Taller Inducción

Matemáticas Discretas I / 750004C / Grupo 01 / Prof. Juan Francisco Díaz / Monitor Carlos Andrés Borja / 2021-II

1. Demostrar, usando inducción matemática (inducción simple) los siguientes planteamientos:

(a) $\forall n \mid n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} 2i = n \cdot (n+1)$

(b) $\forall n \mid n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} (4i-2) = 2n^2$

(c) $\forall n \mid n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

(d) $\forall n \mid n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

(e) $\forall n \mid n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

(f) $\forall n \mid n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

(g) $\forall n \mid n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n \cdot (n+1)}{2})^2$

(h) $\forall n \mid n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} 4 \cdot 3^i = \frac{4 \cdot 3^{n+1} - 4}{2}$

2. Demostrar, usando inducción simple primero, y luego demuestre el mismo ejercicio por inducción fuerte:

(a) $\forall n \mid n \geq 8 : \exists x_1, x_2 \in \mathbb{N} : 3x_1 + 5x_2 = n$

(b) $\forall n \mid n \geq 12 : \exists a, b \in \mathbb{N} : 4a + 5b = n$

3. Demostrar el siguiente ejercicio (que involucra una sucesión recursiva) mediante inducción fuerte:

Suponga que se tiene la siguiente sucesión:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 3$
- $a_k = a_{k-2} + 2a_{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{Z} : k \geq 3$

P(n) establece que, dada la secuencia $a_1, a_2, ..., a_k$, como se define arriba, a_n **SIEMPRE** es **impar**. Es decir:
$P(n) = \forall n \in \mathbb{Z} : n \geq 1 : a_n = 2x + 1, x \in \mathbb{Z}$

4. Tenga en cuente la siguiente definición recursiva, sus reglas y a partir de ello conteste los subpuntos a, b y c.

Sea $C \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definido recursivamente de la siguiente manera:

- *Regla 1:* $(0, 0) \in C$
- *Regla 2:* Si $(x, y) \in C$ entonces $(x + 1, y + 2) \in C$
- *Regla 3:* Si $(x, y) \in C$ entonces $(x + 2, y + 1) \in C$

(a) Enumere 10 elementos de C distintos a $(0, 0)$

(b) Demuestre, mediante inducción estructural, el siguiente postulado: $\forall (x, y) \in C : 3 | (x + y)$

(c) Demuestre o refute el siguiente postulado: $\forall x, y \in \mathbb{N} : 3 | (x + y) \implies (x, y) \in C$