Martha Pinzón
Univ. del Valle

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Una ecuación en las variables x e y puede tener una o más soluciones de x en términos de y o de y en términos de x. Dichas soluciones se dice que son funciones implícitas

Para derivar estas funciones, se usa derivación implícita, la cuál consiste en derivar a ambos lados de la ecuación, teniendo presente que y depende de x (ó x depende de y) y por lo tanto debe usarse la regla de la cadena.

Ejemplo: La ecuación $x^2+y^2=9$ define implícitamente a y como función de x. Halle dy/dx.

S/ Observe que en esta ecuación se puede despejar y en términos de x. (A veces no es posible)

En efecto, $x^2+y^2=9 \rightarrow y^2=9-x^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{9-x^2}$

Podemos definir

$$f_1(x)=\sqrt{9-x^2}\,, \quad f_2(x)=-\sqrt{9-x^2}$$

La ecuación define implícitamente dos funciones. (No define una, porque dado un $x\in[-3,3]$, existirían 2 valores de y).

Veamos la derivada de estas funciones, usando las reglas vistas.

$$f_1(x)=\sqrt{9-x^2} \rightarrow f_1'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}.$$

$f_2(x) = -\sqrt{9-x^2} \rightarrow f_2'(x) = -\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}}(-\cancel{2}x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{x}{-y}$.

Si usamos derivación Implícita (Camino que se debería tomar), se tiene

$x^2+y^2=9$ derivando respecto a x

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}9$$

$$\cancel{2}x + \cancel{2}y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}.$$

Esto muestra que, para derivar no es necesario despejar y en términos de x (Inclusive, algunas veces no se puede despejar y se debe usar la derivación implícita).

Ejemplo: Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3-y^3+xy=1$ en $x=1$.

S// para hallar la recta tangente, necesitamos encontrar la pendiente de la tangente, la cuál es $\frac{dy}{dx}$ en $x=1$.

Primero buscamos los puntos de tangencia.

Si $x=1$ ent $1-y^3+y=1 \rightarrow y-y^3=0 \rightarrow y(1-y^2)=0$

luego $y=0$ ó $y=\pm1$. Así, los puntos de tangencia son $P(1,0)$, $Q(1,-1)$, $R(1,1)$

Para hallar la recta tangente, se debe

hallar la pendiente y para ello, se calcula dy/dx.

Derivamos implícitamente $x^3 - y^3 + xy = 1$.

Así,

$$\frac{d}{dx}(x^3 - y^3 + xy) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$3x^2 - 3y^2\frac{dy}{dx} + (y + xy') = 0$$

$$3x^2 - 3y^2y' + y + xy' = 0$$

Se puede evaluar directamente y despejar y'.

Si $P(1,0)$, entonces:

$$3(1)^2 - \cancel{3(0)y'} + 0 + 1y' = 0$$

$$3 + y' = 0 \longrightarrow y' = -3.$$

La ecuación de la tangente es: $y - 0 = -3(x-1)$

$$y = -3x + 3.$$

De manera análoga se hallan las rectas tangentes en $Q(1,-1)$ y $R(1,1)$

<u>Ejemplo</u>: Demostrar que si $y = x^{p/q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}x^{p/q - 1}$$

D// como $y = x^{p/q}$, elevando a ambos lados a la q, se tiene:

$y^q = x^p$. Derivamos implícitamente

$$\frac{d}{dx} y^q = \frac{d}{dx} x^p \Rightarrow q y^{q-1} \frac{dy}{dx} = p x^{p-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p x^{p-1}}{q y^{q-1}} = \frac{p x^{p-1}}{q (x^{p/q})^{q-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p x^{p-1}}{q x^{p-p/q}} = \frac{p}{q} x^{p-1} x^{p/q - p}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} x^{p/q - 1}.$$

La regla para derivar potencias enteras, funciona para potencias racionales.

$x^{p/q} = (x^{1/q})^p$ q par, $x > 0$; q imp. $x \neq 0$

En general, si $f(x)$ es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx} (f(x))^{p/q} = \frac{p}{q} f(x)^{p/q - 1} f'(x), \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0.$$

(q par, $f(x) > 0$; q imp, $f(x) \neq 0$)

Ejemplo: Halle $f'(x)$ si

i) $f(x) = x \sqrt[4]{3x^2+1}$ ii) $f(x) = \sqrt[3]{(\text{sen}^2 x + \cos x)^2}$

S/ i) $f(x) = x \sqrt[4]{3x^2+1} = x (3x^2+1)^{1/4}$

$$f'(x) = (3x^2+1)^{1/4} + x \cdot \frac{1}{4} (3x^2+1)^{-3/4} \cdot 6x$$

$$= (3x^2+1)^{1/4} + \frac{3x^2}{2(3x^2+1)^{3/4}}$$

$$= \frac{2(3x^2+1) + 3x^2}{2(3x^2+1)^{3/4}}$$

u) $f(x) = \sqrt[3]{(sen^2x+\cos x)^2}$

S/ Escribimos f(x) usando potencias racionales

$$f(x) = \sqrt[3]{(sen^2x+\cos x)^2} = (sen^2x+\cos x)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(sen^2x+\cos x)^{-1/3}(sen^2x+\cos x)'$$

$$= \frac{2}{3(sen^2x+\cos x)^{1/3}}(2senx\cos x - senx)$$

$$f'(x) = \frac{2(2senx\cos x - senx)}{3(sen^2x+\cos x)^{1/3}}$$

Usamos la derivación implícita, para hallar las derivada de las func. trigonométricas inversas.

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

En realidad para hallar la derivada de las func. trig. inversas, se puede usar o regla de la cadena, ó derivación implícita.

Derivemos implícitamente la función arcsenx. Entonces

1) $y = arcsenx \leftrightarrow seny = x.$ $\quad x \in [-1,1]$

$y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\cos y \cdot y' = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} \qquad y \in (-\pi/2, \pi/2)$$
$$x \in (-1, 1)$$

Ahora, como $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\cos y > 0$, luego $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$ es decir, $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. por lo tanto

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Así, $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

Si f es derivable, $(\operatorname{arcsen} f(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$ $\quad f(x) \in (-1,1)$

2) $y = \arccos x \leftrightarrow \cos y = x$, $\quad y \in [0, \pi]$
$x \in [-1, 1]$.

Usemos la regla de la cadena.

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{(Pues son inversas)}$$

Derivando respecto a x se tiene:

$$\frac{d}{dx} \cos(\arccos x) = \frac{d}{dx} x$$

$$-\operatorname{sen}(\arccos x)(\arccos x)' = 1.$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\operatorname{sen}(\arccos x)} \qquad x \in (-1,1)$$
$$= \frac{-1}{\operatorname{sen} y}. \qquad y \in (0, \pi).$$

Como $y \in (0, \pi)$, $\operatorname{sen} y > 0$, luego $\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

por tanto $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

Si f es derivable, $(\arccos f(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$, $f(x) \in (-1,1)$

3. $\arctan x = y \leftrightarrow \tan y = x$. $y \in (-\pi/2, \pi/2)$
$x \in \mathbb{R}$

$\dfrac{d}{dx}(\tan y) = \dfrac{d}{dx}(x)$ Derivando Implícitamente.

$\sec^2 y \; y' = 1$

$y' = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{\tan^2 y + 1}$ $y \in (-\pi/2, \pi/2)$
$x \in \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Si $f(x)$ es derivable, $(\arctan f(x))' = \dfrac{1}{1+f^2(x)} f'(x)$, $f(x) \in \mathbb{R}$

En forma análoga, se puede probar

$(\operatorname{arcsec} x)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$, $(\operatorname{arcsec} f(x))' = \dfrac{1}{|f(x)|\sqrt{f^2(x)-1}} f'(x)$ $|f(x)|>1$

$(\operatorname{arccsc} x)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$, $(\operatorname{arccsc} f(x))' = \dfrac{-1}{|f(x)|\sqrt{f^2(x)-1}} f'(x)$, $|f(x)|>1$

$(\operatorname{arccot} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{arccot} f(x))' = \dfrac{-1}{1+f^2(x)} f'(x)$, $f(x) \in \mathbb{R}$

Ej: Sea $f(x) = \arctan^2(\sqrt{x^2+3})$. Halle $f'(x)$.

S// $f(x) = \arctan^2(\sqrt{x^2+3}) = (\arctan\sqrt{x^2+3})^2$

$$f'(x) = 2\arctan(\sqrt{x^2+3})(\arctan\sqrt{x^2+3})'$$

$$= 2\arctan(\sqrt{x^2+3})\frac{1}{1+(\sqrt{x^2+3})^2}\cdot(\sqrt{x^2+3})'$$

$$= 2\arctan\sqrt{x^2+3}\ \frac{1}{1+x^2+3}\ \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

$$= 2\arctan\sqrt{x^2+3}\cdot\frac{\cancel{2}x}{(4+x^2)(\cancel{2}\sqrt{x^2+3})}$$

$$= \frac{2x\arctan(\sqrt{x^2+3})}{(4+x^2)\sqrt{x^2+3}}$$

DERIVADA DE FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Sea $f(x) = \ln x$. Usamos la definición para hallar la derivada.

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

hacemos un cambio de variable.

Sea $\frac{h}{x} = \frac{1}{t}$ Si $h \to 0^+$, $t \to \infty$
$h \to 0^-$, $t \to -\infty$.

$$(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

(como el límite existe, pues $\ln x$ es derivable, entonces los límites laterales son iguales.)

Calculamos límite cuando $h \to 0^+$.

Si $h \to 0^+$, $t \to \infty$. Entonces

$$\lim_{h \to 0^+} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{t \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t/x}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \ln\left(\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right]^t\right)^{1/x}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x} \lim_{t \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

$$= \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{t \to \infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

Así, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Si f es derivable, $\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$, $f(x) > 0$.

Si $f(x) = \log_a x$, función general, usamos cambio de base para hallar $f'(x)$.

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad \text{Entonces}$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x>0.$$

Si $f(x)$ es derivable,

$$(\log_a f(x))' = \frac{1}{f(x)\ln a} f'(x), \quad f(x)>0.$$

Derivada de la función exponencial.

Para hallar la derivada de $y = e^x$, usamos la regla de la cadena.

Como $\ln x$ y e^x son inversas,

$$\ln(e^x) = x. \quad \text{Derivando,}$$

$$\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si $f(x)$ es derivable, $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$, $f(x) \in \mathbb{R}$.

Finalmente: Exponencial general.

Si $y = a^x$, entonces $a^x = e^{x \ln a}$ por lo tanto

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Si $f(x)$ es derivable, $(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$.