

Matrices (continuación)

Propiedades algebraicas del producto de matrices

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$, α un número real cualquiera y B y C matrices tales que los productos indicados se pueden efectuar.

1. $(AB)C = A(BC)$.
2. $A(B + C) = AB + AC$.
3. $(A + B)C = AC + BC$.
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
5. Existe una única matriz P y una única matriz Q de orden n tales que $PA = AQ = A$ ($P = I_m$ y $Q = I_n$)
6. $O_{km}A = O_{kn}$ y $AO_{nk} = O_{mk}$.

Estas propiedades permiten simplificar cálculos.

- Para calcular $A^8 = (((((AA)A)A)A)A)A$ se requieren 7 productos. Usando asociativa solo hay que hacer 3 productos.

$$A^2 = AA \quad A^4 = A^2 A^2 \quad A^8 = A^4 A^4$$

$$A^8 = [(AA)(AA)][(AA)(AA)].$$

- Para calcular $A^4 \vec{x} = (AAAA)\vec{x} = [(AA)(AA)]\vec{x}$, es mejor escribir $A(A(A(A\vec{x})))$.

Propiedades (potencias de matrices).

Sea A, B matrices de tamaño $n \times n$ y $r, s \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

$$1. A^r A^s = A^{r+s}$$

$$2. (A^r)^s = A^{rs}$$

$$3. (AB)^r = A^r B^r \text{ si } A \text{ y } B \text{ commutan } (AB=BA).$$

Observación

- El producto de matrices no es commutativo.

1. AB puede estar definido pero BA no.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ está definido.}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ no está definido}$$

2. AB y BA pueden tener tamaños diferentes.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad (AB)_{2 \times 2}$$

$$(BA)_{3 \times 3}.$$

3. $AB \neq BA$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad AB \neq BA$$

- $AB = 0$ no implica que A o B sean la matriz cero.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $CA = CB$ no implica que $A = B$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $CA = CB$ pero $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$.

- $A^2 = I$ no implica que $A = \pm I$

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Matrices invertibles

Definición [Matriz invertible]. Se dice que la matriz A de tamaño $n \times n$ es *invertible*, si y solo si, existe una matriz B tal que

$$AB = BA = I.$$

A esta matriz B , la llamamos *inversa* de A .

Teorema [Unicidad de la inversa].

Si A es una matriz invertible, su inversa es única.

D/: Supong. que B y C son inversas de A . Entonces

$$AB = BA = I \quad \text{y} \quad AC = CA = I$$

Veamos que $B = C$.

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Así que $B = C$, lo que implica la unicidad de la inversa.

Ejemplo. Muestre que $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo. Muestre que $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución: Hay que verificar que $AB = I = BA$.

$$\cdot AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota: La inversa de una matriz A se denota por A^{-1} , si existe.

¿Cómo determinar si una matriz es invertible?

¿Es necesario calcular explícitamente A^{-1} ?

Observe que si $A_{n \times n}$ es invertible, existe una matriz $B = A^{-1} = [b_1 \ b_2 \dots \ b_n]$ tal que

$$AB = [\underline{Ab}_1 \ \underline{Ab}_2 \dots \ Ab_n] = [\underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \dots \ e_n] = I_n$$

La matriz A será invertible si los sistemas

$$Ab_1 = e_1 \quad Ab_2 = e_2 \quad \dots \quad Ab_n = e_n$$

tienen solución. Esto se garantiza si una matriz escalonada equivalente a A tiene n pivotes.

Cuando es necesario calcular A^{-1} , se puede escribir la M.A. conjunta de los sistemas anteriores

$$(A \mid e_1 \ e_2 \dots e_n) = (A \mid I_n)$$

y aplicar Gauss + sustitución hacia atrás (o Gauss - Jordan).

Ejm. Determinar si la siguiente matriz es invertible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: Solo se requiere determinar si una matriz escalonada equivalente a A tiene 3 pivotes.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 - \frac{5}{4}F_2 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{array} \right)$$

Luego, la inversa de A existe y, por tanto, A es invertible.

Ejercicio: Calcular A^{-1} en el ejemplo anterior.