Coordenadas respecto a una base ordenada

Definición 8 [*Vector de coordenadas*]. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base (ordenada) del espacio vectorial V. Como para todo $\mathbf{v} \in V$, existen escalares únicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v},$$

al vector de $\mathbb{R}^n$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

lo llamamos *vector de coordenadas* de $\mathbf{v}$ respecto a la base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Ejemplo. $V = \mathbb{R}^n$

$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Sea $v \in \mathbb{R}^n$

Entonces $v = [v]_B$.

En efecto,

Sea $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Observe que

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Luego, $[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v.$

Ejemplo. Sea $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Encontrar $[w]_B$ si

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base ordenada.}$$

Solución.

Debemos hallar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 tales que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_4 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 \qquad\qquad &= 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \qquad &= 0 \\ \alpha_1 \qquad\qquad + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Al resolver el sistema se obtiene

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = -1$$

En consecuencia, $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = [w]_{\mathcal{B}}$.

Ejemplo. Si $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \underline{1} \\ \underline{-1} \\ \underline{3} \\ \underline{-2} \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{1-x,\ 2x+x^2,\ x^2-x^3,\ x^3-1\}$, calcular $p(x)$.

$$p(x) = \underline{1}\,(1-x) + \underline{(-1)}\,(2x+x^2) + \underline{3}\,(x^2-x^3) + \underline{(-2)}\,(x^3-1).$$
$$= 3 - 3x + 2x^2 - 5x^3.$$

Observación: Si cambia el orden de los elementos de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}' = \{x^3-1,\ x^2-x^3,\ 2x+x^2,\ 1-x\}.$$

entonces $p(x) = -2(x^3-1) + 3(x^2-x^3 + (-1)(2x+x^2) + 1(1-x)$.

Así que $[p(x)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $[p(x)]_{\mathcal{B}} \neq [p(x)]_{\mathcal{B}'}$.

Teorema 14 [*Conservación de los coeficientes de una combinación lineal*].
Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ vectores de un espacio vectorial V y $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}_k, \quad \text{si y sólo si,} \quad [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \lambda_1 [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \lambda_k [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}.$$

Ejemplo. Sean

$$\underbrace{2x^2-2x+9}_{u} = \overset{\lambda_1}{2}(\underbrace{x^2-2x+1}_{u_1}) + \overset{\lambda_2}{3}(\underbrace{x+2}_{u_2}) + \overset{\lambda_3}{(-1)}(\underbrace{x-1}_{u_3})$$

$B=\{1, x, x^2\}$ y $B'=\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ bases de P_2.

Verifiquemos que

$$[2x^2-2x+9]_B = 2[x^2-2x+1]_B + 3[x+2]_B - 1[x-1]_B.$$

Solución.

Para la base $B=\{1, x, x^2\}$.

· Buscar α_1, α_2 y α_3 tales que

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x^2) = 2x^2-2x+9.$$

$$\alpha_1 = 9, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 2$$

$$[2x^2-2x+9]_B = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

· Buscar α_1, α_2 y α_3 tales que

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x^2) = x^2-2x+1.$$

$$[x^2-2x+1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Similarmente se tiene

$$[x+2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [x-1]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[x+2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [x-1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[2x^2-2x+9]_B = 2[x^2-2x+1]_B + 3[x+2]_B - 1[x-1]_B.$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Verificar la igualdad.

Para la base $B' = \{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\}$.

$$[2x^2-2x+9]_{B'} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [x^2-2x+1]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[x+2]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [x-1]_{B'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$[2x^2-2x+9]_{B'} = 2[x^2-2x+1]_{B'} + 3[x+2]_{B'} - 1[x-1]_{B'}.$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Teorema 15 [*Matriz de transición*].
Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bases de un espacio vectorial V y sea $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matriz de tamaño $n \times n$, cuyas columnas son los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ respecto a la base $\mathcal{B}'$; es decir,

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'}\ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'}\ \cdots\ [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'}].$$

Entonces, para cada vector $\mathbf{v} \in V$,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

A la matriz $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la llamamos *matriz de transición*[7] de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

$P_{BB'}$: también se llama matriz cambio de base de B a B'.

Ejemplo. Sean $B = \{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\}$

$B' = \{1,\ x,\ x^2\}$.

Determinar :

a) $P_{BB'} = P$

b) $P_{B'B} = P'$

$$B \underset{P_{B'B}}{\overset{P_{BB'}}{\rightleftarrows}} B'$$

a) $P = P_{BB'} = \left([1]_{B'} \quad [1+x]_{B'} \quad [1+x+x^2]_{B'} \right)$

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \delta x^2 = 1. \Rightarrow [1]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha \cdot 1 + \beta x + \delta x^2 = 1 + x \Rightarrow [1+x]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha \cdot 1 + \beta x + \delta x^2 = 1 + x + x^2 \Rightarrow [1+x+x^2]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{BB'}$

b) $P' = P_{B'B} = \left([1]_B \quad [x]_B \quad [x^2]_B \right)$.

Sean α, β, δ tales que

$$\alpha\cdot 1 + \beta(1+x) + \delta(1+x+x^2) = 1.$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \delta &= 1 \\ \beta + \delta &= 0 \\ \delta &= 0. \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \delta &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \alpha &= 1 \end{aligned} \Rightarrow [1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique que:

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $P' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$

Teorema 16 [*Unicidad e invertibilidad de la matriz de transición*]. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bases de un espacio vectorial V y sea P la matriz de transición de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$. Es decir,

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'} \ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'}] .$$

1. Si existe otra matriz P' tal que, para cada vector $\mathbf{v} \in V$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P'[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, entonces $P = P'$.
2. La matriz de transición P es invertible y su inversa es la matriz de transición de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

Ejemplo. Del ejemplo anterior tenemos que

$$P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P' = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tarea: Verificar que $P \cdot P' = I$ y $P'P = I$.