Martha Pinzón
Univ del Valle

INVERSA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas por ser periódicas no son invertibles, sin embargo se han restringido sus dominios para que lo sean. Universalmente se han definido los conjuntos.

Veamos:

1) $f(x) = \operatorname{sen} x = y$ es invertible si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$
$y \in [-1, 1]$.

La función $g(x)$ que asigna a cada $x \in [-1, 1]$ un único $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que:

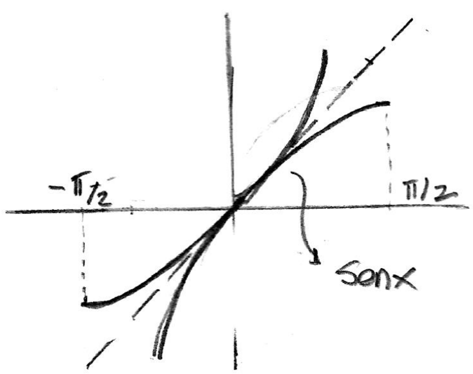
$$g(x) = y \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x$$

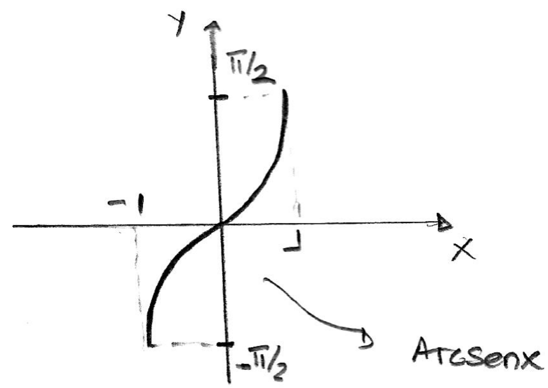
se llama función arcoseno y se denota como

$g(x) = \operatorname{arcsen} x$

$g(x)$ es la inversa de $\operatorname{sen} x$. $\operatorname{sen}^{-1} x = \operatorname{arcsen} x$

La gráfica se obtiene reflejando la gráfica de $\operatorname{sen} x$.





<u>observe:</u> $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$, $x \in [-1, 1]$.
$\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Ej: $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} \pi/4) = \pi/4$.
$\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} 2\pi/3) = \pi/3$ pues $2\pi/3 \notin [-\pi/2, \pi/2]$

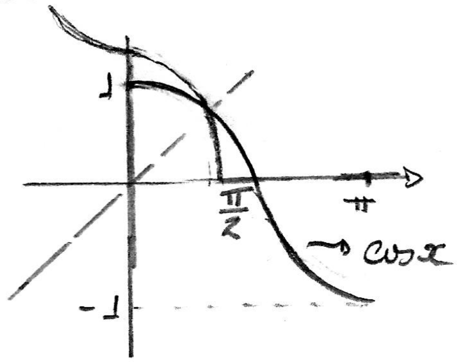
2) $f(x) = \cos x$ es invertible para $x \in [0, \pi]$
$y \in [-1, 1]$.

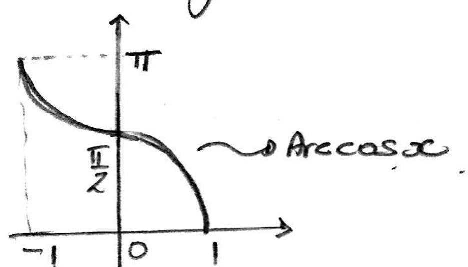
La función g que asigna a cada $x \in [-1, 1]$ un único $y \in [0, \pi]$ tal que

$$g(x) = y \Leftrightarrow \cos y = x$$

se llama función arcocoseno. Se denota como $g(x) = \arccos x$ y es la inversa de $\cos x$.

Gráfica

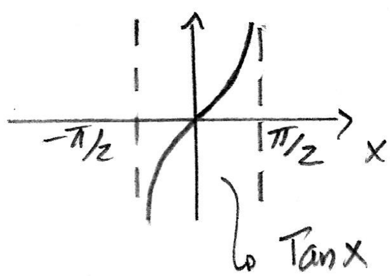


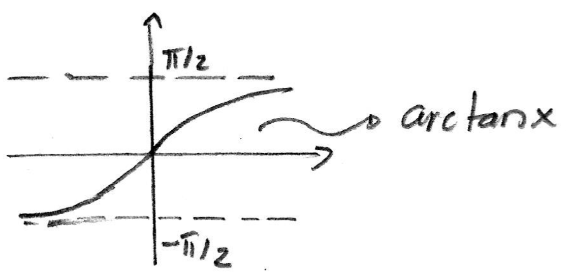


$\cos(\arccos x) = x$, $x \in [-1, 1]$
$\arccos(\cos x) = x$, $x \in [0, \pi]$

3) $f(x) = \tan x$ es invertible para $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
$y \in \mathbb{R}$.

La función g que asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ un único $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $g(x) = y \Leftrightarrow \tan y = x$, se llama función arcotangente. Se escribe $g(x) = \arctan x$, y es la inversa de $\tan x$



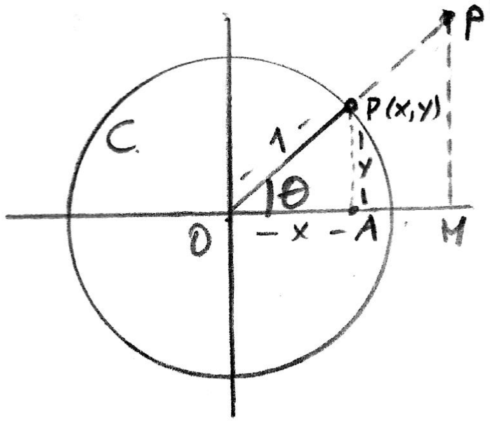


En forma análoga se definen las inversas de las funciones trigonométricas restantes.

Ej: $f(x) = \csc x$ es invertible si $x \in [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$.

Relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos

Consideramos un círculo unitario centrado en el origen y θ un ángulo en posición standard.



los triángulos MOP' y AOP son semejantes, luego existe proporción entre sus lados

$$\frac{x}{1} = \frac{OM}{OP'} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\frac{y}{1} = \frac{MP'}{OP'} \rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

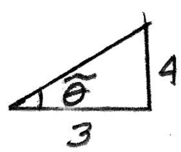
$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{cat opuesto}}.$$

Ej 1: Si $\theta \in$ III cuadrante y $\tan\theta = \frac{4}{3}$, halle $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta$.

S// Consideremos un ángulo $\hat{\theta} \in$ I cuadrante, tal que $\tan\tilde{\theta} = 4/3$.



$H^2 = 16 + 9 = 25 \rightarrow H = \sqrt{25} = 5 \quad (H > 0)$

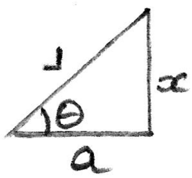
Como $\theta \in$ III cuadrante, $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta < 0$

Luego $\operatorname{sen}\theta = \frac{-4}{5}$, $\cos\theta = \frac{-3}{5}$.

Ej 2: Halle: $\cos(\arcsin x)$, $x \in (0,1)$ (Así $\theta \in (0, \pi/2)$)

s//

$$\theta = \operatorname{arc\,sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = x$$



$a^2 + x^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - x^2 \Rightarrow a = \sqrt{1-x^2}$ $(a>0)$

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \cos\theta = \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}.$$

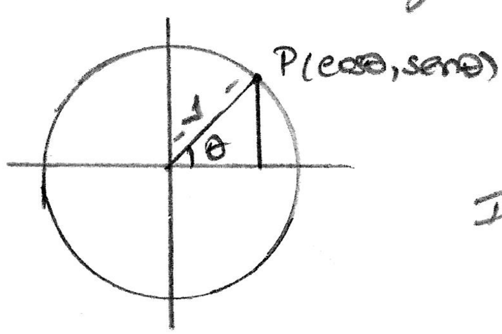
Identidades Trigonométricas

En general una identidad es una ecuación que se satisface para todos los valores de las variables.
Se llama Identidad trigonométrica si involucra relaciones trigonométricas.

Ej: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ es una Identidad.

Veamos Identidades trigonométricas

1.



$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Identidad fundamental.

2. Si suponemos $\cos\theta \neq 0$, entonces dividiendo por $\cos^2\theta$ se tiene: $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

3. Si $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, entonces dividiendo por $\operatorname{sen}^2\theta$ se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

Otras Identidades Importantes hacen referencia al seno o coseno de suma o resta de ángulos.

1. $\operatorname{Sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$.
2. $\operatorname{Sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha+(-\beta))=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)$
$=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha(-\operatorname{sen}\beta)$
$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$.
3. Si $\alpha=\beta$, $\operatorname{Sen}(2\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha$
$=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

a) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

b) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$
$=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$.

c) Si $\alpha=\beta$, $\cos(2\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha$
$=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$.

$$\operatorname{Tan}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{Tan}\alpha+\operatorname{Tan}\beta}{1-\operatorname{Tan}\alpha\cdot\operatorname{Tan}\beta}$$

$$\operatorname{Tan}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{Tan}\alpha+\operatorname{Tan}(-\beta)}{1-\operatorname{Tan}\alpha\cdot\operatorname{Tan}(-\beta)}=\frac{\operatorname{Tan}\alpha-\operatorname{Tan}\beta}{1+\operatorname{Tan}\alpha\cdot\operatorname{Tan}\beta}$$

$$\operatorname{Tan}(2\alpha)=\frac{\operatorname{Tan}\alpha+\operatorname{Tan}\alpha}{1-\operatorname{Tan}\alpha\cdot\operatorname{Tan}\alpha}=\frac{2\operatorname{Tan}\alpha}{1-\operatorname{Tan}^2\alpha}.$$

Ejemplo: Demuestre las Identidades

i) $\sec x = \tan x + \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$

ii) $(\csc\theta + \cot\theta)(\sec\theta - 1) = \tan\theta$

iii) $\sec^4 x - \tan^4 x = \dfrac{2-\cos^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$

S// i) $\sec x = \tan x + \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$. Partimos del lado derecho, el cuál proporciona más información y llegamos a la expresión del lado izquierdo

$$\tan x + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x(1+\operatorname{sen} x) + \cos x \cdot \cos x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{\cancel{1+\operatorname{sen} x}}{\cos x\cancel{(1+\operatorname{sen} x)}} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

ii) $(\csc\theta + \cot\theta)(\sec\theta - 1) = \tan\theta$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) = \frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta} =$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{\cancel{\operatorname{sen}^2\theta}}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

iii) $\sec^4 x - \tan^4 x = (\sec^2 x)^2 - (\tan^2 x)^2 = (\sec^2 x - \tan^2 x)(\sec^2 x + \tan^2 x)$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

$$= \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \quad \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1+1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2-\cos^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}.$$

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una ecuación que contiene relaciones trigonométricas. Se despeja la relación y luego se determina el ángulo. Para ello, se usan las propiedades algebraicas de los números reales.

Ej: Resolver las siguientes ecuaciones.

i) $\operatorname{sen} x \cos x - \frac{1}{2}\cos x = 0$

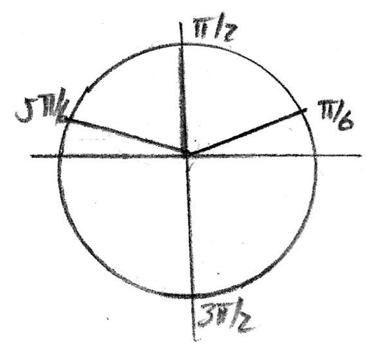
ii) $2\tan x - 3\cot x = 1 \quad x \in (0,\pi)$

iii) $\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen} x$

S/ i) $\operatorname{sen} x \cos x - \frac{1}{2}\cos x = \cos x\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

$\cos x = 0$ ó $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$x = \pi/2,\ 3\pi/2 \qquad x = \pi/6,\ 5\pi/6$. en $[0, 2\pi]$.



Todas las soluciones son:

$$S = \{\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/6 + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/2 + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}\}$$

ii) $2\tan x - 3\cot x = 1$.

$2\tan x - \frac{3}{\tan x} = 1 \rightarrow 2\tan^2 x - 3 = \tan x$

$2\tan^2 x - \tan x - 3 = 0$

$(2\tan x - 3)(\tan x + 1) = 0$

$\tan x = 3/2$, $\tan x = -1$.

$x = \arctan 3/2$, $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

$S = \{\arctan 3/2, 7\pi/4\}$ pues $\frac{3\pi}{4} \notin (-\pi/2, \pi/2)$

$7\pi/4 \notin (-\pi/2, \pi/2)$, pero su equivalente en $(-\pi/2, \pi/2)$ es

$-\pi/4$. $S = \{\arctan 3/2, -\pi/4\}$

iii) $\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen} x$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4\operatorname{sen} x$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x - 1 = 0$

$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x - 1 = 0$

$-2\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x = 0$

$\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x = 0$

$\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + 2) = 0$

$\operatorname{sen} x = 0$, $\operatorname{sen} x = -2$.

$x = 0, \pi, 2\pi$, Nunca

$Sol = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.