Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Ecuación lineales

Una ecuación **lineal de primer orden** tiene la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de x.

Ecuación lineales

Una ecuación **lineal de primer orden** tiene la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de x. Si $a_1(x) \neq 0$ en un intervalo. Dividiendo se puede reescribir esta ecuación en forma normal:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

Ecuación lineales

Una ecuación **lineal de primer orden** tiene la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de x. Si $a_1(x) \neq 0$ en un intervalo. Dividiendo se puede reescribir esta ecuación en forma normal:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en dicho intervalo.

Ecuación lineales

Una ecuación **lineal de primer orden** tiene la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de x. Si $a_1(x) \neq 0$ en un intervalo. Dividiendo se puede reescribir esta ecuación en forma normal:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en dicho intervalo.
Nota: el nombre lineal es debido a que el término de la izquierda es lineal en la variable y.

Ecuación lineales

Una ecuación **lineal de primer orden** tiene la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de x. Si $a_1(x) \neq 0$ en un intervalo. Dividiendo se puede reescribir esta ecuación en forma normal:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en dicho intervalo.
Nota: el nombre lineal es debido a que el término de la izquierda es lineal en la variable y.
En forma diferencial podemos escribir la ecuación de la forma

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0.$$

Ecuación lineales

Una ecuación **lineal de primer orden** tiene la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de x. Si $a_1(x) \neq 0$ en un intervalo. Dividiendo se puede reescribir esta ecuación en forma normal:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en dicho intervalo.
Nota: el nombre lineal es debido a que el término de la izquierda es lineal en la variable y.
En forma diferencial podemos escribir la ecuación de la forma

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0.$$

Si $P(x) \equiv 0$ la ecuación es exacta y también es separable.

Busquemos un factor integrante $\mu(x)$

$$(\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x))dx + \mu(x)dy = 0. \tag{2}$$

Busquemos un factor integrante $\mu(x)$

$$(\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x))dx + \mu(x)dy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $M(x,y) = \mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)$ y $N(x,y) = \mu(x)$.

Busquemos un factor integrante $\mu(x)$

$$(\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x))dx + \mu(x)dy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $M(x,y) = \mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)$ y $N(x,y) = \mu(x)$. Para que la ecuación sea exacta debemos tener que

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \mu(x)P(x).$$

Busquemos un factor integrante $\mu(x)$

$$(\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x))dx + \mu(x)dy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $M(x,y) = \mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)$ y $N(x,y) = \mu(x)$. Para que la ecuación sea exacta debemos tener que

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \mu(x)P(x).$$

Se sigue que $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Busquemos un factor integrante $\mu(x)$

$$(\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x))dx + \mu(x)dy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $M(x,y) = \mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)$ y $N(x,y) = \mu(x)$. Para que la ecuación sea exacta debemos tener que

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \mu(x)P(x).$$

Se sigue que $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$. Tenemos que la ecuación queda

$$\mu(x)dy + (\mu'(x)y - \mu(x)Q(x))dx = 0$$

Busquemos un factor integrante $\mu(x)$

$$(\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x))dx + \mu(x)dy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $M(x,y) = \mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)$ y $N(x,y) = \mu(x)$. Para que la ecuación sea exacta debemos tener que

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \mu(x)P(x).$$

Se sigue que $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$. Tenemos que la ecuación queda

$$\mu(x)dy + (\mu'(x)y - \mu(x)Q(x))dx = 0$$

o equivalentemente

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)Q(x).$$

Así

$$(\mu y)' = \mu Q$$

Así

$$(\mu y)' = \mu Q$$

e integrando

$$\mu y = \int \mu Q dx + C$$

Así

$$(\mu y)' = \mu Q$$

e integrando

$$\mu y = \int \mu Q dx + C$$

finalmente obtenemos

$$y = \mu^{-1}\left(\int \mu Q dx + C\right). \tag{3}$$

Ejemplo

Resolvamos

$$\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x}senx.$$

Ejemplo

Resolvamos

$$\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x}senx.$$

La forma normal es

$$y' + \frac{1}{x}y = xsenx.$$

Ejemplo

Resolvamos

$$\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x}senx.$$

La forma normal es

$$y' + \frac{1}{x}y = xsenx.$$

Tenemos que $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = xsenx.$

Ejemplo

Resolvamos

$$\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x}senx.$$

La forma normal es

$$y' + \frac{1}{x}y = xsenx.$$

Tenemos que $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = xsenx$. Un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x.$$

Ejemplo

Resolvamos

$$\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x}senx.$$

La forma normal es

$$y' + \frac{1}{x}y = xsenx.$$

Tenemos que $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = xsenx$. Un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x.$$

Multiplicando por el factor integrante obtenemos la ecuación

$$xy' + y = x^2senx$$

Ejemplo

Resolvamos

$$\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^3}y = \frac{1}{x}senx.$$

La forma normal es

$$y' + \frac{1}{x}y = xsenx.$$

Tenemos que $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = xsenx$. Un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x.$$

Multiplicando por el factor integrante obtenemos la ecuación

$$xy' + y = x^2 senx$$

o equivalentemente

$$(xy)' = xsenx.$$

Integrando en ambos lados tenemos

$$xy = \int x^2 sen x \, dx$$

Integrando en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} xy &= \int x^2 senx\, dx \\ &= -x^2 cosx + 2\int xcosx\, dx \end{aligned}$$

Integrando en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} xy &= \int x^2 senx\, dx \\ &= -x^2 cosx + 2\int xcosx\, dx \\ &= -x^2 cosx + 2xsenx - 2\int senx\, dx \end{aligned}$$

Integrando en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} xy &= \int x^2 senx\, dx \\ &= -x^2 cosx + 2\int xcosx\, dx \\ &= -x^2 cosx + 2xsenx - 2\int senx\, dx \\ &= -x^2 cosx + 2xsenx + 2cosx + C. \end{aligned}$$

Integrando en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned}
xy &= \int x^2 senx\, dx \\
&= -x^2 cosx + 2\int xcosx\, dx \\
&= -x^2 cosx + 2xsenx - 2\int senx\, dx \\
&= -x^2 cosx + 2xsenx + 2cosx + C.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$y = -xcosx + 2senx + \frac{2}{x}cosx + \frac{C}{x}.$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$y' + 2y = 3e^{x}, \quad y(0) = 3.$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$y' + 2y = 3e^x, \quad y(0) = 3.$$

En este caso

$$P(x) = 2 \quad \text{y} \quad Q(x) = 3e^x.$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$y' + 2y = 3e^x, \quad y(0) = 3.$$

En este caso

$$P(x) = 2 \quad \text{y} \quad Q(x) = 3e^x.$$

Luego el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

Usando la fórmula (3)

$$y = e^{-2x}\left(\int e^{2x}3e^{x}dx + C\right)$$

Usando la fórmula (3)

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-2x}(\int e^{2x} 3e^{x} dx + C) \\
&= e^{-2x}(3\int e^{3x} dx + C)
\end{aligned}
$$

Usando la fórmula (3)

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x}(\int e^{2x} 3e^{x} dx + C) \\ &= e^{-2x}(3\int e^{3x} dx + C) \\ &= e^{x} + Ce^{-2x}. \end{aligned}$$

Usando la fórmula (3)

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x}\left(\int e^{2x} 3e^{x} dx + C\right) \\ &= e^{-2x}\left(3\int e^{3x} dx + C\right) \\ &= e^{x} + Ce^{-2x}. \end{aligned}$$

Usando la condición inicial $y(0) = 3$ obtenemos que

$$y = e^{x} + 2e^{-2x}.$$

Ecuaciones de Bernoulli

Llamaremos ecuación de Bernoulli a una de la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^p, \tag{4}$$

Ecuaciones de Bernoulli

Llamaremos ecuación de Bernoulli a una de la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^p, \tag{4}$$

donde a y b son funciones continuas en un intervalo y $p \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones de Bernoulli

Llamaremos ecuación de Bernoulli a una de la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^p, \tag{4}$$

donde a y b son funciones continuas en un intervalo y $p \in \mathbb{R}$.

Si $p = 0$ o $p = 1$ la ecuación es lineal.

Ecuaciones de Bernoulli

Llamaremos ecuación de Bernoulli a una de la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^p, \tag{4}$$

donde a y b son funciones continuas en un intervalo y $p \in \mathbb{R}$.

Si $p = 0$ o $p = 1$ la ecuación es lineal.

Si $p \neq 0$ o $p \neq 1$ la ecuación puede reducirse a una lineal con la sustitución $u = y^{1-p}$,

Ecuaciones de Bernoulli

Llamaremos ecuación de Bernoulli a una de la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^p, \tag{4}$$

donde a y b son funciones continuas en un intervalo y $p \in \mathbb{R}$.

Si $p = 0$ o $p = 1$ la ecuación es lineal.

Si $p \neq 0$ o $p \neq 1$ la ecuación puede reducirse a una lineal con la sustitución $u = y^{1-p}$, en efecto, tenemos que $u' = (1-p)y^{-p}y'$ y multiplicando por $(1-p)y^{-p}$ en la ecuación (4) obtenemos

$$(1-p)y^{-p}y' + (1-p)a(x)y^{1-p} = (1-p)b(x),$$

Ecuaciones de Bernoulli

Llamaremos ecuación de Bernoulli a una de la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^p, \tag{4}$$

donde a y b son funciones continuas en un intervalo y $p \in \mathbb{R}$.

Si $p = 0$ o $p = 1$ la ecuación es lineal.

Si $p \neq 0$ o $p \neq 1$ la ecuación puede reducirse a una lineal con la sustitución $u = y^{1-p}$, en efecto, tenemos que $u' = (1-p)y^{-p}y'$ y multiplicando por $(1-p)y^{-p}$ en la ecuación (4) obtenemos

$$(1-p)y^{-p}y' + (1-p)a(x)y^{1-p} = (1-p)b(x),$$

o equivalentemente

$$u' + (1-p)a(x)u = (1-p)b(x),$$

Ecuaciones de Bernoulli

Llamaremos ecuación de Bernoulli a una de la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^p, \tag{4}$$

donde a y b son funciones continuas en un intervalo y $p \in \mathbb{R}$.

Si $p = 0$ o $p = 1$ la ecuación es lineal.

Si $p \neq 0$ o $p \neq 1$ la ecuación puede reducirse a una lineal con la sustitución $u = y^{1-p}$, en efecto, tenemos que $u' = (1-p)y^{-p}y'$ y multiplicando por $(1-p)y^{-p}$ en la ecuación (4) obtenemos

$$(1-p)y^{-p}y' + (1-p)a(x)y^{1-p} = (1-p)b(x),$$

o equivalentemente

$$u' + (1-p)a(x)u = (1-p)b(x),$$

que es una ecuación lineal.

Ejemplo

Resolver

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Ejemplo

Resolver

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Expresando la ecuación en forma normal

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

Ejemplo

Resolver

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Expresando la ecuación en forma normal

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

La cual es una ecuación de Bernoulli con $p = 2$,

Ejemplo

Resolver

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Expresando la ecuación en forma normal

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

La cual es una ecuación de Bernoulli con $p = 2$, multiplicando por y^{-2} tenemos

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}.$$

Ejemplo

Resolver

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Expresando la ecuación en forma normal

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

La cual es una ecuación de Bernoulli con $p = 2$, multiplicando por y^{-2} tenemos

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}.$$

Sustituyendo $u = y^{1-2} = y^{-1}$ y $u' = -y^{-2}y'$

Ejemplo

Resolver

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Expresando la ecuación en forma normal

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2.$$

La cual es una ecuación de Bernoulli con $p = 2$, multiplicando por y^{-2} tenemos

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}.$$

Sustituyendo $u = y^{1-2} = y^{-1}$ y $u' = -y^{-2}y'$ tenemos

$$-u' + \frac{1}{x}u = \frac{\ln x}{x}.$$

o

$$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln x}{x}.$$

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$.

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx}$

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x}$

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}}$

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$.
Usando la fórmula (3) tenemos que

$$u = x\left(\int -\frac{\ln x}{x^2}dx + C\right)$$

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$.
Usando la fórmula (3) tenemos que

$$u = x\left(\int -\frac{\ln x}{x^2} dx + C\right) = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right)$$

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$.
Usando la fórmula (3) tenemos que

$$u = x\left(\int -\frac{\ln x}{x^2} dx + C\right) = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right) = \ln x + 1 + Cx.$$

De la anterior ecuación tenemos que $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$. Así el factor integrante $\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$.
Usando la fórmula (3) tenemos que

$$u = x\left(\int -\frac{\ln x}{x^2}dx + C\right) = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right) = \ln x + 1 + Cx.$$

Dado que $u = y^{-1}$ tenemos que

$$y = u^{-1} = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$