Clase 23-11-21

martes, 23 de noviembre de 2021 10:58 a. m.

Método de solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales

(Eliminación de Gauss + Sustitución hacia atrás)

Objetivo: *Dado un sistema de ecuaciones lineales, determinar si tiene solución y, en caso de tener, hallar su(s) solución(es).*

1 Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.

2 Aplique el método de eliminación de Gauss para reducir la matriz aumentada del sistema a una matriz escalonada equivalente (Algoritmo 1).

3 Si la columna de términos independientes es pivotal, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución y termina el algoritmo. Si no, el sistema de ecuaciones lineales tiene solución y continua el algoritmo.

4 Resuelva el sistema correspondiente a la matriz escalonada usando el método de sustitución hacia atrás (Algoritmo 3).

Ejemplo (solución simultánea de SEL).

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & - & z & - & 2w & = & -2 \\ 3x & - & 6y & - & 3z & & & = & 0 \\ -2x & + & 3y & & & - & 4w & = & 4 \\ 5x & - & 10y & - & 3z & + & 4w & = & 4 \end{array} \qquad S.1$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & - & r & - & 2s & = & -1 \\ 3p & - & 6q & - & 3r & & & = & -3 \\ -2p & + & 3q & & & - & 4s & = & 0 \\ 5p & - & 10q & - & 3r & + & 4s & = & -3 \end{array} \qquad S.2$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 3x_3 & & & = & 2 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & & & - & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & - & 10x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \end{array} \qquad S.3$$

Solución.

1. Escribir la M.A. conjunta de los SEL.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -4 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & -6 & -3 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -4 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & -10 & -3 & 4 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{S.1 \quad S.2 \quad S.3}_{\text{Términos constantes.}}$$

2. Aplicar eliminación de Gauss.

$F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & -6 & -3 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & -4 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & -10 & -3 & 4 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 + \frac{2}{3}F_1 \to F_3$

$F_4 - \frac{5}{3}F_1 \to F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & -6 & -3 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 4 & -2 & 10/3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & -7/3 \end{array}\right)$$

$F_2 \leftrightarrow F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & -6 & -3 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 4 & -2 & 10/3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & -7/3 \end{array}\right)$$

$F_4 + 2F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & -6 & -3 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 4 & -2 & 10/3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/3 \end{array}\right)$$

Forma escalonada.

El S.3 es inconsistente

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & -6 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

3. Aplicar método de sustitución hacia atrás.

$$-F_3 \to F_3 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & -6 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 + 2F_3 \to F_2 \\ F_1 + 3F_3 \to F_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & -6 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$-F_2 \to F_2 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & -6 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 + 6F_2 \to F_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cc} 3 & 0 & 0 & 6 & -42 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{3}F_1 \to F_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ S.1 & S.2 \end{array}$$

4. Despejar las variables pivotales para obtener las soluciones de los sistemas de ecuaciones.

- Solución del sistema 1.

$$x + 2w = -14 \Rightarrow x = -14 - 2w = -14 - 2t, \quad w = t.$$

$$y = -8$$

$$z + 2w = 2 \Rightarrow z = 2 - 2t$$

Conjunto solución: $\{(-14-2t, -8, 2-2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

- Solución del sistema 2.

$$x + 2w = 0 \Rightarrow x = -2t, \quad w = t.$$
$$y = 0$$
$$z + 2w = 1 \Rightarrow z = 1 - 2t$$

Conjunto solución: $\{(-2t, 0, 1-2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

El método de Gauss-Jordan.

- Es una variante del método de eliminación de Gauss + sustitución hacia atrás.

- Sitúa el pivote y lo convierte en 1. Luego introduce ceros debajo y encima del pivote.

Ejemplo. Resolver el siguiente SEL usando Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + z &= 5 \\ x - y - 2z &= -5. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{2}F_1 \to F_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$F_2 - 2F_1 \to F_2$

$F_3 - F_1 \to F_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3/2 & -5/2 & -13/2 \end{array}\right)$$

$F_3 - F_1 \to F_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3/2 & -5/2 & -13/2 \end{array}\right)$

$\frac{1}{2} F_2 \to F_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3/2 & -5/2 & -13/2 \end{array}\right)$

$F_3 + \frac{3}{2} F_2 \to F_3$

$F_1 - \frac{1}{2} F_2 \to F_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5/2 & -5 \end{array}\right)$

$-2/5 F_3 \to F_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$F_1 - \frac{1}{2} F_3 \to F_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Forma escalonada reducida.

$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 2.$

$(0, 1, 2)$ es la única solución del sistema.

Vectores de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1 [*Vector de* $\mathbb{R}^n$]. Llamamos *vector de* $\mathbb{R}^n$ a una lista ordenada de n números reales, la cual denotamos como $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

A x_1 lo llamamos *primera componente*, a x_2 *segunda componente* y en general, a x_k lo llamamos *k-ésima componente* del vector $\mathbf{x}$.

Ejemplos:

1. $\vec{u} = (1)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$

2. $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -4 \\ \pi \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector de $\mathbb{R}^4$.

Vector nulo: todas sus componentes son cero. $\vec{0}$

3. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

4. Vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particular para $\mathbb{R}^3$.

$$e_1 = \hat{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \hat{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad e_3 = \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dos vectores son iguales si todas sus componentes son iguales.

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} a \\ -3 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ 1/5 \end{pmatrix}$ si y solo si $a = -2$, $b = -3$ y $c = 1/5$.

2. Existen a y b tales que

$\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix}$? NO.

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \ ? \quad \text{NO.}$$

$a = 3$

$b = 2$

$-a = 1 \Rightarrow a = -1$ y $a = 3$ X.

3. Los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ son diferentes, pues $-1 \neq 1$.