Martha Quiroz
Univ del Valle

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Las funciones exponenciales y logarítmicas aparecen en modelos de situaciones reales.
Por ejemplo en problemas biológicos como crecimiento de bacterias, en general en crecimiento poblacional, en problemas económicos, problemas de Inversión., etc

Estudiaremos las funciones a partir de un problema económico.

FUNCIÓN EXPONENCIAL:

Suponga que cierta cantidad de dinero C se invierte a una tasa del $r\%$ anual, compuesto una vez al año ¿Cuánto dinero hay después de t años?

S// En primer lugar un interés compuesto significa que los intereses actúan sobre capital más intereses

Sea $C(t)$: Capital después de t años.

Al cabo de 1 año

$$C(1) = C + \frac{r}{100}C = C\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

Al cabo de 2 años

$$C(2) = C\left(1+\frac{r}{100}\right) + \frac{r}{100}C\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

$$C(2) = C\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right) = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

siguiendo el proceso, después de t años

$$C(t) = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t}$$

(cuando el interés se compone una vez al año)

Si el interés se compone
k veces al año, en el año hay k periodos con igual tasa de interés $\frac{r}{k}\%$. En t años hay kt. periodos por lo tanto el saldo después de t años es

$$C(t) = C\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kt}$$

Así, se tiene la siguiente definición

DEFINICIÓN: Si un capital de dinero C se invierte a un interés del r (en decimal) compuesto k veces al año, entonces el saldo después de t años es

$$B(t) = C\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}.$$

Si el interés se compone a cada momento, cada hora, cada minuto, cada segundo, en cada instante, es decir el número de periodos k es muy grande, $k \to \infty$, el saldo después de t años es

$$B(t) = \lim_{k\to\infty} C\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Para calcular este límite se hace un cambio de variable.

Sea $\frac{r}{k} = \frac{1}{n} \rightarrow k = nr$. Si $k \rightarrow \infty$ $n \rightarrow \infty$

Entonces $\lim_{k \to \infty} c\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = \lim_{n \to \infty} c\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(nr)t}$

$$= \lim_{n \to \infty} c\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

Se puede probar $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$

donde e es el número de Euler. $e = 2{,}7182\ldots$ Irracional Decimal infini

Entonces

$$B(t) = \lim_{n \to \infty} c\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{rt}$$

$$= c\left[\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

$$B(t) = ce^{rt}$$

por tanto se tiene la siguiente definición

DEFINICIÓN: Si se invierte una cierta cantidad de dinero c a una tasa del r compuesto continuamente, el saldo después de t años es

$$B(t) = ce^{rt}$$

La función que aparece en la expresión, e^x se llama función exponencial con base el número e.

En general se tiene:

DEFINICIÓN: Sea a un real positivo, $a \neq 1$.
La función $f(x) = a^x$ se llama función exponencial con base a. Tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $\mathbb{R}^+$.

Ejemplo: Sea $f(x) = 3^x$. Entonces:

$f(0) = 3^0 = 1$ $\quad$ $f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$f(1/2) = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ $\quad$ $f(3) = 3^3 = 27$.

Si x es racional, $a^x = a^{p/q} = (a^{1/q})^p$, $a > 0$.

↳ Raíz q-ésima.

Si x es irracional, se usan aproximaciones

Ej: $3^{\sqrt{2}} = ?$ $\quad$ $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ $\quad$ $1,\ 1.4,\ 1{,}41,\ 1.414\ldots$

Consideramos $3^{1{,}4},\ 3^{1{,}41},\ 3^{1{,}414}\ldots$

Entre mejor sea la aproximación de $\sqrt{2}$, mejor será la aproximación de $3^{\sqrt{2}}$.

Veamos que propiedades satisface a^x

Propiedades Sean a, b reales positivos $a, b \neq 1$.
x, y reales. Entonces:

i) $a^x a^y = a^{x+y}$

ii) $(a^x)^y = a^{xy}$

iii) $(ab)^x = a^x b^x$.

Usando estas propiedades se puede probar $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Como se comporta a^x ?

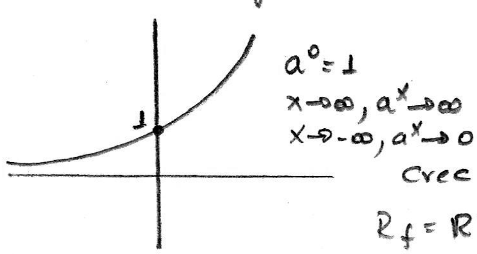
i) Sea $a>1$ Si x es grande, a^x es grande, es decir si $x \to \infty$, $a^x \to \infty$.
Si x es muy pequeño, $a^x \to 0$.
es decir, si $x \to -\infty$, $a^x \to 0$.

Además si $x<y \to a^x < a^y$. a^x es creciente.

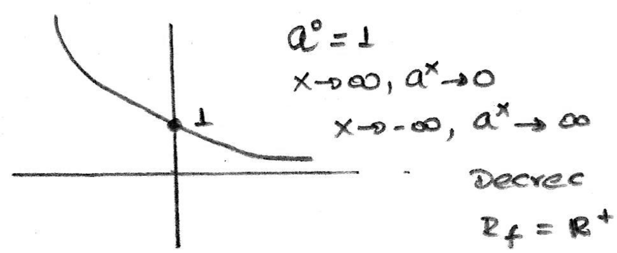
ii) Sea $0<a<1$.
Si $x \to \infty$, $a^x \to 0$
$x \to -\infty$, $a^x \to \infty$.

Si $x<y$ ent $a^x > a^y$. a^x es decreciente.

Veamos las gráficas



$a>1$



$0<a<1$

a^x es una función monótona, por tanto es inyectiva y en consecuencia invertible.

Función Logaritmo

Sea a un real positivo $a \neq 1$.
La función $g(x) = \log_a x$ se llama función logarítmica con base a. La expresión $\log_a x$ se lee logaritmo en base a de x

Se define como:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

$Dg = \mathbb{R}^+$, $Rg = \mathbb{R}$

Que es el logaritmo de un número? En palabras, es aquél valor al cuál debe elevarse la base, para que le dé el número.

Cuando la base es el número e (número de Euler) $e = 2{,}7182\ldots$ (infinito no periódico), el logaritmo se llama logaritmo natural o neperiano. Se escribe $\ln x$ en lugar de $\log_e x$. ($\ln x = \log_e x$).

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

Cuando la base es el número 10, el logaritmo se llama decimal o común. Se escribe $\log x$ en lugar de $\log_{10} x$.

$$\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x.$$

Ej: Calcule los siguientes logaritmos

$\log_4 64 = 3$ puesto que $4^3 = 64$

$\log_{1/2} 32 = \log_{1/2} 2^5 = \log_{1/2} (2^{-1})^{-5} = \log_{1/2} (1/2)^{-5} = -5$

$\log_{1/3} 1/9 = 2$ ya que $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\ln e = 1$ pues $e^1 = e$

$\log_7 1 = 0$ ya que $7^0 = 1$.

En general $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$

Así como la función exponencial satisface propiedades, la función logarítmica también.

Propiedades: Sean a, x, y reales positivos, $a \neq 1$.

i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\quad \neq (\log_a (x+y))$

ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\quad \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$

iii) $\log_a x^r = r \log_a x$, $r \in \mathbb{R}$ $\quad \neq (\log_a x)^r$

Veamos por ejemplo i) $\quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$

observe:
$$a^{\log_a xy} = xy \quad \text{pero } x = a^{\log_a x},\ y = a^{\log_a y}, \text{ luego}$$
$$a^{\log_a xy} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Como a^x es una función inyectiva, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Usando la monotonía de $f(x) = a^x$, se puede probar que $\log_a x$ satisface:

i) $a > 1$, $\quad x < y \to \log_a x < \log_a y$. $\quad$ ($\log_a x$ es creciente)

ii) $0 < a < 1$, $\quad x < y \to \log_a x > \log_a y$. $\quad$ ($\log_a x$ es decreciente).

Veamos que $f(x) = a^x$ $\quad g(x) = \log_a x$ son inversas entre sí.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x$. $\quad \forall x \in D_f = \mathbb{R}$

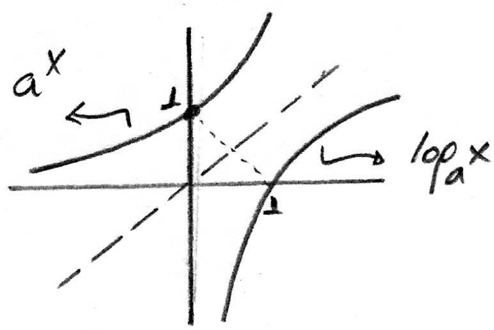
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x}$.

Supongamos $a^{\log_a x} = y \to$ por definición $a^x = y \leftrightarrow x = \log_a y$

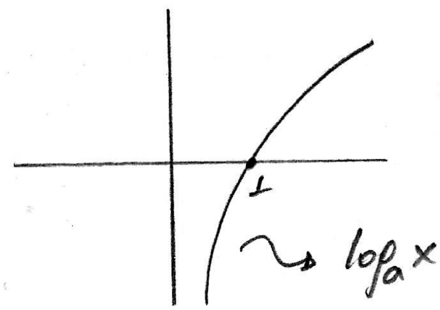
luego $a^{\log_a x} = y \leftrightarrow \log_a x = \log_a y$. Como $\log_a x$ es inyectivo, $x = y$. Por lo tanto $\quad a^{\log_a x} = y = x$, para todo $x \in D_g = \mathbb{R}^+$.

Así, $$a^{\log_a x} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$
$$\log_a a^x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

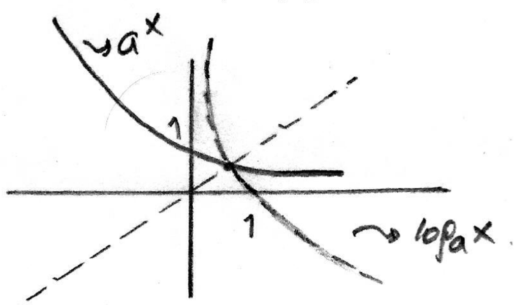
Veamos la gráfica de $g(x) = \log_a x$
Como $g(x)$ es la inversa de $f(x) = a^x$, construimos la gráfica de g reflejando la de $f(x) = a^x$ sobre la recta $x = y$.



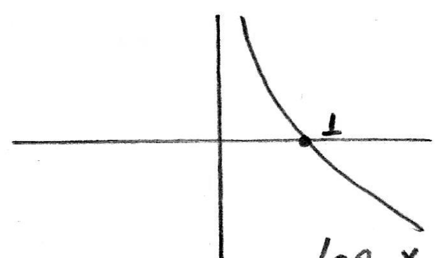
$a > 1$



$a > 1$



$0 < a < 1$



$\log_a x \quad 0 < a < 1$

Fórmula de Cambio de base

La siguiente fórmula permite cambiar la base de un logaritmo.

Sean a, b, x reales positivos, $a, b \neq 1$. Entonces
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

D/ $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$. Tomamos logaritmo a ambos lados
$$\log_b a^y = \log_b x \Rightarrow y \log_b a = \log_b x \Rightarrow y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$
es decir, $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$