Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Números complejos

Un número complejo es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son reales.

Números complejos

Un número complejo es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son reales. A su vez el primer elemento a se define como parte real de z, se denota $a = Re(z)$, el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z, se denota $b = Im(z)$.

Números complejos

Un número complejo es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son reales. A su vez el primer elemento a se define como parte real de z, se denota $a = Re(z)$, el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z, se denota $b = Im(z)$.

Definimos la suma por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Números complejos

Un número complejo es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son reales. A su vez el primer elemento a se define como parte real de z, se denota $a = Re(z)$, el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z, se denota $b = Im(z)$.

Definimos la suma por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

y el producto por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Números complejos

Un número complejo es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son reales. A su vez el primer elemento a se define como parte real de z, se denota $a = Re(z)$, el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z, se denota $b = Im(z)$.

Definimos la suma por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

y el producto por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Denotamos al conjunto de los números complejos por $\mathbb{C}$,

Números complejos

Un número complejo es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son reales. A su vez el primer elemento a se define como parte real de z, se denota $a = Re(z)$, el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z, se denota $b = Im(z)$.

Definimos la suma por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

y el producto por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Denotamos al conjunto de los números complejos por $\mathbb{C}$, intuitivamente los números complejos coinciden con $\mathbb{R}^2$ con la estructura de la suma usual y definiendo una noción del producto.

Números complejos

Un número complejo es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son reales. A su vez el primer elemento a se define como parte real de z, se denota $a = Re(z)$, el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z, se denota $b = Im(z)$.

Definimos la suma por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

y el producto por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Denotamos al conjunto de los números complejos por $\mathbb{C}$, intuitivamente los números complejos coinciden con $\mathbb{R}^2$ con la estructura de la suma usual y definiendo una noción del producto.

Notemos que $(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad)$

Números complejos

Un número complejo es un par ordenado $z = (a, b)$ donde a y b son reales. A su vez el primer elemento a se define como parte real de z, se denota $a = Re(z)$, el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z, se denota $b = Im(z)$.

Definimos la suma por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

y el producto por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Denotamos al conjunto de los números complejos por $\mathbb{C}$, intuitivamente los números complejos coinciden con $\mathbb{R}^2$ con la estructura de la suma usual y definiendo una noción del producto.

Notemos que $(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad)$ y que $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales.

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$.

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i,$$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -(b^2)$$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -(b^2) \qquad \text{y} \qquad (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -(b^2) \qquad \text{y} \qquad (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Adicionalmente, tenemos que la suma y producto son conmutativas y asociativas.

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -(b^2) \qquad \text{y} \qquad (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Adicionalmente, tenemos que la suma y producto son conmutativas y asociativas. La multiplicación distribuye con respecto a la suma,

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -(b^2) \qquad \text{y} \qquad (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Adicionalmente, tenemos que la suma y producto son conmutativas y asociativas. La multiplicación distribuye con respecto a la suma, es decir, si $u, v, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$u(v + w) = uv + uw.$$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -(b^2) \qquad \text{y} \qquad (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Adicionalmente, tenemos que la suma y producto son conmutativas y asociativas. La multiplicación distribuye con respecto a la suma, es decir, si $u, v, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$u(v + w) = uv + uw.$$

0 y 1 son los neutros para la suma y multiplicación, respectivamente.

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -(b^2) \qquad \text{y} \qquad (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Adicionalmente, tenemos que la suma y producto son conmutativas y asociativas. La multiplicación distribuye con respecto a la suma, es decir, si $u, v, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$u(v + w) = uv + uw.$$

0 y 1 son los neutros para la suma y multiplicación, respectivamente.

El inverso aditivo de $z = a + bi$ es $-z = -a + (-b)i$

Si denotamos $a = (a, 0)$ y $i = (0, 1)$ entonces un número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir de la forma

$$z = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Con la notación anterior tenemos $a + b$ y ab corresponden ha números reales usuales. También que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si $a = c$ y $b = d$. Adicionalmente, tenemos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i, \qquad i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -(b^2) \qquad \text{y} \qquad (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Adicionalmente, tenemos que la suma y producto son conmutativas y asociativas. La multiplicación distribuye con respecto a la suma, es decir, si $u, v, w \in \mathbb{C}$ entonces

$$u(v + w) = uv + uw.$$

0 y 1 son los neutros para la suma y multiplicación, respectivamente.

El inverso aditivo de $z = a + bi$ es $-z = -a + (-b)i = -a - bi$.

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i$$

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Definimos el **módulo** es

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Definimos el **módulo** es

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

el cual es el número real que representa la distancia al origen,

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Definimos el **módulo** es

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

el cual es el número real que representa la distancia al origen, por tanto $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Definimos el **módulo** es

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

el cual es el número real que representa la distancia al origen, por tanto $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Para $z = a + bi \neq 0$ tenemos que el inverso multiplicativo es

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Definimos el **módulo** es

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

el cual es el número real que representa la distancia al origen, por tanto $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Para $z = a + bi \neq 0$ tenemos que el inverso multiplicativo es

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Definimos el **módulo** es

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

el cual es el número real que representa la distancia al origen, por tanto $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Para $z = a + bi \neq 0$ tenemos que el inverso multiplicativo es

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}.$$

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Definimos el **módulo** es

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

el cual es el número real que representa la distancia al origen, por tanto $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Para $z = a + bi \neq 0$ tenemos que el inverso multiplicativo es

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}.$$

Todo funciona como en los números reales

Si $z = a + bi$ definimos el **conjugado**

$$\bar{z} = a + (-b)i = a - bi,$$

en algunos libros escriben z^* en lugar de $\bar{z}$.

Definimos el **módulo** es

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

el cual es el número real que representa la distancia al origen, por tanto $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Para $z = a + bi \neq 0$ tenemos que el inverso multiplicativo es

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}.$$

Todo funciona como en los números reales excepto por las nociones que involucran desigualdad, entre ellas ínfimos y supremos.

Representación polar

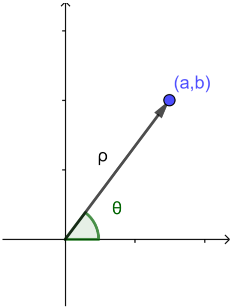
Usando coordenadas polares un número complejo $z = a + bi$ puede verse como $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$,

Representación polar

Usando coordenadas polares un número complejo $z = a + bi$ puede verse como $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, donde $\rho = |z|$ y θ es el ángulo con signo y con respecto al eje x.

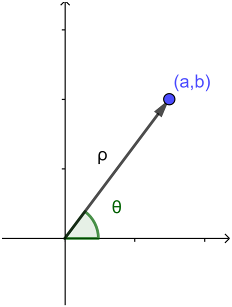
Representación polar

Usando coordenadas polares un número complejo $z = a + bi$ puede verse como $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, donde $\rho = |z|$ y θ es el ángulo con signo y con respecto al eje x.



Representación polar

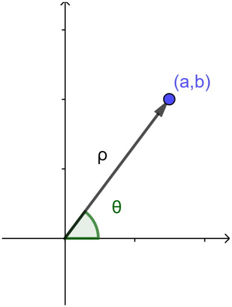
Usando coordenadas polares un número complejo $z = a + bi$ puede verse como $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, donde $\rho = |z|$ y θ es el ángulo con signo y con respecto al eje x.



Definimos $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$, algunos autores escriben $cis(\theta)$ y así $z = \rho e^{i\theta}$.

Representación polar

Usando coordenadas polares un número complejo $z = a + bi$ puede verse como $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, donde $\rho = |z|$ y θ es el ángulo con signo y con respecto al eje x.



Definimos $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$, algunos autores escriben $cis(\theta)$ y así $z = \rho e^{i\theta}$. En particular

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Para dos números complejos $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

Para dos números complejos $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ tenemos que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Para dos números complejos $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ tenemos que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Por tanto el producto de números complejos corresponde al producto de los módulos y la suma de los ángulos.

Para dos números complejos $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ tenemos que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Por tanto el producto de números complejos corresponde al producto de los módulos y la suma de los ángulos.

Si $a + bi$ podemos definir la exponencial

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + isenb).$$

Para dos números complejos $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ tenemos que

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Por tanto el producto de números complejos corresponde al producto de los módulos y la suma de los ángulos.

Si $a + bi$ podemos definir la exponencial

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + isenb).$$

Tenemos las mismas propiedades de la exponencial real para la exponencial compleja.

Un poco de cálculo complejo

Sea $z : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = u(t) + v(t)i,$$

donde u y v son funciones reales.

Un poco de cálculo complejo

Sea $z : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = u(t) + v(t)i,$$

donde u y v son funciones reales. Diremos que z es diferenciable en $t_0 \in J$,

Un poco de cálculo complejo

Sea $z : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = u(t) + v(t)i,$$

donde u y v son funciones reales. Diremos que z es diferenciable en $t_0 \in J$, si u y v son funciones diferenciales t_0 y su diferencial es

$$z'(t_0) = u'(t_0) + v'(t_0)i.$$

Un poco de cálculo complejo

Sea $z : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = u(t) + v(t)i,$$

donde u y v son funciones reales. Diremos que z es diferenciable en $t_0 \in J$, si u y v son funciones diferenciales t_0 y su diferencial es

$$z'(t_0) = u'(t_0) + v'(t_0)i.$$

Análogamente, diremos que z es integrable en un intervalo (c, d) si u y v son funciones integrables en (c, d)

Un poco de cálculo complejo

Sea $z : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = u(t) + v(t)i,$$

donde u y v son funciones reales. Diremos que z es diferenciable en $t_0 \in J$, si u y v son funciones diferenciales t_0 y su diferencial es

$$z'(t_0) = u'(t_0) + v'(t_0)i.$$

Análogamente, diremos que z es integrable en un intervalo (c, d) si u y v son funciones integrables en (c, d) y su integral es

$$\int_c^d z(t)dt = \int_c^d u(t)dt + i \int_c^d v(t)dt.$$

Un poco de cálculo complejo

Sea $z : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = u(t) + v(t)i,$$

donde u y v son funciones reales. Diremos que z es diferenciable en $t_0 \in J$, si u y v son funciones diferenciales t_0 y su diferencial es

$$z'(t_0) = u'(t_0) + v'(t_0)i.$$

Análogamente, diremos que z es integrable en un intervalo (c, d) si u y v son funciones integrables en (c, d) y su integral es

$$\int_c^d z(t)dt = \int_c^d u(t)dt + i\int_c^d v(t)dt.$$

Lo anterior nos permite considerar ecuaciones diferenciales con soluciones funciones complejas de la forma $z(t) = u(t) + v(t)i$,

Un poco de cálculo complejo

Sea $z : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = u(t) + v(t)i,$$

donde u y v son funciones reales. Diremos que z es diferenciable en $t_0 \in J$, si u y v son funciones diferenciales t_0 y su diferencial es

$$z'(t_0) = u'(t_0) + v'(t_0)i.$$

Análogamente, diremos que z es integrable en un intervalo (c, d) si u y v son funciones integrables en (c, d) y su integral es

$$\int_c^d z(t)dt = \int_c^d u(t)dt + i \int_c^d v(t)dt.$$

Lo anterior nos permite considerar ecuaciones diferenciales con soluciones funciones complejas de la forma $z(t) = u(t) + v(t)i$, algunas escribimos $x(t) = u(t) + v(t)i$ o $y(x) = u(x) + v(x)i$

Un poco de cálculo complejo

Sea $z : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ podemos escribir

$$z(t) = u(t) + v(t)i,$$

donde u y v son funciones reales. Diremos que z es diferenciable en $t_0 \in J$, si u y v son funciones diferenciales t_0 y su diferencial es

$$z'(t_0) = u'(t_0) + v'(t_0)i.$$

Análogamente, diremos que z es integrable en un intervalo (c, d) si u y v son funciones integrables en (c, d) y su integral es

$$\int_c^d z(t)dt = \int_c^d u(t)dt + i \int_c^d v(t)dt.$$

Lo anterior nos permite considerar ecuaciones diferenciales con soluciones funciones complejas de la forma $z(t) = u(t) + v(t)i$, algunas escribimos $x(t) = u(t) + v(t)i$ o $y(x) = u(x) + v(x)i$ para hacerla compatible con la notaciones usadas para las ecuaciones diferenciales que hemos venido estudiando.

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja.

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja. (Derivación de la suma, producto, regla de la cadena, etc.)

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja. (Derivación de la suma, producto, regla de la cadena, etc.)

Supongamos que tenemos una ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \qquad (1)$$

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja. (Derivación de la suma, producto, regla de la cadena, etc.)
Supongamos que tenemos una ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \tag{1}$$

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja. (Derivación de la suma, producto, regla de la cadena, etc.)
Supongamos que tenemos una ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \qquad (1)$$

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja. (Derivación de la suma, producto, regla de la cadena, etc.)
Supongamos que tenemos una ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \tag{1}$$

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Supongamos que tenemos una solución $y(x) = u(x) + v(x)i$ de (1)

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja. (Derivación de la suma, producto, regla de la cadena, etc.)
Supongamos que tenemos una ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \tag{1}$$

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Supongamos que tenemos una solución $y(x) = u(x) + v(x)i$ de (1) por la linealidad de L tenemos que

$$L(y) = L(u) + iL(v) = 0.$$

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja. (Derivación de la suma, producto, regla de la cadena, etc.)
Supongamos que tenemos una ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \tag{1}$$

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Supongamos que tenemos una solución $y(x) = u(x) + v(x)i$ de (1) por la linealidad de L tenemos que

$$L(y) = L(u) + iL(v) = 0.$$

Se sigue que u y v satisfacen $L(u) = 0$ y $L(v) = 0$,

También tenemos propiedades similares a las reales para la derivación e integración compleja. (Derivación de la suma, producto, regla de la cadena, etc.)

Supongamos que tenemos una ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \tag{1}$$

Consideremos el operador lineal L que a una función diferenciable n veces le asigna la función

$$L(y) := a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y.$$

Supongamos que tenemos una solución $y(x) = u(x) + v(x)i$ de (1) por la linealidad de L tenemos que

$$L(y) = L(u) + iL(v) = 0.$$

Se sigue que u y v satisfacen $L(u) = 0$ y $L(v) = 0$, es decir, la parte real u y la parte imaginaria v son funciones reales que son soluciones de (1).

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$,

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ &= e^{(\alpha+\beta i)x} \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ &= e^{(\alpha+\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ &= e^{(\alpha+\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + isen(\beta x)) \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ &= e^{(\alpha+\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i sen(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i e^{\alpha x} sen(\beta x). \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ &= e^{(\alpha+\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i sen(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i e^{\alpha x} sen(\beta x). \end{aligned}$$

Usando la regla de la derivada del producto obtenemos que

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ &= e^{(\alpha+\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i sen(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i e^{\alpha x} sen(\beta x). \end{aligned}$$

Usando la regla de la derivada del producto obtenemos que

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Similarmente al caso real tenemos

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

Supongamos que $\lambda = \alpha + \beta i$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ &= e^{(\alpha+\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i sen(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i e^{\alpha x} sen(\beta x). \end{aligned}$$

Usando la regla de la derivada del producto obtenemos que

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}.$$

Similarmente al caso real tenemos

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \qquad y'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x}, \quad \ldots$$

Recordar

Sean a, b y c constantes

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$,

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx}$ es una solución de (2)

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx}$ es una solución de (2) si r satisface la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3}$$

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx}$ es una solución de (2) si r satisface la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3}$$

Supongamos que $a \neq 0$

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx}$ es una solución de (2) si r satisface la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3}$$

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx}$ es una solución de (2) si r satisface la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3}$$

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recordar

Sean a, b y c constantes y consideremos la siguiente ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Buscamos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, tenemos que

$$y' = re^{rx} \quad \text{y} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Se sigue que $y(x) = e^{rx}$ es una solución de (2) si r satisface la ecuación auxiliar

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3}$$

Supongamos que $a \neq 0$ y utilizando la fórmula para las raíces cuadráticas obtenemos las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$.

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$. Este caso corresponde a las raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ de la ecuación auxiliar (3)

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$. Este caso corresponde a las raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ de la ecuación auxiliar (3) donde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$. Este caso corresponde a las raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ de la ecuación auxiliar (3) donde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \neq 0.$$

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$. Este caso corresponde a las raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ de la ecuación auxiliar (3) donde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \neq 0.$$

Tenemos que la función

$$y(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x} sen(\beta x)$$

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$. Este caso corresponde a las raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ de la ecuación auxiliar (3) donde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \neq 0.$$

Tenemos que la función

$$y(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x} sen(\beta x)$$

es una solución de la ecuación (2).

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$. Este caso corresponde a las raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ de la ecuación auxiliar (3) donde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \neq 0.$$

Tenemos que la función

$$y(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x} sen(\beta x)$$

es una solución de la ecuación (2).

Por tanto, su parte real $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e imaginaria $e^{\alpha x} sen(\beta x)$ son soluciones de (2).

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$. Este caso corresponde a las raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ de la ecuación auxiliar (3) donde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \neq 0.$$

Tenemos que la función

$$y(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x} sen(\beta x)$$

es una solución de la ecuación (2).

Por tanto, su parte real $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e imaginaria $e^{\alpha x} sen(\beta x)$ son soluciones de (2).

Es suficiente considerar solo la raíz $\alpha + \beta i$,

Raíces complejas

Falta encontrar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación para el caso $b^2 - 4ac < 0$. Este caso corresponde a las raíces complejas $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ de la ecuación auxiliar (3) donde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \neq 0.$$

Tenemos que la función

$$y(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}sen(\beta x)$$

es una solución de la ecuación (2).

Por tanto, su parte real $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e imaginaria $e^{\alpha x}sen(\beta x)$ son soluciones de (2).

Es suficiente considerar solo la raíz $\alpha + \beta i$, dado que un análisis similar con $\alpha - \beta i$ nos llevaría a las soluciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $-e^{\alpha x}sen(\beta x)$.

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2)

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x} sen(\beta x)\}$.

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x} sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos(\beta x) & e^{\alpha x}sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) - \beta sen(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha sen(\beta x) + \beta cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

es diferente de cero.

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos(\beta x) & e^{\alpha x}sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) - \beta sen(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha sen(\beta x) + \beta cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

es diferente de cero. Tenemos que

$$W = e^{2\alpha x}(\alpha cos(\beta x)sen(\beta x) + \beta cos^2(\beta x))$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos(\beta x) & e^{\alpha x}sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) - \beta sen(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha sen(\beta x) + \beta cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

es diferente de cero. Tenemos que

$$W \quad = e^{2\alpha x}(\alpha cos(\beta x)sen(\beta x) + \beta cos^2(\beta x)) - e^{2\alpha x}(\alpha sen(\beta x)cos(\beta x) - \beta sen^2(\beta x))$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x} sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} cos(\beta x) & e^{\alpha x} sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) - \beta sen(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha sen(\beta x) + \beta cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= e^{2\alpha x}(\alpha cos(\beta x) sen(\beta x) + \beta cos^2(\beta x)) - e^{2\alpha x}(\alpha sen(\beta x) cos(\beta x) - \beta sen^2(\beta x)) \\ &= e^{2\alpha x}\beta(cos^2(\beta x)) + sen^2(\beta x)) \end{aligned}$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos(\beta x) & e^{\alpha x}sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) - \beta sen(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha sen(\beta x) + \beta cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= e^{2\alpha x}(\alpha cos(\beta x)sen(\beta x) + \beta cos^2(\beta x)) - e^{2\alpha x}(\alpha sen(\beta x)cos(\beta x) - \beta sen^2(\beta x)) \\ &= e^{2\alpha x}\beta(cos^2(\beta x)) + sen^2(\beta x)) \end{aligned}$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos(\beta x) & e^{\alpha x}sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) - \beta sen(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha sen(\beta x) + \beta cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= e^{2\alpha x}(\alpha cos(\beta x)sen(\beta x) + \beta cos^2(\beta x)) - e^{2\alpha x}(\alpha sen(\beta x)cos(\beta x) - \beta sen^2(\beta x)) \\ &= e^{2\alpha x}\beta(cos^2(\beta x)) + sen^2(\beta x)) \\ &= e^{2\alpha x}\beta \end{aligned}$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x} sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} cos(\beta x) & e^{\alpha x} sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) - \beta sen(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha sen(\beta x) + \beta cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= e^{2\alpha x}(\alpha cos(\beta x) sen(\beta x) + \beta cos^2(\beta x)) - e^{2\alpha x}(\alpha sen(\beta x) cos(\beta x) - \beta sen^2(\beta x)) \\ &= e^{2\alpha x}\beta(cos^2(\beta x)) + sen^2(\beta x)) \\ &= e^{2\alpha x}\beta \neq 0 \end{aligned}$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}sen(\beta x)\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos(\beta x) & e^{\alpha x}sen(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) - \beta sen(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha sen(\beta x) + \beta cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= e^{2\alpha x}(\alpha cos(\beta x)sen(\beta x) + \beta cos^2(\beta x)) - e^{2\alpha x}(\alpha sen(\beta x)cos(\beta x) - \beta sen^2(\beta x)) \\ &= e^{2\alpha x}\beta(cos^2(\beta x)) + sen^2(\beta x)) \\ &= e^{2\alpha x}\beta \neq 0 \end{aligned}$$

Se sigue que la solución general en este caso es

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}sen(\beta x)$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + w^2 y = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + w^2 y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + w^2 = 0,$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + w^2 y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + w^2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$wi \quad \text{y} \quad -wi.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + w^2 y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + w^2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$wi \quad \text{y} \quad -wi.$$

Es decir, $\alpha = 0$ y $\beta = w$, por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{cos(wx), sen(wx)\}$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' + w^2 y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 + w^2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$wi \quad \text{y} \quad -wi.$$

Es decir, $\alpha = 0$ y $\beta = w$, por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{cos(wx), sen(wx)\}$$

y la solución general es

$$y(x) = C_1 cos(wx) + C_2 sen(wx).$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Dado que $a = 1$, $b = -6$ y $c = 13$ tenemos que $b^2 - 4ac = -16 < 0$, por tanto $\alpha = 3$ y $\beta = 2$.

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Dado que $a = 1$, $b = -6$ y $c = 13$ tenemos que $b^2 - 4ac = -16 < 0$, por tanto $\alpha = 3$ y $\beta = 2$.

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{3x}cos(2x), e^{3x}sen(2x)\}$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Dado que $a = 1$, $b = -6$ y $c = 13$ tenemos que $b^2 - 4ac = -16 < 0$, por tanto $\alpha = 3$ y $\beta = 2$.

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{3x}cos(2x), e^{3x}sen(2x)\}$$

y la solución general es

$$y(x) = C_1e^{3x}cos(2x) + C_2e^{3x}sen(2x).$$