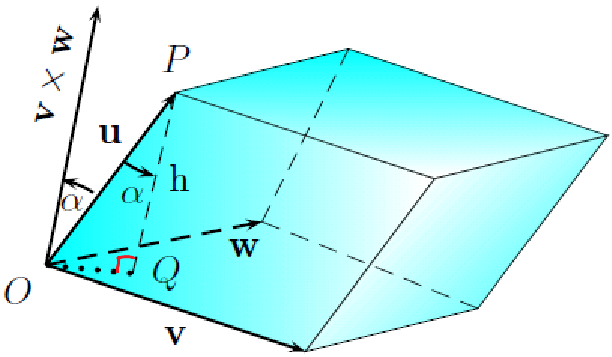
Corolario [*Volumen de un paralelepípedo*].
El volumen del paralelepípedo cuyas aristas no paralelas están dadas por los vectores **u**, **v** y **w** de R^3 está dado por el valor absoluto del *producto mixto* de ellos, es decir, por $|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$.



$V = |u\cdot(v\times w)|.$

Observe que $\cos\alpha = \dfrac{h}{\|u\|}$ α es el ángulo entre u y $v\times w$.

$h = \|u\|\,|\cos\alpha|.$

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base})\cdot(\text{altura}) \\ &= \|v\times w\|\,h. \\ &= \|v\times w\|\,\|u\|\,|\cos\alpha| \\ &= \big|\,\|v\times w\|\,\|u\|\cos\alpha\,\big| \\ &= |u\cdot(v\times w)| \end{aligned}$$

$\cos\alpha = \dfrac{(v\times w)\cdot u}{\|v\times w\|\,\|u\|}.$

$u\cdot(v\times w) = \|v\times w\|\,\|u\|\cos\alpha.$

<u>Matrices</u>

Definición [*Matriz*]. Una *matriz* es un arreglo rectangular de números reales, llamados *componentes* o *elementos* de la matriz, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

El tamaño de una matriz es $m \times n$, si tiene m filas y n columnas.
La *diagonal de una matriz* está formada por las componentes a_{ii}.

La componente a_{ij} se encuentra en la fila i y columna j de la matriz A.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{Columna} & & \phantom{a_{1n}} \\ & & j & & \end{array} \\ A = & \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \text{Fila } i \\ & \begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & & \mathbf{a}_j & & \mathbf{a}_n \end{array} \end{array}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tamaño 3×3.
Diagonal (1, 2, 1)

$a_{21} = 5$
$a_{32} = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & \sqrt{2} & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Tamaño (orden): 2 × 4.
Diagonal (1/3, $\sqrt{2}$)

$a_{13} = 4$
$a_{22} = \sqrt{2}$

$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tamaño: 5 × 1.
Vector columna.
Diagonal (4).

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Tamaño (orden): 1 × 3

$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Tamaño (orden): 1×3
Vector fila.

Tipos de matrices

- Matriz triangular inferior: $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
  Las componentes arriba de la diagonal son nulas.
- Matriz triangular superior: $a_{ij} = 0$ si $i > j$
  Las componentes abajo de la diagonal son nulas.

Para matrices cuadradas $(m = n)$.

- Matriz diagonal: $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- Matriz escalar: $a_{ii} = \alpha$ para cada i, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- Matriz identidad: $a_{ii} = 1$ para cada i, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- Matriz cero (0): todas sus componentes son nulas.

Ejemplos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Triangular superior

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C	D	I
Triangular inferior	Triangular inferior	Triangular inferior
Triangular superior	Triangular superior	Triangular superior
Diagonal	Diagonal escalar	Diagonal escalar

Nota: Dos matrices son iguales si todas sus componentes respectivas son iguales.

Suma y producto por escalar de matrices

Definición [*Suma de matrices*]. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

se define la suma de A y B por

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definición [*Producto por escalar de matrices*]. Dado el escalar $\lambda \in R$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

definimos el producto de A por el escalar λ por

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

calcular: $A+B$ y $-3B$.

Solución:

- $$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2+1 & -1+(-3) \\ 4+5 & 3+2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

- $$-3B = -3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(1) & -3(-3) \\ -3(5) & -3(2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -15 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Para las matrices A y B, determine (a) $3A$, (b) $-B$ y (c) $3A - B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

a. $$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(-3) & 3(0) & 3(-1) \\ 3(2) & 3(1) & 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b. $$-B = (-1)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

c. $$3A - B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Notación:
- $(-1)A = -A$
- $A + (-1)B = A - B$.

<u>Propiedades</u>

Teorema [*Propiedades algebraicas de la suma y la multiplicación por escalar de matrices*]. Sean A, B y C matrices de tamaño $m \times n$ y sean α y β dos números reales.

1. $A + B$ es también una matriz $m \times n$.
2. $A + B = B + A$.
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
4. Existe una única matriz Z tal que $A + Z = Z + A = A \quad (Z = O)$.
5. Para cada matriz A, existe una única matriz P tal que $A+P = P+A = O \quad (P = -A)$.
6. λA es también una matriz $m \times n$.
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
9. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$.
10. $1A = A$.
11. $0A = O$.
12. $\alpha O = O$.
13. $\alpha A = O$, si y solo si, $\alpha = 0$ ó $A = O$.

Ejemplo. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determinar la matriz X tal que

$$3X - 2A + B = 4B$$

Restar B: $\quad 3X - 2A + \underbrace{B - B} = \underbrace{4B - B}$

$$3X - 2A = 3B.$$

Sumar $2A$: $\quad 3X - \underbrace{2A + 2A} = \underbrace{3B + 2A}$

$$3X = 3B + 2A.$$

Mult. por $1/3$: $\quad X = B + \frac{2}{3}A.$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\left(-2 \quad 3 \right. \quad , \quad \left(0 \quad -4 \right)$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ 2 & \\ -2/3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Producto de matrices

Definición [*Producto de matrices*]. Dadas las matrices A, de tamaño $m \times n$, y B, de tamaño $n \times k$, se define AB, el producto de A por $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_k]$, como la matriz de orden $m \times k$ dada por

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ \cdots \ A\mathbf{b}_k].$$

$$A_{m\times \underline{n}} \cdot B_{\underline{n}\times k} = (AB)_{m\times k}$$

igual.

Componentes c_{ij} del producto AB:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdot \cdot \cdot + a_{in}b_{nj}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$$

Ejemplo. Calcular el producto AB si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ \boxed{5 \quad 0} \end{pmatrix}_{3\times \underline{2}} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -3 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}} \\ -4 & \end{pmatrix}_{\underline{2}\times 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = -1(-3) + 3(-4) = -9$$
$$c_{12} = -1(2) + 3(1) = 1$$
$$c_{21} = 4(-3) + (-2)(-4) = -4$$
$$\vdots$$

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Notación: si A es una matriz cuadrada

$$AA = A^2$$

$$\underbrace{AA \cdots A}_{n\text{-veces}} = A^n.$$

Tarea: Estudiar ejemplo 8, pág. 148 texto guia.