Clase 16-01-22

miércoles, 26 de enero de 2022 10:58 a. m.

Espacios vectoriales

Definición [*Espacio vectorial*]. Sea V un conjunto no vacío en el cual se han definido dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación por escalar*. Si las siguientes propiedades o axiomas se satisfacen para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de V y para todo par de escalares c y d de R, entonces se dice que V es un *espacio vectorial real* y sus elementos son llamados *vectores*.

Suma:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ esta en V. — Cerradura bajo la adición
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — Propiedad conmutativa
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ — Propiedad asociativa
4. V contiene un **vector cero 0** tal que para todo $\mathbf{u}$ en V, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ — Idéntico aditivo
5. Para todo $\mathbf{u}$ en V, hay un vector en V denotado por $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. — Inverso aditivo

Multiplicación escalar:

6. $c\mathbf{u}$ esta en V. — Cerradura bajo la multiplicación escalar
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ — Propiedad distributiva
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ — Propiedad distributiva
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ — Propiedad asociativa
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ — Idéntico escalar

Ejemplos.

1. $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n \right\}$ es un espacio vectorial (e.v.)

2. P_2 : Conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2.

$$P_2 = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{grado}(p(x)) \leq 2.$$

Operaciones.

Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $p(x) + q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2$ (suma).
- $\lambda p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2$. (producto por escalar).

observe que

- grado $(p(x)+q(x)) \leq 2 \Rightarrow p(x)+q(x) \in P_2$. axioma ✓
- grado $(\lambda p(x)) \leq 2 \Rightarrow \lambda p(x) \in P_2$ Axima 6 ✓

(grado del polinomio cero es cero).

- $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 = \Theta$ Axioma 4 ✓
- El opuesto de $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ es $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2$

$$p(x) + (-p(x)) = \Theta$$ Axioma 5 ✓

- Conmulativa.

$$\begin{aligned}
p(x)+q(x) &= (\underbrace{a_0+b_0}) + (\underbrace{a_1+b_1})x + (\underbrace{a_2+b_2})x^2 \\
&= (b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + (b_2+a_2)x^2 \\
&= (b_0 + b_1x + b_2x^2) + (a_0 + a_1x + a_2x^2) \\
&= q(x) + p(x).
\end{aligned}$$ Axioma 2 ✓

- $$\begin{aligned}
c(p(x)+q(x)) &= c[(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2] \\
&= \underbrace{c(a_0+b_0)} + [\underbrace{c(a_1+b_1)}]x + [\underbrace{c(a_2+b_2)}]x^2 \\
&= (ca_0+cb_0) + (ca_1+cb_1)x + (ca_2+cb_2)x^2 \\
&= [(ca_0) + (ca_1)x + (ca_2)x^2] + [(cb_0) + (cb_1)x + (cb_2)x^2].
\end{aligned}$$

$= c\,p(x) + c\,q(x)$ Axioma ✓✓

De manera análoga se verifican los otros axiomas $(3, 8, 9$ y $10)$

Asi que P_2 es un e.v.

3. Sea $P = \{ p(x) : \text{grado}(p(x)) = 3 \}$ ← Conjunto de todos los polinomios de grado 3.

¿Es P un e.v.?

observe que $p(x) = x^3 \in P$.

$-p(x) = -x^3 \in P$.

$p(x) + (-p(x)) = 0$ ← no es un polinomio de grado 3.

$\text{grado}(0) = 0 \neq 3$.

4. $F[0,1]$: Todas las funciones de valor real definidas en $[0,1]$.

$F[0,1] = \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una función} \}$.

Operaciones: Sean $f, g \in F[0,1]$.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

$\Rightarrow$ Ax. 1 y Ax. 6 se verifican.

· función nula: $\eta(x) = 0$

Si $f \in \mathcal{F}[0,1]$, $\quad (f+\eta)(x) = f(x) + \eta(x) = f(x) + 0 = f(x)$

$$f + \eta = f.$$

- Opuesto de f es $-1f$.

$$\begin{aligned}(f + (-1f))(x) &= f(x) + ((-1)f)(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Conmutativa. Sean $f, g \in \mathcal{F}[0,1]$

$$(f+g)(x) = \underbrace{f(x) + g(x)}_{\text{Conmutan}} = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

$$f + g = g + f.$$

- Veamos que $c(f+g) = cf + cg$.

$$\begin{aligned}[c(f+g)](x) &= c\,\underbrace{(f+g)(x)} \\ &= c\,[f(x) + g(x)] \\ &= cf(x) + cg(x) \\ &= (cf)(x) + (cg)(x) \\ &= (cf + cg)(x)\end{aligned}$$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Por tanto, $c(f+g) = cf + cg$.

Tarea. Verificar lo demás axiomas.

5 Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \right\}$

5. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \right\}$

Mostrar que H es un e.v

Sean $P = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

entonces $2y_1 - y_2 + 3y_4 = 0$ y $2z_1 - z_2 + 3z_4 = 0$.

· Veamos $P + Q = \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ y_3 + z_3 \\ y_4 + z_4 \end{pmatrix} \in H$.

$$
\begin{aligned}
2(y_1 + z_1) - (y_2 + z_2) + 3(y_4 + z_4) &= \underline{2y_1} + 2z_1 \underline{- y_2} - z_2 + \underline{3y_4} + 3z_4 \\
&= (2y_1 - y_2 + 3y_4) + (2z_1 - z_2 + 3z_4) \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Entonces $P + Q \in H$. Axioma 1 ✓

· Veamos que $\lambda P = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ \lambda y_3 \\ \lambda y_4 \end{pmatrix} \in H$.

$$
\begin{aligned}
2(\lambda y_1) - (\lambda y_2) + 3(\lambda y_4) &= \lambda(2y_1 - y_2 + 3y_4) \\
&= \lambda 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Luego, $\lambda P \in H$. Axioma 6 ✓

- $2(0) - 0 + 3(0) = 0 \Rightarrow \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in H.$

- Veamos que $-P = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \\ -y_4 \end{pmatrix} \in H.$

$$\begin{aligned} 2(-y_1) - (-y_2) + 3(-y_4) &= -(2y_1 - y_2 + 3y_4) \\ &= -0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Axioma 5 ✓

Similarmente se verifican los otros axiomas.