Martha Pinzón
Univ. del Valle

FUNCIÓN

El concepto de función es de los conceptos mas importantes, puesto que puede usarse en diversas situaciones de la vida cotidiana. Veamos cómo se define.

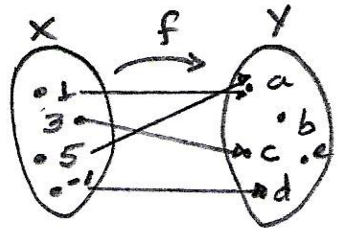
DEFINICIÓN: (función)
Sean A, B dos conjuntos diferentes de vacío.
Una función de A en B es una ley de correspondencia que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.
Se acostumbra denotar las funciones con letras $f, g, h, ..$ etc.
Se escribe $f: A \to B$ para indicar que f es una función de A en B.
Al conjunto de salida se le conoce como Dominio. Se escribe $D_f = A$. Al conjunto de llegada se le llama Codominio. Se denota como $C_f = B$.
Se escribe $f(x) = y$ para indicar que y es la imagen de x mediante f.
x es la variable independiente, y es la variable dependiente.
El conjunto de todas las imágenes se conoce como el rango o recorrido de la función. Se denota por R_f. Es decir, $R_f = \{y \in B \,/\, f(x) = y, \text{ para algún } x \in D_f\}$

Observe: $R_f \subseteq C_f$. (El rango es un subconjunto del codominio).

Hay diversas formas de Representar una función

FORMAS DE REPRESENTACIÓN: Una función $f: X \to Y$ se puede representar por medio de:

i) Un diagrama Sagital



$D_f = X = \{1, 3, 5, -1\}$

$C_f = Y = \{a, b, c, d, e\}$

$R_f = \{a, c, d\}$.

observe $f(1) = f(5) = a$, $f(3) = c$, $f(-1) = d$.

ii) Una tabla de valores

$X \xrightarrow{f} Y$

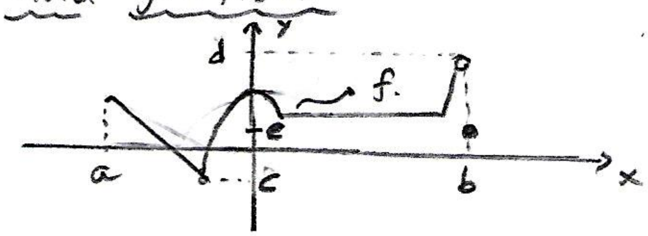
X	Y
a	a
b	c
c	b
d	b
	d

$D_f = \{a, b, c, d\}$

$C_f = \{a, b, c, d\}$

$R_f = \{a, b, c\}$

iii) Una gráfica



$D_f = [a, b]$

$C_f = [c, d]$ ó cualquier conjunto q' contenga $[c, d]$ ej: $\mathbb{R}$

$R_f = [c, d)$

iv) Expresiones Matemáticas variables

$f(x) = \sqrt{x-1}$ ent $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x-1 \geq 0\} = [1, \infty)$.

$g(x) = \dfrac{x^2-4}{x}$, $x \in [1, 2]$. ent $D_g = [1, 2]$

Observe que la función g tiene definido en forma explícita el dominio, mientras que f no. En este caso, el dominio está dado por los valores de x para los cuales la expresión tiene sentido.

Así, para la función $\sqrt{x-1}$, se debe cumplir $x-1 \geq 0$ lo cual significa $x \geq 1$. De ahí $D_f = [1, \infty)$. En este caso se dice que el dominio está definido implícitamente. Ahora, considere la función $h(x)$, donde

$$h(x) = \begin{cases} x-2 & x \leq -3 \\ x^2 & -3 < x < 1 \\ 2x & x \geq 4. \end{cases}$$

$h(x)$ es una función definida a trozos. Varias expresiones definen la función. El dominio de h es:

$$D_h = (-\infty, -3] \cup (-3, 1) \cup [4, \infty) = (-\infty, 1) \cup [4, \infty).$$

Observe: $h(-5) = -5-2 = -7$ pues $-5 \leq -3$

$h(0) = 0^2 = 0$ y $h(5) = 2 \cdot 5 = 10$.

V) Parejas Ordenadas

$$f = \{(x,y) / y = f(x)\}$$

La primera componente indica los elementos del Dominio mientras que la segunda componente, las Imágenes.

Ej: Si $f = \{(-2,4), (0,0), (1,1), (2,4)\}$, entonces

$f(-2) = 4$, ... $f(1) = 1$. $D_f = \{-2, 0, 1, 2\}$

$R_f = \{4, 0, 1\} = \{0, 1, 4\}$

vi) Ecuaciones:

Una ecuación en dos variables, x e y, puede tener soluciones de x en términos de y ó de y en términos de x. En ocasiones estas soluciones definen funciones y se dice que son funciones definidas implícitamente por la ecuación.

Ej: La ecuación $x^2+y^2=9$ no define ni a x como función de y, ni a y como función de x. Pues dado un valor de una de las vbles, se obtie 2 valores para la otra.
Veamos y en términos de x.

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow y^2 = 9-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{9-x^2}$$

observe que dado un valor de x ($x\in[-3,3]$), se obtienen 2 valores para y, luego no representa una función.
En realidad se puede afirmar que la ecuación define dos funciones. $y_1=\sqrt{9-x^2}$, $y_2=-\sqrt{9-x^2}$

vii) Enunciados

La relación que asigna a cada persona su edad, es una función, pues a cada persona le corresponde una única edad. Es claro que la relación contraria no define una función, pues muchas personas tienen la misma edad.

Problema 1: Un rectángulo tiene área de $16\, m^2$. Exprese su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.

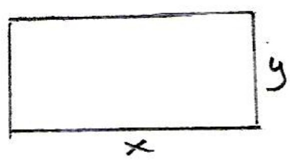
En general para encontrar el modelo que representa el problema es útil:

i) Hacer un dibujo. (Si es posible),

ii) Definir la variable dependiente, vble independiente.

iii) Se busca relación entre las variables.

S//



x: Longitud de la base
y: Longitud de la altura
P: Perímetro
A: Área.

$A = xy = 16.$
$P = 2x + 2y$

Para expresar el perímetro en términos de x o y se busca una relación entre las variables. Como $A = xy = 16$ se despeja x o y. Por ejemplo despejamos y.

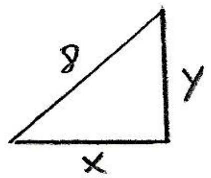
$$A = xy = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x}.$$ Reemplazando en P

Se tiene $$P = 2x + 2y = 2x + 2\cdot\frac{16}{x} = 2x + \frac{32}{x}.$$

Así, $$P(x) = 2x + \frac{32}{x} = \frac{2x^2 + 32}{x},$$ con $x > 0$. Pues x es una longitud.

Problema 2: Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de longitud 8 unidades. Exprese el área del triángulo en función de uno de sus catetos.

S//



Sean x: Longitud de la base
y: Longitud de la altura
A: área.

$A(x) = ?$ ó $A(y) = ?$

Se sabe $A = \frac{1}{2}\text{base}\cdot\text{altura} = \frac{1}{2}xy$. Entonces se busca la relación entre x e y.

Por Teorema de pitágoras, $8^2 = x^2 + y^2$.

Se despeja una de las dos variables. Por ejemplo y.

$$y^2 = 64 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{64 - x^2}.$$

Como x, y representan longitudes, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Así, $y = \sqrt{64 - x^2}$. De otro lado, $64 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 64$

de donde $|x| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 8$. Como $x \geq 0$,

$x \in [0, 8]$

Así,
$$A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{64 - x^2}, \quad x \in [0, 8].$$

<u>Observe:</u> Si V es la función definida como

$V = xyz$, entonces el dominio es

$D_V = \{(x, y, z) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$

Pero si V representa el volumen de una caja de largo x, ancho y, alto z, entonces $V = xyz$

y su dominio es $D_V = \{(x, y, z) / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

Es decir, el dominio de una función depende del contexto.