Matemáticas Discretas I

Relaciones

Juan Francisco Díaz Frias

Profesor Titular (1993-hoy)
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Edif. B13 - 4009
Universidad del Valle

Enero 2022

Plan

Plan

Plan

Motivación - Definiciones

- Una relación es una afirmación sobre elementos de conjuntos que se expresa con un predicado y, por tanto, puede ser o no verdadera. Por ejemplo, "x es mayor que y", "$x + y$ es menor que z", "José, Patricia y Gloria son familiares", "La estación x y la estación y se encuentran en una misma ruta de transmilenio", "Se puede ir de la estación x a la estación y haciendo máximo un transbordo", "m es un municipio del departamento d", ...
- Formalmente, una relación se representa como un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos involucrados.
- Aplicaciones: Las relaciones se suelen almacenar en bases de datos relacionales, a partir de las cuales se pueden calcular otras relaciones o consultas.

Motivación - Definiciones

- Una relación es una afirmación sobre elementos de conjuntos que se expresa con un predicado y, por tanto, puede ser o no verdadera. Por ejemplo, "x es mayor que y", "$x + y$ es menor que z", "José, Patricia y Gloria son familiares", "La estación x y la estación y se encuentran en una misma ruta de transmilenio", "Se puede ir de la estación x a la estación y haciendo máximo un transbordo", "m es un municipio del departamento d", ...
- Formalmente, una relación se representa como un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos involucrados.
- Aplicaciones: Las relaciones se suelen almacenar en bases de datos relacionales, a partir de las cuales se pueden calcular otras relaciones o consultas.

Motivación - Definiciones

- Una relación es una afirmación sobre elementos de conjuntos que se expresa con un predicado y, por tanto, puede ser o no verdadera. Por ejemplo, "x es mayor que y", "$x + y$ es menor que z", "José, Patricia y Gloria son familiares", "La estación x y la estación y se encuentran en una misma ruta de transmilenio", "Se puede ir de la estación x a la estación y haciendo máximo un transbordo", "m es un municipio del departamento d", ...
- Formalmente, una relación se representa como un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos involucrados.
- Aplicaciones: Las relaciones se suelen almacenar en bases de datos relacionales, a partir de las cuales se pueden calcular otras relaciones o consultas.

Plan

Relaciones binarias

- Recordemos el Producto cartesiano: El producto cartesiano de los conjuntos A y B, se denota $A \times B$, y contiene todos las parejas de elementos de A con elementos de B

$$A \times B = \{(x, y) : U \times U | x \in A \wedge y \in B\}$$

  Si $A = \{1, 2, 4\}, B = \{4, 8\}$ entonces
  $A \times B = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}$.
  Como $|A| = 3$ y $|B| = 2$ entonces $|A \times B| = 6$.

- Una relación binaria entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.
  Siguiendo con el ejemplo: como $|A \times B| = 6$, hay 2^6 relaciones (subconjuntos) posibles.
  Por ejemplo, $R_1 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$ es una relación.
  O, $R_2 = \{(1, 8), (2, 4)\}$ es otra relación.

Relaciones binarias

- Recordemos el Producto cartesiano: El producto cartesiano de los conjuntos A y B, se denota $A \times B$, y contiene todos las parejas de elementos de A con elementos de B

$$A \times B = \{(x, y) : U \times U | x \in A \wedge y \in B\}$$

  Si $A = \{1, 2, 4\}, B = \{4, 8\}$ entonces
  $A \times B = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}$.
  Como $|A| = 3$ y $|B| = 2$ entonces $|A \times B| = 6$.

- Una relación binaria entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.
  Siguiendo con el ejemplo: como $|A \times B| = 6$, hay 2^6 relaciones (subconjuntos) posibles.
  Por ejemplo, $R_1 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$ es una relación.
  O, $R_2 = \{(1, 8), (2, 4)\}$ es otra relación.

Relaciones binarias

- Recordemos el Producto cartesiano: El producto cartesiano de los conjuntos A y B, se denota $A \times B$, y contiene todos las parejas de elementos de A con elementos de B

$$A \times B = \{(x, y) : U \times U | x \in A \wedge y \in B\}$$

  Si $A = \{1, 2, 4\}, B = \{4, 8\}$ entonces
  $A \times B = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}$.
  Como $|A| = 3$ y $|B| = 2$ entonces $|A \times B| = 6$.

- Una relación binaria entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.
  Siguiendo con el ejemplo: como $|A \times B| = 6$, hay 2^6 relaciones (subconjuntos) posibles.
  Por ejemplo, $R_1 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$ es una relación.
  O, $R_2 = \{(1, 8), (2, 4)\}$ es otra relación.

Relaciones binarias

- Recordemos el Producto cartesiano: El producto cartesiano de los conjuntos A y B, se denota $A \times B$, y contiene todos las parejas de elementos de A con elementos de B

$$A \times B = \{(x, y) : U \times U | x \in A \wedge y \in B\}$$

  Si $A = \{1, 2, 4\}, B = \{4, 8\}$ entonces
  $A \times B = \{(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (4, 4), (4, 8)\}$.
  Como $|A| = 3$ y $|B| = 2$ entonces $|A \times B| = 6$.
- Una relación binaria entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto de $A \times B$.
  Siguiendo con el ejemplo: como $|A \times B| = 6$, hay 2^6 relaciones (subconjuntos) posibles.
  Por ejemplo, $R_1 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$ es una relación.
  O, $R_2 = \{(1, 8), (2, 4)\}$ es otra relación.

Notaciones

- Se escribe
$$R : A \leftrightarrow B$$
para significar que R es una relación entre A y B.
- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.
También se escribe: aRb $R(a, b)$
- A : el dominio de R
- B : el codominio de R
- $domR = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el dominio de definición de R
$$domR_1 = \{1, 2, 4\}, domR_2 = \{1, 2\}$$
- $ranR = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el rango de R
$$ranR_1 = \{4\}, ranR_2 = \{4, 8\}$$
- $R^T : B \leftrightarrow A$
$R^T = \{(b, a) | aRb\}$: la transpuesta o inversa de R
$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe
$$R : A \leftrightarrow B$$
para significar que R es una relación entre A y B.
- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.
También se escribe: aRb $R(a, b)$
- A : el dominio de R
- B : el codominio de R
- $domR = \{a|a \in A \wedge (\exists b|b \in B : aRb)\}$: el dominio de definición de R
$$domR_1 = \{1, 2, 4\}, domR_2 = \{1, 2\}$$
- $ranR = \{b|b \in B \wedge (\exists a|a \in A : aRb)\}$: el rango de R
$$ranR_1 = \{4\}, ranR_2 = \{4, 8\}$$
- $R^T : B \leftrightarrow A$
$R^T = \{(b, a)|aRb\}$: la transpuesta o inversa de R
$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe

$$R : A \leftrightarrow B$$

  para significar que R es una relación entre A y B.
- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.
  También se escribe: aRb $R(a, b)$
- A : el dominio de R
- B : el codominio de R
- $domR = \{a|a \in A \wedge (\exists b|b \in B : aRb)\}$: el dominio de definición de R

$$domR_1 = \{1, 2, 4\}, domR_2 = \{1, 2\}$$

- $ranR = \{b|b \in B \wedge (\exists a|a \in A : aRb)\}$: el rango de R

$$ranR_1 = \{4\}, ranR_2 = \{4, 8\}$$

- $R^T : B \leftrightarrow A$
  $R^T = \{(b, a)|aRb\}$: la transpuesta o inversa de R

$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe
$$R : A \leftrightarrow B$$
para significar que R es una relación entre A y B.
- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.
También se escribe: aRb $R(a, b)$
- A : el dominio de R
- B : el codominio de R
- $domR = \{a | a \in A \land (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el dominio de definición de R
$$domR_1 = \{1, 2, 4\}, domR_2 = \{1, 2\}$$
- $ranR = \{b | b \in B \land (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el rango de R
$$ranR_1 = \{4\}, ranR_2 = \{4, 8\}$$
- $R^T : B \leftrightarrow A$
$R^T = \{(b, a) | aRb)\}$: la transpuesta o inversa de R
$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe
$$R : A \leftrightarrow B$$
para significar que R es una relación entre A y B.
- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.
También se escribe: aRb $R(a, b)$
- A : el dominio de R
- B : el codominio de R
- $domR = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el dominio de definición de R
$$domR_1 = \{1, 2, 4\}, domR_2 = \{1, 2\}$$
- $ranR = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el rango de R
$$ranR_1 = \{4\}, ranR_2 = \{4, 8\}$$
- $R^T : B \leftrightarrow A$
$R^T = \{(b, a) | aRb)\}$: la transpuesta o inversa de R
$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe
$$R : A \leftrightarrow B$$
para significar que R es una relación entre A y B.
- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.
También se escribe: aRb $R(a, b)$
- A : el dominio de R
- B : el codominio de R
- $domR = \{a | a \in A \wedge (\exists b | b \in B : aRb)\}$: el dominio de definición de R
$$domR_1 = \{1, 2, 4\}, domR_2 = \{1, 2\}$$
- $ranR = \{b | b \in B \wedge (\exists a | a \in A : aRb)\}$: el rango de R
$$ranR_1 = \{4\}, ranR_2 = \{4, 8\}$$
- $R^T : B \leftrightarrow A$
$R^T = \{(b, a) | aRb)\}$: la transpuesta o inversa de R
$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe
$$R : A \leftrightarrow B$$
para significar que R es una relación entre A y B.
- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.
También se escribe: aRb $R(a, b)$
- A : el dominio de R
- B : el codominio de R
- $domR = \{a|a \in A \wedge (\exists b|b \in B : aRb)\}$: el dominio de definición de R
$$domR_1 = \{1, 2, 4\}, domR_2 = \{1, 2\}$$
- $ranR = \{b|b \in B \wedge (\exists a|a \in A : aRb)\}$: el rango de R
$$ranR_1 = \{4\}, ranR_2 = \{4, 8\}$$
- $R^T : B \leftrightarrow A$
$R^T = \{(b, a)|aRb)\}$: la transpuesta o inversa de R
$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Notaciones

- Se escribe
$$R : A \leftrightarrow B$$
para significar que R es una relación entre A y B.
- Dados $a \in A, b \in B$, se dice que a está relacionado con b por R si $(a, b) \in R$.
También se escribe: aRb $R(a, b)$
- A : el dominio de R
- B : el codominio de R
- $domR = \{a|a \in A \wedge (\exists b|b \in B : aRb)\}$: el dominio de definición de R
$$domR_1 = \{1, 2, 4\}, domR_2 = \{1, 2\}$$
- $ranR = \{b|b \in B \wedge (\exists a|a \in A : aRb)\}$: el rango de R
$$ranR_1 = \{4\}, ranR_2 = \{4, 8\}$$
- $R^T : B \leftrightarrow A$
$R^T = \{(b, a)|aRb)\}$: la transpuesta o inversa de R
$$R_1^T = \{(4, 1), (4, 2), (4, 4)\}, R_2^T = \{(8, 1), (4, 2)\}$$

Plan

Representaciones

- Matrices booleanas: Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ y $R : A \leftrightarrow B$, entonces $M_R \in \mathcal{M}_{m \times n}$ representa a a R si

$$M_R[i,j] \equiv a_i R b_j$$

$$M_{R_1} = \left[\begin{array}{c|cc} & 4 & 8 \\ \hline 1 & V & F \\ 2 & V & F \\ 4 & V & F \end{array}\right] \qquad M_{R_2} = \left[\begin{array}{c|cc} & 4 & 8 \\ \hline 1 & F & V \\ 2 & V & F \\ 4 & F & F \end{array}\right]$$

- Gráficos: Se dibujan el dominio y el condominio y por cada aRb una flecha entre a y b
R_1 : R_2 :

- Grafos: Cuando $A = B$ sólo se dibujan los puntos una vez.

Representaciones

- Matrices booleanas: Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ y $R : A \leftrightarrow B$, entonces $M_R \in \mathcal{M}_{m \times n}$ representa a a R si

$$M_R[i, j] \equiv a_i R b_j$$

$$M_{R_1} = \begin{array}{c|cc} & 4 & 8 \\ \hline 1 & V & F \\ 2 & V & F \\ 4 & V & F \end{array} \qquad M_{R_2} = \begin{array}{c|cc} & 4 & 8 \\ \hline 1 & F & V \\ 2 & V & F \\ 4 & F & F \end{array}$$

- Gráficos: Se dibujan el dominio y el condominio y por cada aRb una flecha entre a y b

R_1 : R_2 :

- Grafos: Cuando $A = B$ sólo se dibujan los puntos una vez.

Representaciones

- Matrices booleanas: Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ y $R : A \leftrightarrow B$, entonces $M_R \in \mathcal{M}_{m\times n}$ representa a a R si

$$M_R[i,j] \equiv a_i R b_j$$

$$M_{R_1} = \begin{array}{c|cc} & 4 & 8 \\ \hline 1 & V & F \\ 2 & V & F \\ 4 & V & F \end{array} \qquad M_{R_2} = \begin{array}{c|cc} & 4 & 8 \\ \hline 1 & F & V \\ 2 & V & F \\ 4 & F & F \end{array}$$

- Gráficos: Se dibujan el dominio y el condominio y por cada aRb una flecha entre a y b
  R_1 : R_2 :

- Grafos: Cuando $A = B$ sólo se dibujan los puntos una vez.

Representaciones

- Matrices booleanas: Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ y $R : A \leftrightarrow B$, entonces $M_R \in \mathcal{M}_{m \times n}$ representa a R si

$$M_R[i,j] \equiv a_i R b_j$$

$$M_{R_1} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 4 & 8 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} V & F \\ V & F \\ V & F \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_{R_2} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 4 & 8 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} F & V \\ V & F \\ F & F \end{bmatrix} \end{array}$$

- Gráficos: Se dibujan el dominio y el condominio y por cada aRb una flecha entre a y b
  R_1 : R_2 :

- Grafos: Cuando $A = B$ sólo se dibujan los puntos una vez.

Plan

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}, \leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}, \geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}, \ldots$).
Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es reflexiva si $\forall a|a \in A : aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es irreflexiva si $\forall a|a \in A : \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es simétrica si $\forall a, b|a, b \in A : aRb \implies bRa$. Por ejemplo: $hermano : Persona \leftrightarrow Persona$ tal que $hermano(a, b) \equiv$ "a es hermano de b"
- R es asimétrica si $\forall a, b|a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es antisimétrica si $\forall a, b|a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo: $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es transitiva si $\forall a, b, c|a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo: $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ "a divide a b"

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}, \leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}, \geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}, \ldots$).
  Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es reflexiva si $\forall a | a \in A : aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es irreflexiva si $\forall a | a \in A : \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es simétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$. Por ejemplo:
  $hermano : Persona \leftrightarrow Persona$ tal que $hermano(a, b) \equiv$ "a es hermano de b"
- R es asimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es antisimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo:
  $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es transitiva si $\forall a, b, c | a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo:
  $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ "a divide a b"

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}, \leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}, \geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}, \ldots$).
  Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es reflexiva si $\forall a | a \in A : aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es irreflexiva si $\forall a | a \in A : \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es simétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$. Por ejemplo: $hermano : Persona \leftrightarrow Persona$ tal que $hermano(a, b) \equiv$ "a es hermano de b"
- R es asimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es antisimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo: $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es transitiva si $\forall a, b, c | a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo: $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ "a divide a b"

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}, \leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}, \geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}, \ldots$).
  Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es reflexiva si $\forall a | a \in A : aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es irreflexiva si $\forall a | a \in A : \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es simétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$. Por ejemplo: $hermano : Persona \leftrightarrow Persona$ tal que $hermano(a, b) \equiv$ "a es hermano de b"
- R es asimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es antisimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo: $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es transitiva si $\forall a, b, c | a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo: $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ "a divide a b"

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}, \leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}, \geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}, \ldots$).
  Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es reflexiva si $\forall a | a \in A : aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es irreflexiva si $\forall a | a \in A : \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es simétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$. Por ejemplo: $hermano : Persona \leftrightarrow Persona$ tal que $hermano(a, b) \equiv$ "a es hermano de b"
- R es asimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es antisimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo: $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es transitiva si $\forall a, b, c | a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo: $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ "a divide a b"

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}, \leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}, \geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}, \ldots$).
  Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es reflexiva si $\forall a | a \in A : aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es irreflexiva si $\forall a | a \in A : \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es simétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$. Por ejemplo: $hermano : Persona \leftrightarrow Persona$ tal que $hermano(a, b) \equiv$ "a es hermano de b"
- R es asimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es antisimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo: $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es transitiva si $\forall a, b, c | a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo: $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ "a divide a b"

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (1)

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}, \leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}, \geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}, \ldots$).
  Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es reflexiva si $\forall a | a \in A : aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es irreflexiva si $\forall a | a \in A : \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es simétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$. Por ejemplo: $hermano : Persona \leftrightarrow Persona$ tal que $hermano(a, b) \equiv$ "a es hermano de b"
- R es asimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es antisimétrica si $\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo: $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es transitiva si $\forall a, b, c | a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo: $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ "a divide a b"

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que
$$(a, a) \in I$$
y
$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$
Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que
$$(a, a) \in I$$
y
$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$
Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

  y

$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$

  Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

  y

$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$

  Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que
$$(a, a) \in I$$
  y
$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$
  Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva($\forall a | a \in A : aRa$) si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva($\forall a | a \in A : \neg aRa$) si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$) si $R = R^T$
- R es asimétrica($\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$) si
- R es antisimétrica ($\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$)si
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que
$$(a, a) \in I$$
y
$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$
Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si $R = R^T$
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

  y

$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$

  Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si $R = R^T$
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

  y

$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$

  Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:

- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si $R = R^T$
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que
$$(a, a) \in I$$
y
$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$
Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si $R = R^T$
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si $R \cap R^T \subseteq I$
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

$$(a, a) \in I$$

  y

$$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$

  Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si $R = R^T$
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si $R \cap R^T \subseteq I$
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

  $$(a, a) \in I$$

  y

  $$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$

  Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si $R = R^T$
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si $R \cap R^T \subseteq I$
- Socrative

Propiedades de las relaciones en $A \leftrightarrow A$ (2)

- Sea $I : A \leftrightarrow A$ tal que

  $$(a, a) \in I$$

  y

  $$(a, b) \notin I, \text{si } a \neq b$$

  Sea $R : A \leftrightarrow A$; las propiedades mencionadas se pueden expresar en términos de conjuntos así:
- R es reflexiva$(\forall a | a \in A : aRa)$ si $I \subseteq R$
- R es irreflexiva$(\forall a | a \in A : \neg aRa)$ si $I \cap R = \emptyset$
- R es simétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa)$ si $R = R^T$
- R es asimétrica$(\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa)$ si $R \cap R^T = \emptyset$
- R es antisimétrica $(\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b)$si $R \cap R^T \subseteq I$
- Socrative

Plan

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}$,
  $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
  $R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$
  $R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$
  $R_1 \setminus R_2 = \{(2,2),(3,3)\}$
  $R_2 \setminus R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UV y B las asignaturas de la UV. Sea $R_1 = \{(a,b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a,b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$ ¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \setminus R_2, R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$,
  $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
  $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
  $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UV y B las asignaturas de la UV. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$ ¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \setminus R_2, R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}$,
  $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
  $R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$
  $R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$
  $R_1 \setminus R_2 = \{(2,2),(3,3)\}$
  $R_2 \setminus R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UV y B las asignaturas de la UV. Sea $R_1 = \{(a,b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a,b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
  ¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$,
  $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
  $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
  $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UV y B las asignaturas de la UV. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$ ¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \setminus R_2, R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$,
  $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
  $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
  $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UV y B las asignaturas de la UV. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
  ¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \setminus R_2, R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$,
  $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
  $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
  $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UV y B las asignaturas de la UV. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
  ¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \setminus R_2, R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: unión, intersección, diferencia, complemento

- Como una relación es un conjunto, se pueden usar las operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento de relaciones $A \leftrightarrow B$.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$,
  $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  $R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
  $R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$
  $R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
  $R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
- Sea A el conjunto de estudiantes de UV y B las asignaturas de la UV. Sea $R_1 = \{(a, b) : a \text{ está inscrito en } b\}$ y $R_2 = \{(a, b) : a \text{ requiere } b \text{ para graduarse}\}$
  ¿Cómo interpretar $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \setminus R_2, R_2 \setminus R_1$?

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden componer relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la composición de R con S, como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \land c \in C \land \exists b | b \in B : aRb \land bSc\}$$

Nótese que es la composición de R con S pero se escribe $S \circ R$

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a \ S \circ R \ c \equiv \exists b | b \in B : aRb \land bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{ \qquad \}$$

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden componer relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la composición de R con S, como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

Nótese que es la composición de R con S pero se escribe $S \circ R$

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a \ S \circ R \ c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{ \qquad \}$$

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden componer relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la composición de R con S, como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

  Nótese que es la composición de R con S pero se escribe $S \circ R$

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a \; S \circ R \; c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
  $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{ \qquad \}$$

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden componer relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la composición de R con S, como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

  Nótese que es la composición de R con S pero se escribe $S \circ R$

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a\ S \circ R\ c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \}$$

Operaciones: la composición (1)

- También se pueden componer relaciones. Dados $R : A \leftrightarrow B, S : B \leftrightarrow C$, se define la composición de R con S, como la relación $S \circ R : A \leftrightarrow C$ tal que:

$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

  Nótese que es la composición de R con S pero se escribe $S \circ R$

- Se tiene entonces que dados $a \in A, c \in C$:

$$a \ S \circ R \ c \equiv \exists b | b \in B : aRb \wedge bSc$$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}, R : A \leftrightarrow B, s : B \leftrightarrow C$ tales que
$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}, S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a,b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a,b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a,c) \in Padre \circ Padre \equiv \exists b \mid Padre(a,b) \wedge Padre(b,c) \equiv Abuelo(a,c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?

- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \exists b \mid Padre(a, b) \wedge Padre(b, c)$ [illegible]
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \exists b | : Padre(a, b) \wedge Padre(b, c) \equiv Abuelo(a, c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \ \exists b| : Padre(a, b) \wedge Padre(b, c) \ \equiv Abuelo(a, c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a, b) \wedge Padre(b, c) \equiv Abuelo(a, c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
  $(a, c) \in Abuelo \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a, b) \wedge Abuelo(b, c) \equiv Bisabuelo(a, c)$
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \ \exists b| : Padre(a, b) \wedge Padre(b, c) \ \equiv Abuelo(a, c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
  $(a, c) \in Abuelo \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a, b) \wedge Abuelo(b, c) \ \equiv Bisabuelo(a, c)$
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a,b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a,b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a,c) \in Padre \circ Padre \equiv \ \exists b| : Padre(a,b) \wedge Padre(b,c) \ \equiv Abuelo(a,c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
  $(a,c) \in Abuelo \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a,b) \wedge Abuelo(b,c) \ \equiv Bisabuelo(a,c)$
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \ \exists b| : Padre(a, b) \wedge Padre(b, c) \ \equiv Abuelo(a, c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
  $(a, c) \in Abuelo \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a, b) \wedge Abuelo(b, c) \ \equiv Bisabuelo(a, c)$
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a, b) \wedge Padre(b, c) \equiv Abuelo(a, c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
  $(a, c) \in Abuelo \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a, b) \wedge Abuelo(b, c) \equiv Bisabuelo(a, c)$
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$
  $Padre^2 = Abuelo$ y $Padre^3 = Abuelo \circ Padre = Bisabuelo$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \ \exists b| : Padre(a, b) \wedge Padre(b, c) \ \equiv Abuelo(a, c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
  $(a, c) \in Abuelo \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a, b) \wedge Abuelo(b, c) \ \equiv Bisabuelo(a, c)$
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$
  $Padre^2 = Abuelo$ y $Padre^3 = Abuelo \circ Padre = Bisabuelo$

Operaciones: la composición (2)

- Sea *Padre* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Padre(a, b) \equiv a \text{ es padre de } b$$

.

- Sea *Abuelo* la relación sobre el conjunto de las *Personas* tal que:

$$Abuelo(a, b) \equiv a \text{ es abuelo de } b$$

.

- ¿Qué relación es $Padre \circ Padre$?
  $(a, c) \in Padre \circ Padre \equiv \ \exists b| : Padre(a, b) \wedge Padre(b, c) \ \equiv Abuelo(a, c)$
- ¿Qué relación es $Abuelo \circ Padre$?
  $(a, c) \in Abuelo \circ Padre \equiv \exists b| : Padre(a, b) \wedge Abuelo(b, c) \ \equiv Bisabuelo(a, c)$
- Se denotará $R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R^2 \circ R, \ldots, R^n = R^{n-1} \circ R$
  $Padre^2 = Abuelo$ y $Padre^3 = Abuelo \circ Padre = Bisabuelo$

Composición y operaciones de conjuntos

Los siguientes teoremas se pueden demostrar a partir de las definiciones:

- Asociatividad-$\circ$:
$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$
- Distributividad-$\circ/\cup$:
$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$
$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$
- Semidistributividad-$\circ/\cap$:
$$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$$
$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

Composición y operaciones de conjuntos

Los siguientes teoremas se pueden demostrar a partir de las definiciones:

- Asociatividad-$\circ$:

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

- Distributividad-$\circ/\cup$:

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

- Semidistributividad-$\circ/\cap$:

$$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

Composición y operaciones de conjuntos

Los siguientes teoremas se pueden demostrar a partir de las definiciones:

- Asociatividad-$\circ$:

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

- Distributividad-$\circ/\cup$:

$$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

- Semidistributividad-$\circ/\cap$:

$$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$$

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

Plan

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

  $$\rho(R) = \{ \quad \}$$

  En general, $\rho(R) = I \cup R$
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{ \qquad \}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{ \qquad \}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

  En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. R es simétrica?, cuál es la clausura simétrica de R, $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{ \quad \}$$

  En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

  En general, $\rho(R) = I \cup R$
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. R es simétrica?, cuál es la clausura simétrica de R, $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{ \qquad \}$$

  En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

  En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. R es simétrica?, cuál es la clausura simétrica de R, $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{ \quad \}$$

  En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

  $$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

  En general, $\rho(R) = I \cup R$
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. R es simétrica?, cuál es la clausura simétrica de R, $\sigma(R)$?

  $$\sigma(R) = \{ \qquad \}$$

  En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

  En general, $\rho(R) = I \cup R$
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. R es simétrica?, cuál es la clausura simétrica de R, $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 3), (2, 1)\}$$

  En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (1)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. R es reflexiva?, cuál es la clausura reflexiva de R, $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

  En general, $\rho(R) = I \cup R$
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. R es simétrica?, cuál es la clausura simétrica de R, $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 3), (2, 1)\}$$

  En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. R es transitiva?, Cuál es la clausura transitiva de R, $\tau(R)$?

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. R es transitiva?, Cuál es la clausura transitiva de R, $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{ \qquad \}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup |i > 0 : R^i) = R^+$
Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup |i \geq 0 : R^i) = R^*$
Socrative

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. R es transitiva?, Cuál es la clausura transitiva de R, $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{ \qquad \}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup | i > 0 : R^i) = R^+$
Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup | i \geq 0 : R^i) = R^*$
Socrative

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)\}$. R es transitiva?, Cuál es la clausura transitiva de R, $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup |i > 0 : R^i) = R^+$
Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup |i \geq 0 : R^i) = R^*$
Socrative

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. R es transitiva?, Cuál es la clausura transitiva de R, $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2),(1,2),(2,3),(2,4),(3,1),(1,1),(2,2),(3,3),(3,4)\}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup |i > 0 : R^i) = R^+$
Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup |i \geq 0 : R^i) = R^*$
Socrative

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. R es transitiva?, Cuál es la clausura transitiva de R, $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup |i > 0 : R^i) = R^+$
Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup |i \geq 0 : R^i) = R^*$
Socrative

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. R es transitiva?, Cuál es la clausura transitiva de R, $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup |i > 0 : R^i) = R^+$
Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup |i \geq 0 : R^i) = R^*$
Socrative

Clausuras (2)

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la relación más pequeña posible que cumpla una propiedad (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R.

- La Clausura-ϕ de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R.
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. R es transitiva?, Cuál es la clausura transitiva de R, $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2),(1,2),(2,3),(2,4),(3,1),(1,1),(2,2),(3,3),(3,4)\}$$

En general, $\tau(R) = (\bigcup | i > 0 : R^i) = R^+$
Y, la clausura transitiva-reflexiva $\sigma - \tau(R) = (\bigcup | i \geq 0 : R^i) = R^*$
Socrative

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
  $Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
  $\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
  O sea,

$$Hermano = Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
  $Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
  $\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
  O sea,

$$Hermano = Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
  $Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
  $\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
  O sea,

$$Hermano = Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
  $Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
  $\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
  O sea,

$$Hermano = Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
  $Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
  $\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
  O sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
$Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
$\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
$\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
$\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
O sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
  $Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
  $\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
  O sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Abuelo \equiv Padre \circ Padre$$

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
  $Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
  $\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
  O sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Abuelo \equiv Padre \circ Padre$$

Ejemplo

Suponga un conjunto de personas P y una relación $Hijo : P \leftrightarrow P$ tal que

$$Hijo(a, b) \equiv a \text{ es hijo de } b$$

- La relación $Padre : P \leftrightarrow P$ se puede definir como

$$Padre = Hijo^T$$

- La relación $Hermano : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?
  $Hermano(a, b) \equiv a \neq b \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo(b, p))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (\exists p| : Hijo(a, p) \wedge Hijo^T(p, b))$
  $\equiv Neq(a, b) \wedge (Hijo^T \circ Hijo)(a, b)$
  $\equiv (Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo))(a, b)$
  O sea,

$$Hermano \equiv Neq \cap (Hijo^T \circ Hijo)$$

- La relación $Abuelo : P \leftrightarrow P$ ¿cómo se podría definir?

$$Abuelo \equiv Padre \circ Padre$$

Plan

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a | b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

  - $[2]_{R_1} = \{ \qquad \}$, $[3]_{R_1} = \{ \qquad \}$
  - $[2]_{R_2} = \{ \qquad \}$, $[3]_{R_2} = \{ \qquad \}$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

  - $[2]_{R_1} = \{ \qquad \}$, $[3]_{R_1} = \{ \qquad \}$
  - $[2]_{R_2} = \{ \qquad \}$, $[3]_{R_2} = \{ \qquad \}$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

  - $[2]_{R_1} = \{ \quad \}$, $[3]_{R_1} = \{ \quad \}$
  - $[2]_{R_2} = \{ \quad \}$, $[3]_{R_2} = \{ \quad \}$

Relaciones de equivalencia

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de equivalencia si R es reflexiva, simétrica y transitiva. Video 2.5
- Si aRb y R es de equivalencia, se dice que a es equivalente a b y se escribe $a \sim b$
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia?
  - $R_1 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_1(a, b) \equiv (a - b)$ es par
  - $R_2 : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $R_2(a, b) \equiv a = b \vee a = -b$
  - $R_3 : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $R_3(a, b) \equiv a|b$
  - $R_4 : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R_4(a, b) \equiv |a - b| < 1$
- [Socrative]Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a en R, $[a]_R$ como

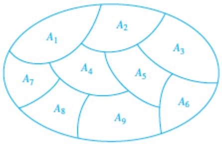
$$[a]_R = \{x : A | aRx\}$$

  - $[2]_{R_1} = \{ \qquad \}$, $[3]_{R_1} = \{ \qquad \}$
  - $[2]_{R_2} = \{ \qquad \}$, $[3]_{R_2} = \{ \qquad \}$

Clases de equivalencia y particiones

- Dado un conjunto A, una partición de A es un conjunto de subconjuntos de A sin elementos en común entre ellos y tal que la unión da todo A :
  $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, es una partición de A si
  - $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1..m$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
  - $(\bigcup i | 1 \leq i \leq m : A_i\} = A$

Gráficamente (tomado del libro de Rosen, pag. 613)

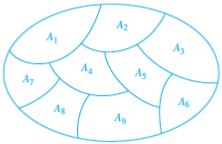


- Sea $R : A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R forman una partición de A.
- ¿Cuáles son la clases de equivalencia de R_1? ¿Forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Clases de equivalencia y particiones

- Dado un conjunto A, una partición de A es un conjunto de subconjuntos de A sin elementos en común entre ellos y tal que la unión da todo A : $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, es una partición de A si
  - $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1..m$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
  - $(\bigcup i | 1 \leq i \leq m : A_i\} = A$

Gráficamente (tomado del libro de Rosen, pag. 613)

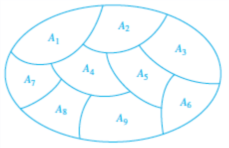


- Sea $R : A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R forman una partición de A.
- ¿Cuáles son la clases de equivalencia de R_1? ¿Forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Clases de equivalencia y particiones

- Dado un conjunto A, una partición de A es un conjunto de subconjuntos de A sin elementos en común entre ellos y tal que la unión da todo A :
$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, es una partición de A si
  - $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1..m$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
  - $(\bigcup i | 1 \leq i \leq m : A_i\} = A$

Gráficamente (tomado del libro de Rosen, pag. 613)

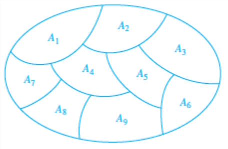


- Sea $R : A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R forman una partición de A.
- ¿Cuáles son la clases de equivalencia de R_1? ¿Forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Clases de equivalencia y particiones

- Dado un conjunto A, una partición de A es un conjunto de subconjuntos de A sin elementos en común entre ellos y tal que la unión da todo A : $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, es una partición de A si
  - $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1..m$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
  - $(\bigcup i | 1 \leq i \leq m : A_i\} = A$

Gráficamente (tomado del libro de Rosen, pag. 613)

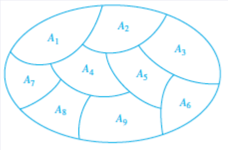


- Sea $R : A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R forman una partición de A.
- ¿Cuáles son la clases de equivalencia de R_1? ¿Forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Clases de equivalencia y particiones

- Dado un conjunto A, una partición de A es un conjunto de subconjuntos de A sin elementos en común entre ellos y tal que la unión da todo A :
$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, es una partición de A si
  - $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1..m$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
  - $(\bigcup i|1 \leq i \leq m : A_i\} = A$

Gráficamente (tomado del libro de Rosen, pag. 613)

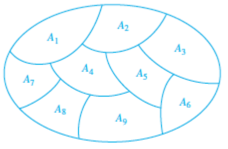


- Sea $R : A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R forman una partición de A.
- ¿Cuáles son la clases de equivalencia de R_1? ¿Forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Clases de equivalencia y particiones

- Dado un conjunto A, una partición de A es un conjunto de subconjuntos de A sin elementos en común entre ellos y tal que la unión da todo A : $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, es una partición de A si
  - $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1..m$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
  - $(\bigcup i | 1 \leq i \leq m : A_i\} = A$

Gráficamente (tomado del libro de Rosen, pag. 613)



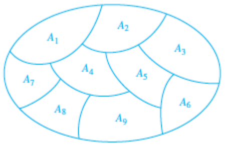
- Sea $R : A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R forman una partición de A.
- ¿Cuáles son la clases de equivalencia de R_1? ¿Forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Clases de equivalencia y particiones

- Dado un conjunto A, una partición de A es un conjunto de subconjuntos de A sin elementos en común entre ellos y tal que la unión da todo A :
  $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, es una partición de A si

  - $A_i \neq \emptyset$ para $i = 1..m$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$
  - $(\bigcup i | 1 \leq i \leq m : A_i\} = A$

Gráficamente (tomado del libro de Rosen, pag. 613)



- Sea $R : A \leftrightarrow A$ una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R forman una partición de A.
- ¿Cuáles son la clases de equivalencia de R_1? ¿Forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica?
   - ¿R es transitiva?
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4|-(n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva?
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4| - (n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva?
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4| - (n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \Longrightarrow$ $4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n-m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n-m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n-n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n-m) \equiv 4|-(n-m) \equiv 4|(m-n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n-m) \wedge 4|(m-p) \Longrightarrow 4|((n-m)+(m-p)) \equiv 4|(n-p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4| - (n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies$ $4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
   $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$
   $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - m\} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$
   $[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - m\} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$
   $[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - m\} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m) \text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv \mathit{true}$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4| - (n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies 4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
   $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4| - n\} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8 \ldots\}$
   $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9 \ldots\}$
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4| - (n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies$ $4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
   $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4| - n\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8 \dots\}$
   $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9 \dots\}$
   $[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - n\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10 \dots\}$
   $[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - n\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11 \dots\}$
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n-m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n-m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n-n) \equiv 4|0 \equiv \mathit{true}$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n-m) \equiv 4|-(n-m) \equiv 4|(m-n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n-m) \wedge 4|(m-p) \implies 4|((n-m)+(m-p)) \equiv 4|(n-p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
   $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8\ldots\}$
   $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1-n\} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9\ldots\}$
   $[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2-n\} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10\ldots\}$
   $[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3-n\} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11\ldots\}$
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n-m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n-m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n-n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n-m) \equiv 4|-(n-m) \equiv 4|(m-n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n-m) \wedge 4|(m-p) \implies 4|((n-m)+(m-p)) \equiv 4|(n-p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
   $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\ldots,-8,-4,0,4,8\ldots\}$
   $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1-n\} = \{\ldots,-7,-3,1,5,9\ldots\}$
   $[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2-n\} = \{\ldots,-6,-2,2,6,10\ldots\}$
   $[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3-n\} = \{\ldots,-5,-1,3,7,11\ldots\}$
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n - m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n - m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n - n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n - m) \equiv 4| - (n - m) \equiv 4|(m - n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n - m) \wedge 4|(m - p) \implies$ $4|((n - m) + (m - p)) \equiv 4|(n - p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
   $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4| - n\} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8 \ldots\}$
   $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1 - n\} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9 \ldots\}$
   $[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2 - n\} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10 \ldots\}$
   $[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3 - n\} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11 \ldots\}$
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n-m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n-m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n-n) \equiv 4|0 \equiv true$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n-m) \equiv 4|-(n-m) \equiv 4|(m-n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n-m) \wedge 4|(m-p) \implies$ $4|((n-m)+(m-p)) \equiv 4|(n-p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
   $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8\ldots\}$
   $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1-n\} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9\ldots\}$
   $[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2-n\} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10\ldots\}$
   $[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3-n\} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11\ldots\}$
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Ejercicio (Video 2.6)

Sea $R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ definida así:

$$nRm \equiv (n-m)\text{es múltiplo de } 4 \equiv 4|(n-m)$$

1. Probar que R es una relación de equivalencia
   - ¿ R es reflexiva? $nRn \equiv 4|(n-n) \equiv 4|0 \equiv \mathit{true}$
   - ¿ R es simétrica? $nRm \equiv 4|(n-m) \equiv 4|-(n-m) \equiv 4|(m-n) \equiv mRn$
   - ¿R es transitiva? $nRm \wedge mRp \equiv 4|(n-m) \wedge 4|(m-p) \implies$ $4|((n-m)+(m-p)) \equiv 4|(n-p) \equiv nRp$
2. Determinar todas las clases de equivalencia de R. ¿Cuántas hay?
   $[0] = \{n \in \mathbb{Z} : 0Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|-n\} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8\ldots\}$
   $[1] = \{n \in \mathbb{Z} : 1Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|1-n\} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9\ldots\}$
   $[2] = \{n \in \mathbb{Z} : 2Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|2-n\} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10\ldots\}$
   $[3] = \{n \in \mathbb{Z} : 3Rn\} = \{n \in \mathbb{Z} : 4|3-n\} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11\ldots\}$
3. ¿Las clases de equivalencia de R forman una partición de $\mathbb{Z}$?

Plan

1. Motivación - Definiciones
2. Relaciones binarias
    - Definiciones
    - Representaciones
    - Propiedades
    - Operaciones de relaciones
    - Clausuras
3. Tipos de relaciones
    - Relaciones de equivalencia
    - Relaciones de orden

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - R : *Personas* $\leftrightarrow$ *Personas* tal que $R(p, q) \equiv$ p es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - R : Personas $\leftrightarrow$ Personas tal que $R(p, q)$

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $R : Personas \leftrightarrow Personas$ tal que $R(p, q) \equiv$ p es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $R : Personas \leftrightarrow Personas$ tal que $R(p, q) \equiv$ p es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $R : Personas \leftrightarrow Personas$ tal que $R(p, q) \equiv$ p es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $R : Personas \leftrightarrow Personas$ tal que $R(p, q) \equiv$ p es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $R : Personas \leftrightarrow Personas$ tal que $R(p, q) \equiv \; p$ es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\mid : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $R : Personas \leftrightarrow Personas$ tal que $R(p, q) \equiv \ p$ es mayor que q

Relaciones de orden

- Una relación $R : A \leftrightarrow A$ es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto A con una relación de orden parcial R se llama un conjunto parcialmente ordenado y se denota (A, R)
- Usualmente, las relaciones de orden parcial se denotan con el símbolo $\preceq$ o similar.
- Si R es irreflexiva y transitiva se dice que es una relación de orden estricto.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden parcial o estricto?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $\subset : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$
  - $R : Personas \leftrightarrow Personas$ tal que $R(p, q) \equiv\ p$ es mayor que q

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
  - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $|: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \lor b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
  - $\leq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq : \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
  - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
  - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \lor b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
  - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$

Orden total

- Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Dados $a, b \in A$ se dice que a y b son comparables si $a \preceq b \vee b \preceq a$.
- Considere el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$.
  ¿3 y 9 son comparables?
  ¿5 y 7 son comparables?
- Si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que cada par de elementos es comparable, entonces $(A, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Y se dice que $\preceq$ es un orden total.
- [Socrative]¿Cuáles de las siguientes relaciones son de orden total?
  - $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $\geq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
  - $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
  - $\subseteq: \mathcal{P}(U) \leftrightarrow \mathcal{P}(U)$