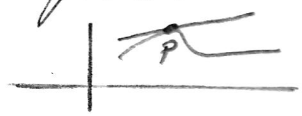
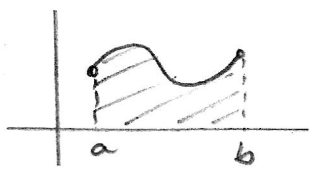
Cálculo

Existen dos problemas importantes de los cuales se ocupa el cálculo. Estos son:

Prob 1: Dada una función y un punto sobre su gráfica se quiere determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto indicado. De este problema se encarga el cálculo diferencial.



Prob 2: Dada la gráfica de una función, el segundo problema consiste en determinar el área bajo la gráfica de la función, en el Intervalo [a,b].



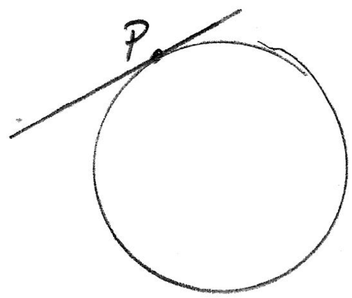
De este segundo problema se encarga el cálculo Integral.

Estudiaremos el primer problema.

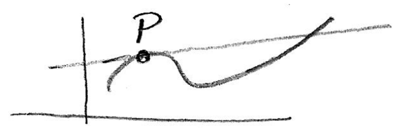
Consideramos una función f y P un punto sobre su gráfica. Se quiere determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto P se define como la recta que pasa por P en dirección de

la curva.
En una circunferencia la recta tangente a la gráfica en un punto P, es la recta que toca la circunferencia únicamente en el punto P.

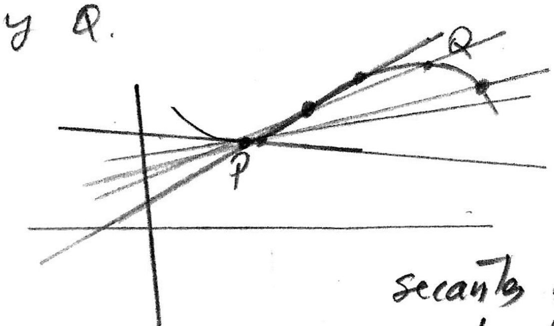


Esta definición no es válida en general, es decir, en cualquier curva.



Veremos entonces cómo se puede definir.

La dirección de una recta la dá la pendiente de la recta, pero para hallarla necesitamos dos puntos y sólo contamos con uno $P(x, f(x))$, que es el punto de tangencia.
Para solucionar este inconveniente, tomamos otro punto $Q(x+h, f(x+h))$ sobre la gráfica de f (punto móvil).
Nos aproximaremos a la recta tangente en P, por medio de rectas secantes a la curva que unan los puntos P y Q.



Si el punto Q se aproxima al punto P, las rectas secantes l_{PQ} se aproximan a la recta tangente en P, l_P, luego las pendientes de las secantes m_{PQ}, se aproximan a la pendiente de la tangente m_P. Así, se tiene

si $Q \to P$ entonces $m_{PQ} \to m_P$.

Ahora, dos puntos son próximos si sus coordenadas son próximas, en consecuencia:

$Q \to P$ si $x+h \to x$. Pero $x+h \to x$ si $h \to 0$. Por lo tanto, si $h \to 0$, $Q \to P$ y entonces $m_{PQ} \to m_P$.

Así, se tiene

$$m_P = \lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

De esta manera, se puede definir recta tangente

<u>DEFINICIÓN</u>: La recta tangente a la gráfica de una función f en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P y tiene pendiente

$$m_P = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ej: Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2+1$ en el punto $P(1,2)$.