

función compuesta:

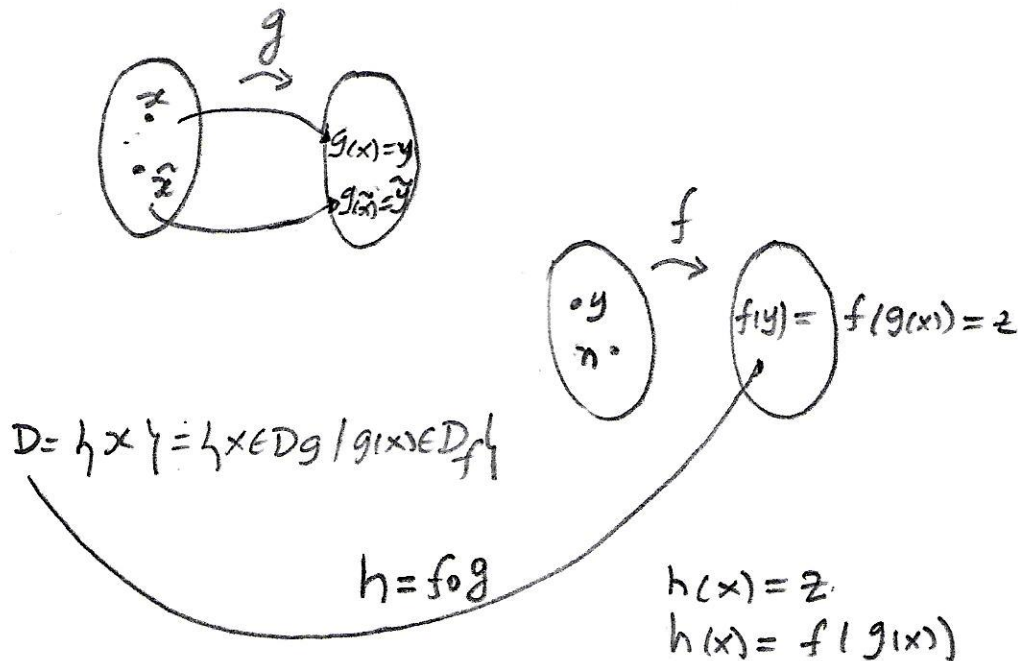
Otra operación entre las funciones es la composición

Definición: Sean f y g funciones. Sea D el conjunto definido como

$$D = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

Si $D \neq \emptyset$, existe una función h con dominio D definida como $h(x) = f(g(x))$

h se llama función compuesta de f y g . Se denota por $h = f \circ g$. Se lee g compuesta f (Por la primera que actúa es g)



Ej 1: Sean $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$. Halle si existe $f \circ g$ y $g \circ f$.

$$\begin{aligned} \text{Sol} \quad f(x) &= \frac{1}{x} \rightarrow D_f = \{x \neq 0\} \\ g(x) &= \frac{1}{x+2} \rightarrow D_g = \{x \neq -2\} \end{aligned}$$

$(f \circ g)(x) = ?$ Primero hallamos D .

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \neq -2 \wedge \frac{1}{x+2} \neq 0\} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x+2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2. \text{ Entonces } D_{f \circ g} = \{x \neq -2 \wedge x \neq -2\} = \{x \neq -2\}.$$

Como $D \neq \emptyset$, existe la función compuesta $f \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+2}} = x+2$$

$$\text{Así, } (f \circ g)(x) = x+2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Observe que no coincide con el dominio de la expresión.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= ? \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \neq 0 \wedge \frac{1}{x} \neq -2\} \end{aligned}$$

veamos cuando $\frac{1}{x} = -2$. y sacamos ese valor.

$$\frac{1}{x} = -2 \rightarrow x = -\frac{1}{2}. \text{ Así,}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \neq 0 \wedge x \neq -\frac{1}{2}\} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}.$$

Como $D \neq \emptyset$, existe $g \circ f$. Así, $(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 2} = \frac{1}{\frac{1+2x}{x}}$

$$(g \circ f)(x) = \frac{x}{1+2x}$$

observe que ambas funciones compuestas existen, pero no necesariamente son iguales.

Ejemplo 2: Sean $f(x) = -x^2$, $g(x) = \sqrt{x-4}$
Halle si existen $f \circ g$ y $g \circ f$, indicando Dominio.

SM $f(x) = -x^2 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$
 $g(x) = \sqrt{x-4}$, $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x-4 \geq 0\} = [4, \infty)$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x \in [4, \infty) \wedge \sqrt{x-4} \in \mathbb{R}\}$$

$$\{x \geq 4 \wedge x \geq 4\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Para que } \sqrt{x-4} \text{ sea un real} \\ \text{se necesita que } x-4 \geq 0 \end{array} \right)$$

Así, $D_{f \circ g} = \{x \geq 4\} = [4, \infty)$

$D \neq \emptyset$, ent $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x-4}) = -(\sqrt{x-4})^2 = -(x-4) = 4-x$.

Ahora, $(g \circ f)(x) = ?$ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} \wedge -x^2 \in [4, \infty)\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} \wedge -x^2 \geq 4\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} \wedge \emptyset\}$
 $= \emptyset$

$-x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$,
 luego $-x^2$ no
 puede ser ≥ 4 .

Como $D = \emptyset$, la función $g \circ f$ no existe.

(observe: veamos q' sucede con la expresión. $(g \circ f)(x) = g(-x^2)$
 $= \sqrt{-x^2-4}$. se observa
 que no existe
 $-x^2-4 < 0$.)

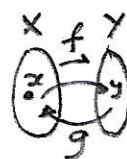
Función Inversa

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

La ley de correspondencia contraria de Y en X definirá una función?

Sea $g: Y \rightarrow X$ la ley de correspondencia contraria. Entonces g es función si cumple:

- todo elemento de Y tiene imagen.
- La imagen de cada elemento es única.



La condición (i) se cumple si f es una función sobreyectiva. Luego consideramos la función f como $f: X \rightarrow R_f$.

La condición (ii) se cumple si f es una función inyectiva. Por lo tanto si f es una función biyectiva, la relación g define una función. Ahora, observe que g cumple:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

Además se cumple:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x, \quad \forall x \in D_f$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y, \quad \forall y \in D_g = R_f$$

Así, se tiene la siguiente definición

Definición: Sea $f: X \rightarrow R_f$. f es una función invertible si existe una función $g: R_f \rightarrow X$

que satisface:

- i) $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in D_f$ y
- ii) $(f \circ g)(x) = x$, para todo $x \in R_f$

La función g es la inversa de f . Se puede mostrar que si una función es invertible, su inversa es única. Se usa la notación $f^{-1} = g$ para representar la inversa de f .

Ojo: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Ejemplo: Determine si la función dada es invertible, en caso afirmativo, halle la inversa.

- i) $f(x) = x^2 + 1$ ii) $g(x) = -7x + 5$ iii) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \leq -1$

Sol i) $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = \mathbb{R}$.

f no es 1-1 $f(2) = f(-2) = 5$. por tanto f no es invertible.

ii) $g(x) = -7x + 5$. $D_g = \mathbb{R}$.

g es inyectiva.

Sean $x_1, x_2 \in D_g$ tales que $g(x_1) = g(x_2)$ entonces
 $-7x_1 + 5 = -7x_2 + 5 \Rightarrow -7x_1 = -7x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Como g es inyectiva, es invertible. El rango de g es \mathbb{R} .

Recuerde $g(x) = y \Leftrightarrow g^{-1}(y) = x$.

por esta razón para hallar la inversa de g ,

despejamos x en términos de y , como se hacía para determinar el rango.

$$y = -7x + 5 \rightarrow y - 5 = -7x \rightarrow x = -\frac{1}{7}(y - 5).$$

Sea $h: R_f = \mathbb{R} \rightarrow D_f = \mathbb{R}$ definida como $h(x) = -\frac{1}{7}(x - 5)$.
veamos que h es la inversa de g , es decir $h(x) = g^{-1}(x)$.

Se debe cumplir $(g \circ h)(x) = x \quad \forall x \in D_h = E = R_g$
 $(h \circ g)(x) = x \quad \forall x \in D_g$

$$\begin{aligned} (g \circ h)(x) &= g\left(-\frac{1}{7}(x - 5)\right) = -7\left(-\frac{1}{7}(x - 5)\right) + 5 \\ &= x - 5 + 5 \\ &= x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$(h \circ g)(x) = h(-7x + 5) = -\frac{1}{7}(-7x + 5 - 5) = -\frac{1}{7}(-7x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

iii) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x \leq -1.$

Sean $x_1, x_2 \leq -1$, tales que $h(x_1) = h(x_2)$
entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 - 1} &= \sqrt{x_2^2 - 1} \rightarrow \\ (\sqrt{x_1^2 - 1})^2 &= (\sqrt{x_2^2 - 1})^2 \rightarrow \end{aligned}$$

$$x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \rightarrow -x_1 = -x_2 \quad \text{pues } x_1, x_2 \in (-\infty, -1], \text{ luego}$$

$$x_1 = x_2$$

Por tanto $h(x)$ es inyectiva y en consecuencia invertible.

Obsérvese $R_h = [0, \infty)$

Para hallar la inversa despejamos x en términos de y .

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y^2 + 1 \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{y^2 + 1}. \text{ Como } x \leq -1, x = -\sqrt{y^2 + 1}$$

Sea $p(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$, $p: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, -1]$.

Veamos que $p = h^{-1}$.

$$\begin{aligned} (p \circ h)(x) &= p(h(x)) = p(\sqrt{x^2 - 1}) = -\sqrt{(\sqrt{x^2 - 1})^2 + 1} \\ &= -\sqrt{x^2 - 1 + 1} = -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x, \\ &\quad \forall x \in (-\infty, -1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ p)(x) &= h(p(x)) = h(-\sqrt{x^2 + 1}) = \sqrt{(-\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1} = \\ &= \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ pues } x \in [0, \infty) \\ &\quad (x \in D_p = R_h) \end{aligned}$$

Por tanto $p = h^{-1}$.

Finalmente, veamos la relación que existe entre la gráfica de una función y la gráfica de su inversa.

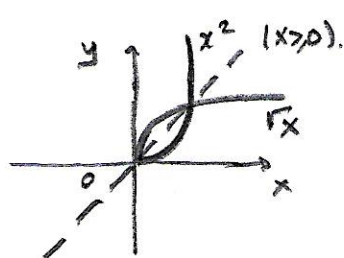
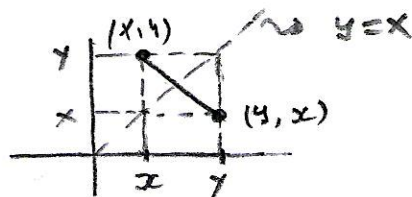
Como $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, entonces

Se cumple:

$$f(x) = y \Rightarrow p(x, y) \in G_f.$$

$$f^{-1}(y) = x \Rightarrow p'(y, x) \in G_{f^{-1}}.$$

¿Qué relación existe entre $p(x, y)$ y $p'(y, x)$?



Ej:

Los puntos $p(x, y)$ y $p'(y, x)$ son simétricos respecto a la recta $x = y$. Así para pintar la gráfica de la inversa de f , se refleja la gráfica de f respecto a la recta $x = y$.