$-3\pi x(x-12)=0 \Leftrightarrow x=0$ ó $x=12$.

Se evalúa f en $x=0, 12, 18$.

$V(x) = \pi x^2(18-x)$.

$V(0) = \pi(0)^2(18-0)=0$

$V(12) = \pi(12)^2(18-12) = 144\pi(6) = 864\pi$

$V(18) = \pi 18^2(18-18) = 0$.

El máximo se alcanza en $x=12$. $y = 18-x = 18-12=6$

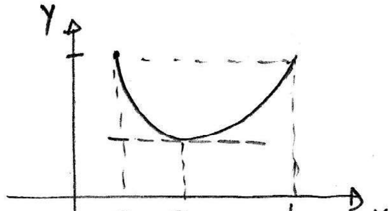
El volumen máximo es $V = 864\pi$

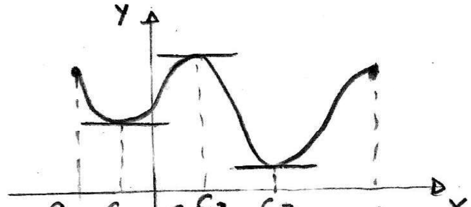
TEOREMAS IMPORTANTES SOBRE DERIVADAS

Hay dos teoremas importantes sobre derivadas. Estos son el TEOREMA de Rolle y el T. del valor medio.

TEOREMA DE ROLLE:

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b). Si $f(a)=f(b)$, existe un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

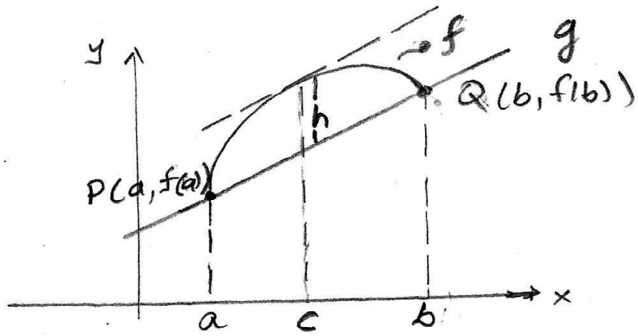




Usaremos este teorema para demostrar el siguiente.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea f una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b). Existe $c \in (a,b)$ tq $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



observe: El teorema tiene una interpretación geométrica: Como $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la secante que une los puntos P y Q y $f'(c)$ es la pendiente de la tangente a la curva en $x=c$ y las pendientes son iguales, entonces el teorema garantiza la existencia de un punto $(c, f(c))$ en la gráfica de f, donde la recta tangente es paralela a la secante que une P y Q.

D// Denotemos por h la diferencia entre f y g, es decir $h(x) = f(x) - g(x)$ (la cuál representa la distancia con signo entre la gráfica de f y la secante que pasa por P y Q)

Ahora, la ecuación de la secante es

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \text{ luego}$$

$$g(x) = y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Entonces

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

$$h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right]$$

h es continua en $[a,b]$ (Es diferencia de dos func. continuas en $[a,b]$)

e igualmente es derivable en (a,b) por ser dfcia de dos func. derivables. Además

$$h(a) = f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cancel{(a-a)}^{0} \right] = 0 \quad y$$

$$h(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} \right] = f(b) - [f(b)] = 0.$$

Por el Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$. Como

$$h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right], \text{ entonces}$$

$$h'(c) = f'(c) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right) = 0$$

de donde $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ con } c \in (a,b)$$

Este teorema tiene Consecuencias, las cuales enunciamos como corolarios.

Consecuencias del T. del valor medio

corolario 1: Si f es una función continua en $[a,b]$ derivable en (a,b) entonces:

i) Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$

ii) Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f es creciente en $[a,b]$

iii) Si $f'(x)<0$, $\forall x \in (a,b)$, entonces f es decreciente en $[a,b]$.

D// Demostramos uno de los 3 items. por ejemplo ii)
Se desea probar que si $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ es decir f es creciente.

Sean x_1, x_2 arbitrarios en $[a,b]$, con $x_1 < x_2$. Entonces f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2). Por el T.V.M. existe $c \in (x_1, x_2)$ tq $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Como $f'(x)>0$ para todo $x \in (a,b)$, $f'(c)>0$.
De otro lado, como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$ y para que el cociente sea positivo, el numerador debe ser positivo, luego $f(x_2)-f(x_1) > 0$, de donde $f(x_1) < f(x_2)$ y en consecuencia $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ y por tanto f es creciente en $[x_1, x_2]$. Como x_1, x_2 son arbitrarios en $[a,b]$, f es creciente en $[a,b]$.
De manera análoga se prueban los otros numerales.

__Corolario 2:__ Sean f, g funciones continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b). Si $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f y g difieren de una constante, es decir, $f(x) = g(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]$

D// Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a,b]$
entonces h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) (Es diferencia de func. continuas y derivables)

entonces $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para $x \in (a,b)$.
por el corolario 1, como $h'(x)=0$ en (a,b), se concluye que h es constante en $[a,b]$. Por tanto

$$h(x) = f(x) - g(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ de donde}$$
$$f(x) = g(x) + C, \text{ con } x \in [a,b].$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [1,2]$.
Verifique las hipótesis del T.V.M y encuentre los c que concluye el teorema.

Sol La función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$.

Por el T.V.M, existe $c \in (1,2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1}$

$$f'(c) = \frac{2 + 1/2 - (1+1)}{1} = \frac{5}{2} - 2 = 1/2$$

por otro lado, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \rightarrow$

$$f'(c) = 1 - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2}, \text{ luego } 1 - 1/2 = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{2-1}{2} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2} \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \pm\sqrt{2}.$$

Como $-\sqrt{2} \notin (1,2)$, se descarta y sólo se considera $c = \sqrt{2}$. $\sqrt{2} \in (1,2)$. Así, existe $c = \sqrt{2} \in (1,2)$ tal que $f'(c) = 1/2$.

Ejemplo: Halle los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.

i) $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$.

ii) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

S// para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento se busca la derivada de cada función y se determina dónde es positiva y dónde es negativa.

i) $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$. $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Por tanto f es creciente en $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$.

Ahora, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

luego f es decreciente en $[-1, 1]$.

ii) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - 1(2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{2x - 4 - 2x - 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

$f'(x) < 0$, para todo $x \neq 2$.

por lo tanto f es decreciente en $(-\infty, 2)$ y en $(2, \infty)$.

DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

Si $y=f(x)$ es una función derivable, $f'(x)$ ó $\frac{dy}{dx}$ representa la primera derivada de f. Si a su vez $f'(x)$ es una función derivable, su derivada se llama segunda derivada de f y se denota por $f''(x)$ ó $\frac{d^2f}{dx^2}$. Es decir,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) \text{ ó } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Siguiendo el proceso, si $y=f(x)$ es una función n veces diferenciable, entonces la n-sima derivada de f la cuál se define como la derivada de la derivada $(n-1)$ de f, se denota como $f^{n}(x) = \frac{d}{dx}(f^{n-1}(x))$ ó

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$ Si se usa notación de operadores se tiene $D_x y$, $D^2_{x^2} y$, $D^3_{x^3} y$, ... $D^n_{x^n} y$.

Estas derivadas se conocen como derivadas de orden superior.

Ejemplo: La ecuación $x^2+y^2-xy=4$ define implícitamente a y como función de x. Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$.

S// Derivamos implícitamente la ecuación.

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2-xy) = \frac{d}{dx}4$$

$$2x+2yy'-(y+xy') = 0.$$ Se puede despejar y'

Para derivar y hallar y'' se puede despejar y' y luego derivar. En este caso,

$$2x+y'(2y-x)-y=0 \rightarrow y' = \frac{y-2x}{2y-x}.$$

El otro camino consiste en derivar directamente en la ecuación. procedemos de esta segunda forma.

Se tiene: $2x+2yy'-y-xy'=0$. Entonces

$$\frac{d}{dx}\left(2x+2yy'-y-xy'\right)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$2+2y'y'+2yy''-y'-(y'+xy'')=0$$

$$2+2y'^2+2yy''-y'-y'-xy''=0$$

$$2+2y'^2+2yy''-2y'-xy''=0$$

$$y''(2y-x)=-2-2y'^2+2y'$$

$$y''=\frac{-2-2y'^2+2y'}{2y-x}$$

Reemplazamos el valor de y' en y''. Así, como $y'=\frac{y-2x}{2y-x}$ se tiene:

$$y''=\frac{-2-2\left(\frac{y-2x}{2y-x}\right)^2+2\left(\frac{y-2x}{2y-x}\right)}{2y-x}=\frac{-2-2\frac{(y-2x)^2}{(2y-x)^2}+\frac{2(y-2x)}{2y-x}}{2y-x}$$

$$y''=\frac{\frac{-2(2y-x)^2-2(y-2x)^2+2(y-2x)(2y-x)}{(2y-x)^2}}{(2y-x)}=$$

$$=\frac{-8y^2+8xy-2x^2-2y^2+8xy-8x^2+4y^2-2xy-8xy+4x^2}{(2y-x)^3}$$

$$=\frac{-6y^2+6xy-6x^2}{(2y-x)^3}=\frac{-6(y^2-6xy+x^2)}{(2y-x)^3}$$