientes** en un intervalo  $(a, b)$  si existen constantes  $C_1$  y  $C_2$ , no simultáneamente nulas, tales que para todo  $x \in (a, b)$  tenemos

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0.$$

Dadas dos funciones diferenciables  $y_1$  y  $y_2$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** de  $y_1$  y  $y_2$  a la función dada por

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Con la notación anterior, una pareja de soluciones  $y_1$  e  $y_2$  de la ecuación diferencial (11) en un intervalo  $(a, b)$  es un conjunto fundamental de soluciones si se cumple que  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ , para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Diremos que dos funciones  $y_1$  y  $y_2$  son **linealmente dependientes** en un intervalo  $(a, b)$  si existen constantes  $C_1$  y  $C_2$ , no simultáneamente nulas, tales que para todo  $x \in (a, b)$  tenemos

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0.$$

En caso contrario diremos que son **linealmente independientes**.

# Criterio para conjunto fundamental de soluciones

Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (15)$$

# Criterio para conjunto fundamental de soluciones

Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (15)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ .

# Criterio para conjunto fundamental de soluciones

Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (15)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

# Criterio para conjunto fundamental de soluciones

Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (15)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  son linealmente independientes.

## Criterio para conjunto fundamental de soluciones

Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (15)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .

# Criterio para conjunto fundamental de soluciones

Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (15)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .
- c)  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

## Criterio para conjunto fundamental de soluciones

Sean  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluciones definidas en  $(a, b)$  de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (15)$$

con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones continuas en  $(a, b)$ . Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .
- c)  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Como consecuencia de lo anterior el Wronskiano es nulo o no para todo  $x \in (a, b)$ .

## Caso general

Dadas  $n$  funciones diferenciables  $y_1, \dots, y_n$ ,

## Caso general

Dadas  $n$  funciones diferenciables  $y_1, \dots, y_n$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** a la función dada por

## Caso general

Dadas  $n$  funciones diferenciables  $y_1, \dots, y_n$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** a la función dada por

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (16)$$

## Caso general

Dadas  $n$  funciones diferenciables  $y_1, \dots, y_n$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** a la función dada por

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Diremos que las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son **linealmente dependientes** en un intervalo  $(a, b)$

## Caso general

Dadas  $n$  funciones diferenciables  $y_1, \dots, y_n$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** a la función dada por

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Diremos que las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son **linealmente dependientes** en un intervalo  $(a, b)$  si existen constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , no simultáneamente nulas,

## Caso general

Dadas  $n$  funciones diferenciables  $y_1, \dots, y_n$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** a la función dada por

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Diremos que las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son **linealmente dependientes** en un intervalo  $(a, b)$  si existen constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , no simultáneamente nulas, tales que para todo  $x \in (a, b)$  tenemos

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0.$$

## Caso general

Dadas  $n$  funciones diferenciables  $y_1, \dots, y_n$ , se denomina **wronskiano** o **determinante de Wronski** a la función dada por

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Diremos que las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son **linealmente dependientes** en un intervalo  $(a, b)$  si existen constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , no simultáneamente nulas, tales que para todo  $x \in (a, b)$  tenemos

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \dots + C_n y_n(x) = 0.$$

En caso contrario diremos que son **linealmente independientes**.

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ .

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes.

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .
- c)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .
- c)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Adicionalmente, si se satisface una de las tres anteriores condiciones (por tanto las tres)

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .
- c)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Adicionalmente, si se satisface una de las tres anteriores condiciones (por tanto las tres) se tiene que toda solución de (17) se expresa de la forma

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .
- c)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Adicionalmente, si se satisface una de las tres anteriores condiciones (por tanto las tres) se tiene que toda solución de (17) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \quad (18)$$

**Teorema:** Sean  $q_{n-1}(x), \dots, q_0(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Supongamos que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y = 0, \quad (17)$$

Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes

- a)  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes.
- b)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .
- c)  $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$  para algún  $x_0 \in (a, b)$ .

Adicionalmente, si se satisface una de las tres anteriores condiciones (por tanto las tres) se tiene que toda solución de (17) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \quad (18)$$

con  $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ .

Al conjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  que satisfacen las condiciones del teorema anterior lo llamaremos **conjunto fundamental** de soluciones de la ecuación (17).

Al conjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  que satisfacen las condiciones del teorema anterior lo llamaremos **conjunto fundamental** de soluciones de la ecuación (17). La combinación lineal dada en (18) la llamaremos es la **solución general** de (17).