

Rango y nulidad de una matriz

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$.

Espacio nulo de A (N_A).

$$N_A = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

- $N_A \neq \emptyset$ ya que $0 \in N_A$
- $x, y \in N_A \Rightarrow x + y \in N_A$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in N_A \Rightarrow \lambda x \in N_A$.

De esto se infiere que N_A es un espacio vectorial.

Espacio columna de A (C_A).

$$C_A = \{ b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ para algun } x \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Puede verse que C_A es un espacio vectorial.

Definición 9 [Nulidad de una matriz]. Dada una matriz A , definimos $\nu(A)$, la nulidad de A , como la dimensión del espacio nulo de A .

Definición 10 [Rango de una matriz]. Dada una matriz A , definimos $\rho(A)$, el rango de A , como la dimensión del espacio columna de A .

$$r(A) = \dim(N_A) \quad p(A) = \dim(C_A).$$

Ejemplo. Determinar $r(A)$ y $p(A)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Sea $b = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$. Hay que determinar la forma escalonada del sistema $Ax = b$. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & C_1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & C_2 \\ 0 & 8 & 0 & -8 & C_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & C_1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & C_2 - 2C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 - 2C_2 + 4C_1 \end{array} \right)$$

Si $b = \Theta$, $Bx = \Theta$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\uparrow \uparrow$
 x_3 y x_4 son variables libres.

$$x_3 = \alpha \quad y \quad x_4 = \beta.$$

$$4x_2 - 4x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_4 = \beta.$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3 - x_4 = 2\beta - \alpha - \beta = \beta - \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 \\ \beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$N_A = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : B\vec{x} = \mathbb{0} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$


Son l.i.

Por tanto, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de N_A .

Así que $\nu(A) = \dim(N_A) = 2 \Rightarrow \nu(A) = 2$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & C_1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & C_2 \\ 0 & 8 & 0 & -8 & C_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & C_1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & C_2 - 2C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 - 2C_2 + 4C_1 \end{array} \right)$$

De otra parte $Ax=b$ tiene solución si

$$C_3 - 2C_2 + 4C_1 = 0.$$

$$C_3 = 2C_2 - 4C_1.$$

$$\text{Línea } C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} : C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

luego, $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} : c_3 = 2c_2 - 4c_1; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

$$= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 2c_2 - 4c_1 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$C_A = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

↑ ↑
Son l.i.

Entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de C_A .

Así que $\rho(A) = \dim(C_A) = 2 \Rightarrow \rho(A) = 2$.

Teorema 17 [Base del espacio columna de una matriz].

Dada una matriz A , las columnas de A correspondientes a las columnas pivotales de una matriz escalonada equivalente a A forman una base de C_A .

Ejemplo 37. Encontremos una base de

$$V = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sea A la matriz cuyas columnas son los vectores del conjunto generador y B una matriz escalonada equivalente a A . Es decir, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \cancel{-1} & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 Estas columnas forman Son las columnas pivotales.
 Una base de V .

Ejemplo. Hallar una base de P_2 contenida en

$$\{1-x, x-2x^2, -2+2x, 1-2x^2, 1+x-x^2\}$$

Teorema 14 [Conservación de los coeficientes de una combinación lineal].

Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ vectores de un espacio vectorial V y \mathcal{B} una base de V . Entonces

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{u}_k, \quad \text{si y sólo si,} \quad [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \lambda_1 [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} + \dots + \lambda_k [\mathbf{u}_k]_{\mathcal{B}}.$$

v_1, v_2, \dots, v_k son l.i. si y sólo si $[v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_k]_{\mathcal{B}}$ son l.i.

Usando la base canónica de P_2 , $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

$$[1-x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [x-2x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [-2+2x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[1-x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [x-2x^2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [-2+2x]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[1-2x^2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [1+x-x^2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas de los polinomios dados:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 $1-x$. $x-2x^2$ $1+x-x^2$

Entonces, los polinomios correspondientes a las columnas pivotales forman una base de P_2 .

$$\{1-x, x-2x^2, 1+x-x^2\}.$$

Teorema 18 [Relación entre nulidad y rango de una matriz]. Dada una matriz A de tamaño $m \times n$,

$$\nu(A) + \rho(A) = n.$$