Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Modelo de Malthus (Crecimiento Exponencial)

En este modelo, la rapidez con que una población cambia es proporcional a la cantidad presente de dicha población.

Modelo de Malthus (Crecimiento Exponencial)

En este modelo, la rapidez con que una población cambia es proporcional a la cantidad presente de dicha población.

Supongamos $x(t)$ es el número de individuos de la población en el instante t tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende de la situación concreta a modelar.

Modelo de Malthus (Crecimiento Exponencial)

En este modelo, la rapidez con que una población cambia es proporcional a la cantidad presente de dicha población.

Supongamos $x(t)$ es el número de individuos de la población en el instante t tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende de la situación concreta a modelar.

Notemos que la función $x \equiv 0$ es solución. Podemos suponer que $x \not\equiv 0$ escribir la ecuación de la forma

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = k.$$

Modelo de Malthus (Crecimiento Exponencial)

En este modelo, la rapidez con que una población cambia es proporcional a la cantidad presente de dicha población.

Supongamos $x(t)$ es el número de individuos de la población en el instante t tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende de la situación concreta a modelar.

Notemos que la función $x \equiv 0$ es solución. Podemos suponer que $x \not\equiv 0$ escribir la ecuación de la forma

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = k.$$

Integrando en ambos lados con respecto a t tenemos

Integrando en ambos lados con respecto a t tenemos

$$\ln|x| = kt + C_1.$$

Integrando en ambos lados con respecto a t tenemos

$$\ln|x| = kt + C_1.$$

Luego

$$|x(t)| = e^{kt}e^{C_1}$$

Integrando en ambos lados con respecto a t tenemos

$$\ln|x| = kt + C_1.$$

Luego

$$|x(t)| = e^{kt}e^{C_1}$$

Quitando el valor absoluto tenemos que

$$x(t) = C_2e^{kt}$$

Integrando en ambos lados con respecto a t tenemos

$$\ln|x| = kt + C_1.$$

Luego

$$|x(t)| = e^{kt}e^{C_1}$$

Quitando el valor absoluto tenemos que

$$x(t) = C_2 e^{kt}$$

donde

$$C_2 = e^{C_1} \text{ o } C_2 = -e^{C_1}.$$

Integrando en ambos lados con respecto a t tenemos

$$\ln|x| = kt + C_1.$$

Luego

$$|x(t)| = e^{kt}e^{C_1}$$

Quitando el valor absoluto tenemos que

$$x(t) = C_2 e^{kt}$$

donde

$$C_2 = e^{C_1} \text{ o } C_2 = -e^{C_1}.$$

Finalmente,

$$x(t) = Ce^{kt}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

Caida libre

Consideremos un cuerpo que cae bajo la acción de la fuerza de la gravedad, ignorando otras fuerzas. Tenemos posición y la velocidad cambian con el tiempo.

Caida libre

Consideremos un cuerpo que cae bajo la acción de la fuerza de la gravedad, ignorando otras fuerzas. Tenemos posición y la velocidad cambian con el tiempo.
Sea $x(t)$ la altura desde el suelo del cuerpo en el tiempo t.

Caida libre

Consideremos un cuerpo que cae bajo la acción de la fuerza de la gravedad, ignorando otras fuerzas. Tenemos posición y la velocidad cambian con el tiempo.
Sea $x(t)$ la altura desde el suelo del cuerpo en el tiempo t. De la segunda ley de Newton tenemos que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

donde m es la masa y $g \approx 9.8\frac{m}{s^2}$ es la constante gravitacional.

Caida libre

Consideremos un cuerpo que cae bajo la acción de la fuerza de la gravedad, ignorando otras fuerzas. Tenemos posición y la velocidad cambian con el tiempo.
Sea $x(t)$ la altura desde el suelo del cuerpo en el tiempo t. De la segunda ley de Newton tenemos que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

donde m es la masa y $g \approx 9.8\frac{m}{s^2}$ es la constante gravitacional.

Integrando con respecto de t obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1.$$

Similarmente obtenemos

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Similarmente obtenemos

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Supongamos que x_0 y v_0 son la posición y velocidad inicial cuando $t = 0$, respectivamente.

Similarmente obtenemos

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Supongamos que x_0 y v_0 son la posición y velocidad inicial cuando $t = 0$, respectivamente.

Tenemos que

$$x(0) = x_0 = 0 + 0 + C_2 = C_2 \quad \text{y}$$

Similarmente obtenemos

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Supongamos que x_0 y v_0 son la posición y velocidad inicial cuando $t = 0$, respectivamente.

Tenemos que

$$x(0) = x_0 = 0 + 0 + C_2 = C_2 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 = 0 + C_1 = C_1.$$

Similarmente obtenemos

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Supongamos que x_0 y v_0 son la posición y velocidad inicial cuando $t = 0$, respectivamente.

Tenemos que

$$x(0) = x_0 = 0 + 0 + C_2 = C_2 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 = 0 + C_1 = C_1.$$

Por tanto

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

Similarmente obtenemos

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Supongamos que x_0 y v_0 son la posición y velocidad inicial cuando $t = 0$, respectivamente.

Tenemos que

$$x(0) = x_0 = 0 + 0 + C_2 = C_2 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 = 0 + C_1 = C_1.$$

Por tanto

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

En el caso que x_0 y v_0 son la posición y velocidad inicial cuando $t = t_0$ un análisis similar nos lleva

$$x(t) = -\frac{g(t - t_0)^2}{2} + v_0(t - t_0) + x_0.$$

Definición de ecuación diferencial ordinaria

Una *ecuación diferencial ordinaria de orden* m es una ecuación que relaciona una función desconocida $x = x(t)$, sus derivadas hasta orden m y la variable de la que depende t de la siguiente forma

Definición de ecuación diferencial ordinaria

Una *ecuación diferencial ordinaria de orden* m es una ecuación que relaciona una función desconocida $x = x(t)$, sus derivadas hasta orden m y la variable de la que depende t de la siguiente forma

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0, \tag{1}$$

Definición de ecuación diferencial ordinaria

Una *ecuación diferencial ordinaria de orden* m es una ecuación que relaciona una función desconocida $x = x(t)$, sus derivadas hasta orden m y la variable de la que depende t de la siguiente forma

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0, \tag{1}$$

donde F es una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^{m+2}$ a $\mathbb{R}$.

Definición de ecuación diferencial ordinaria

Una *ecuación diferencial ordinaria de orden* m es una ecuación que relaciona una función desconocida $x = x(t)$, sus derivadas hasta orden m y la variable de la que depende t de la siguiente forma

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0, \tag{1}$$

donde F es una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^{m+2}$ a $\mathbb{R}$.

En algunas ecuaciones diferenciales pueden aparecer términos constantes que llamaremos *parámetros*. Por ejemplo, la constante k en el modelo de Malthus, m y g en el ejemplo de caida libre.

Definición de ecuación diferencial ordinaria

Una *ecuación diferencial ordinaria de orden* m es una ecuación que relaciona una función desconocida $x = x(t)$, sus derivadas hasta orden m y la variable de la que depende t de la siguiente forma

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0, \tag{1}$$

donde F es una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^{m+2}$ a $\mathbb{R}$.

En algunas ecuaciones diferenciales pueden aparecer términos constantes que llamaremos *parámetros*. Por ejemplo, la constante k en el modelo de Malthus, m y g en el ejemplo de caida libre. En este curso trabajaremos sólo con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición de ecuación diferencial ordinaria

Una *ecuación diferencial ordinaria de orden* m es una ecuación que relaciona una función desconocida $x = x(t)$, sus derivadas hasta orden m y la variable de la que depende t de la siguiente forma

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0, \tag{1}$$

donde F es una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^{m+2}$ a $\mathbb{R}$.

En algunas ecuaciones diferenciales pueden aparecer términos constantes que llamaremos *parámetros*. Por ejemplo, la constante k en el modelo de Malthus, m y g en el ejemplo de caida libre. En este curso trabajaremos sólo con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Diremos que una ecuación diferencial es *normal* de orden m si está escrita en la forma siguiente

Definición de ecuación diferencial ordinaria

Una *ecuación diferencial ordinaria de orden* m es una ecuación que relaciona una función desconocida $x = x(t)$, sus derivadas hasta orden m y la variable de la que depende t de la siguiente forma

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0, \tag{1}$$

donde F es una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^{m+2}$ a $\mathbb{R}$.

En algunas ecuaciones diferenciales pueden aparecer términos constantes que llamaremos *parámetros*. Por ejemplo, la constante k en el modelo de Malthus, m y g en el ejemplo de caida libre. En este curso trabajaremos sólo con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Diremos que una ecuación diferencial es *normal* de orden m si está escrita en la forma siguiente

$$\frac{d^mx}{dt^m} = G(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}). \tag{2}$$

Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Una *solución de la ecuación diferencial* (1) es una función real $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Una *solución de la ecuación diferencial* (1) es una función real $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. x es continua y diferenciable en I hasta el orden m.

Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Una *solución de la ecuación diferencial* (1) es una función real $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. x es continua y diferenciable en I hasta el orden m.
2. Satisface

$$F(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \frac{d^2x}{dt^2}(t), \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}(t)) = 0, \tag{3}$$

   para todo $t \in I$.

Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Una *solución de la ecuación diferencial* (1) es una función real $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. x es continua y diferenciable en I hasta el orden m.
2. Satisface

$$F(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \frac{d^2x}{dt^2}(t), \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}(t)) = 0, \tag{3}$$

   para todo $t \in I$.

Llamaremos a I *intervalo de definición* de la solución $x(t)$.

Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Una *solución de la ecuación diferencial* (1) es una función real $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. x es continua y diferenciable en I hasta el orden m.
2. Satisface

$$F(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \frac{d^2x}{dt^2}(t), \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}(t)) = 0, \tag{3}$$

   para todo $t \in I$.

Llamaremos a I *intervalo de definición* de la solución $x(t)$.

Nota: algunas veces llamamos solución *explícita* si la solución es una expresión de la forma $x = x(t)$.

Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Una *solución de la ecuación diferencial* (1) es una función real $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

1. x es continua y diferenciable en I hasta el orden m.
2. Satisface

$$F(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \frac{d^2x}{dt^2}(t), \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}(t)) = 0, \tag{3}$$

   para todo $t \in I$.

Llamaremos a I *intervalo de definición* de la solución $x(t)$.

Nota: algunas veces llamamos solución *explícita* si la solución es una expresión de la forma $x = x(t)$. Llamamos solución *implícita* si la solución se tiene de la forma $g(t, x) = 0$, donde x depende implícitamente de t.

Ejemplos

✠ Las funciones de la forma $x(t) = Ce^{kt}$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = kx$. En efecto, $\dfrac{dx}{dt}(t) = Cke^{kt} = kx(t)$

Ejemplos

✠ Las funciones de la forma $x(t) = Ce^{kt}$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = kx$. En efecto, $\dfrac{dx}{dt}(t) = Cke^{kt} = kx(t)$

✠ Las funciones de la forma $z(t) = kt + C$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dz}{dt} = k$.

Ejemplos

✠ Las funciones de la forma $x(t) = Ce^{kt}$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = kx$. En efecto, $\dfrac{dx}{dt}(t) = Cke^{kt} = kx(t)$

✠ Las funciones de la forma $z(t) = kt + C$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dz}{dt} = k$.

✠ Las funciones de la forma $y(x) = Ccos(wx)$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{d^2y}{dx^2} + w^2y = 0$.

Ejemplos

✠ Las funciones de la forma $x(t) = Ce^{kt}$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = kx$. En efecto, $\dfrac{dx}{dt}(t) = Cke^{kt} = kx(t)$

✠ Las funciones de la forma $z(t) = kt + C$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dz}{dt} = k$.

✠ Las funciones de la forma $y(x) = Ccos(wx)$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{d^2y}{dx^2} + w^2y = 0$.

✠ La ecuación $(x')^2 + 2 = 0$ no tiene solución.

Ejemplos

✠ Las funciones de la forma $x(t) = Ce^{kt}$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = kx$. En efecto, $\dfrac{dx}{dt}(t) = Cke^{kt} = kx(t)$

✠ Las funciones de la forma $z(t) = kt + C$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{dz}{dt} = k$.

✠ Las funciones de la forma $y(x) = Ccos(wx)$ definidas en $(-\infty, \infty)$ son soluciones de la ecuación $\dfrac{d^2y}{dx^2} + w^2y = 0$.

✠ La ecuación $(x')^2 + 2 = 0$ no tiene solución.

✠ La ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ es una solución implícita donde y depende de x de la ecuación $y' = \frac{-x}{y}$.

Problema de valor inicial

Un problema de valor inicial de una ecuación diferencial de orden m

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0$$

Problema de valor inicial

Un problema de valor inicial de una ecuación diferencial de orden m

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0$$

consiste en encontrar una solución x en el intervalo I tal que para cada $t_0 \in I$ satisfaga las condiciones iniciales

$$x_0 = x(t_0), x_1 = \frac{dx}{dt}(t_0), x_2 = \frac{d^2x}{dt^2}(t_0), \ldots, x_{m-1} = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}(t_0)$$

Problema de valor inicial

Un problema de valor inicial de una ecuación diferencial de orden m

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^mx}{dt^m}) = 0$$

consiste en encontrar una solución x en el intervalo I tal que para cada $t_0 \in I$ satisfaga las condiciones iniciales

$$x_0 = x(t_0), x_1 = \frac{dx}{dt}(t_0), x_2 = \frac{d^2x}{dt^2}(t_0), \ldots, x_{m-1} = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}(t_0)$$

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ son constantes.

Ejemplos

$y = e^{2(t-1)}$ es solución del problema de valor inicial $y' = 2y$, $y(1) = 1$.

Ejemplos

$y = e^{2(t-1)}$ es solución del problema de valor inicial $y' = 2y$, $y(1) = 1$.

$y = sen(x)$ es solución del problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$.

Ejemplos

$y = e^{2(t-1)}$ es solución del problema de valor inicial $y' = 2y$, $y(1) = 1$.

$y = sen(x)$ es solución del problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$.

El problema de valor inicial $y' - \sqrt{y} = 0$, $y(0) = 0$ tiene dos soluciones $y_1 \equiv 0$ y

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} & x > 0 \end{cases}$$

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = f(t, x),$$

$$x(t_0) = x_0$$

Teorema fundamental de existencia y unicidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = f(t, x),$$

$$x(t_0) = x_0$$

donde f y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$

Teorema fundamental de existencia y unicidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = f(t, x),$$

$$x(t_0) = x_0$$

donde f y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ tal que $(t_0, x_0) \in R$.

Teorema fundamental de existencia y unicidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = f(t, x),$$

$$x(t_0) = x_0$$

donde f y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ tal que $(t_0, x_0) \in R$. Entonces existe un intervalo $I = (t_0 - h, t_0 + h)$

Teorema fundamental de existencia y unicidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = f(t, x),$$

$$x(t_0) = x_0$$

donde f y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ tal que $(t_0, x_0) \in R$. Entonces existe un intervalo $I = (t_0 - h, t_0 + h)$ y una única función $x(t)$ definida en I que satisface dicho problema.

El problema de valor inicial

$$x' = ln(x),$$

$$x(1) = 1$$

tiene solución.

El problema de valor inicial

$$x' = ln(x),$$

$$x(1) = 1$$

tiene solución.

El problema de valor inicial

$$x' = -x^2,$$

$$x(1) = 1$$

tiene solución $x(t) = \frac{1}{t}$ la cual está definida para $t > 0$.

El problema de valor inicial

$$x' = ln(x),$$

$$x(1) = 1$$

tiene solución.

El problema de valor inicial

$$x' = -x^2,$$

$$x(1) = 1$$

tiene solución $x(t) = \frac{1}{t}$ la cual está definida para $t > 0$.

En el problema de valor inicial $y' - \sqrt{y} = 0$, $y(0) = 0$ tenemos que $f(x, y) = \sqrt{y}$ la cual no es diferenciable en $y = 0$ y por tanto el teorema no aplica.