Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Trayectorias ortogonales

Dada una familia de curvas de la forma $F(x, y) = C$, consideramos el problema de encontrar otra familia de curvas que las intersecten ortogonalmente en cada punto.

Trayectorias ortogonales

Dada una familia de curvas de la forma $F(x, y) = C$, consideramos el problema de encontrar otra familia de curvas que las intersecten ortogonalmente en cada punto.

Este problema aparece en el estudio de electricidad y magnetismo y en la elaboración de cartas meteorológicas.

Trayectorias ortogonales

Dada una familia de curvas de la forma $F(x, y) = C$, consideramos el problema de encontrar otra familia de curvas que las intersecten ortogonalmente en cada punto.

Este problema aparece en el estudio de electricidad y magnetismo y en la elaboración de cartas meteorológicas.

Derivando implícitamente esta ecuación obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Trayectorias ortogonales

Dada una familia de curvas de la forma $F(x,y)=C$, consideramos el problema de encontrar otra familia de curvas que las intersecten ortogonalmente en cada punto.

Este problema aparece en el estudio de electricidad y magnetismo y en la elaboración de cartas meteorológicas.

Derivando implícitamente esta ecuación obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0.$$

Por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0 \qquad \text{o}$$

Trayectorias ortogonales

Dada una familia de curvas de la forma $F(x, y) = C$, consideramos el problema de encontrar otra familia de curvas que las intersecten ortogonalmente en cada punto.

Este problema aparece en el estudio de electricidad y magnetismo y en la elaboración de cartas meteorológicas.

Derivando implícitamente esta ecuación obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \qquad \text{o} \qquad m = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Trayectorias ortogonales

Dada una familia de curvas de la forma $F(x, y) = C$, consideramos el problema de encontrar otra familia de curvas que las intersecten ortogonalmente en cada punto.

Este problema aparece en el estudio de electricidad y magnetismo y en la elaboración de cartas meteorológicas.

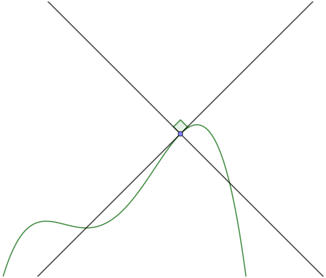
Derivando implícitamente esta ecuación obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

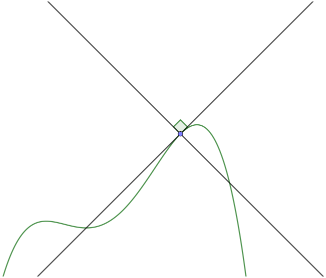
Por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \qquad \text{o} \qquad m = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Si una recta tiene pendiente m una recta ortogonal a esta tiene pendiente $\frac{-1}{m}$.



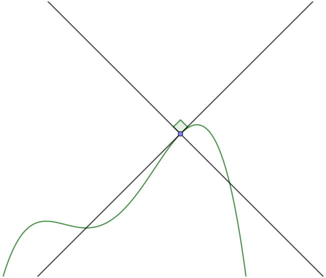
Si una recta tiene pendiente m una recta ortogonal a esta tiene pendiente $\frac{-1}{m}$.



Por tanto, la familia de curvas ortogonales a la familia dada satisface

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}$$

Si una recta tiene pendiente m una recta ortogonal a esta tiene pendiente $\frac{-1}{m}$.



Por tanto, la familia de curvas ortogonales a la familia dada satisface

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy = 0.$$

En resumen, si tenemos que una familia de curvas que está determinada por la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

En resumen, si tenemos que una familia de curvas que está determinada por la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

entonces la familia de curvas ortogonales satisface

$$N(x,y)dx - M(x,y)dy = 0.$$

En resumen, si tenemos que una familia de curvas que está determinada por la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

entonces la familia de curvas ortogonales satisface

$$N(x,y)dx - M(x,y)dy = 0.$$

También diremos que cada familia es una familia de curvas ortogonales a la otra.

En resumen, si tenemos que una familia de curvas que está determinada por la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

entonces la familia de curvas ortogonales satisface

$$N(x,y)dx - M(x,y)dy = 0.$$

También diremos que cada familia es una familia de curvas ortogonales a la otra.

Ejemplo

Encontremos una familia de curvas ortogonales a la familia de elipses

$$x^2 + 2y^2 = C.$$

Ejemplo

Encontremos una familia de curvas ortogonales a la familia de elipses

$$x^2 + 2y^2 = C.$$

Tenemos que esta familia satisface

$$2xdx + 4ydy = 0.$$

Ejemplo

Encontremos una familia de curvas ortogonales a la familia de elipses

$$x^2 + 2y^2 = C.$$

Tenemos que esta familia satisface

$$2xdx + 4ydy = 0.$$

La familia de curvas ortogonales satisface

$$4ydx - 2xdy = 0.$$

Ejemplo

Encontremos una familia de curvas ortogonales a la familia de elipses

$$x^2 + 2y^2 = C.$$

Tenemos que esta familia satisface

$$2xdx + 4ydy = 0.$$

La familia de curvas ortogonales satisface

$$4ydx - 2xdy = 0.$$

Separado variables obtenemos

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2}{x}dx.$$

Ejemplo

Encontremos una familia de curvas ortogonales a la familia de elipses

$$x^2 + 2y^2 = C.$$

Tenemos que esta familia satisface

$$2xdx + 4ydy = 0.$$

La familia de curvas ortogonales satisface

$$4ydx - 2xdy = 0.$$

Separado variables obtenemos

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2}{x}dx.$$

Integrando

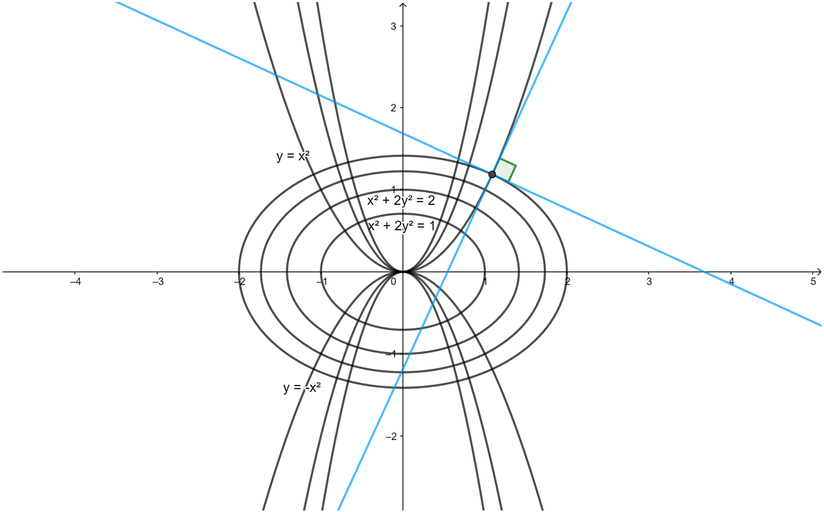
$$\ln|y| = \ln x^2 + C.$$

Por tanto, la familia de curvas ortogonales es la familia de parábolas

$$y = Cx^2.$$

Por tanto, la familia de curvas ortogonales es la familia de parábolas

$$y = Cx^2.$$



Hallemos la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida implícitamente por

$$4y + x^2 + 1 - Ce^{2y} = 0.$$

Hallemos la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida implícitamente por

$$4y + x^2 + 1 - Ce^{2y} = 0.$$

Podemos obtener

$$(4y + x^2 + 1)e^{-2y} = C$$

Hallemos la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida implícitamente por

$$4y + x^2 + 1 - Ce^{2y} = 0.$$

Podemos obtener

$$(4y + x^2 + 1)e^{-2y} = C$$

y diferenciando obtenemos

$$2xe^{-2y}dx + (4e^{-2y} - 2(4y + x^2 + 1)e^{-2y})dy = 0,$$

Hallemos la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida implícitamente por

$$4y + x^2 + 1 - Ce^{2y} = 0.$$

Podemos obtener

$$(4y + x^2 + 1)e^{-2y} = C$$

y diferenciando obtenemos

$$2xe^{-2y}dx + (4e^{-2y} - 2(4y + x^2 + 1)e^{-2y})dy = 0,$$

simplificando

$$xdx + (1 - 4y - x^2)dy = 0,$$

Hallemos la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida implícitamente por

$$4y + x^2 + 1 - Ce^{2y} = 0.$$

Podemos obtener

$$(4y + x^2 + 1)e^{-2y} = C$$

y diferenciando obtenemos

$$2xe^{-2y}dx + (4e^{-2y} - 2(4y + x^2 + 1)e^{-2y})dy = 0,$$

simplificando

$$xdx + (1 - 4y - x^2)dy = 0,$$

La familia de curvas ortogonales satisface

$$(1 - 4y - x^2)dx - xdy = 0.$$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$.

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x}$$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Así, $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx}$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Así, $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x}$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Así, $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3}$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Así, $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$.

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Así, $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$. Multiplicando por el factor integrante obtenemos

$$(x^3 - 4yx^3 - x^5)dx - x^4dy = 0.$$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Así, $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$. Multiplicando por el factor integrante obtenemos

$$(x^3 - 4yx^3 - x^5)dx - x^4 dy = 0.$$

Resolviendo está última ecuación tenemos que

$$F(x,y) = \int x^3 - 4yx^3 - x^5 dx$$

Sean $M(x,y) = 1 - 4y - x^2$ y $N(x,y) = -x$. La ecuación anterior no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ pues

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}.$$

Así, $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$. Multiplicando por el factor integrante obtenemos

$$(x^3 - 4yx^3 - x^5)dx - x^4dy = 0.$$

Resolviendo está última ecuación tenemos que

$$F(x,y) = \int x^3 - 4yx^3 - x^5 dx = \frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6} + \phi(y)$$

Derivando con respecto a y tenemos

$$-x^4 + \phi'(y) = -x^4,$$

Derivando con respecto a y tenemos

$$-x^4 + \phi'(y) = -x^4,$$

Tomando $\phi \equiv 0$ obtenemos que

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6}.$$

Derivando con respecto a y tenemos

$$-x^4 + \phi'(y) = -x^4,$$

Tomando $\phi \equiv 0$ obtenemos que

$$F(x, y) = \frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6}.$$

La familia de curvas ortogonales satisface

$$\frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6} = C,$$

Derivando con respecto a y tenemos

$$-x^4 + \phi'(y) = -x^4,$$

Tomando $\phi \equiv 0$ obtenemos que

$$F(x, y) = \frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6}.$$

La familia de curvas ortogonales satisface

$$\frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6} = C,$$

por tanto

$$yx^4 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + C.$$

Derivando con respecto a y tenemos

$$-x^4 + \phi'(y) = -x^4,$$

Tomando $\phi \equiv 0$ obtenemos que

$$F(x, y) = \frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6}.$$

La familia de curvas ortogonales satisface

$$\frac{x^4}{4} - yx^4 - \frac{x^6}{6} = C,$$

por tanto

$$yx^4 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + C.$$

Concluimos que

$$y = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{C}{x^4}.$$