Vectores en $\mathbb{R}^n$ (continuación)

Definición [*Combinación lineal*]. Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores de R^n y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in R$, al vector

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k$$

lo llamamos *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. A los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los llamamos *coeficientes* de la combinación.

Ejemplo.

Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. calcular la combinación lineal (C.L.) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$
2. Determine si $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son C.L. de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Solución:

1. $$2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Veamos si existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ y σ tales que

$$\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \delta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Los sistemas correspondientes son

$$-\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \qquad\qquad -\delta + 2\lambda + \sigma = -1$$

[illegible]

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha \qquad + \gamma = 2 \\ \qquad \beta + \gamma = 1 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} -\delta + 2\lambda + \sigma = -1 \\ \delta \qquad + \sigma = 1 \\ \qquad \lambda + \sigma = 2. \end{cases}$$

Escribamos la M.A. conjunta.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Forma escalonada.

pivote (inconsistente).

Consistente.

Conclusión. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es C.L. de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$; mientra que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ no lo es.

Definición [*Conjunto generado y Conjunto generador*]. Al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lo llamamos *conjunto generado* por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ y lo representamos por

$$Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k, \quad \lambda_i \in R\}.$$

En otras palabras, si $V = Gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, decimos que V es generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$; además, a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lo llamamos *conjunto generador* de V.

Ejemplo. Sea $W = Gen\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

observe que $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, 3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ están en W. En efecto,

$\vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{v} = 0\vec{u} + 1\cdot\vec{v}$.

$\vec{u} = 1\cdot\vec{u} + 0\vec{v}$ $\qquad$ $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = 3\vec{u} + (-\frac{1}{2})\vec{v}$.

Nota.
- $Gen\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ es único.
- El conjunto generador (C.G.) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ <u>no</u> es unico.
- En el ejemplo anterior, $\{3\vec{u}, 7\vec{v}\}$ también es un C.G. de W.

Ejemplo. $\text{Gen}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathbb{R}^3$ (En general $\text{Gen}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$).

Argumento.

- si $\vec{u} \in \text{Gen}\{e_1, e_2, e_3\}$ entonces existen $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{u} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \delta e_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- sea $\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Gen}\{e_1, e_2, e_3\}$.

Ejemplo. si $\vec{v} \neq 0 \equiv \vec{0}$, entonces $\text{Gen}\{\vec{v}\}$ es el conjunto de todos los multiplos escalares de $\vec{v}$ (todos los vectores que son paralelos a $\vec{v}$).

$$\text{Gen}\{\vec{v}\} = \text{Gen}\{\alpha \vec{v}\}, \quad \alpha \neq 0.$$

Ejemplo. ¿El vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in W = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$?

Solución. Verificar si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \begin{aligned} \alpha + 0\beta &= 3 \\ 0\alpha + 0\beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 2. \end{aligned}$$

¿Es consistente?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ Forma escalonada.}$$

Dado que el sistema es consistente, entonces $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$.

Calculemos α y β.

$$-\beta = -1 \Rightarrow \beta = 1.$$

$$\alpha = 3.$$

$\alpha = 3.$

$$3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Tarea: Muestre que $\left\{ \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.

Producto $A\vec{x}$.

- Sea A una matriz de m filas y n columnas.
- $A = [\ \vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n\ ]$; $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$ $i = 1, 2, \dots, n$.
- $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

Se define el producto $A\vec{x}$ como

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n.$$

Ejemplo. Determinar $A\vec{x}$ si $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\3 & 0 & 5\\-2 & 4 & -1\end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

$$A\vec{x} = 2\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\21\\-7\end{pmatrix}.$$

Propiedades:

1. $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$
2. $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}$.

Argumento.

1. Sean $A = (\vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n)$, $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$. Entonces

x_n

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}.$$

$$= (x_1+y_1)\vec{a}_1 + (x_2+y_2)\vec{a}_2 + \cdots + (x_n+y_n)\vec{a}_n.$$

$$= (x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n) + (y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \cdots + y_n\vec{a}_n).$$

$$= A\vec{x} + A\vec{y}.$$

2. Ejercicio.

Ejemplo (expresar un SEL en la forma $A\vec{x}=\vec{b}$).

$$3x - 2y + 1z = -2$$
$$1\cdot x + 0y - 3z = 1$$

Forma vectorial:

$$x\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Forma $A\vec{x}=\vec{b}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}}_{\text{Matriz de los coeficientes.}} \underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\text{Vector las incognitas.}} = \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}_{\text{Vector terminos constantes}}.$$

Luego, se tienen tres formas de representar un SEL.

- ✓ $[A\,|\,\vec{b}]$
- ✓ $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$
- ✓ $A\vec{x}=\vec{b}$.

Teorema [*Equivalencia de conceptos*].

Dados A una matriz, cuyas n columnas son vectores de R^m y $\mathbf{b}$ un vector de R^m, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. El sistema cuya matriz aumentada es $[A|\mathbf{b}]$ es consistente.
2. Existe al menos un vector $\mathbf{x}$ de R^n, tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
3. El vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.
4. El vector $\mathbf{b}$ pertenece al conjunto generado por las columnas de A.

Definición [*Espacio nulo*]. Dada A, una matriz con n columnas, definimos *el espacio nulo* de A como el conjunto N_A de todos los vectores $\mathbf{x}$ de R^n, tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto es

$$N_A = \{\mathbf{x} \in R^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

$$= \text{Todas las soluciones de } [A|0].$$

Ejemplo. Considere $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Determinar $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \in N_A$.

2. Encontrar un conjunto generador de N_A.

Solución.

1. $\cdot\ A\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$= 1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \neq 0$$

Como $A\vec{v} \neq 0 \Rightarrow \vec{v} \notin N_A$.

$\cdot\ A\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} & & \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= -3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $A\vec{w} = \odot \Rightarrow \vec{w} \in N_A$.

2. Para encontrar un C. G. de N_A, hay que determinar todas las soluciones del sistema homogéneo $A\vec{x} = \odot$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La M.A. Correspondiente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2 + 2F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{5}F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_1 - 2F_2 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \end{array}\right)$$

$$y + \frac{1}{5}z = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{5}z = -\frac{1}{5}t, \quad z = t.$$

$$-x + \frac{3}{5}z = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}t.$$

$$\text{Conjunto solución } (N_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3/5\,t \\ -1/5\,t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Luego, <u>un</u> C. G. de N_A es $\left\{ \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Note que <u>otro</u> C. G. de N_A es $\left\{ 5\begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ //

Observación:

- Θ siempre está en N_A.
- $N_A = \{\Theta\}$ si y solo si $A\vec{x} = \Theta$ tiene solución única.