

CONCEPTOS BASICOS DE PROBABILIDAD

Cuantificando la posibilidad de que un evento ocurra

Ivan Mauricio Bermúdez Vera

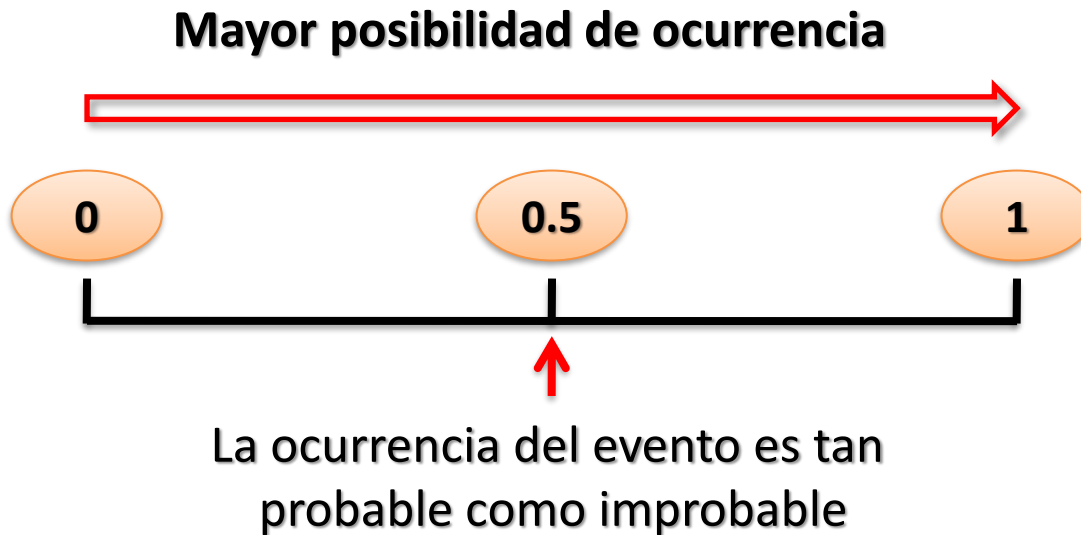
Estadístico, M.Sc. en Ingeniería

mauricio.bermudez@correounivalle.edu.co

¿Qué es la probabilidad?

Probabilidad

es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento.



- ✓ Las probabilidades se pueden usar como medidas del **grado de incertidumbre**.
- ✓ Si se tienen las probabilidades, se podría determinar la **posibilidad de cada evento**.
- ✓ Cuanto más alta es la probabilidad de un suceso, mayor es el **grado de certeza de que ocurrirá** al hacer el experimento aleatorio.

Puntos de vista de la Probabilidad

Existen tres aproximaciones sujetas a la definición de probabilidad de un acontecimiento incierto:

- **Probabilidad clásica o *a priori***

$$\text{probabilidad de ocurrencia} = \frac{x}{n} = \frac{\text{número de formas en las que el evento ocurre}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

- **Probabilidad empírica**

$$\text{probabilidad de ocurrencia} = \frac{\text{número de resultados favorables observados}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

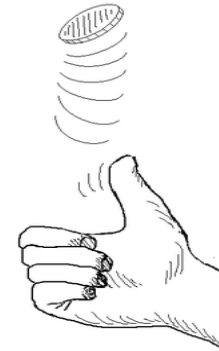
- **Probabilidad subjetiva**

una opinión o juicio individual sobre la probabilidad de ocurrencia de un evento.

Tres Palabras Claves...

Experimento

Un experimento aleatorio es aquel cuyo resultado no puede anticiparse aun cuando se busque repetirlo de la misma manera y bajo las mismas condiciones.



Espacio Muestral (S)

Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico.



$S = \{\text{Cara, Sello}\}$

Evento

Cualquier resultado o conjunto de resultados de un experimento.

A: Que salga cara

B: Que salga sello

Probabilidad Clásica

Probabilidad clásica (Laplace):

Si un experimento que está sujeto al azar, puede ocurrir de n maneras mutuamente excluyentes e igualmente verosímiles y si n_A de estas poseen un atributo A , la probabilidad de A es la fracción n_A/n

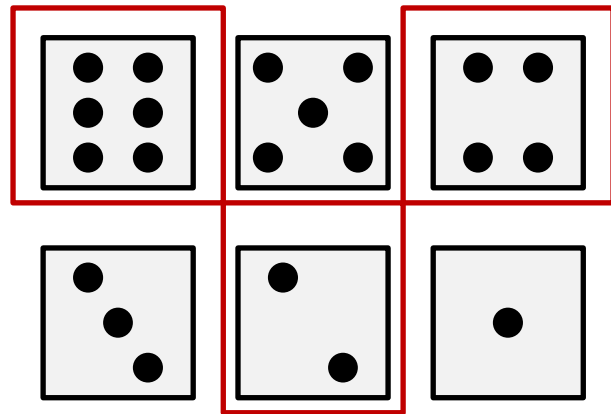
$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{número de veces que ocurre } A}{\text{número de veces que se repite la operación}}$$

Características:

- Conocer todos los casos posibles.
- Saber que todos esos casos posibles tienen la misma probabilidad de salir.

Ejemplo:

- **Exp:** Se lanza un dado.
- **A:** Se observa un numero par.
- ¿Cual es la probabilidad de que el dado caiga en numero par?



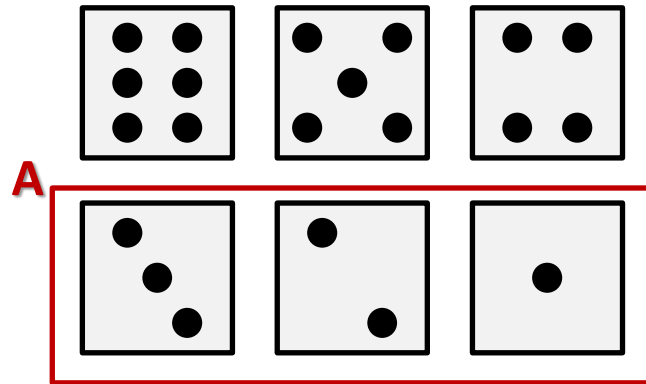
$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

↓

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$

Ejemplo:

- **Exp:** Lanzamiento de un dado.
- **A:** El resultado es menor que 4
- ¿Cuál es la probabilidad de A?



$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$

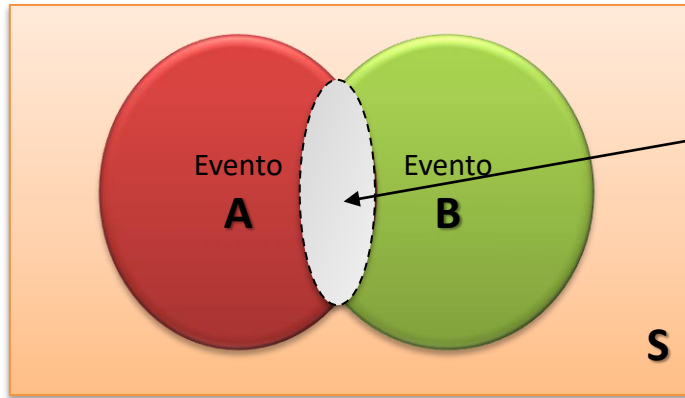
Ejemplo:

- **Exp:** El lanzamiento de dos monedas.
- **A:** Se obtiene al menos una cara.
- ¿Cuál es la probabilidad de A?

$$S = \overset{\textbf{A}}{\boxed{\{(c, c), (c, s), (s, c)\}}} \cup \{(s, s)\}$$

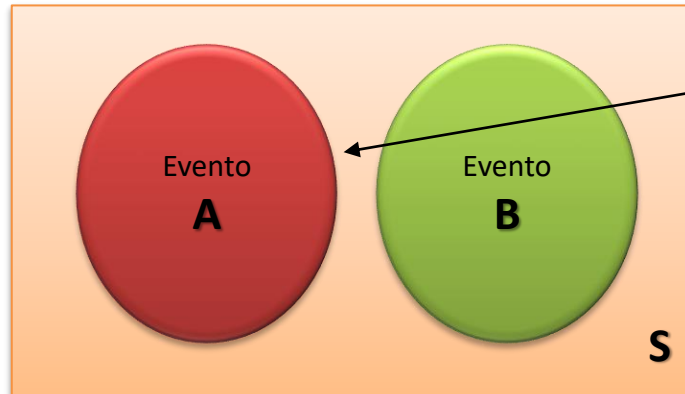
$$P(A) = \frac{3}{4} = 0.75$$

Definición de Eventos



Intersección ($A \cap B$).

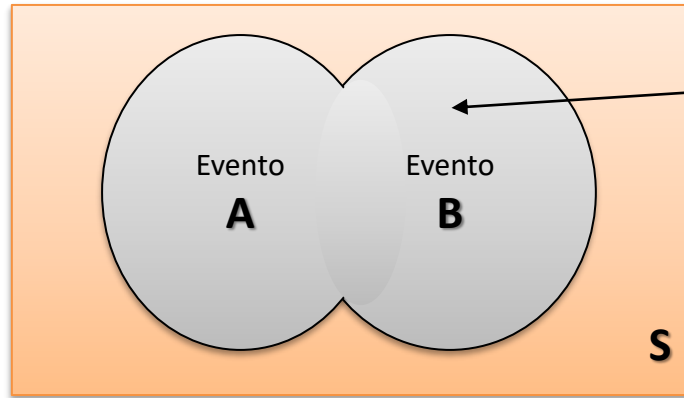
La intersección de dos eventos A y B , es el evento que contiene a todos los elementos comunes de A y B



Eventos mutuamente excluyentes o disjuntos ($A \cap B = \varnothing$)

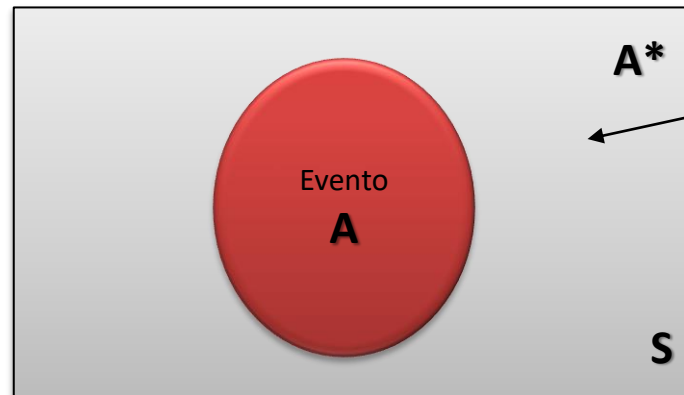
Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si estos eventos no tienen ningún elemento en común.

Definición de Eventos



Unión ($A \cup B$)

La unión de dos eventos A y B , es el evento que contiene a todos los elementos que pertenecen a A o a B , o a ambos.



Complemento (A^*)

El complemento de un evento A con respecto a S es el conjunto de todos los elementos de S que no están en A .

Reglas de Probabilidad

Regla 1:

La probabilidad $P(A)$ de cualquier evento A cumple que:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{“Cualquier probabilidad es un número entre 0 y 1”}$$

Regla 2:

Si S es el espacio muestral de un modelo de probabilidad, entonces:

$$P(S) = 1 \quad \text{“La probabilidad de todos los resultados posibles, considerados conjuntamente, tiene que ser 1”}$$

Regla 3:

Para cualquier suceso A ,

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{“La probabilidad de que un suceso ocurra es 1 menos la probabilidad de que este suceso no ocurra”}$$

Ejemplo:

Espacio muestral del resultado del lanzamiento de un par de dados:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

- **A:** Suma del resultado de los lanzamientos es mayor que 8

$$P(A) = \frac{10}{36} \approx 0.27$$

Ejemplo:

Espacio muestral del resultado del lanzamiento de un par de dados:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

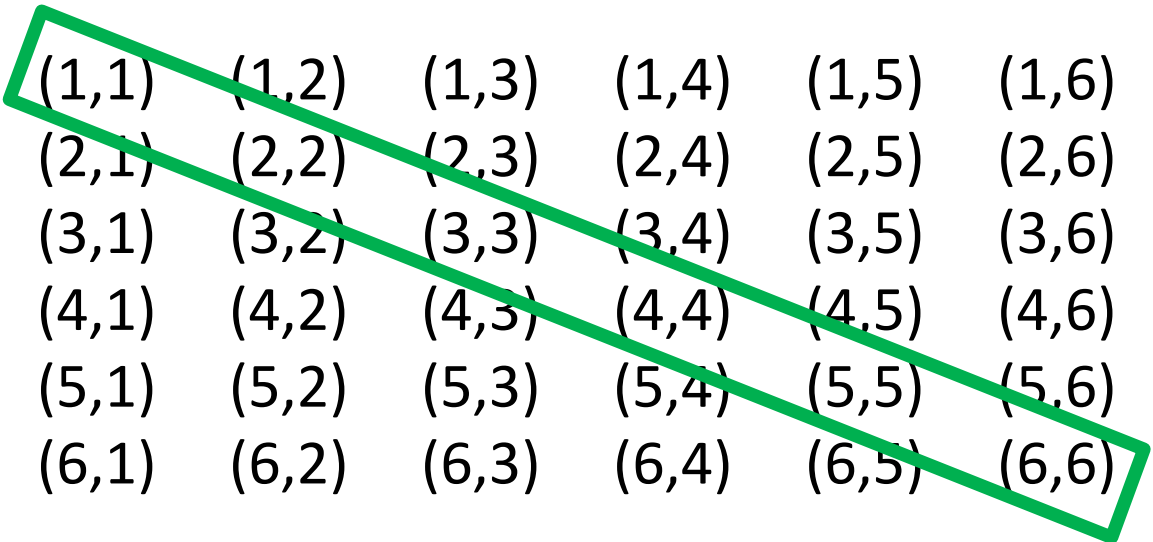
B

- **B:** el resultado del segundo lanzamiento es un número par.

$$P(B) = \frac{18}{36} = 0.5$$

Ejemplo:

Espacio muestral del resultado del lanzamiento de un par de dados:



(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

C

- **C:** “Sale Par” (ambos dados con el mismo resultado)

$$P(C) = \frac{6}{36} \approx 0.16$$

Ejemplo:

Espacio muestral del resultado del lanzamiento de un par de dados:

D

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- **D:** ¿Cuál es la probabilidad de que la suma del resultado de ambos dados sea menor a 10?

Regla de la Adición

- **Regla general de la adición**

Si A y B son dos eventos cualquiera, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **Regla especial de la adición**

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

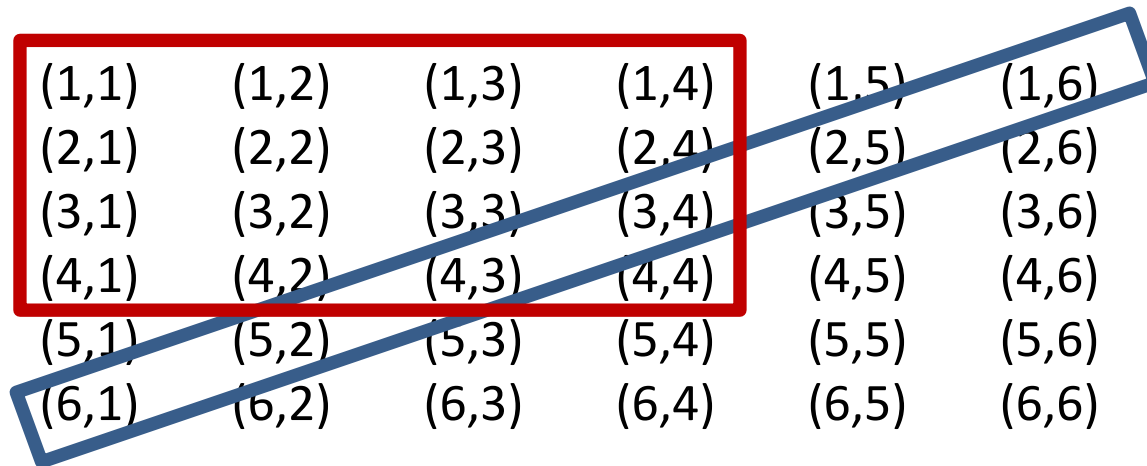
*“si dos sucesos **no tienen resultados en común**, la probabilidad de que ocurra alguno de los dos es la suma de sus respectivas probabilidades”*

Ejemplo: Al lanzar dos dados...

A : la suma de los dos dados sea igual a 7

B : el resultados de los dados sean menores que 5

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A o B ?



(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(A \cup B) \approx 0.55$$

Ejemplo: Al lanzar dos dados...

A : la suma de los dos dados sea igual a 7

C : el resultado de ambos dados es igual

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A o C ?

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(A \cup C) \approx 0.33$$

Ejercicio

Si **A** y **B** son eventos mutuamente excluyentes,
y **$P(A)=0.3$** y **$P(B)=0.5$** , encuentre:

a. $P(A \cup B)$

b. $P(A^c)$

c. $P(A^c \cap B)$

Ejercicio

Los alumnos de Estadística Básica tienen que realizar dos pruebas, una teórica **(T)** y otra práctica **(P)**. La probabilidad de que un estudiante apruebe la parte teórica es de 0.6, la probabilidad de que apruebe la parte práctica es de 0.8 y la probabilidad de que apruebe ambas pruebas es 0.5.

Si se escoge un alumno al azar, cual es la probabilidad de que:

- a. ¿apruebe la parte Teórica?
- b. ¿no apruebe la parte Teórica?
- c. ¿apruebe alguna de las dos pruebas?
- d. ¿solo apruebe la Teórica?

Ejercicio

Una empresa necesita aportes de sus socios para dos proyectos. La probabilidad de que los socios aporten al proyecto A es del 30%, de que aporten al proyecto B es del 60% y de que aporten en ambos es del 8%

- a. ¿Qué probabilidad hay de que aporten al menos en un proyecto?
- b. ¿Qué probabilidad hay de que no aporten al proyecto A?
- c. ¿Qué probabilidad hay de que aporten al proyecto B y no al A?

Ejercicio

En la ciudad se publican 3 periódicos (A, B, C). Realizada una encuesta, se estima que en la población: un 20% lee A, 16% lee B, 14% lee C, 8% lee A y B, 5% lee A y C, 4% lee B y C, y el 2% lee los tres.

Que porcentaje de las personas lee:

- a. El periódico A?
- b. No lee el periódico B?
- c. Lee el periódico A y no el B?
- d. lee al menos un periódico?

Ejercicio

De las 100 personas que asisten a un congreso 40 hablan francés, 40 inglés, 51 castellano, 11 francés e inglés, 12 francés y castellano, 13 inglés y castellano y 5 las tres. Se elige al azar una persona y se desea saber:

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que hable castellano?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que no hable francés?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que se entienda sólo en castellano?
- d. ¿Cuál es la probabilidad de que hable los tres idiomas?
- e. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo hable un idioma?