Análisis de Algoritmos II

Jesús Alexander Aranda Ph.D   Robinson Duque, Ph.D
Juan Francisco Díaz, Ph. D

Universidad del Valle

jesus.aranda@correounivalle.edu.co
robinson.duque@correounivalle.edu.co
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co

Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Overview

1. Demostración de NP-Completitud de Vertex Cover
   - Conceptos Generales
   - ¿Está VC en NP?
   - ¿Es VC NP-Hard?
   - VC es NP-Completo
   - Ejercicios
2. El problema del Máximo Clique (MC)
   - Definición
   - MC es NP
   - MC es NP duro
   - MC es NP-Completo

Vertex Cover (VC)

Definición

Una instancia es un grafo $G = (V, E)$ y un entero $k \leq |V|$

Pregunta

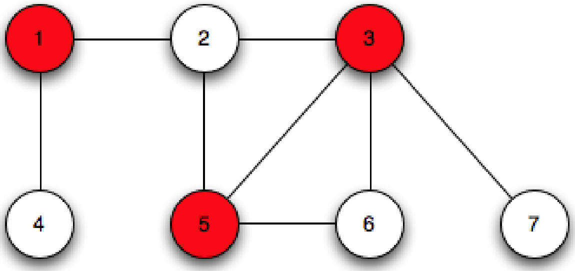
¿Existe un subconjunto de a lo sumo k vértices, donde cada arista $e \in E$ tiene al menos uno de los vértices en el subconjunto?

Formalmente

Entrada: Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y una constante $k \leq |V|$
Salida: 1 si existe un subconjunto V' de V tal que $|V'| \leq k$ y

$$\forall e(u, v) \in E, (u \in V' \vee v \in V')$$

Vertex Cover (VC)



Ejemplo de vertex cover con $K = 3$

¿Está VC en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto V' de vértices candidato a cubrimiento.

$VC \in NP$

Dada una instancia positiva de VC y el certificado V', sólo se debe verificar que cada arista tenga un vértice en V' y que $|V'| \leq k$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(m|V'| + |V'|)$ donde m es el número de aristas.
Dada una instancia negativa de VC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no cubre o falla por el tamaño).
Por tanto $VC \in NP$

¿Está VC en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto V' de vértices candidato a cubrimiento.

$VC \in NP$

Dada una instancia positiva de VC y el certificado V', sólo se debe verificar que cada arista tenga un vértice en V' y que $|V'| \leq k$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(m|V'| + |V'|)$ donde m es el número de aristas.
Dada una instancia negativa de VC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no cubre o falla por el tamaño).
Por tanto $VC \in NP$

¿Está VC en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto V' de vértices candidato a cubrimiento.

$VC \in NP$

Dada una instancia positiva de VC y el certificado V', sólo se debe verificar que cada arista tenga un vértice en V' y que $|V'| \leq k$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(m|V'| + |V'|)$ donde m es el número de aristas.
Dada una instancia negativa de VC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no cubre o falla por el tamaño).
Por tanto $VC \in NP$

¿Está VC en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto V' de vértices candidato a cubrimiento.

$VC \in NP$

Dada una instancia positiva de VC y el certificado V', sólo se debe verificar que cada arista tenga un vértice en V' y que $|V'| \leq k$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(m|V'| + |V'|)$ donde m es el número de aristas.
Dada una instancia negativa de VC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no cubre o falla por el tamaño).
Por tanto $VC \in NP$

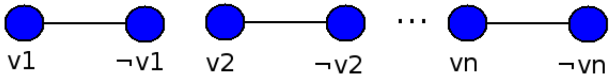
¿Es VC NP-Hard? Escogiendo un problema para reducir

Se procede a realizar una reducción desde un problema NP-Completo conocido. Tenemos tres: SAT, $3-SAT$, e IP. Escogemos $3SAT$:

$$3 - SAT \prec_p VC$$

¿Es VC NP-Hard? Definiendo la reducción

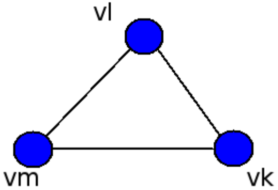
Idea 1: Simular cada variable booleana x de 3-SAT con un par de nodos de un grafo representando los literales x y $\neg x$. En un VC del grafo, debe quedar siempre uno de los dos nodos y nunca los dos, de manera que esto represente una asignación de verdad.



Por lo menos n vértices se necesitan para cubrir todas las aristas (uno de cada par) ¿Puede ver por qué?

¿Es VC NP-Hard? Definiendo la reducción

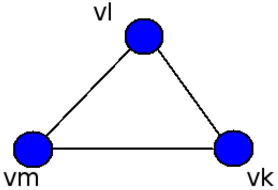
Idea 2: Simular cada cláusula de $3 - SAT$ con un grafo completo de 3 nodos (uno por literal).



¿Cuántos vértices se necesitan como mínimo para cubrir las 3 aristas? Se necesitan mínimo $2|C|$ (dos por cada clausula).

¿Es VC NP-Hard? Definiendo la reducción

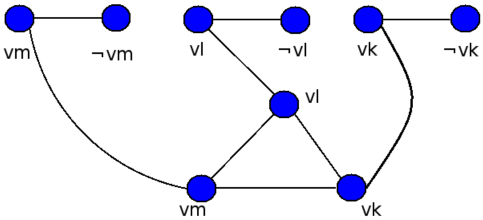
Idea 2: Simular cada cláusula de $3 - SAT$ con un grafo completo de 3 nodos (uno por literal).



¿Cuántos vértices se necesitan como mínimo para cubrir las 3 aristas? Se necesitan mínimo $2|C|$ (dos por cada clausula).

¿Es VC NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 3: Conectar cada grafo asociado a una cláusula con los literales correspondientes asociados a la asignación de verdad.



Afirmación: Este grafo tendrá un VC de tamaño $K = N + 2|C|$ si y sólo si la expresión $3 - SAT$ es satisfactible.

¿Es VC NP-Hard? Definiendo la reducción

Procedimiento de reducción

Dada una instancia $3-SAT$ con n variables y c cláusulas, construimos un grafo $G = (V, E)$ aplicando las ideas 1, 2 y 3 :

- Por cada variable v en la instancia de $3-SAT$, tendremos $v, \neg v \in V$ y una arista de asignación $(v, \neg v) \in E$.
- Por cada cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, tendremos un triángulo (grafo completo de 3 nodos) $l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} \in V$ y $(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i1}, l_{i3}), (l_{i2}, l_{i3}) \in E$, en G.
- Cada vértice de cada triángulo se conecta a su respectivo literal en las aristas de asignación, por medio de una arista de conexión.

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en $3-SAT$ se reducen a instancias positivas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable v que satisface todas las cláusulas. Vamos a demostrar que en el grafo producto de la reducción, hay un VC, V' de tamaño $N+2|C|$
- Por cada variable v en 3-SAT, hay una arista de asignación $(v, \neg v) \in E$.
- Si v es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $v \in V'$, En caso contrario considere $\neg v \in V'$.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, Suponga que $l_{i1} = v$ es el literal satisfecho por la asignación de verdad. Entonces la arista (l_{i1}, v) estaría cubierta porque $v \in V$. Luego incluiríamos $l_{i2}, l_{i3} \in V'$.
- Podemos asegurar entonces que V' es un cubrimiento de G y que $|V'| = N+2|C|$.

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en $3-SAT$ se reducen a instancias positivas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable v que satisface todas las cláusulas. Vamos a demostrar que en el grafo producto de la reducción, hay un VC, V' de tamaño $N+2|C|$
- Por cada variable v en 3-SAT, hay una arista de asignación $(v, \neg v) \in E$.
- Si v es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $v \in V'$, En caso contrario considere $\neg v \in V'$.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, Suponga que $l_{i1} = v$ es el literal satisfecho por la asignación de verdad. Entonces la arista (l_{i1}, v) estaría cubierta porque $v \in V$. Luego incluiríamos $l_{i2}, l_{i3} \in V'$.
- Podemos asegurar entonces que V' es un cubrimiento de G y que $|V'| = N + 2|C|$.

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en $3-SAT$ se reducen a instancias positivas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable v que satisface todas las cláusulas. Vamos a demostrar que en el grafo producto de la reducción, hay un VC, V' de tamaño $N + 2|C|$
- Por cada variable v en 3-SAT, hay una arista de asignación $(v, \neg v) \in E$.
- Si v es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $v \in V'$, En caso contrario considere $\neg v \in V'$.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, Suponga que $l_{i1} = v$ es el literal satisfecho por la asignación de verdad. Entonces la arista (l_{i1}, v) estaría cubierta porque $v \in V$. Luego incluiríamos $l_{i2}, l_{i3} \in V'$.
- Podemos asegurar entonces que V' es un cubrimiento de G y que $|V'| = N + 2|C|$. Por tanto G es una instancia positiva de VC

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en $3 - SAT$ se reducen a instancias positivas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable v que satisface todas las cláusulas. Vamos a demostrar que en el grafo producto de la reducción, hay un VC, V' de tamaño $N + 2|C|$
- Por cada variable v en 3-SAT, hay una arista de asignación $(v, \neg v) \in E$.
- Si v es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $v \in V'$, En caso contrario considere $\neg v \in V'$.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, Suponga que $l_{i1} = v$ es el literal satisfecho por la asignación de verdad. Entonces la arista (l_{i1}, v) estaría cubierta porque $v \in V$. Luego incluiríamos $l_{i2}, l_{i3} \in V'$.
- Podemos asegurar entonces que V' es un cubrimiento de G y que $|V'| = N + 2|C|$. Por tanto G es una instancia positiva de VC.

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en $3-SAT$ se reducen a instancias positivas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable v que satisface todas las cláusulas. Vamos a demostrar que en el grafo producto de la reducción, hay un VC, V' de tamaño $N + 2|C|$
- Por cada variable v en 3-SAT, hay una arista de asignación $(v, \neg v) \in E$.
- Si v es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $v \in V'$, En caso contrario considere $\neg v \in V'$.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, Suponga que $l_{i1} = v$ es el literal satisfecho por la asignación de verdad. Entonces la arista (l_{i1}, v) estaría cubierta porque $v \in V$. Luego incluiríamos $l_{i2}, l_{i3} \in V'$.
- Podemos asegurar entonces que V' es un cubrimiento de G y que $|V'| = N + 2|C|$. Por tanto G es una instancia positiva de VC

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en $3 - SAT$ se reducen a instancias positivas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable v que satisface todas las cláusulas. Vamos a demostrar que en el grafo producto de la reducción, hay un VC, V' de tamaño $N + 2|C|$
- Por cada variable v en 3-SAT, hay una arista de asignación $(v, \neg v) \in E$.
- Si v es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $v \in V'$, En caso contrario considere $\neg v \in V'$.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, Suponga que $l_{i1} = v$ es el literal satisfecho por la asignación de verdad. Entonces la arista (l_{i1}, v) estaría cubierta porque $v \in V$. Luego incluiríamos $l_{i2}, l_{i3} \in V'$.
- Podemos asegurar entonces que V' es un cubrimiento de G y que $|V'| = N + 2|C|$. Por tanto G es una instancia positiva de VC

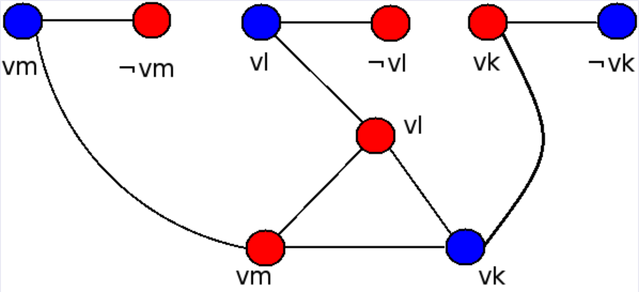
¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en $3-SAT$ se reducen a instancias positivas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es positiva, es porque existe una asignación de verdad de cada variable v que satisface todas las cláusulas. Vamos a demostrar que en el grafo producto de la reducción, hay un VC, V' de tamaño $N + 2|C|$
- Por cada variable v en 3-SAT, hay una arista de asignación $(v, \neg v) \in E$.
- Si v es asignada a verdadero en 3-SAT, considere $v \in V'$, En caso contrario considere $\neg v \in V'$.
- Dada una cláusula $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ en la instancia de 3-SAT, Suponga que $l_{i1} = v$ es el literal satisfecho por la asignación de verdad. Entonces la arista (l_{i1}, v) estaría cubierta porque $v \in V$. Luego incluiríamos $l_{i2}, l_{i3} \in V'$.
- Podemos asegurar entonces que V' es un cubrimiento de G y que $|V'| = N + 2|C|$. Por tanto G es una instancia positiva de VC

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Ilustración de la reducción con instancias positivas



Como se puede observar hemos realizado la cobertura de vértices del grafo con un conjunto de $K = N + 2C, K = 3 + 2 * 1 = 5$ vértices

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en $3 - SAT$ se reducen a instancias negativas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es negativa, es porque en cualquier asignación de verdad hay al menos una cláusula que no se satisface. Digamos que sea $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$.
- Para cubrir el triángulo asociado a esa cláusula, se necesitan al menos 2 vértices del triángulo. Digamos l_{i2} y l_{i3}. Esos vértices, no solo cubren las tres aristas del triángulo, sino también, las dos aristas de conexión correspondiente. El problema es ¿cómo cubrir la arista de conexión?
Por tanto G es una instancia negativa de VC

¿Es VC NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en $3-SAT$ se reducen a instancias negativas en VC

- Si una instancia de 3-SAT es negativa, es porque en cualquier asignación de verdad hay al menos una cláusula que no se satisface. Digamos que sea $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$.
- Para cubrir el triángulo asociado a esa cláusula, se necesitan al menos 2 vértices del triángulo. Digamos l_{i2} y l_{i3}. Esos vértices, no solo cubren las tres aristas del triángulo, sino también, las dos aristas de conexión correspondiente. El problema es ¿cómo cubrir la arista de conexión?
  Por tanto G es una instancia negativa de VC

¿Es VC NP-Hard? Complejidad de la reducción

Complejidad de la reducción

Evidentemente, la reducción se hace en tiempo polinomial:

- Si se tienen n variables y m clausulas en 3-SAT, se crea un grafo con $2n + 3|C|$ nodos y n aristas de asignación, $3|C|$ aristas de triángulos y $3|C|$ aristas de conexión. En total $n + 6|C|$ aristas.
- Por tanto la reducción toma tiempo polinomial en el tamaño de la entrada de $3 - SAT$

VC es NP-Completo

- Se demostró que VC está en NP.
- También se mostró que VC es NP-Hard
  - Se propuso reducción de $3-SAT$ a VC
  - Se probó la corrección de la reducción
  - Se mostró la complejidad polinomial de la reducción

VC es NP-Completo

VC es NP-Completo

- Se demostró que VC está en NP.
- También se mostró que VC es NP-Hard
  - Se propuso reducción de $3 - SAT$ a VC
  - Se probó la corrección de la reducción
  - Se mostró la complejidad polinomial de la reducción

VC es NP-Completo

- Se demostró que VC está en NP.
- También se mostró que VC es NP-Hard
  - Se propuso reducción de $3 - SAT$ a VC
  - Se probó la corrección de la reducción
  - Se mostró la complejidad polinomial de la reducción

VC es NP-Completo

- Se demostró que VC está en NP.
- También se mostró que VC es NP-Hard
  - Se propuso reducción de $3 - SAT$ a VC
  - Se probó la corrección de la reducción
  - Se mostró la complejidad polinomial de la reducción

VC es NP-Completo

Apliquemos la reducción

Ejemplo

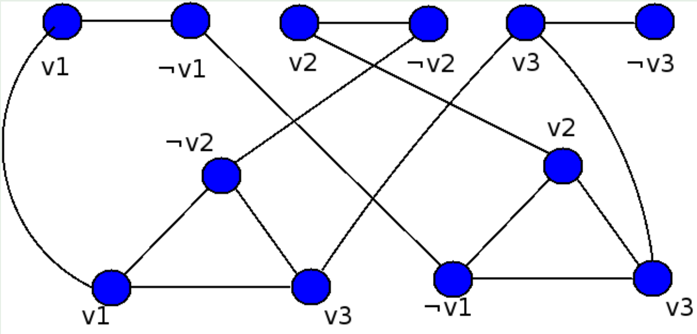
Realicemos la reducción la instancia 3-SAT $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ $C = \{\{v_1, \neg v_2, v_3\}\{\neg v_1, v_2, v_3\}\}$ a VC

- Una solución que satisface 3-SAT es $v_1 = V, v_2 = V, v_3 = F$
- Una solución que no satisface 3-SAT es $v_1 = F, v_2 = V, v_3 = F$

$K = N + 2|C|$ donde N es el número de variables y C es el número de cláusulas, entonces el tamaño de la cobertura debe ser menor o igual a $K = 3 + 2 * 2 = 7$.

Apliquemos la reducción

Realizando la reducción

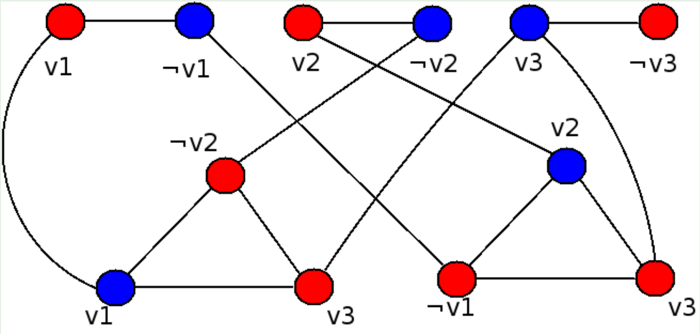


¿Si 3SAT se satisface hay VC? ¿Si 3SAT no se satisface no hay VC?

Apliquemos la reducción

Instancias positivas de SAT

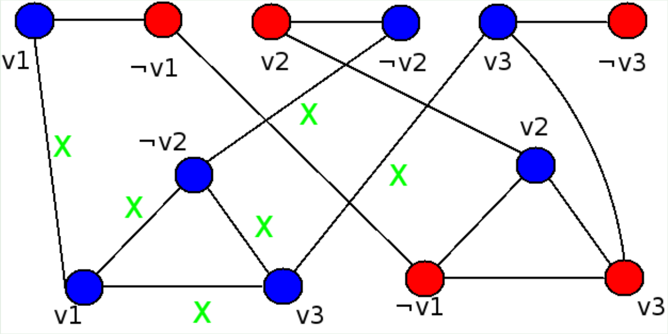
Una solución que satisface 3-SAT es $v_1 = V, v_2 = V, v_3 = F$



Apliquemos la reducción

Instancias negativas de SAT

Una solución que no satisface 3-SAT es $v_1 = F, v_2 = V, v_3 = F$



Independientemente de los 2 vértices que se escojan para la primer cláusula, quedará una arista sin cubrir.

Ejercicios

Ejercicio

Realice la reducción de la siguiente instancia de 3-SAT a VC

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$C = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_1, v_2, v_4\}\}$$

Máximo Clique (MC)

Definición

Una instancia es un grafo $G = (V, E)$ y un entero $j \leq |V|$

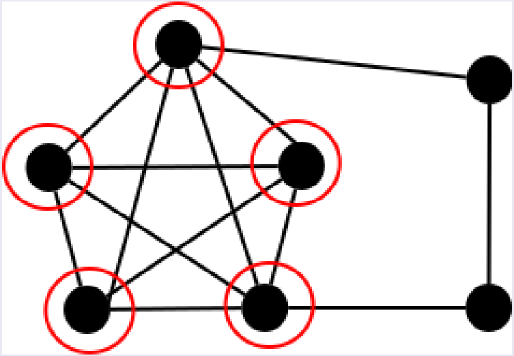
Pregunta

¿El grafo contiene un clique de j vértices?, es decir, ¿existe un subconjunto de V de tamaño j donde cada par de vértices está conectado entre ellos?

Máximo Clique (MC)

Definición

Ejemplo, el siguiente grafo contiene un clique de tamaño 5.



¿Está MC en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto V' de vértices candidato a Clique.

$MC \in NP$

Dada una instancia positiva de MC y el certificado V', sólo se debe verificar que cada pareja de vértices de V' esté unida por una arista y que $|V'| \geq j$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(|V'|^2|)$.
Dada una instancia negativa de MC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no es Clique o falla por el tamaño).
Por tanto $MC \in NP$

¿Está MC en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto V' de vértices candidato a Clique.

$MC \in NP$

Dada una instancia positiva de MC y el certificado V', sólo se debe verificar que cada pareja de vértices de V' esté unida por una arista y que $|V'| \geq j$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(|V'|^2|)$.
Dada una instancia negativa de MC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no es Clique o falla por el tamaño).
Por tanto $MC \in NP$

¿Está MC en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto V' de vértices candidato a Clique.

$MC \in NP$

Dada una instancia positiva de MC y el certificado V', sólo se debe verificar que cada pareja de vértices de V' esté unida por una arista y que $|V'| \geq j$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(|V'|^2|)$.
Dada una instancia negativa de MC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no es Clique o falla por el tamaño).
Por tanto $MC \in NP$

¿Está MC en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto V' de vértices candidato a Clique.

$MC \in NP$

Dada una instancia positiva de MC y el certificado V', sólo se debe verificar que cada pareja de vértices de V' esté unida por una arista y que $|V'| \geq j$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(|V'|^2|)$.
Dada una instancia negativa de MC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no es Clique o falla por el tamaño).
Por tanto $MC \in NP$

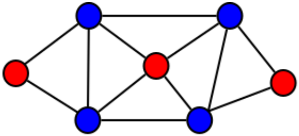
¿Es MC NP-Hard? Escogiendo un problema para reducir

Se procede a realizar una reducción desde un problema NP-Completo conocido. Tenemos cuatro: SAT, $3-SAT$, IP y VC. Escogemos VC por ser también un problema de grafos (pero no tiene que ser así):

$$VC \prec_p MC$$

¿Es MC NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 1: Sea $G = (V, E)$ un grafo y V' un cubrimiento de vértices de tamaño K.
Nótese que $V \setminus V'$ es un conjunto independiente, es decir un conjunto de vértices que no están conectados con ninguna arista.



Azul: Vertex cover, Rojo: conjunto independiente

Además $|V \setminus V'| = |V| - K$.

$$\exists V' \subseteq V : |V'| \leq K \wedge V' \text{ es cubrimiento de } G$$

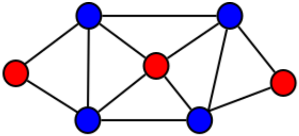
$$\equiv$$

$$\exists V'' \subseteq V : |V''| \geq |V| - K \wedge V'' \text{ es independiente en } G$$

¿Es MC NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 1: Sea $G = (V, E)$ un grafo y V' un cubrimiento de vértices de tamaño K.

Nótese que $V \setminus V'$ es un conjunto independiente, es decir un conjunto de vértices que no están conectados con ninguna arista.



Azul: Vertex cover, Rojo: conjunto independiente

Además $|V \setminus V'| = |V| - K$.

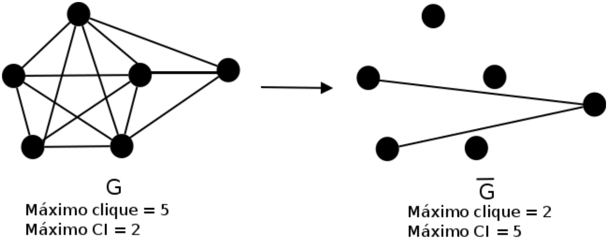
$$\exists V' \subseteq V : |V'| \leq K \wedge V' \text{ es cubrimiento de } G$$

$$\equiv$$

$$\exists V'' \subseteq V : |V''| \geq |V| - K \wedge V'' \text{ es independiente en } G$$

¿Es MC NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 2: Sea $G = (V, E)$ un grafo y V' un conjunto independiente de vértices de tamaño K.
Sea $\bar{G} = (V, \bar{E})$ el grafo complementario de G, o sea con los mismos vértices, pero con aristas donde no había y sin aristas dónde había.



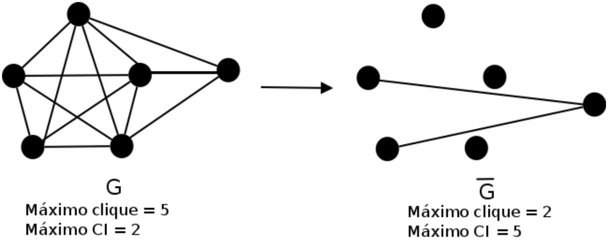
$$\exists V' \subseteq V : |V'| \geq K \wedge V' \text{ es independiente en } G$$

$$\equiv$$

$$\exists V' \subseteq V : |V'| \geq K \wedge V' \text{ es clique en } \bar{G}$$

¿Es MC NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 2: Sea $G = (V, E)$ un grafo y V' un conjunto independiente de vértices de tamaño K.
Sea $\bar{G} = (V, \bar{E})$ el grafo complementario de G, o sea con los mismos vértices, pero con aristas donde no había y sin aristas dónde había.



$$\exists V' \subseteq V : |V'| \geq K \wedge V' \text{ es independiente en } G$$

$$\equiv$$

$$\exists V' \subseteq V : |V'| \geq K \wedge V' \text{ es clique en } \bar{G}$$

¿Es MC NP-Hard? La reducción y su corrección

Procedimiento de reducción

Dada una instancia $G = (V, E)$ y K de VC, construimos un grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$ y $N - K$ como instancia de MC, aplicando las ideas 1 y 2.

Corrección de la reducción

Concluimos entonces que las instancias positivas de VC se transforman en instancias positivas de MC y que las instancias negativas de VC se transforman en instancias positivas de MC gracias a que:

$$\exists V' \subseteq V : |V'| \leq K \wedge \; V' \text{ es cubrimiento de } G$$

$$\equiv$$

$$\exists V'' \subseteq V : |V''| \geq |V| - K \wedge \; V'' \text{ es clique en } \bar{G}$$

¿Es MC NP-Hard? La reducción y su corrección

Procedimiento de reducción

Dada una instancia $G = (V, E)$ y K de VC, construimos un grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$ y $N - K$ como instancia de MC, aplicando las ideas 1 y 2.

Corrección de la reducción

Concluimos entonces que las instancias positivas de VC se transforman en instancias positivas de MC y que las instancias negativas de VC se transforman en instancias positivas de MC gracias a que:

$$\exists V' \subseteq V : |V'| \leq K \wedge \; V' \text{ es cubrimiento de } G$$

$$\equiv$$

$$\exists V'' \subseteq V : |V''| \geq |V| - K \wedge \; V'' \text{ es clique en } \bar{G}$$

¿Es MC NP-Hard? Complejidad de la reducción

Complejidad de la reducción

Evidentemente, la reducción se hace en tiempo polinomial:

- Si se tienen n vértices en G, se tiene el mismo número de vértices en $\bar{G}$.
- Si se tienen m aristas en G, se tienen $|E|^2 - m$ aristas en en $\bar{G}$.
- Luego la reducción de de orden $\mathcal{O}(|E|^2 + |V|)$

MC es NP-Completo

Se demostró que MC es NP. También se mostró que MC es NP-Hard a través de una reducción de VC. Adicionalmente la reducción es correcta como se evidenció en cada caso y se puede realizar en tiempo polinomial, luego se concluye que:

MC es NP-Completo

Fin de la Presentación

¿Preguntas?