Universidad del Valle
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Simulación y Computación Numérica
Agosto-Diciembre

Práctica: Serie de Taylor

Teorema de Taylor

Supongamos que $f \in C^{n+1}[a,b]$, que $f^{(n+1)}$ existe en $[a,b]$, y que $x_0 \in [a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$, existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \end{aligned}$$

y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Aquí, $P_n(x)$ se llama el enésimo polinomio de Taylor para f sobre x_0, y $R_n(x)$ se llama el término restante (o error de truncamiento) asociado con $P_n(x)$. Dado que el número $\xi(x)$ en el error de truncamiento $R_n(x)$ depende del valor de x en el que se está evaluando el polinomio $P_n(x)$, es una función de la variable x. Sin embargo, no debemos esperar poder determinar explícitamente la función $\xi(x)$. El Teorema de Taylor simplemente asegura que dicha función existe y que su valor se encuentra entre x y x_0. De hecho, uno de los problemas comunes en los métodos numéricos es tratar de determinar un límite realista para el valor de $f^{(n+1)}(\xi(x))$ cuando x está en un intervalo especificado.

Las series infinitas obtenidas al tomar el límite de $P_n(x)$ mientras $n \to \infty$ se llaman la serie de Taylor para f sobre x_0. En el caso $x_0 = 0$, el polinomio de Taylor a menudo se llama un polinomio de Maclaurin, y la serie de Taylor a menudo se llama una serie de Maclaurin.

El término error de truncamiento en el polinomio de Taylor se refiere al error involucrado en usar una suma truncada, o finita, para aproximar la suma de una serie infinita.

Ejercicios

1. Sea $f(x) = x^3$.

   a. Encuentre el segundo polinomio de Taylor $P_2(x)$ alrededor de $x_0 = 0$.

   b. Encuentre $R_2(0.5)$ y el error real usando $P_2(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$.

2. Encuentre el tercer polinomio de Taylor $P_3(x)$ para la función $f(x) = \sqrt{1+x}$ alrededor de $x_0 = 0$. Aproxima $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0.75}$, $\sqrt{1.25}$, y $\sqrt{1.5}$ usando $P_3(x)$, y encuentra los errores reales.

3. El polinomio de Taylor de grado n para $f(x) = e^x$ es

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

Usando el polinomio de grado 9 y aritmética de 3 cifras con redondeo, encuentre una aproximación para e^{-5} mediante cada uno de los siguientes métodos:

a.

$$e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i \cdot 5^i}{i!}$$

b.

$$e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$$

c. Un valor de aproximación de e^{-5} con cifra de 3 dígitos es 6.74×10^{-3}. ¿Cuál fórmula, a o b, da la mejor exactitud y por qué?

4. Sea $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ alrededor de $x_0 = 0$.

   a. Encuentra el tercer polinomio de Taylor $P_3(x)$ y úsalo para aproximar $f(0.4)$.

   b. Usa la fórmula de error en el Teorema de Taylor para encontrar un límite superior para el error $|f(0.4) - P_3(0.4)|$. Calcula el error real.

5. Expandir la función $f(x) = \sin(x)$ alrededor de $x_o = 0$ hasta el término de x^3 utilizando la serie de Taylor. Escribe la expansión completa.

   a. Calcular la aproximación de $\sin(0.5)$ utilizando la expansión de Taylor obtenida.

   b. Calcular del valor exacto de $\sin(0.5)$ utilizando una calculadora científica Determinar el error de truncamiento entre la aproximación obtenida en a. y b.

   c. Calcular del valor exacto de $\sin(0.5)$ utilizando una calculadora científica

   d. Determinar el error de truncamiento entre la aproximación obtenida en a. y b.

   e. Expandir $\sin(x)$ hasta el término de x^5 y calcula la aproximación de $\sin(0.5)$ utilizando esta expansión.

   f. Determinar el error de truncamiento entre la aproximación obtenida en b. y e.

   g. Comparar los resultados obtenidos en d. y f.

6. Desarrolle la serie de Taylor para $f(x) = \ln(x)$ alrededor de e, escribiendo los resultados en notación de sumatoria y proporcionando el término de resto. Supón que $|x - e| < 1$ y que se desea una precisión de 10^{-1}. ¿Cuál es el número mínimo de términos en la serie necesarios para alcanzar esta precisión?

7. Suponga que $|x| < \frac{1}{2}$ y determine, usando el Teorema de Taylor, la mejor cota superior para los siguientes errores:

   a. $|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)|$

   b. $|\sin(x) - \left(x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\right)|$

8. Utilice la serie de Taylor para e^x y determine el número de términos necesarios para calcular e^2 correctamente con cuatro cifras decimales (redondeado). Recuerde utilizar $x_0 = 0$.

9. El costo de producción de una empresa depende de la cantidad producida q y puede expresarse como:

$$C(q) = C_0 + C_1 q + C_2 q^2$$

Desarrolle la serie de Taylor para $C(q)$ alrededor de una producción inicial $q_0 = 100$ unidades. Utilice la serie para proyectar el costo total si la producción aumenta ligeramente en 5 unidades. ¿Cuál es el cambio en el costo total?

10. Una empresa ha determinado que su función de demanda para un producto depende del precio p y puede aproximarse como:

$$D(p) = a - bp + cp^2$$

Desarrolle la serie de Taylor para $D(p)$ alrededor de un precio inicial $p_0 = 10$. Use esta serie, para determinar el precio óptimo que maximiza los ingresos de la empresa. ¿Cómo afectan pequeños cambios en el precio a la demanda y a los ingresos?

Algunos resultados

$$\text{con } x_0 = 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (|x| < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (|x| < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (|x| < \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad (-1 < x \leq 1)$$