Bases y dimensión (continuación)

Teorema 9 [*Característica común de las bases*].
Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen igual número de elementos.

Definición 7[*Dimensión*]. Dado V, un espacio vectorial no trivial, decimos que $dim(V)$, la dimensión de V, es el número de elementos de una base de V; es decir, si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V, decimos que

$$dim(V) = n,$$

En caso que $V = \{\mathbf{0}\}$, espacio vectorial que no tiene base, por conveniencia, decimos que el espacio vectorial tiene dimensión 0, y en caso que un espacio vectorial no tenga una base finita, diremos que es de dimensión infinita.

Ejemplos.

1. Dado que $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.
   Entonces $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

- $B_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

- $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

2. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base $P_n \Rightarrow \dim(P_n) = n+1$

- $B_1 = \{1, x, x^2\}$ es una base de $P_2 \Rightarrow \dim(P_2) = 3$.

- $B_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ es una base de $P_4 \Rightarrow \dim(P_4) = 5$.

3. Sean $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Luego, $\dim(\mathcal{M}_{2\times 2}) = 4$.

En general, si E_{ij} es la matriz $m\times n$ cuya componente $(i,j) = 1$ y las restantes son cero. Entonces

$$B = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn}\}$$

es una base de $\mathcal{M}_{m\times n}$, el e.v. de las matrices de tamaño $m\times n$. Asi que $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}) = mn$. En particular,

- $\dim(\mathcal{M}_{3\times 3}) = 3\cdot 3 = 9$.
- $\dim(\mathcal{M}_{3\times 4}) = 3\cdot 4 = 12$.

4. Sea $V = \operatorname{Gen}\{1-x,\ 1+x,\ x\}$. Determine la $\dim(V)$.

- observe que $x = -\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$

Entonce $V = \operatorname{Gen}\{1-x, 1+x, x\} = \operatorname{Gen}\{1-x, 1+x\}$.

- Puede verse que $\{1-x, 1+x\}$ es l.i.

$$\alpha(1-x) + \beta(1+x) = 0$$

$$(\alpha+\beta)+(-\alpha+\beta)x = 0$$

$$\alpha+\beta=0 \qquad -\alpha+\beta=0.$$

$$\alpha=-\beta \qquad 2\beta=0$$

$$\beta=0.$$

Como $\{1-x, 1+x\}$ es l.i. y genera a V, es una base de V.
Asi que $\dim(V)=2$.

Teorema 10 [*Propiedad maximal y minimal de un subconjunto de vectores*].
Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea S un subconjunto de V con m elementos.

1. Si S es $l.i.$, entonces $m \leq n$.
2. Si S genera a V, entonces $m \geq n$.

Ejemplos.

1. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con m elementos.
   - Si S es l.i. entonces $m \leq 3$ ya que $\dim(\mathbb{R}^3)=3$.
   - Si $\text{Gen}\, S=\mathbb{R}^3$ entonces $m \geq 3$.

2. Sea M un conjunto de K matrices de tamaño m×n.
   - si M es l.i. entonces $K \leq mn = \dim(\mathcal{M}_{m\times n})$
   - si $\text{Gen}\, M = \mathcal{M}_{m\times n}$ entonces $K \geq mn = \dim(\mathcal{M}_{m\times n})$.

3. Sea $A=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}$.

   ¿$\mathcal{M}_{2\times 2} = \text{Gen}\, A$? NO, pues un conjunto generador de $\mathcal{M}_{2\times2}$

debe tener 4 elementos o más, ya que $\dim(M_{2\times 2}) = 4$.

4. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

¿ B es un conjunto l.i. ? NO.

Teorema 11 [*Propiedad maximal y minimal de una base*].
Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea S un subconjunto de V con n elementos.

1. Si S es *l.i.*, entonces S es una base de V.
2. Si S genera a V, entonces S es una base de V.

Ejemplo. $S = \{1 - x, 1 + x, x^2\} \subseteq \mathbb{P}_2$

Dado que S tiene 3 elementos l.i. y $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$, enlonces S es una base de $\mathbb{P}_2$.

Teorema 12 [*Construcción de una base a partir de un subconjunto de vectores*].
Sea V un espacio vectorial de dimensión n y S un subconjunto de V con m elementos.

1. Si S es *l.i.*, podemos encontrar un conjunto T que **contiene** a S y es una base de V.
2. Si $V = Gen\ S$, entonces podemos encontrar un conjunto T **contenido** en S que es una base de V.

Ejemplo.

1. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

2. Encontrar una base de P_2 que contenga a $S=\{1-x^2, 1+2x\}$

Solución:

- S es un conjunto l.i.
- Hay que hallar $v \in P_2$ tal que $v \notin \text{Gen}\, S$. De esta manera $\{1-x^2, 1+2x, v\}$ será una base de V.
- Sea $B=\{1, x, x^2\}$ base de P_2. Veamos que $1 \notin \text{Gen}\, S$.

$$\alpha(1-x^2)+\beta(1+2x)=1. \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(\alpha+\beta) + 2\beta x - \alpha x^2 = 1$$

$$\alpha+\beta=1 \qquad 2\beta=0 \qquad -\alpha=0$$

$$\beta=0 \qquad \alpha=0$$

$$0=1 \quad \text{Falso.} \quad \Rightarrow \quad 1 \notin \text{Gen}\, S.$$

Luego $\{1-x^2, 1+2x, 1\}$ es l.i. y es una base de P_2.