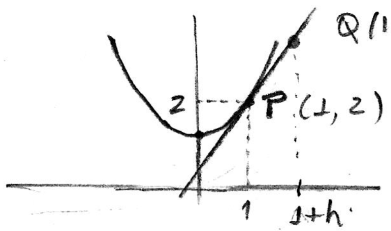
S//



Consideramos otro punto Q sobre la curva. $Q(1+h, f(1+h))$

De acuerdo a lo visto, $m_P = \lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - (2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h)$$

Para calcular el límite, elaboramos una tabla de valores, asignándole valores a h cercanos a 0.

h	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1
$2+h$	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1

En la tabla se observa $2+h \to 2$ cuando $h \to 0$

Así, podemos afirmar (intuitivamente) $\lim_{h \to 0} (2+h) = 2$.
de donde, $m_p = 2$.

Conocida la pendiente, $m_p = 2$ y un punto $P(1,2)$, se puede dar la ecuación de la tangente. Así,

$$y - 2 = m(x-1) \to y = 2 + 2(x-1) = 2 + 2x - 2$$
$$\to y = 2x$$

Observe: En la definición de recta tangente el valor de m_p depende tanto de f como del punto., por esa razón se denota por f'.

Entonces, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

como mp se deriva de f, a f' se le conoce como la derivada de f

Así, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ es una función que depende de x y se conoce con el nombre de función derivada. Tiene como dominio, todos los valores de x para los cuales el límite existe. Cuando x toma un valor específico, la derivada de f en x es un número.

De otro lado, observe que $f'(x)$ tiene una interpretación geométrica.

"$f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x, f(x))$".

ej: Halle $f'(-1)$, y $f'(4)$ si $f(x) = -2x^2 + x - 1$

S// En lugar de calcular $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ y $\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$, se puede hallar $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

es decir, calcular $f'(x)$ y luego evaluar. Así,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(x+h)^2 + (x+h) - 1 - (-2x^2 + x - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{-2x^2} - 4xh - 2h^2 \cancel{+x} + h \cancel{-1} \cancel{+2x^2} \cancel{-x} \cancel{+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4xh-2h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-4x-2h+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-4x-2h+1).$$

Elaborando la tabla de valores, se muestra

$$\lim_{h\to 0} (-4x-2h+1) = -4x+1.$$

De esta manera, $f'(-1) = -4(-1)+1 = 5$

$$f'(4) = -4(4)+1 = -15.$$

Lo que vimos anteriormente muestra la necesidad de estudiar $\lim_{x\to a} G(x)$. Por esta razón estudiaremos el concepto de límite pero de una manera intuitiva.

Límites

La expresión $\lim_{x\to a} f(x) = L$

significa que los valores de la función se aproximan a L, cuando x toma valores cercanos a a tanto por valores menores, como por valores mayores que a.

Encontremos algunos Límites

Ejemplo 1: Halle $\lim_{x\to 2} (x+1)$.

S/ Elaboramos una tabla de valores, asignándole a x valores cercanos a 2.

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)=x+1$	2,9	2,99	2,999	3,001	3,01	3,1

Los valores de f se aproximan a 3 cuando x toma valores próximos a **2**. Por lo tanto

$$\lim_{x \to 2} (x+1) = 3. \quad \text{Observe } f(2)=3.$$

Ej 2: Halle $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3-x}{x-1}$

S// Nuevamente elaboramos la tabla.

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$	1,71	1,97	1,997	2,003	2,02	2,32

La Tabla sugiere $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3-x}{x-1} = 2$

En este caso la función no está definida en $x=1$, sin embargo el límite existe.

Para hallar el límite no se puede evaluar en la función. Observe que tanto el numerador como el denominador se anulan en $x=1$, lo cuál sugiere que hay algo común entre los términos. Por esta razón se trabaja algebraicamente la función, para eliminar la indeterminación.

$$\frac{x^3-x}{x-1} = \frac{x(x^2-1)}{x-1} = \frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = x(x+1), \quad x \neq 1$$

Como las expresiones son equivalentes para $x \neq 1$, ent

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x-1} = \lim_{x \to 1} x(x+1) = 1(1+1) = 2.$$

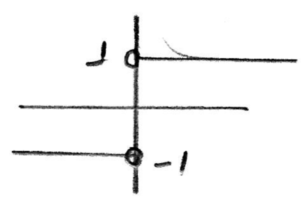
Ej 3: Hallar $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$.

S// Se puede elaborar la tabla

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$\frac{x}{\lvert x \rvert}$	-1	-1	-1	1	1	1

la cuál muestra que $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$ no existe, puesto que no hay un único real al cuál se aproximan los valores de la función, cuando x se aproxima a 0.

Si $x > 0$, $|x| = x$, luego $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$.
Si $x < 0$, $|x| = -x$, luego $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$



Los tres ejemplos trabajados muestran que para aproximarse al número a, se hace tanto por valores menores (por izquierda) como por valores mayores que a (por derecha). esto, permite definir el concepto de límite lateral.

LIMITE POR DERECHA Sea f una función definida en un intervalo (a, b). Se dice que el límite de f cuando x tiende a a por derecha es L, se escribe $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, si los valores de f se aproximan a L, cuando x se aproxima a a por valores mayores que a.

Análogamente se define $\lim_{x \to b^-} f(x) = L$

el límite significa que los valores de la función se aproximan al número L, cuando x toma valores cercanos a b, pero se aproxima por números menores que b.

Claramente $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, cuando los límites laterales existen y son Iguales.

Es decir,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Ej: Halle $\lim_{x \to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 3, x \neq 0 \\ -2 & x = 3 \\ \frac{1}{2x-3} & x > 3 \end{cases}$

S// Como el límite se pregunta en el punto donde cambian los intervalos, se calculan límites laterales.

Así,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{6-3} = 1/3$$

Como los límites laterales existen y son iguales,

$\lim_{x \to 3} f(x) = 1/3$. Observe $f(3) = -2 \neq \lim_{x \to 3} f(x)$.

Ej 2: Halle $\lim_{x \to 4} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & x \neq 4 \\ 2 & x = 4. \end{cases}$

S// Aunque la función se define a trozos, la función se comporta de la misma forma a la izquierda y derecha de 4, luego no se necesitan límites laterales. Así

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x^2 - 9) = 16 - 9 = 7.$$