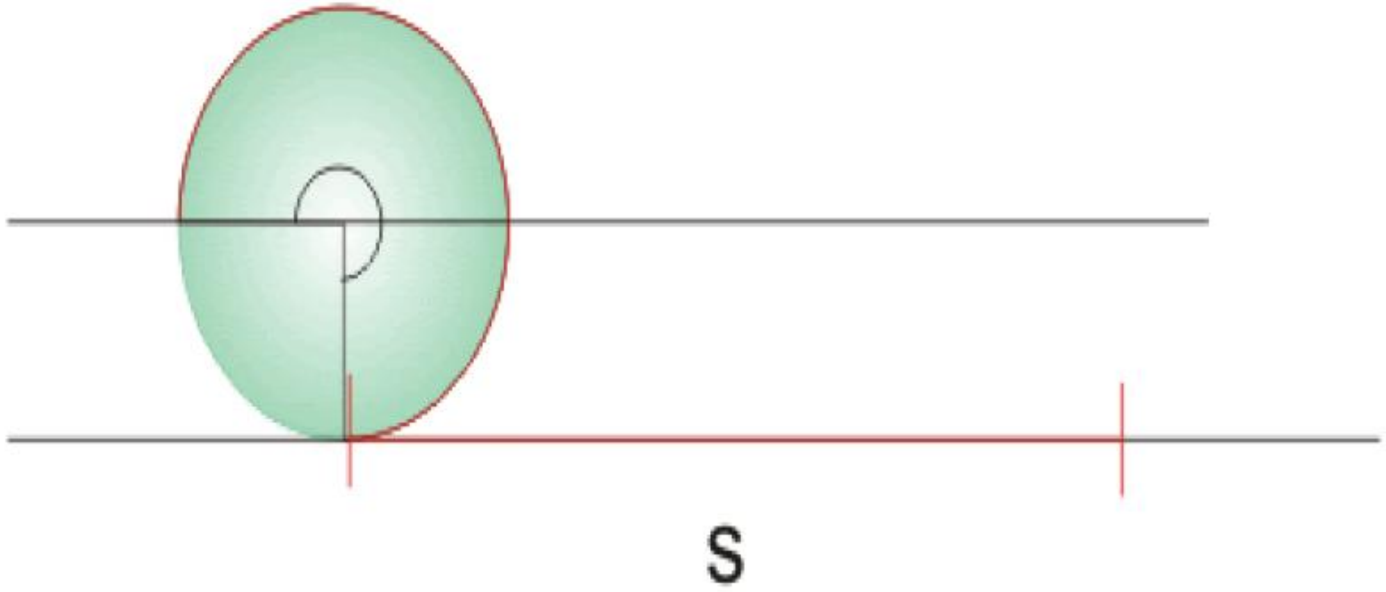
FISICA 1

Marisela Benitez Barahona

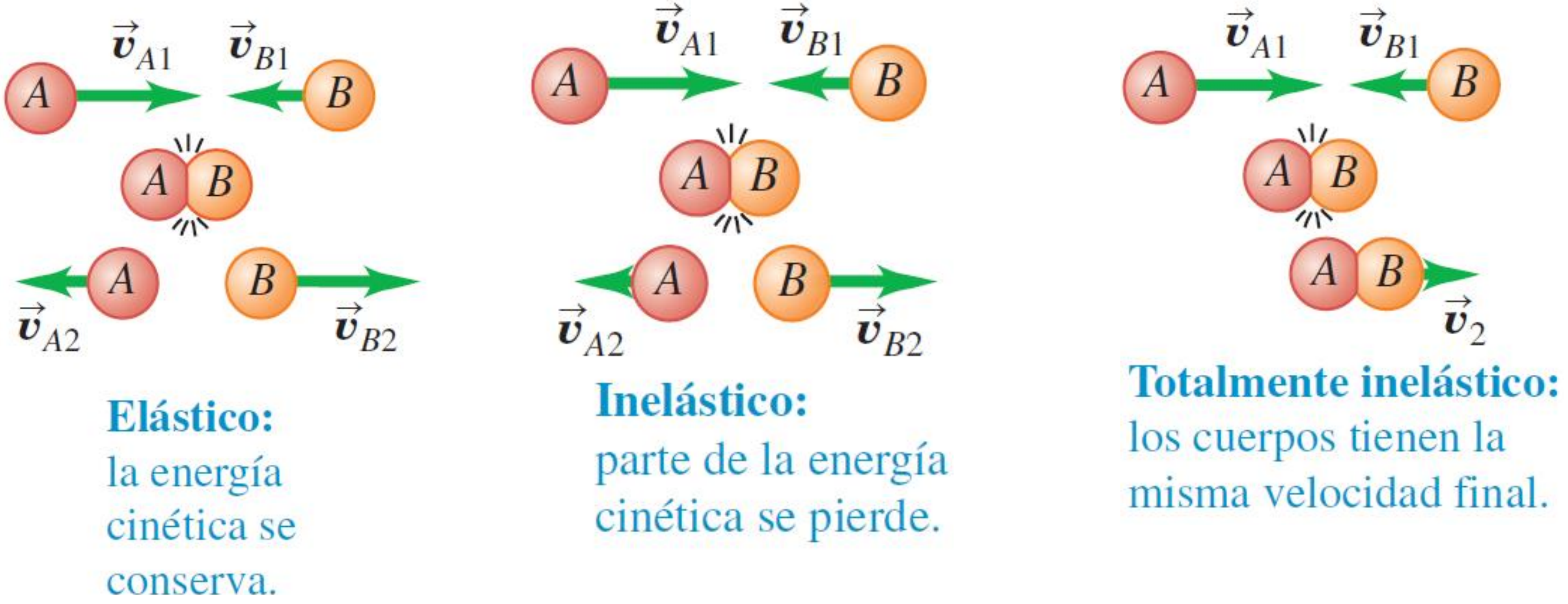
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del valle

CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE ROTACIÓN DE CUERPO RÍGIDO



Resumen

CLASIFICACIÓN DE LOS CHOQUES



ELÁSTICOS

- Dos objetos chocan sin deformarse y sin producir calor.
- Se conserva el momento lineal.
- Se conserva la energía cinética del sistema.

INELÁSTICOS

- Dos objetos chocan deformándose y produciendo calor.
- Se conserva el momento lineal.
- No se conserva la energía cinética del sistema.

PERFECTAMENTE INELÁSTICOS

- Dos objetos chocan se deforman y producen calor.
- Se conserva el momento lineal.
- Los objetos permanecen unidos después del choque

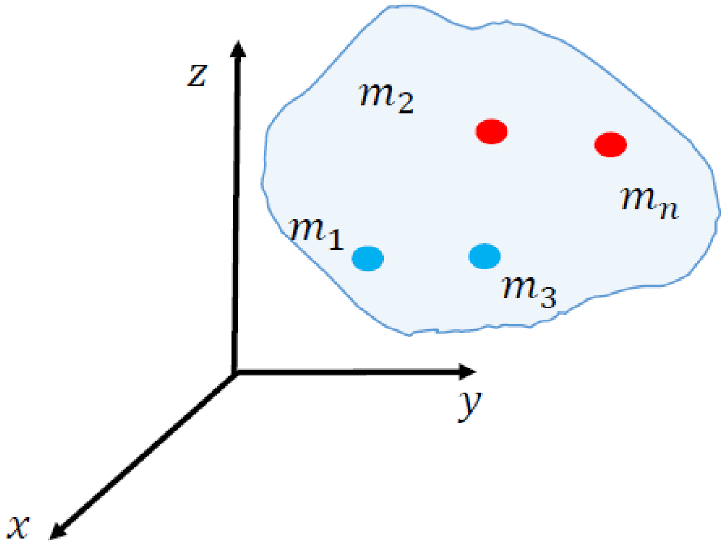
En todas las colisiones la cantidad de movimiento se conserva si no hay fuerzas disipativas externas

Sistemas de partículas

Son modelos complejos donde se considera la geometría y dimensiones de los objetos de estudio. Es decir, se presenta a los objetos como agregados de partículas que interaccionan.

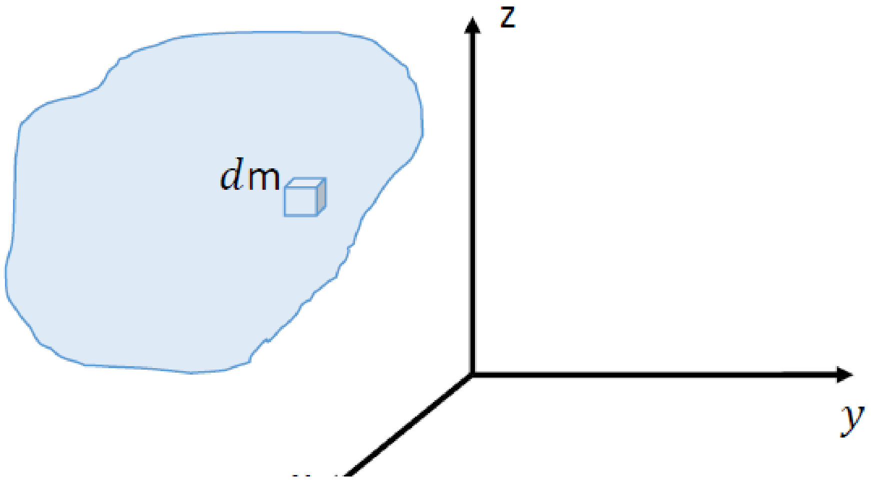
DISCRETOS

Son sistemas con un número finito de partículas.



CONTINUOS

Son sistemas con un número infinito de partículas, es decir, una distribución continua de materia.



CENTRO DE MASAS

Se realizará una descripción del movimiento global de un sistema en términos de un punto denominado el centro de masa del sistema.

Se verá que el movimiento traslacional del centro de masa del sistema es el mismo, como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en dicho punto.

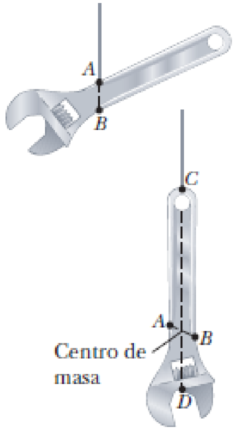
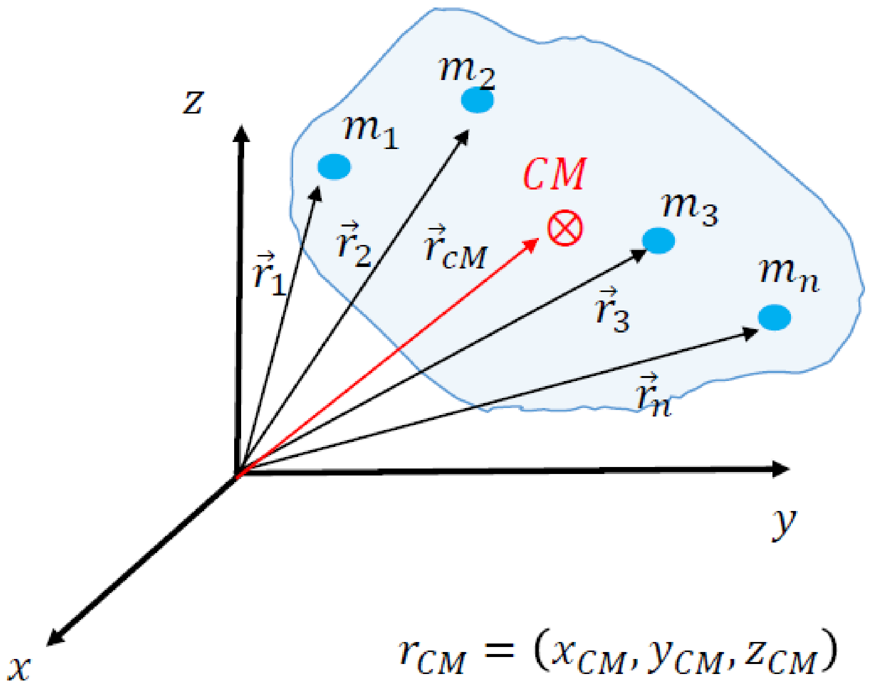


Figura 9.16 Una técnica experimental para determinar el centro de masa de una llave de tuerca. La llave de tuerca cuelga libremente, primero del punto *A* y luego del punto *C*. La intersección de las dos líneas *AB* y *C* ubica el centro de masa.

La fuerza externa neta se aplicara a una sola partícula ubicada en el centro de masa.

SISTEMA DISCRETO DE PARTÍCULAS

El *centro de masa* es una posición definida en relación a un objeto o a un sistema de objetos. Es el promedio de la posición de todas las partes del sistema, ponderadas de acuerdo a sus masas.



$$r_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$$

Supongamos que tenemos varias partículas con masas m_1, m_2, … m_n. Las coordenadas de m_1 son $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, las de m_2 son $(x_2,\ y_2,\ z_2)$, y así sucesivamente. Definimos el centro de masa del sistema como el punto con coordenadas (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}), dadas por:

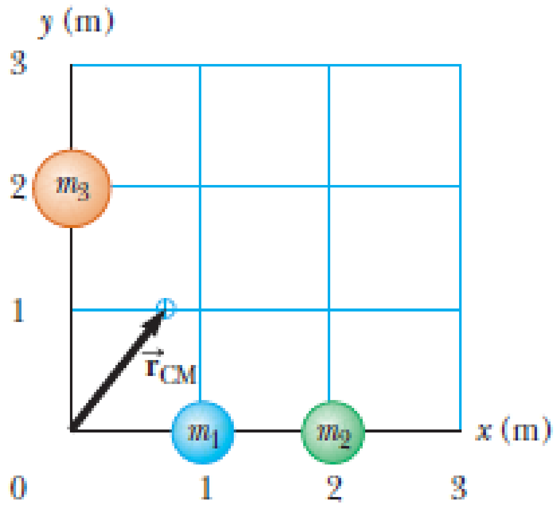
$$\left\{\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} \longrightarrow x_{CM} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M} \\ y_{CM} &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} \longrightarrow y_{CM} = \frac{\sum_i m_iy_i}{M} \\ z_{CM} &= \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots m_nz_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} \longrightarrow z_{CM} = \frac{\sum_i m_iz_i}{M} \end{aligned}\right.$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$ donde: $$M = \sum_i m_i$$

Ejemplo 1

El centro de masa de tres partículas

Un sistema consiste de tres partículas ubicadas como se muestra en la figura, $m1 = m2 = 1.0$ kg y $m3 = 2.0$ kg. Encuentre el centro de masa del sistema.



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(1.0\text{ m}) + (1.0\text{ kg})(2.0\text{ m}) + (2.0\text{ kg})(0)}{1.0\text{ kg} + 1.0\text{ kg} + 2.0\text{ kg}}$$

$$= \frac{3.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 0.75\text{ m}$$

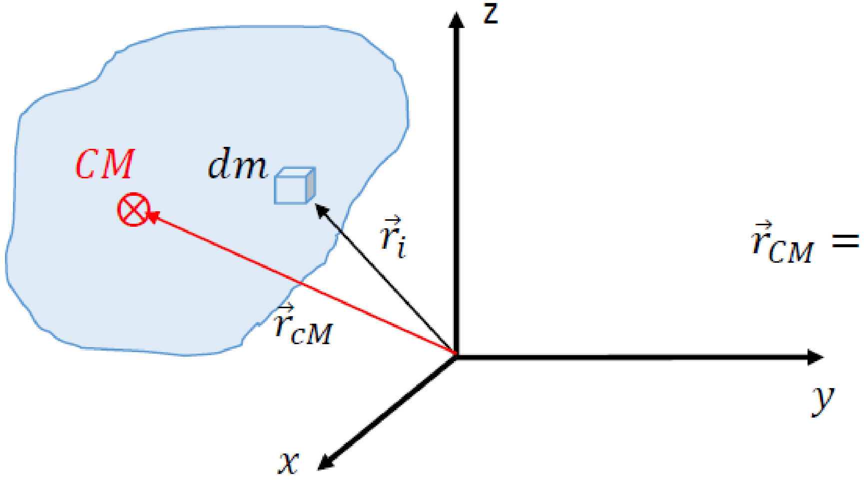
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{ kg})(0) + (1.0\text{ kg})(0) + (2.0\text{ kg})(2.0\text{ m})}{4.0\text{ kg}} = \frac{4.0\text{ kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{ kg}} = 1.0\text{ m}$$

$$\vec{r}_{CM} \equiv x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} = \boxed{(0.75\hat{i} + 1.0\hat{j})\text{ m}}$$

SISTEMA CONTINUO DE PARTÍCULAS

Consideramos que el objeto tiene una distribución de masa continua. Al dividir el objeto en elementos de masa Δm_i, Si se hace que el número n de elementos tienda a infinito, el tamaño de cada elemento tiende a cero, por lo tanto el centro de masa será:



$$\vec{r}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$$

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} \qquad x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$y_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i y_i \Delta m_i}{M} \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

$$z_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i z_i \Delta m_i}{M} \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

La posición vectorial del centro de masa de un objeto extendido se expresa en la forma:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Distribución lineal de masa $\lambda = \frac{M}{L}$

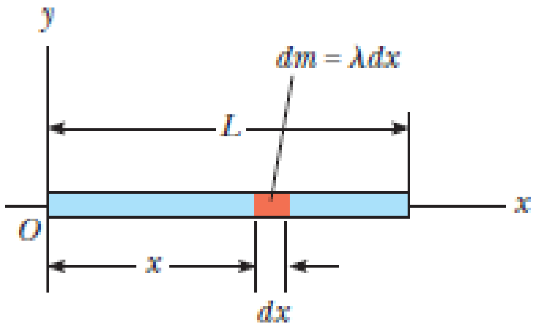
Distribución superficial de masa $\sigma = \frac{M}{A}$

Distribución volumétrica de masa $\rho = \frac{M}{V}$

Ejemplo 2

El centro de masa de una barra

Demuestre que el centro de masa de una barra de masa *M* y longitud *L* se encuentra equidistante de sus extremos, si supone que la barra tiene una masa uniforme por unidad de longitud



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \boxed{\frac{L}{2}}$$

Suponga que una barra *no es uniforme*, tal que su masa por unidad de longitud varia linealmente con *x* de acuerdo con la expresión $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante. Encuentre la coordenada *x* del centro de masa como fracción de *L*.

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx = \frac{1}{M}\int_0^L x\alpha x\,dx$$

$$= \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\,dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda\,dx = \int_0^L \alpha x\,dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

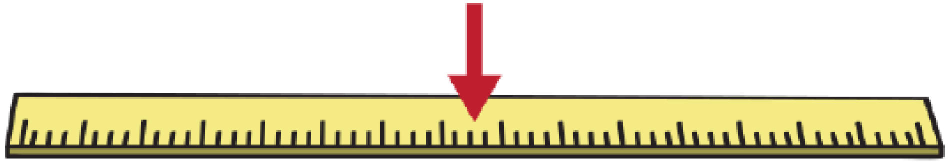
$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \boxed{\tfrac{2}{3}L}$$

CENTRO DE GRAVEDAD

El centro de masa de un objeto o de un sistema, es el punto en donde actúa cualquier fuerza uniforme sobre el objeto.

Concepto puramente geométrico que depende de la forma del sistema.

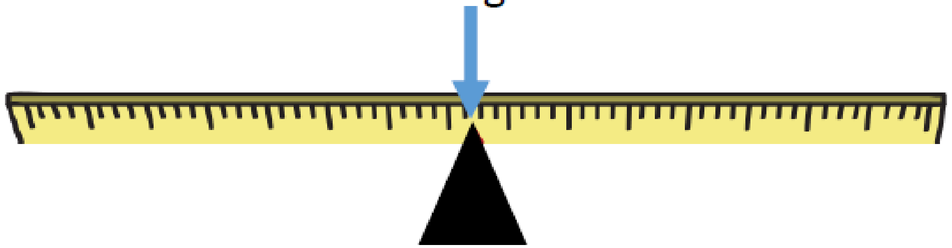
Centro de masa



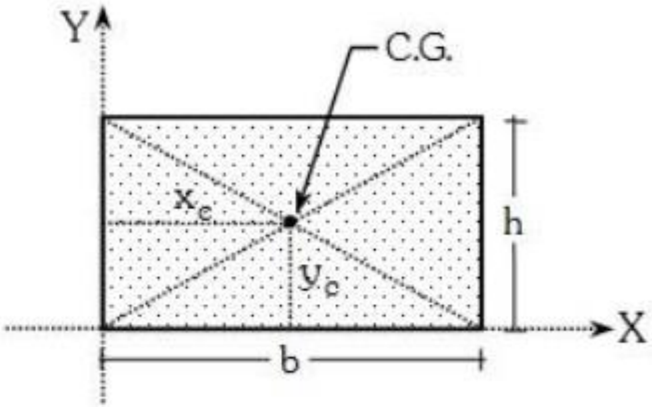
El *centro de gravedad* es el punto a través del cual la fuerza de gravedad actúa sobre un objeto o un sistema.

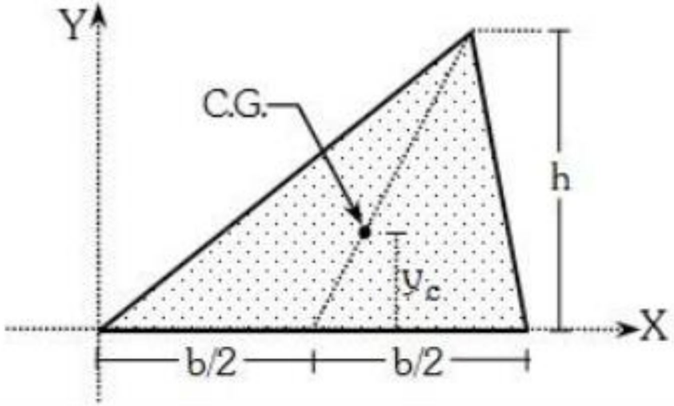
En la mayoría de los problemas de mecánica, se supone que el campo gravitacional es uniforme y los cuerpos son simétricos y con densidad homogénea de masa, por lo tanto, el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

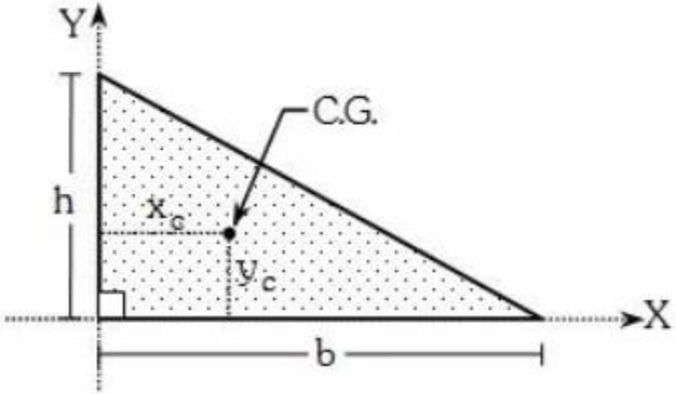
Centro de gravedad

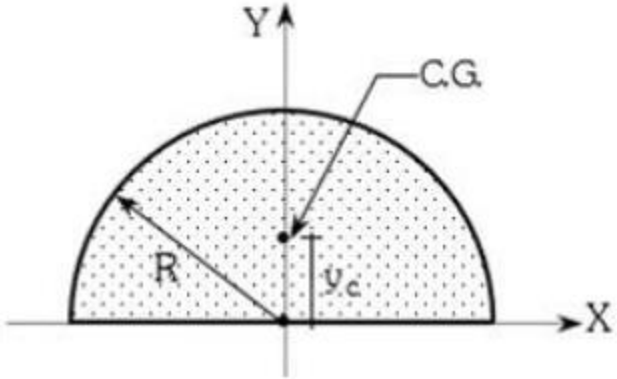


CENTRO DE GRAVEDAD

Representación	x_c	y_c
	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$

Representación	x_c	y_c
		$\frac{h}{3}$

Representación	x_c	y_c
	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$

Representación	x_c	y_c
	0	$\frac{4R}{3\pi}$

MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Si supone que M permanece constante para un sistema de partículas (esto es, ninguna partícula entra o sale del sistema) se obtiene la siguiente expresión para la **velocidad del centro de masa** del sistema

Velocidad del Sistema de partículas

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(\frac{\sum_i m_i r_i}{M}\right)}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

Independiente del tiempo

velocidad de la i– esima partícula.

Cantidad de movimiento total de un sistema de partículas

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{p}_{Totall} = M\vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Aceleración del sistema de partículas

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i$$

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$\vec{F}_{CM} = M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

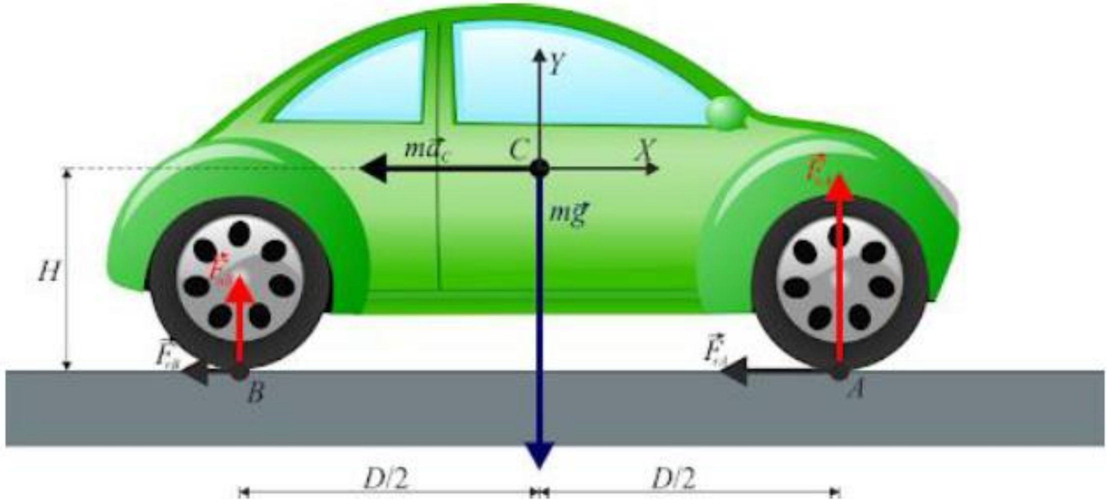
MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

El centro de masa de un sistema de partículas que tiene masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema.

$$\vec{F}_{CM} = M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

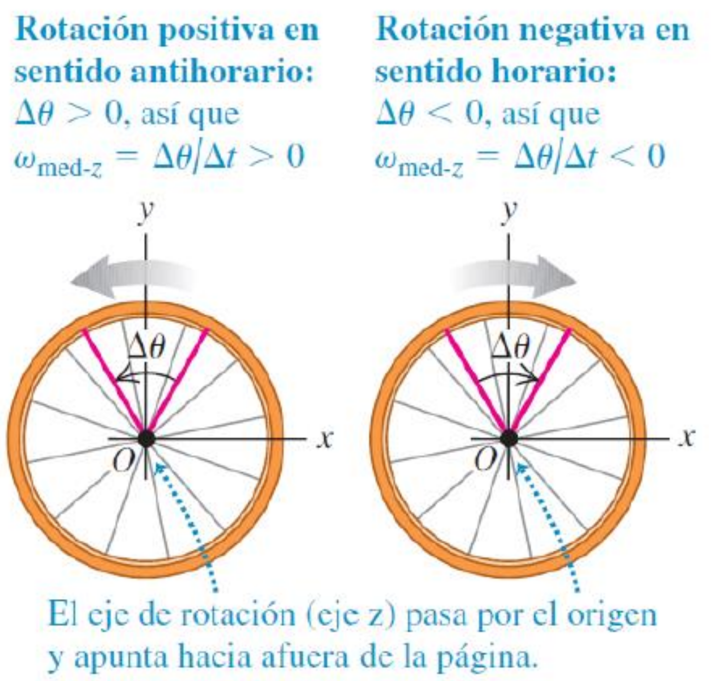
RECORDAR LA APROXIMACIÓN REALIZADA AL PRINCIPIO DEL CURSO, AL TRATAR LOS CUERPOS COMO PUNTOS.

Cuerpo rígido. Se define como un cuerpo ideal cuyas partes (partículas que lo forman) tienen posiciones relativas fijas entre sí cuando se somete a fuerzas externas, es decir es no deformable. Con esta definición se elimina la posibilidad de que el objeto tenga movimiento de vibración. Este modelo de cuerpo rígido es muy útil en muchas situaciones en las cuales la deformación del objeto es despreciable.



CINEMÁTICA ROTACIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO

Cuando un objeto rígido da vueltas respecto a un eje fijo, con frecuencia se somete a una aceleración angular constante, análogo al movimiento de una partícula que se mueve en una trayectoria circular con aceleración angular constante, recordemos:



DESPLAZAMIENTO ANGULAR

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$ radian (rad).

DESPLAZAMIENTO LINEAL (ARCO S)

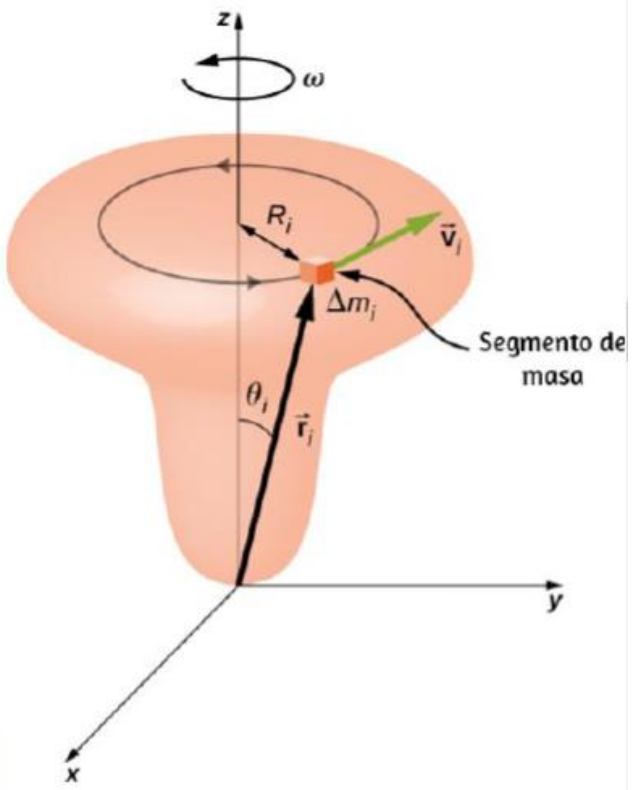
$$s = r\theta$$ m

VELOCIDAD ANGULAR

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ $\frac{rad}{s}$

ACELERACIÓN ANGULAR INSTANTÁNEA

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$ $\frac{rad}{s^2}$



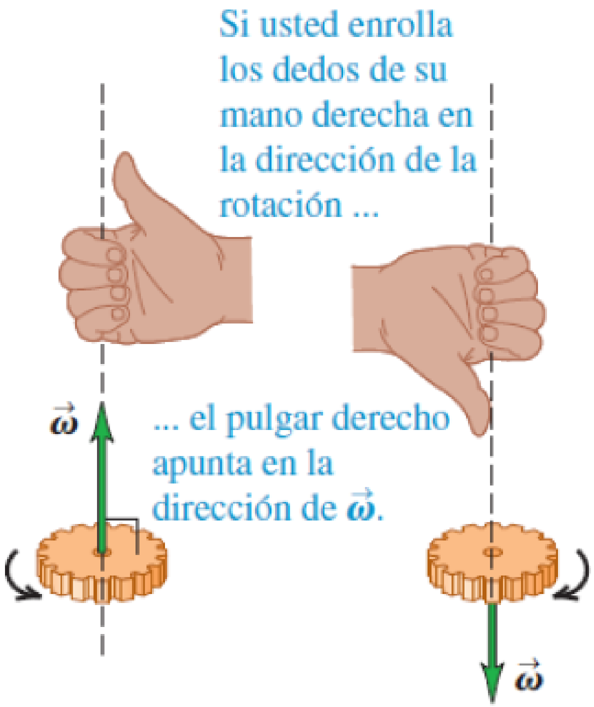
CINEMÁTICA ROTACIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO

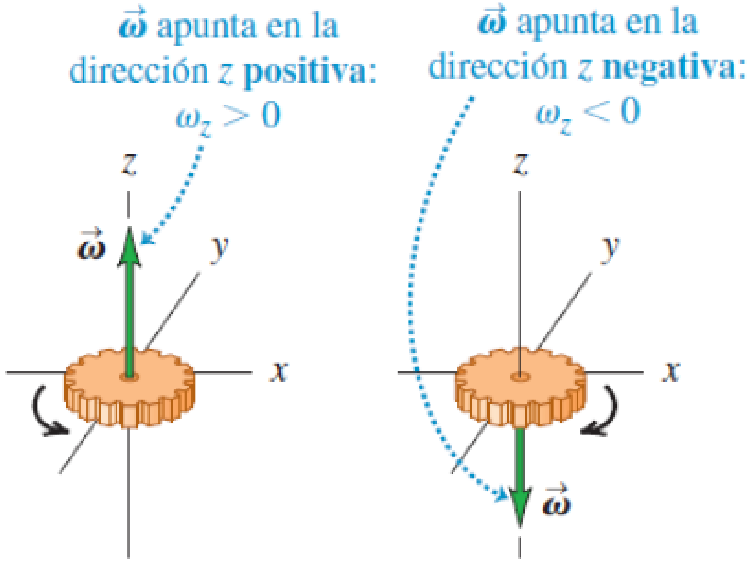
VELOCIDAD ANGULAR

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{rad}{s}$$

ACELERACIÓN ANGULAR INSTANTÁNEA

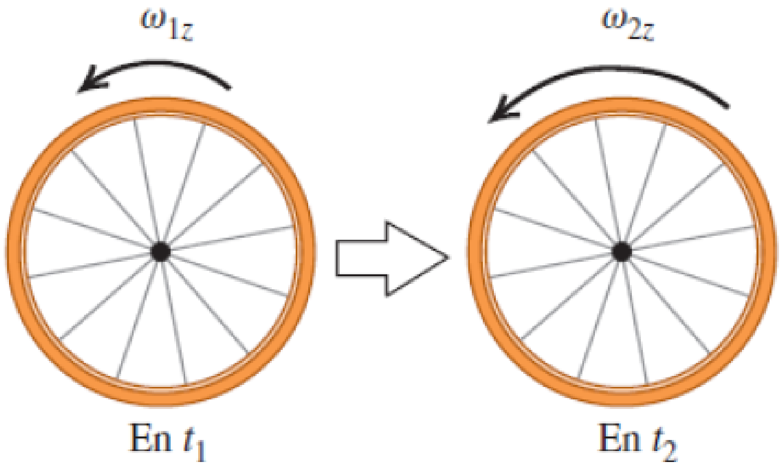
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{rad}{s^2}$$



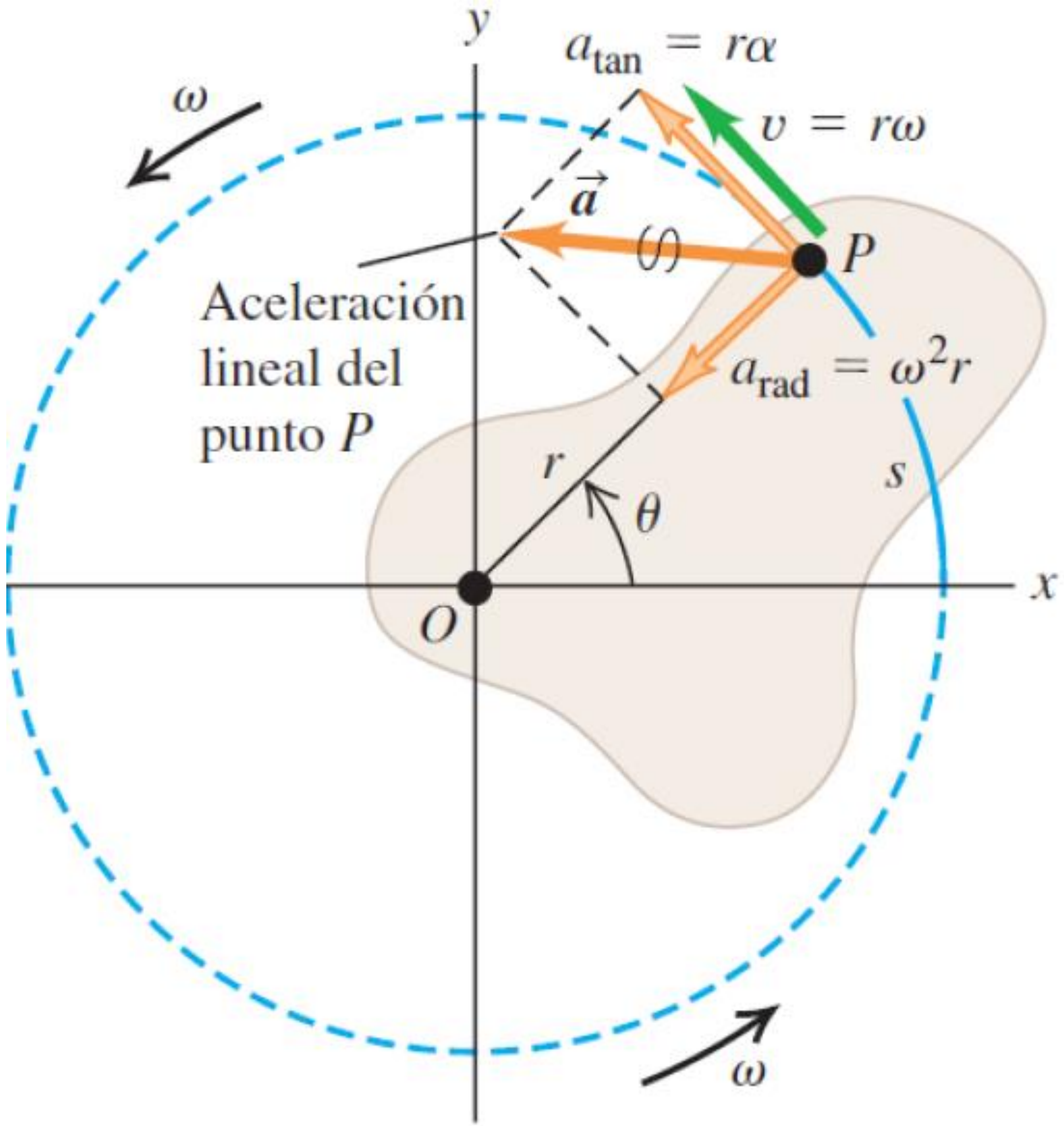


La aceleración angular media es el cambio de la velocidad angular dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$$



CINEMÁTICA ROTACIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO



Desplazamiento lineal (longitud del arco) y desplazamiento angular:

$$\vec{s} = r\vec{\theta}$$

Velocidad lineal y velocidad angular:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d(r\vec{\theta})}{dt} = r\frac{d\vec{\theta}}{dt} \qquad \vec{v} = r\vec{\omega}$$

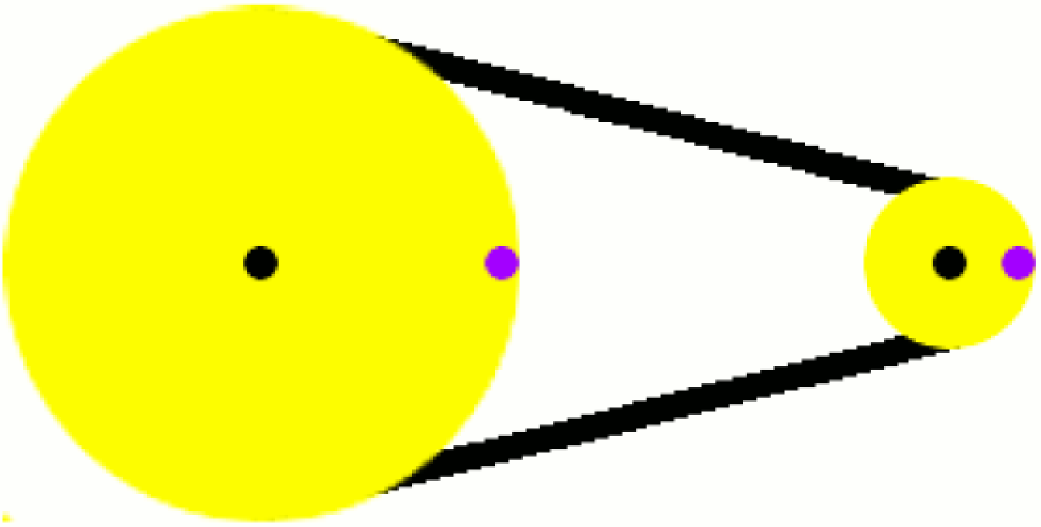
Aceleración tangencial y aceleración angular:

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(r\vec{\omega})}{dt} = r\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \vec{a}_t = r\vec{\alpha}$$

Aceleración radial y velocidad angular:

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{v}^2}{r} = r\vec{\omega}^2$$

CINEMÁTICA ROTACIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO



MOVIMIENTO CIRCULAR

VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i$$

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_o + \vec{\omega} t$$

$$\vec{\alpha} = 0$$

ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i + \vec{\alpha} t$$

$$\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i = \frac{1}{2}(\vec{\omega}_i + \vec{\omega}_f)\mathrm{t}$$

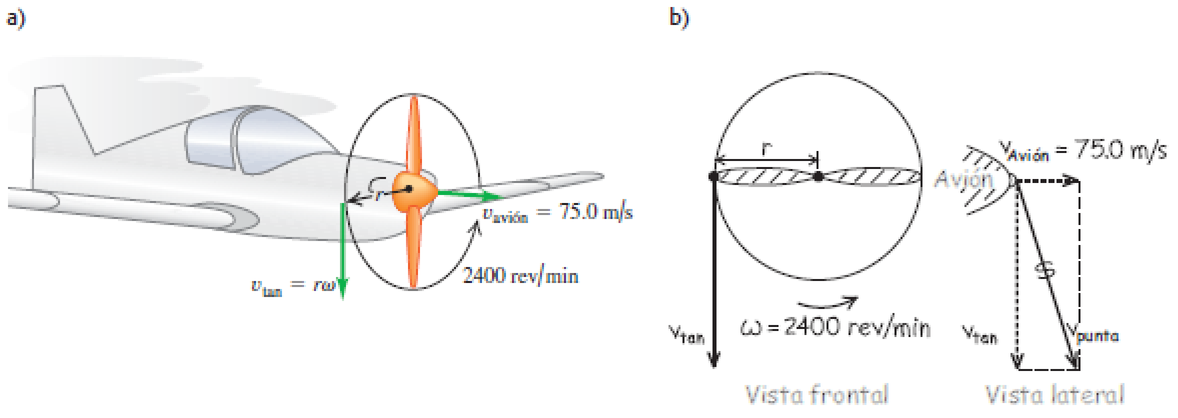
$$\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i = \vec{\omega}_i t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2$$

$$\vec{\omega}_f{}^2 = \vec{\omega}_i{}^2 + 2\vec{\alpha}(\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i)$$

Ejemplo 3

Diseño de una hélice

Imagine que le piden diseñar una hélice de avión que gire a 2400 rpm. La rapidez de avance del avión en el aire debe ser de 75.0 m/s (270 km/h o unas 168 mi/h), y la rapidez de las puntas de las aspas de la hélice en el aire no debe exceder de 270 m/s. (Esto es cerca de 0.80 veces la rapidez del sonido en aire. Si tales puntas se movieran con una rapidez cercana a la del sonido, producirían un ruido enorme.) *a*) ¿Qué radio máximo puede tener la hélice? *b*) Con este radio, ¿qué aceleración tiene la punta de la hélice?



$$\omega = 2400 \text{ rpm} = \left(2400 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)$$
$$= 251 \text{ rad/s}$$

$$v_{\text{punta}}^2 = v_{\text{avión}}^2 + v_{\tan}^2 = v_{\text{avión}}^2 + r^2\omega^2 \quad \text{así que}$$

$$r^2 = \frac{v_{\text{punta}}^2 - v_{\text{avión}}^2}{\omega^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{\sqrt{v_{\text{punta}}^2 - v_{\text{avión}}^2}}{\omega}$$

Si $v_{\text{punta}} = 270$ m/s, el radio de la hélice es

$$r = \frac{\sqrt{(270 \text{ m/s})^2 - (75.0 \text{ m/s})^2}}{251 \text{ rad/s}} = 1.03 \text{ m}$$

$$a_{\text{rad}} = \omega^2 r$$
$$= (251 \text{ rad/s})^2(1.03 \text{ m}) = 6.5 \times 10^4 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 4

Ejemplo conceptual 9.6 Engranes de bicicleta

¿Qué relación hay entre las rapideces angulares de las dos ruedas dentadas de bicicleta de la figura 9.14 y el número de dientes en cada una?

SOLUCIÓN

La cadena no se desliza ni se estira, así que se mueve con la misma rapidez tangencial v en ambas ruedas dentadas. Por la ecuación (9.13),

$$v = r_{\text{frontal}}\omega_{\text{frontal}} = r_{\text{trasera}}\omega_{\text{trasera}} \qquad \text{así que} \qquad \frac{\omega_{\text{trasera}}}{\omega_{\text{frontal}}} = \frac{r_{\text{frontal}}}{r_{\text{trasera}}}$$

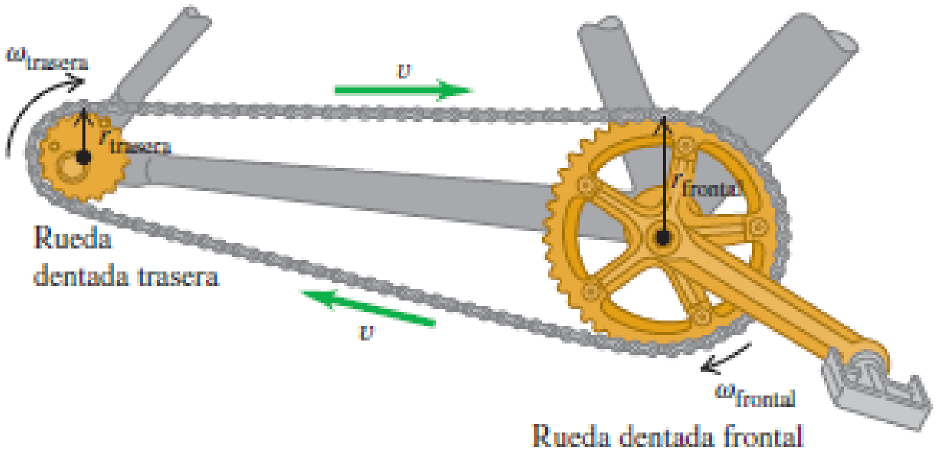
La rapidez angular es inversamente proporcional al radio. Esto se cumple también para poleas conectadas mediante una correa, siempre que ésta no se deslice. En el caso de las ruedas dentadas, los dientes deben estar equidistantes en sus circunferencias para que la cadena embone correctamente. Sean N_{frontal} y N_{trasera} los números de dientes; la condición de que el espaciado de los dientes sea igual en ambas ruedas es

$$\frac{2\pi r_{\text{frontal}}}{N_{\text{frontal}}} = \frac{2\pi r_{\text{trasera}}}{N_{\text{trasera}}} \qquad \text{así que} \qquad \frac{r_{\text{frontal}}}{r_{\text{trasera}}} = \frac{N_{\text{frontal}}}{N_{\text{trasera}}}$$

Combinando esto con la otra ecuación, tenemos

$$\frac{\omega_{\text{trasera}}}{\omega_{\text{frontal}}} = \frac{N_{\text{frontal}}}{N_{\text{trasera}}}$$

9.14 Las ruedas dentadas y la cadena de una bicicleta.



La rapidez angular de cada rueda dentada es inversamente proporcional al número de dientes. En una bicicleta de varias velocidades, obtenemos la máxima rapidez angular ω_{trasera} de la rueda trasera para un pedaleo dado ω_{frontal}, cuando el cociente $N_{\text{frontal}}/N_{\text{trasera}}$ es máximo; esto implica usar la rueda dentada delantera de mayor radio (N_{frontal} máximo) y la rueda dentada trasera de menor radio (N_{trasera} mínimo).