Análisis y Diseño de Algoritmos II

Jesús Alexander Aranda Ph.D   Robinson Duque, Ph.D
Juan Francisco Díaz, Ph. D

Universidad del Valle

jesus.aranda@correounivalle.edu.co
robinson.duque@correounivalle.edu.co
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

El problema del cambio de monedas

Programación Voraz- Cambio de Monedas

Entrada: Una secuencia ascendente de denominaciones

d1, d2, d3, … , dn donde d1 = 1

M, cantidad a cambiar

Salida: Una secuencia x1,x2,x3, …,xn de números enteros no negativos tal que

$$\sum_{1 \leq i \leq n} d_i x_i = M$$

y $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i$ sea mínima

Programación Voraz- Cambio de Monedas

Estrategia Voraz :

--- Utilizar para el cambio una moneda con la más alta denominación posible y repetir el proceso hasta que no haya más dinero que cambiar

Ejemplo:

Solución Voraz: <2,0,1>

D = <1,5,8>   M= 10   Solución Óptima: <0,2,0>

Para el problema del cambio de monedas, la estrategia voraz no garantiza optimalidad en todos los casos

Programación Voraz- Cambio de Monedas

Sin embargo en algunos casos, la estrategia voraz puede comportarse de manera óptima:

--- La estrategia voraz es óptima para el problema del cambio de monedas si las denominaciones son <1,3,5>

Argumento:

Para cualquier cantidad a cambiar, M, existirá **al menos un cambio óptimo** tal que se cumpla lo siguiente:

- **Máximo se usarán dos monedas de denominación 1**, si una solución tuviera más monedas, tres de ellas se podrían cambiar por una moneda de denominación 3.
- **Máximo se usará una moneda de denominación 3**, si una solución tuviera más monedas, dos de ellas se podrían cambiar por una monedas de 5 y otra de 1.
- **Máximo se usarán simultáneamente 1 moneda de 1 y una moneda de 3**, si una solución tuviera 2 monedas de 1 y una moneda de 3 se podrían cambiar por una moneda de denominación 5. Los demás casos en que hubieran más monedas se trataron previamente.

Programación Voraz- Cambio de Monedas

Argumento (Continuación):

Por lo anterior concluimos que para cambiar M existirá una solución óptima tal que **$x1 <= 2$, $x2 <= 1$ y $x1 + x2 <= 2$**.

Por lo anterior:

-- Lo máximo que podemos cambiar con monedas de den. 1 es un valor de 2.

-- Lo máximo que podemos cambiar con monedas de den.1 y 2 es un valor de 4.

Siendo así, si **M >= 5 existirá una solución óptima que use al menos 1 moneda de denominación 5**. Si al utilizar 1 moneda de 5 el resto sigue siendo mayor o igual a 5 usaremos otra moneda de 5 y así sucesivamente hasta que el resto sea menor a 5. Resumiendo:

Si **M >= 5** tendrá que usar al menos una moneda de denominación 5.

Si **2 < M < 5** tendrá que usar al menos una moneda de denominación 3.

Si **M <= 2** tendrá que usar exclusivamente monedas de denominación 1.

Es decir, existirá una solución óptima donde se usarán el máximo número de monedas de 5 que se puedan, y con el resto a cambiar se usarán la denominaciones 3 y 1 en ese orden.

Programación Voraz- Cambio de Monedas

Argumento (Continuación):

Cantidad	Monedas a usar (opt)	Número de Monedas (opt)
1	1 de den. 1	1
2	2 de den. 1	2
3	1 de den. 3	1
4	1 de den. 3 y 1 de den. 1	2
M >= 5	M div 5 de den. 5 y M Mod 5 como se estableció arriba	M div 5 + Num de monedas cambiar un valor menor o igual a 4

Concluimos a partir de la anterior tabla que para cambiar M siempre existirá un cambio óptimo que use el mayor número de monedas de 5 y el resto, el cual es un valor de 1 a 4, se podrá cambiar usando el máximo número de monedas de 3 y de 1 en ese orden. **Es decir existirá un cambio óptimo para M que coincide con la solución que daría el algoritmo voraz.**

Programación Voraz- Cambio de Monedas

--- La estrategia voraz es óptima para el problema del cambio de monedas si las denominaciones son <1,3,5>

Argumento II:

Dado que el problema de cambio de monedas tiene una subestructura óptima, faltaría argumentar que cumple con la propiedad de escogencia voraz.

En este caso, si la propiedad de escogencia voraz (considerando la estrategia planteada) entonces debería existir una solución óptima tal que una moneda con la más alta denominación posible sea usada.

Para cualquier cantidad a cambiar, M, existirá **al menos un cambio óptimo** tal que se cumpla lo siguiente:

- **Si M es menor a 3 necesariamente se usarán monedas de denominación 1 (la más alta denominación posible a usar).**
- **Si M es mayor o igual a 3 y menor que 5, todo cambio que no use monedas de 3 podría ser mejorado sustituyendo 3 monedas de denominación 1 por una moneda de denominación 3 (la más alta denominación posible a usar).**
- **Si M es mayor que 5, todo cambio que no use monedas de 5 puede ser mejorado reemplazando una combinación de monedas de 1 y 3 cuya suma da 5 (la cual debe existir) por una moneda de 5 (la más alta denominación posible a usar)**

Programación Voraz- Cambio de Monedas

Argumento II (Continuación):

Por lo anterior concluimos que para cambiar M existirá una solución óptima que use una moneda de la más alta denominación posible.

Por lo tanto, además de la subestructura óptima, se cumple la propiedad de escogencia voraz con lo que podemos afirmar que la estrategia voraz es óptima.

Programación Voraz- Cambio de Monedas

--- La estrategia voraz es óptima para el problema del cambio de monedas si las denominaciones son <1,5,10,25>

Argumento:

Para cualquier cantidad a cambiar, M, existirá **al menos un cambio óptimo** tal que se cumpla lo siguiente:

- **Máximo se usarán cuatro monedas de denominación 1**, si una solución tuviera más monedas, cinco de ellas se podrían cambiar por una moneda de denominación 5.
- **Máximo se usará una moneda de denominación 5**, si una solución tuviera más monedas, dos de ellas se podrían cambiar por una moneda de 10.
- **Máximo se usarán dos monedas entre las denominaciones 5 y 10**, si una solución tuviera 2 monedas de 10 y una moneda de 5 se podrían cambiar por una moneda de denominación 25. Si se tuviera 3 monedas de 10 se podría cambiar por una de 25 y otra de 5 . El caso donde hay varias monedas de denominación 5 fue tratado previamente.

Programación Voraz- Cambio de Monedas

Argumento (Continuación):

Por lo anterior concluimos que para cambiar M existirá una solución óptima tal que **$x1 <= 4$, $x2 <= 1$ y $x2 + x3 <= 2$**. Por lo tanto, podemos decir lo siguiente:

- Con la denominación d1 lo máximo que se puede cambiar es un valor de 4.
- Con la denominación d2 y d1 lo máximo que se puede cambiar es 9.
- Con la denominación d3, d2 y d1 lo máximo que se puede cambiar es 24.

Lo anterior quiere decir que:

-- Si M es mayor o igual a 25 necesita usar monedas de denominación 25 (d4).

--Si M es menor que 25 y mayor o igual a 10 se necesita usar monedas de denominación 10 (d3).

--Si M es menor a 10 y mayor o igual a 5 se necesita usar monedas de denominación 5 (d2).

-- Si M es menor a 5 se necesita usar monedas de denominación 1 (d1).

Prog. Voraz- Cambio de Monedas

Argumento (Continuación):

De lo anterior concluimos que existirá una solución óptima para M donde se usarán tantas monedas de 25 como se pueda y para el resto se usarán tantas monedas de 10 como se pueda y para lo que siga quedando se usarán tantas monedas de 5 como es posible y finalmente si queda algo se usarán monedas de 1 . Es decir existirá una solución óptima que corresponda a la solución voraz.

Programación Voraz- Cambio de Monedas

--- La estrategia voraz es óptima para el problema del cambio de monedas si las denominaciones son <1,5, 10, 25>

Argumento II:

Dado que el problema de cambio de monedas tiene una subestructura óptima, restaría argumentar que cumple con la propiedad de escogencia voraz.

En este caso, si la propiedad de escogencia voraz se cumple (considerando la estrategia planteada) entonces debería existir una solución óptima tal que una moneda con la más alta denominación posible sea usada.

Para cualquier cantidad a cambiar, M, existirá **al menos un cambio óptimo** tal que se cumpla lo siguiente:

- **Si M es menor a 5 necesariamente se usarán monedas de denominación 1 (la más alta denominación posible a usar).**
- **Si M es mayor o igual a 5 y menor que 10, todo cambio que no use monedas de 5 podría ser mejorado sustituyendo 5 monedas de denominación 1 por una moneda de denominación 5 (la más alta denominación posible a usar).**
- **Si M es mayor o igual a 10 y menor que 25, todo cambio que no use monedas de 10 puede ser mejorado reemplazando una combinación de monedas de 1 y 5 cuya suma da 10 (la cual debe existir) por una moneda de 10 (la más alta denominación posible a usar)**
- **Si M es mayor o igual que 25, todo cambio que no use monedas de 25 puede ser mejorado de la siguiente forma: 1) Si el cambio usa 3 o más monedas de 10, 3 monedas de 10 pueden ser sustituidas por una moneda de 25 y una de 5. 2) Si el cambio usa 2 o menos monedas de 10, existira una combinación de monedas de 1,5 y 10 que sumen 25 y que pueden ser sustituidas por una moneda de 25 (la más alt**a denominación posible).

Programación Voraz- Cambio de Monedas

Argumento II (Continuación):

Por lo anterior concluimos que para cambiar M existirá una solución óptima que use una moneda de la más alta denominación posible.

Por lo tanto, además de la subestructura óptima, se cumple la propiedad de escogencia voraz con lo que podemos afirmar que la estrategia voraz es óptima.

Prog. Voraz- Cambio de Monedas

¿Cuál es la complejidad del algoritmo voraz para el problema del cambio de monedas?

¿Que pasaría con las siguientes denominaciones?:

D = <1,2,5>
D = <1,2,10,22>