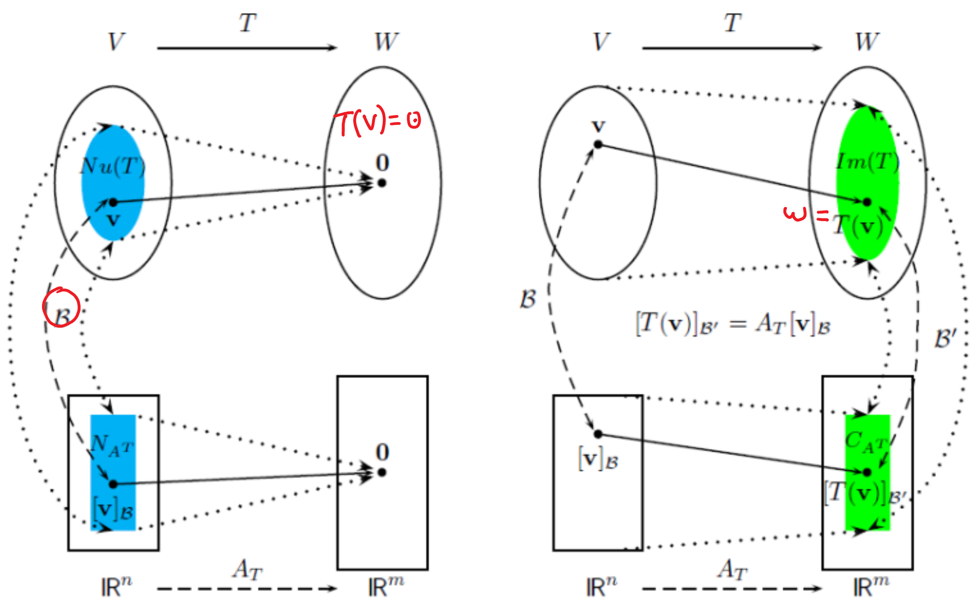
Clase 02-03-22

miércoles, 2 de marzo de 2022 11:40 a. m.

Matriz asociada a una transformación (continuación)

Teorema 6 [*Equivalencia entre los núcleos y las imágenes de una transformación lineal y los respectivos conjuntos de sus matrices asociadas*]
Dadas la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, con V y W espacios vectoriales de dimensión finita, y las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V y W, respectivamente, si A_T es la matriz asociada a la transformación respecto a las bases dadas, entonces

1. $\mathbf{v} \in Nu(T)$, si y sólo si, $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} \in N_{A_T}$ (Fig. 5.8-izquierda)
2. $\mathbf{w} \in Im(T)$, si y sólo si, $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} \in C_{A_T}$ (Fig. 5.8-derecha)



$[\omega]_{\mathcal{B}'} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$

Argumento:

1. $v \in Nu(T)$ sii $T(v) = 0 \in W$

sii $[T(v)]_{\mathcal{B}'} = 0$ $\qquad [T(v)]_{\mathcal{B}'} = A_T[v]_{\mathcal{B}}$.

sii $A_T[v]_{\mathcal{B}} = 0$

sii $[v]_{\mathcal{B}} \in N_{A_T}$.

2. $w \in Im(T)$ sii $T(v) = w$ para algun $v \in V$.

sii $[w]_{B'} = [T(v)]_{B'}$

$= A_T [v]_B$.

sii $[w]_{B'} \in C_{A_T}$ //

Ejemplo. Calcular $Im(T)$ y $Nu(T)$, usando la matriz asociada a T, para $T: P_2 \longrightarrow M_{2\times 2}$ tal que

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & b-c \\ c+a & a+c \end{pmatrix}.$$

Solución.

Sean $B = \{1, x, x^2\}$ base P_2.

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$ base $M_{2\times 2}$.

$$A_T \equiv [A_T]_{BB'} = \left([T(1)]_{B'} \quad [T(x)]_{B'} \quad [T(x^2)]_{B'} \right).$$

- $$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0, \delta = 1, \lambda = 1.$$

$$[T(1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x^2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Luego, $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ F. E. de A_T.

variable libre

$z = r$

$y - r = 0 \Rightarrow y = r$

$x + r = 0 \Rightarrow x = -r.$

$$N_{A_T} = \left\{ \begin{pmatrix} -r \\ r \\ r \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$C_{A_T} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base de } C_{A_T}.$$

Son l.i.

Luego, en $M_{2\times 2}$.

$$1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $Im(T) = \text{Gen}\{(1 \ \ 0), (1 \ \ 1)\}$

Entonces $Im(T) = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

y en P_2.

$$-1\ (1) + 1(x) + 1(x^2) = -1 + x + x^2.$$

Entonces $Nu(T) = Gen\left\{-1 + x + x^2\right\}$.