GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Para elaborar la gráfica de una función es útil identificar asintotas horizontales y verticales si las tiene y la información que proporciona la primera y segunda derivada de la función.

A. Horizontal: La recta $y=L$ es A. Horizontal de la gráfica de una función f si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

A. vertical: La recta $x=a$ es asintota vertical de la gráfica de f si se cumple uno de los cuatro límites:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \begin{matrix} \infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{matrix} \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \begin{matrix} \infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{matrix}$$

Ejemplo: Esbozar la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$, indicando:
Dominio, Rango, intervalos de crecimiento, Int de decrecimiento, máximos y mínimos locales, intervalos de concavidad hacia arriba, abajo, puntos de inflexión, asintotas horizontales, A. verticales si existen.

S// Primero vamos a determinar si existen A. Horizontales, A. verticales.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7.$ $\quad D f = \mathbb{R}.$

A. verticales: No tiene puesto que su dominio es $\mathbb{R}$.

A. Horizontales: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (2x^3 - 3x^2 - 36x + 7)$

$$= \lim_{x \to \infty} x^3 \left(2 - \cancelto{0}{\frac{3}{x}} - \cancelto{0}{\frac{36}{x^2}} + \cancelto{0}{\frac{7}{x^3}}\right) = \infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Por lo tanto la gráfica de f no tiene A. horizontales.

Para registrar la información que proporciona la primera y segunda derivada, elaboramos un cuadro en el cuál se registran intervalos, determinados por los nº críticos tanto de primer orden, como de segundo orden, el signo de $f'(x)$ y el signo de $f''(x)$.

Para la función retomamos la información del ejercicio anterior.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7.$ $\quad f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$\quad f''(x) = 12x - 6.$

Nº críticos $x = -2, 3, 1/2$.

Intervalo	$f'(x)$	crecimiento	$f''(x)$	concavidad	forma
$(-\infty, -2)$	+	Crece	−	Abajo	
$(-2, 1/2)$	−	Decrece	−	Abajo	
$(1/2, 3)$	−	Decrece	+	Arriba	
$(3, \infty)$	+	Crece	+	Arriba	

por crit. de 1a derivada hay Máximo en $x=-2$

$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 36(-2) + 7 = -16 - 12 + 72 + 7 = -28 + 79 = 51$

$P(-2, 51)$.

Hay mínimo en $x = 3$.

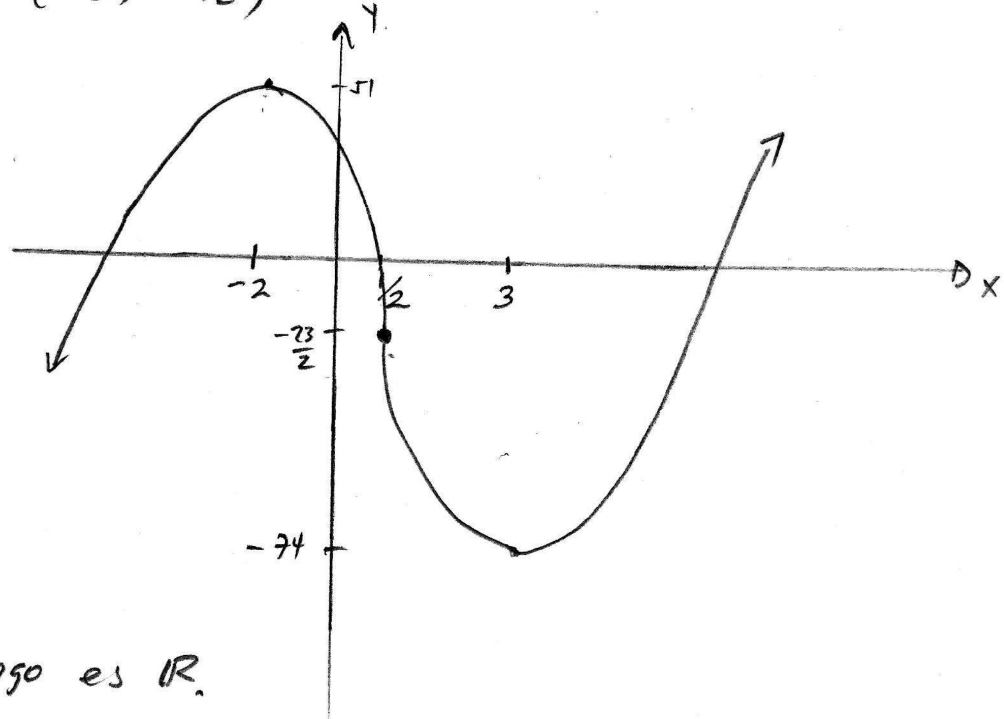
$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 36(3) + 7 = 54 - 27 - 108 + 7 = 61 - 135 = -74$

$Q(3, -74)$

Hay punto de inflexión en $x = 1/2$.

$f(1/2) = 2(\frac{1}{2})^3 - 3(1/2)^2 - 36(1/2) + 7 = 1/4 - 3/4 - 18 + 7 = -\frac{1}{2} - 11 = \frac{-23}{2}$

$R(1/2, -23/2)$



El rango es $\mathbb{R}$.