Martha Pinzón
Univ. del Valle

Veremos criterios para determinar valores extremos de funciones en dominios abiertos.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea f una función continua en un intervalo (a,b).
Sea $x=c$ un número en (a,b)
Sea f derivable en (a,b), excepto posiblemente en $x=c$. Entonces:

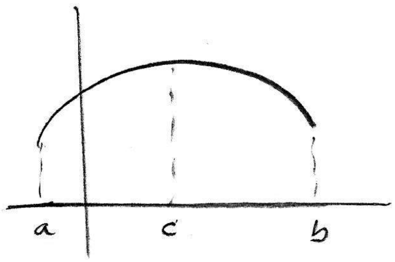
i) Si $f'(x)>0$ para todo $a<x<c$ y $f'(x)<0$ para $c<x<b$, entonces en $x=c$ hay un máximo local.

ii) Si $f'(x)<0$ para $a<x<c$ y $f'(x)>0$ para $c<x<b$, entonces en $x=c$ hay un mínimo local.

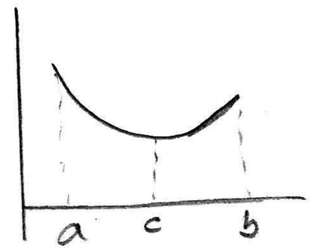
iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo para $a<x<c$ y $c<x<b$, entonces en $x=c$ no hay extremo local.

D/ (i) Como $f'(x)>0$ para $a<x<c$, entonces f es creciente en $[a,c]$ y por ser $f'(x)<0$ para $c<x<b$, f es decreciente en $[c,b]$, luego $f(c)>f(x)$ para $a<x<c$ y $f(c)>f(x)$ para $c<x<b$ por ser f creciente y decreciente respectivamente luego $f(c)>f(x)$ para todo x, $x\in(a,b)$, por lo tanto $f(c)$ es máximo en $[a,b]$.

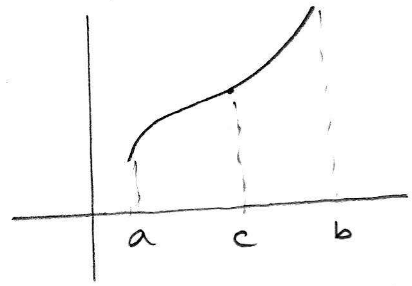
De manera análoga se demuestran los otros dos items.



Máximo local en $x=c$



Mínimo local en $x=c$



En $x=c$ no hay extremo local.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

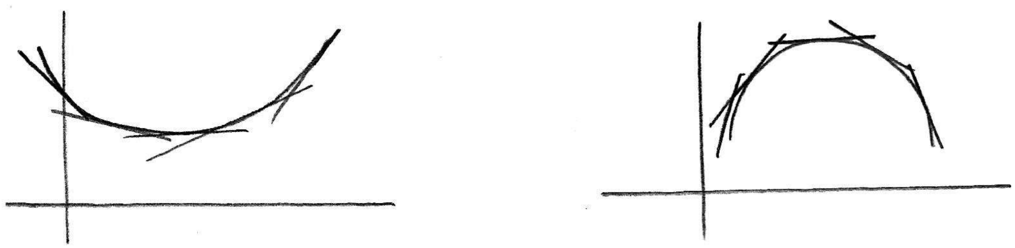
Sea f una función dos veces diferenciable en un intervalo abierto (a,b) y sea c un número en (a,b) tal que $f'(c)=0$.

i) si $f''(c)>0$ entonces en $x=c$ hay un mínimo local.
ii) si $f''(c)<0$ entonces en $x=c$ hay un máximo local.
iii) si $f''(c)=0$ el criterio no decide nada.

Concavidad

Veremos como el concepto de concavidad y el criterio de la segunda derivada, proporcionan información útil para elaborar la gráfica de una función, así como el criterio de la primera derivada, proporciona información sobre los extremos locales de la función.

Definición: (concavidad)
La gráfica de una función es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto I, si las rectas tangentes a la gráfica de f están por debajo de la curva en I. Es cóncava hacia abajo, si las rectas tangentes están por encima de la gráfica de f en I.



cóncava hacia arriba cóncava hacia abajo.

De otro lado, observe que si la gráfica de una función es cóncava hacia arriba, las pendientes de las rectas tangentes aumentan a medida que x aumenta. como las pendientes los proporciona la derivada f', entonces $f'(x)$ es una función creciente y por tanto $(f')' = f'' > 0$. Así mismo, si la gráfica de f es cóncava hacia abajo, las pendientes de las rectas tangentes disminuyen a medida que x aumenta, por lo tanto f' es una función decreciente y en consecuencia $(f')' = f'' < 0$ para $x \in I$. Así, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA: Sea f una fonción dos veces diferenciable en un intervalo I.

i) si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.

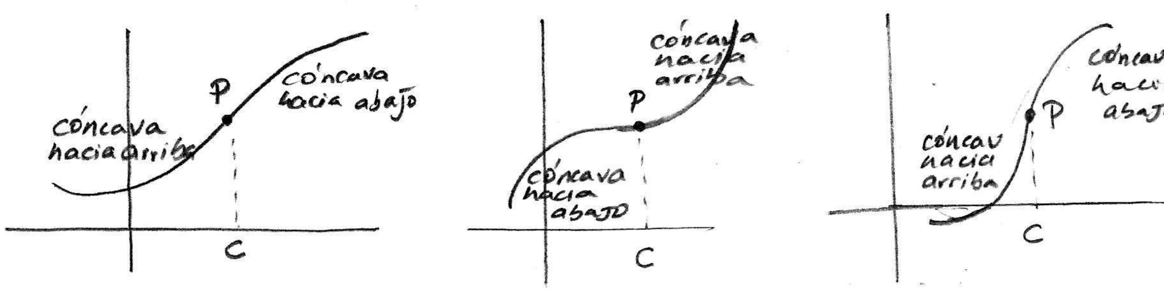
ii) si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I

Existen unos pontos en la gráfica de una fonción donde se presentan cambios de concavidad, se conocen como pontos de inflexión

DEFINICIÓN: Sea f una fonción continoa en un intervalo abierto (a,b), que contiene un número c el ponto $P(c, f(c))$ es un ponto de inflexión de la gráfica de f, si al pasar por $x=c$ hay un cambio de concavidad, es decir si:

i) $f''(x) > 0$ para $a < x < c$ y $f''(x) < 0$ para $c < x < b$

ó ii) $f''(x) < 0$ para $a < x < c$ y $f''(x) > 0$ para $c < x < b$



Definición: El número $x=c$ en el dominio de una fonción f es un número crítico de segundo orden si $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no existe.

Igual como sucede con los números críticos de primer orden y los extremos locales, existe una relación entre números críticos de segundo orden y puntos de inflexión.

$$P(c, f(c)) \text{ es un punto de inflexión} \Longrightarrow f''(c)=0 \text{ ó } f''(c) \text{ no existe}$$

(c es un número crítico de segundo orden)

En efecto:

Como $P(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces:

i) $f''(x)>0$ para $a<x<c$ y $f''(x)<0$ para $c<x<b$

ó

ii) $f''(x)<0$ para $a<x<c$ y $f''(x)>0$ para $c<x<b$

Supongamos que se cumple (i).

como $f''(x) = (f')'(x) > 0$ en (a, c), entonces f' es creciente en $[a, c]$ y por ser $f''(x) = (f')'(x) < 0$ en (c, b), entonces f' es decreciente en $[c, b]$ luego, por el criterio de primera derivada $f'(x)$ tiene un máximo en $x=c$ y por tanto c es un número crítico de $f'(x)$, es decir $f''(c)=0$ ó $f''(c)$ no existe.

De manera análoga se demuestra el resultado si se cumple (ii).

El recíproco de la implicación anterior, no es cierto, es decir:

$f''(c)=0$ ó $f''(c)$ no existe $\not\Rightarrow$ en $x=c$ hay punto de inflexión.

En efecto, Sea $f(x) = (x-2)^4$. entonces $f'(x) = 4(x-2)^3$ y $f''(x) = 12(x-2)^2$. $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2$. Único número crítico de segundo orden. Ahora,

$$f''(x) = 12(x-2)^2 > 0, \quad \forall x \neq 2.$$

por tanto si $x<2$, $f''(x)>0$
$x>2$, $f''(x)>0$

lo cuál implica que en $x=2$ no hay pto de inflexión.

<u>Ejemplo</u>: Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$.
Halle intervalos de crecimiento, extremos locales, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

S// $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7 \qquad D_f = \mathbb{R}$.

Como f es un polinomio f es derivable en $\mathbb{R}$
Buscamos números críticos de primer orden.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x-3)(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ó } x = 3$$

Si $x < -2$ ent $f'(x) > 0$
$-2 < x < 3$ $\quad f'(x) < 0$
$x > 3$ $\quad f'(x) > 0$

f crece en $(-\infty,-2]$ y $[3,\infty)$. Decrece en $[-2,3]$
Por el criterio de primera derivada en $x=-2$
hay máximo local y mínimo local en $x=3$.

Si usamos criterio de 2da derivada (se puede usar
porque $f'(-2)=0$, $f'(3)=0$)

$$f''(x) = 12\cancel{x}-6$$

$f''(-2) = -24-6=-30<0$, luego en $x=-2$ hay máx. local
$f''(3) = 36-6 = 30>0$, entonces en $x=3$ hay mín. local

Ahora buscamos intervalos de concavidad y puntos
de inflexión.

$f''(x) = 12x-6$. $f''(x)=0 \leftrightarrow 12x-6=0 \leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

$x<\frac{1}{2}$, $f''(x)<0$
$x>\frac{1}{2}$, $f''(x)>0$ $\rightarrow$ en $x=\frac{1}{2}$ hay Punto de Inflexión

La gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(-\infty,\frac{1}{2}]$
y cóncava hacia arriba en $[\frac{1}{2},\infty)$

La Información que proporciona la primera derivada
de una función y la segunda derivada, nos permite
elaborar gráficas de funciones.
Para elaborar la gráfica de una función es importante
recordar el concepto de asíntotas.