

Teorema de la dimensión

$A_{m \times n}$. N_A : espacio nulo de A

C_A : espacio columna

Nulidad de A ($\nu(A)$): es la dimensión del espacio nulo de A

Rango de A ($\rho(A)$): " " " " " columna de A .

$$\nu(A) = \dim(N_A) \quad \text{y} \quad \rho(A) = \dim(C_A).$$

Teorema (relación entre $\nu(A)$ y $\rho(A)$).

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Entonces.

$$\nu(A) + \rho(A) = n$$

$$\dim(N_A) + \dim(C_A) = n.$$

$Nu(T)$: núcleo de la T.L. T .

$Im(T)$: Imagen de la T.L. T

Nulidad T ($\kappa(T)$): es la dimensión del $Nu(T)$.

Rango T ($\tau(T)$): " " " de $Im(T)$.

$$\kappa(T) = \dim(Nu(T)) \quad \text{y} \quad \tau(T) = \dim(Im(T)).$$

Teorema de la dimensión.

Sean V y W espacios vectoriales.

Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces

$$\dim(\text{Nu}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V), \quad \dim(V) < \infty.$$

$$\kappa(T) + \tau(T) = \dim(V)$$

$$\text{Nulidad}(T) + \text{rango}(T) = \dim(V).$$

Ejemplo. Calcular el rango y la nulidad de

$$T: \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{P}_1.$$

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - 2b + (a + 2c + 3d)x.$$

Solución.

Para calcular $\kappa(T)$ y $\tau(T)$, basta con determinar el rango y la nulidad de una matriz asociada a T .

Sean $B = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{V_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{V_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{V_3}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{V_4} \right\}$ base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$.

$B = \{1, x\}$ base de \mathcal{P}_1

$$A_T = [A_T]_{BB'} = \left([T(V_1)]_{B'}, [T(V_2)]_{B'}, [T(V_3)]_{B'}, [T(V_4)]_{B'} \right).$$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ F.E. de } A_T$$

Pues, el rango $A_T = 2 =$ nulidad de A_T .

Por tanto, $\text{rango}(T) = 2 =$ nulidad de (T) .

Transformaciones lineales inyectivas y sobreyectivas

Definición 6 [*Transformación lineal inyectiva*]. Diremos que $T : V \rightarrow W$ es una *transformación lineal inyectiva*, si y sólo si, para cada \mathbf{w} de $\text{Im}(T)$, existe un único $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. (Ver Fig. 5.10)

T es inyectiva si $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$.

$v_1 \neq v_2$ implica $T(v_1) \neq T(v_2)$.

Ejemplo. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿ T es una T.L. inyectiva?

Solución.

Supong. que $T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ x_1 + y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & / & 1 & 0 & / \end{array}$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

$$x_1 + y_2 = x_2 + y_2$$

$$x_1 = x_2$$

Luego, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y T es inyectiva

Ejemplo. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}.$$

¿Es T una T.L. inyectiva? NO, ya que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

Teorema (caracterización de una T.L. inyectiva).

Sea $T: V \rightarrow W$ una T.L.

T es inyectiva (1-1) si y solo si $\text{Nu}(T) = \{0\}$.

Argumento.

(\Rightarrow) Supog. que T es inyectiva.

Si $v \in \text{Nu}(T)$ entonces $T(v) = 0$

Ademas $T(0) = 0$

Entonces, $T(v) = T(0) \Rightarrow v = 0$ por ser T inyectiva.
Así, cualquier elemento de $\text{Nu}(T)$ es el vector cero.

$$\text{Nu}(T) = \{0\}.$$

(\Leftarrow) Supongamos que $\text{Nu}(T) = \{0\}$.

Sean $u, v \in V$ tales que

$$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0$$

$$T(u - v) = 0$$

$$\Rightarrow u - v \in \text{Nu}(T) = \{0\} \text{ por hipótesis.}$$

$$u - v = 0$$

$$u = v$$

En consecuencia, T es inyectiva.

Teorema 9 [Independencia lineal y transformaciones lineales inyectivas].

Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal inyectiva y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*, entonces $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es un conjunto de vectores *l.i.*

Argumento:

$$\lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \dots + \lambda_n T(v_n) = 0$$

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = 0 \text{ por ser } T \text{ una T.L.}$$

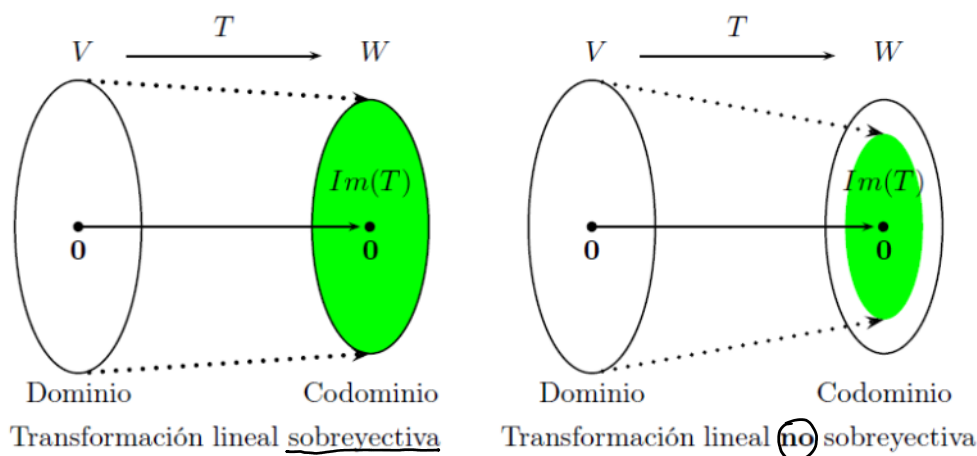
$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Nu}(T) = \{0\} \text{ por ser } T \text{ inyectiva.}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ por ser $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l.i.

Por tanto, $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es l.i.

Definición 7 [Transformación lineal sobreyectiva]. Diremos que $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal sobreyectiva, si y sólo si, $\text{Im}(T) = W$ (Ver Fig. 5.12).



$T: V \rightarrow W$ es sobre si y sólo si $\forall w \in W$ existe $v \in V : T(v) = w$.

Ejemplo. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿es T sobreyectiva? NO, ya que para $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ no existe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal

que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$

Ejemplo. Sea $T: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una T.L. tal que

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b-c \\ a-b+c \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Sea $T: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una T.L. tal que

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}.$$

• $\text{Nu}(T)$:

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+0+0=0 \Rightarrow a=0.$$

$$b+c=0 \Rightarrow b=0$$

$$c=0$$

Entonces, $\text{Nu}(T) = \{0+0x+0x^2\} = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow T$ es inyectiva.

• $\text{Im}(T)$: Sea $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$a+b+c=p$$

$$b+c=q \quad c=r.$$

$$b+r=q$$

$$b=q-r$$

$$a+(q-r)+r=p$$

$$a=p-q.$$

observe que

$$/ p - q - r + q + r + r \quad / p /$$

$$T[\underbrace{(p-q)}_a + \underbrace{(q-r)}_b x + \underbrace{r}_c x^2] = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Hemos mostrado que cualquier elemento de \mathbb{R}^3 , $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, tiene una preimagen en P_2 de la forma

$$(p-q) + (q-r)x + rx^2.$$

Por tanto, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow T$ es sobreyectiva.

Definición 8 [*Isomorfismo*]. Diremos que una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es un *isomorfismo*, si y sólo si, T es una transformación lineal inyectiva y sobreyectiva² (Ver Figs. 5.13 y 5.14).

Definición 9 [*Espacios vectoriales isomorfos*]. Si dados dos espacios vectoriales V y W , existe un isomorfismo $T : V \longrightarrow W$, diremos que V y W son isomorfos, lo cual denotamos $V \cong W$.