Existen ciertos límites que no se pueden calcular, usando las propiedades de los límites mencionadas antes.

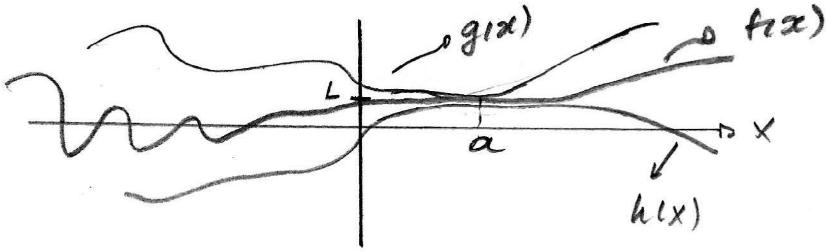
Ej: $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Este límite se puede calcular usando el siguiente teorema.

TEOREMA DE LA PRENSA (o del emparedado)

Sean f, g, h funciones tales que
$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, para todo x cercano al número a.

Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.



Para hallar $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ se buscan dos funciones g y h tales que $h(x) \leq x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq g(x)$ y las funciones g y h tengan el mismo límite, cuando $x \to 0$.

Veamos: $\quad -1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1 \quad , \quad x \neq 0.$

Multiplicamos por x a ambos lados de la expresión. Como x puede ser positivo o negativo cuando x tiende a cero, se buscan límites laterales.

Sea $x<0$ entonces multiplicando por x en todos los términos de la desigualdad $-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1$ se tiene:

$$-x \geq x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \geq x \quad (\text{pues } x<0)$$

luego tomando límite con x tendiendo a cero por izquierda, se tiene:

$$\lim_{x\to 0^-} -x \geq \lim_{x\to 0^-} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \geq \lim_{x\to 0^-} x$$

$$0 \geq \lim_{x\to 0^-} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \geq 0.$$

luego por T. de la prensa, $\lim\limits_{x\to 0^-} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$

Si $x>0$, multiplicando por x en $-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1$ tenemos $-x \leq x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x$, luego tomando límite lateral,

$$\lim_{x\to 0^+} -x \leq \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0^+} x$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 0$$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$. por T. del emparedado

Como los límites laterales son iguales,

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$