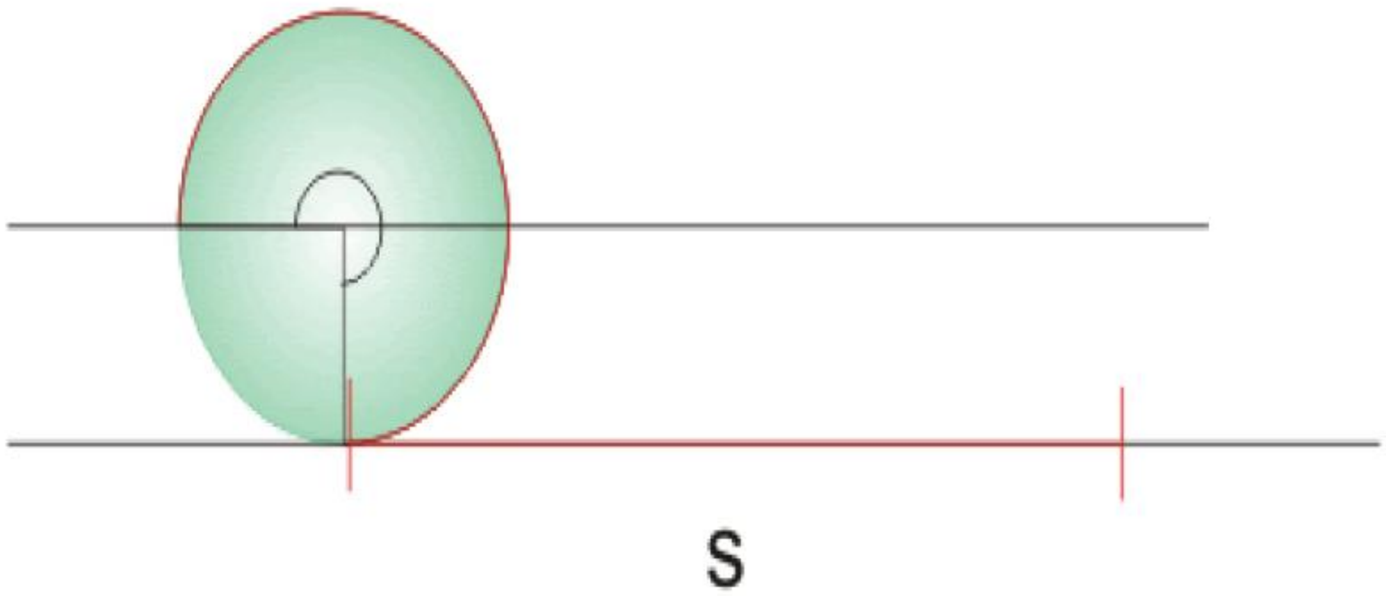
FISICA 1

Marisela Benitez Barahona

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del valle



Resumen

MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia es una medida de la resistencia del sistema a cambiar su rapidez angular. En el movimiento rotacional juega un papel similar a la masa en el movimiento de traslacional.

PARA UN SISTEMA DISCRETO DE PARTÍCULAS

No solo cuenta la masa de las partículas sino como están distribuidas alrededor del eje de giro.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \longrightarrow [I] = [Kg][m]^2$$

PARA UN SISTEMA CONTINUO DE PARTÍCULAS

Se puede calcular considerando que r_i es la distancia del elemento de masa Δm_i al eje de giro, al tomar el límite cuando $\Delta m_i \to 0$.

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \, \Delta m_i = \int r^2 \, dm$$

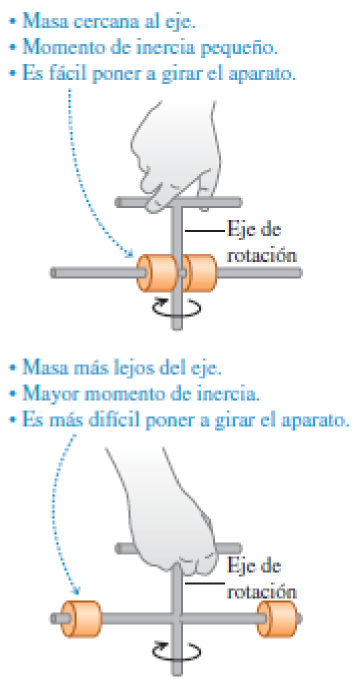
Objeto homogéneo

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \rho = \frac{dm}{dV}$$

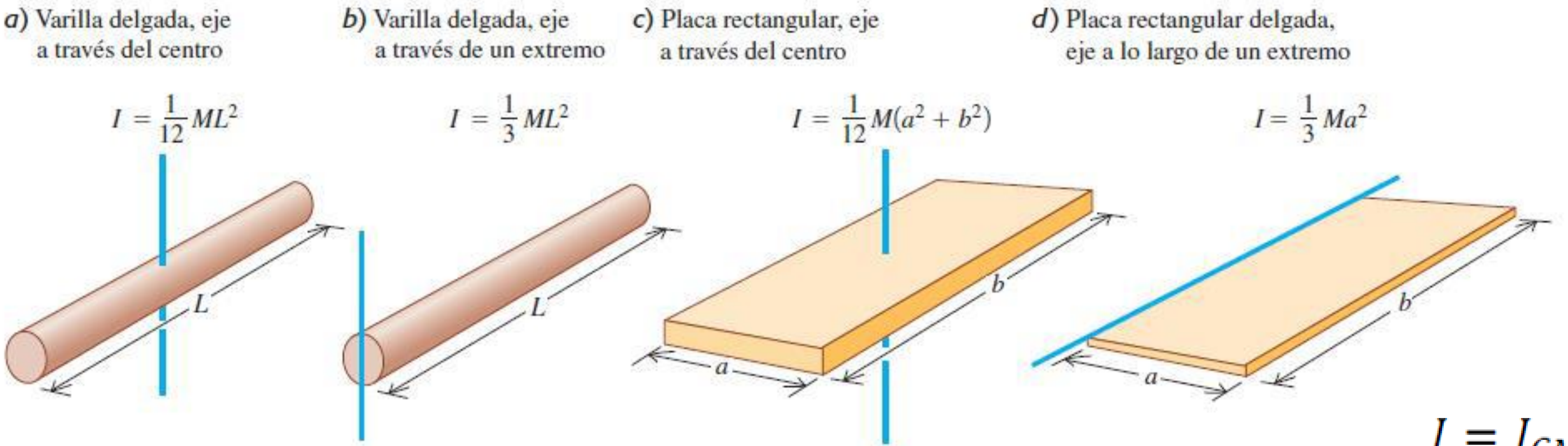
$$dm = \rho \, dV$$

$$I = \int \rho r^2 \, dV$$

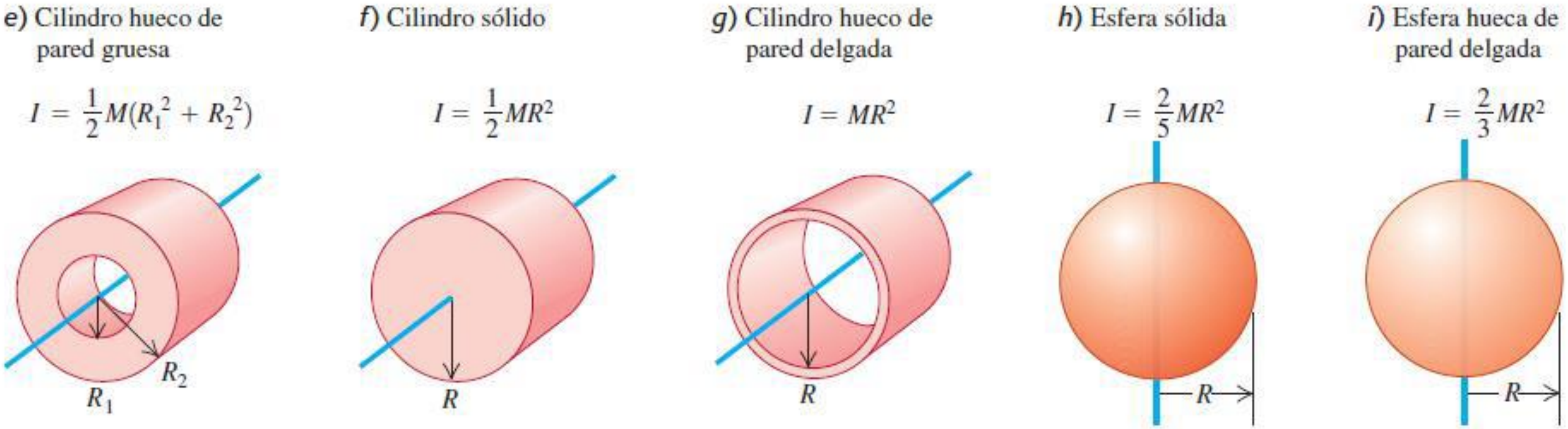
9.15 Aparato que gira libremente en torno a un eje vertical. El momento de inercia se puede variar fijando los dos cilindros de igual masa en diferentes posiciones en la varilla horizontal.



MOMENTO DE INERCIA DE OBJETOS SIMÉTRICOS



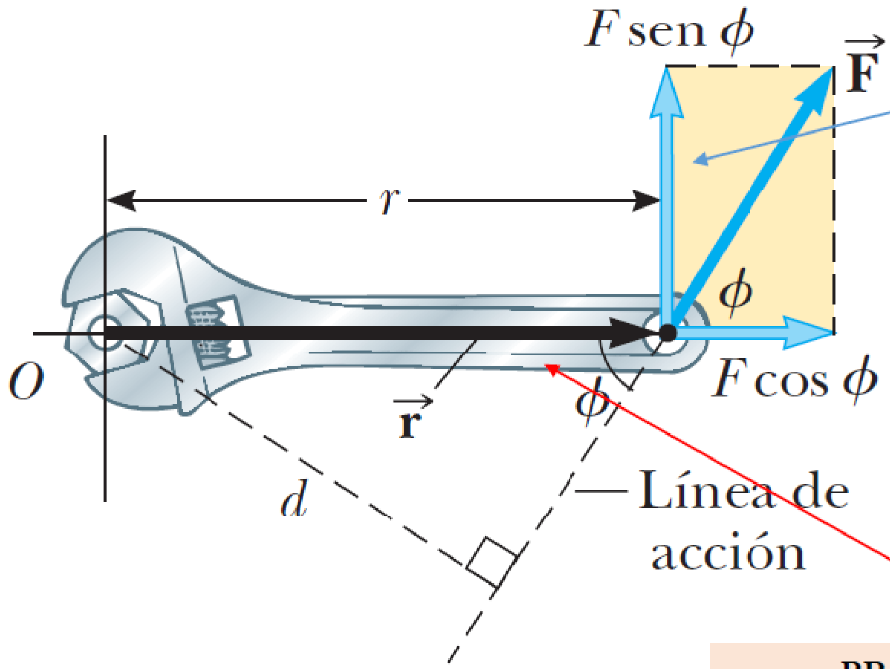
$$I = I_{CM} + MD^2$$



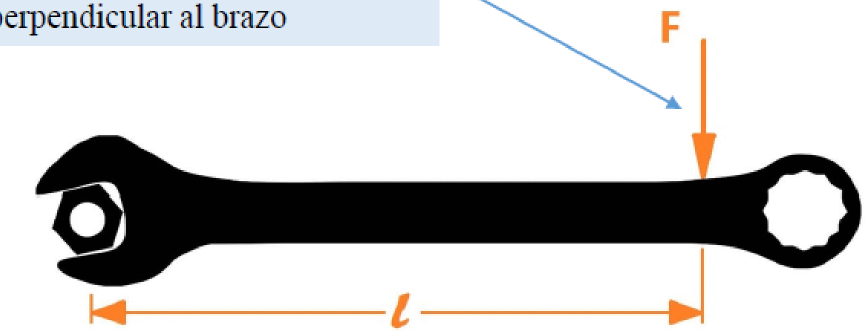
DEFINICIÓN DE TORQUE

Consideremos la llave de tuercas que gira alrededor del eje que pasa por O, el torque se define como el producto entre la fuerza que provoca la rotación y la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de F

$$\tau = Fr \sin\phi = Fd$$



FUERZA APLICADA
Fuerza que provoca la rotación, perpendicular al brazo

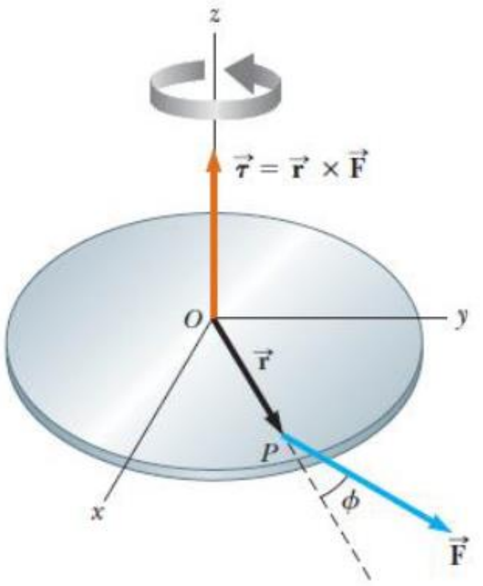


$$\tau = Fl$$

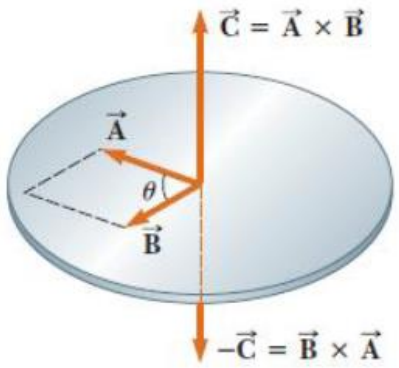
BRAZO DE LA PALANCA
Distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de la fuerza.

TORQUE COMO CANTIDAD VECTORIAL

$$\tau = \underbrace{Fr\sin\phi}_{\text{Definición del producto cruz}} = \vec{r}\times\vec{F}$$

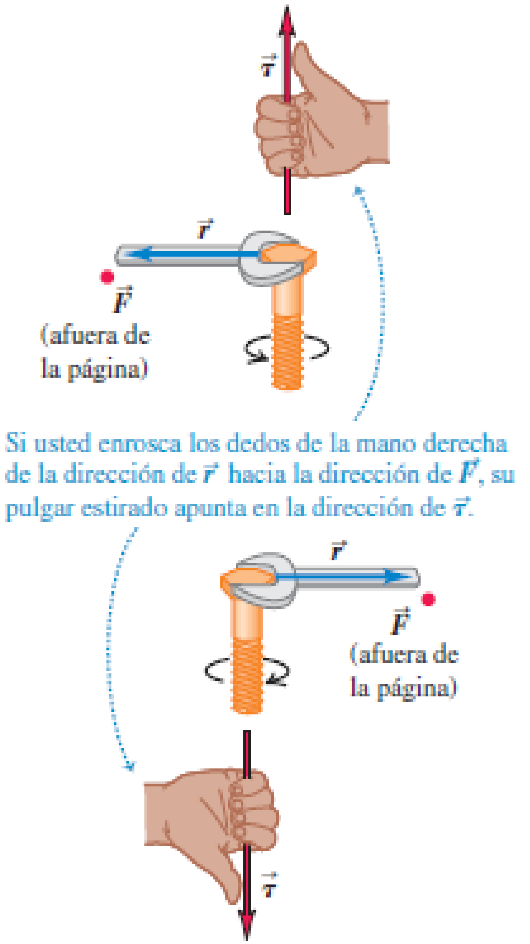


Su dirección es siempre perpendicular al plano de los vectores r y F, su sentido esta dado por la regla del producto vectorial, la regla del sentido de avance del tornillo o la regla de la mano derecha.



Regla de la mano derec

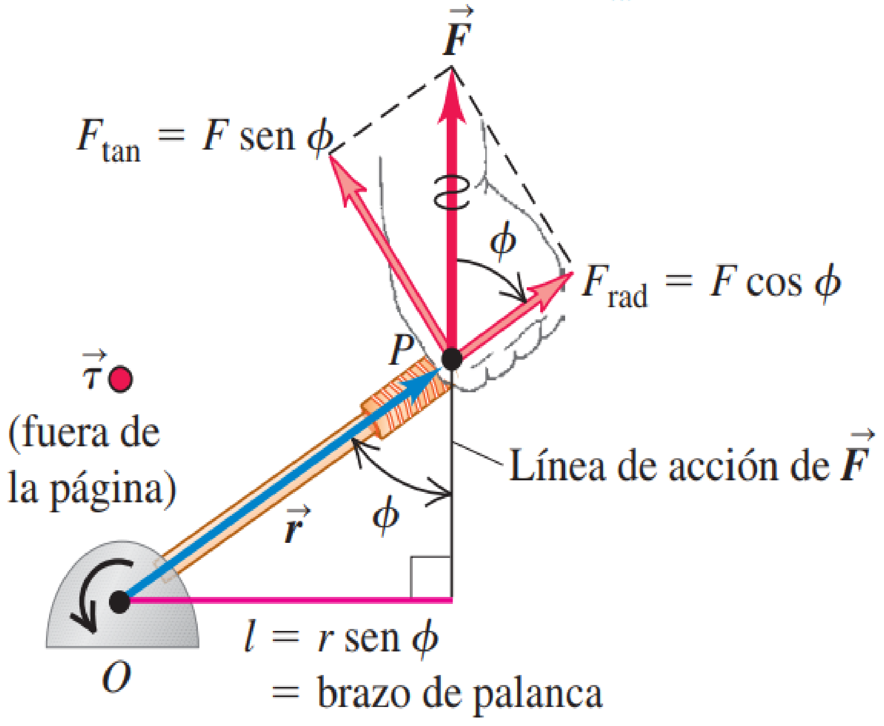
10.4 El vector de la torca, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige sobre el eje del tornillo, perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Vemos que los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de la rotación que la torca tiende a causar.



Torque

10.3 Tres formas de calcular la torca de la fuerza $\vec{F}$ en torno al punto O. En esta figura, $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están en el plano de la página y el vector de la torca $\vec{\tau}$ apunta afuera de la página hacia el lector.

Tres formas de calcular la torca:
$\tau = Fl = rF \operatorname{sen} \phi = F_{tan} r$



La figura 10.3 muestra una fuerza **F** que se aplica en un punto P descrito por un vector de posición **r** con respecto al punto elegido O. Hay varias formas de calcular la torca de esta fuerza:

1. Determine el brazo de palanca l y use $\tau = Fl$.

2. Calcule el ángulo ϕ entre los vectores **r** y **F;** el brazo de palanca es $r\operatorname{sen}\varphi$, así que $\tau = Fr\operatorname{sen}\varphi$

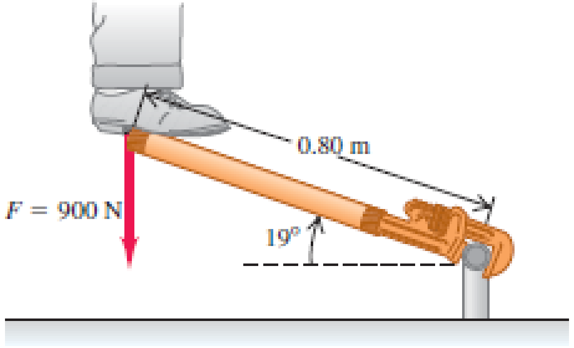
3. Represente **F** en términos de una componente radial F_{rad} en la dirección de **r y** una componente tangencial F_{tan} perpendicular a **r.** entonces $F_{tan} = F\operatorname{sen}\varphi$ y $\tau = r(F\operatorname{sen}\varphi) = rF_{tan}$

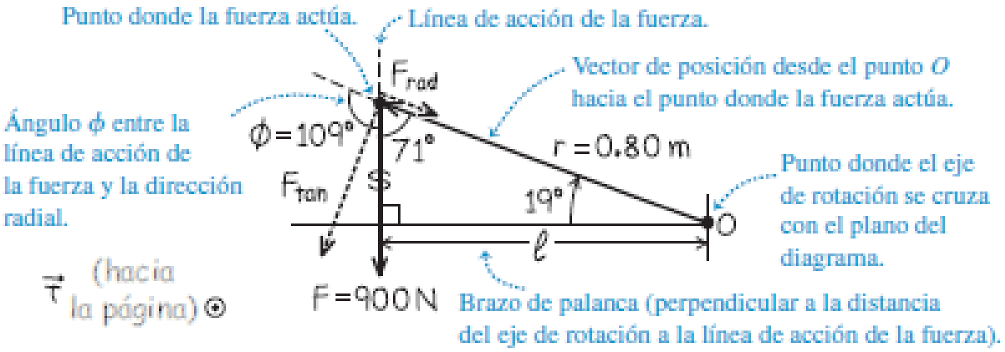
$$\tau = Fl = rF \operatorname{sen} \phi = F_{tan} r$$

Es la magnitud del torque, aunque lo podemos ver como vector

Ejemplo 1.

Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.80 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de 19° con la horizontal. Calcule la magnitud y la dirección del torque que el plomero aplica en torno al centro de la junta.





$$l = (0.80\text{ m})\,\text{sen}\,109° = (0.80\text{ m})\,\text{sen}\,71° = 0.76\text{ m}$$

$$\tau = Fl = (900\text{ N})(0.76\text{ m}) = 680\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\tau = rF\,\text{sen}\,\phi = (0.80\text{ m})(900\text{ N})(\text{sen}\,109°) = 680\text{ N}\cdot\text{m}$$

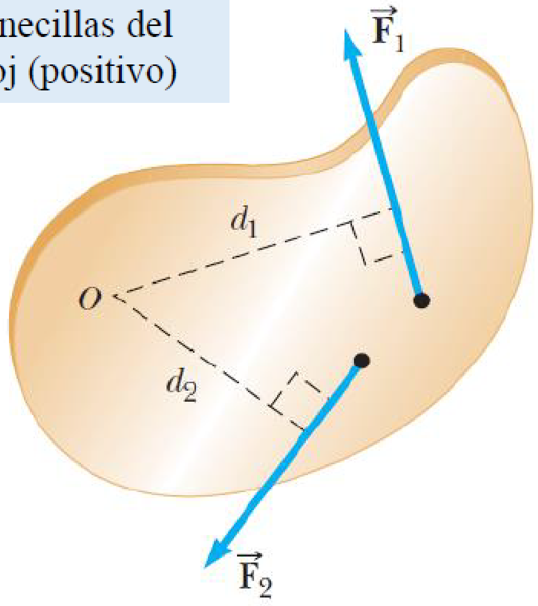
$F_{\tan} = F(\cos 19°) = (900\text{ N})(\cos 19°) = 851\text{ N}$. La torca es

$$\tau = F_{\tan} r = (851\text{ N})(0.80\text{ m}) = 680\text{ N}\cdot\text{m}$$

TORQUE NETO

Si dos o más fuerzas actúan sobre un objeto rígido, como en la figura, cada una tiende a producir rotación en torno al eje en O.

Giro en sentido contrario a las manecillas del reloj (positivo)



Giro en sentido de las manecillas del reloj (negativo)

El torque neto sobre el cuerpo rígido será:

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\sum \tau = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

Unidades en el Sistema internacional

$$[\tau] = [N][m]$$

NOTA: NO DEBE CONFUNDIRSE CON LAS UNIDADES DE ENERGÍA

Las fuerzas también pueden causar un cambio en el movimiento rotacional, pero la efectividad de las fuerzas en causar este cambio depende tanto de las magnitudes de las fuerzas como de los brazos de momento de las fuerzas.

No confunda momento de torsión y trabajo, que tiene las mismas unidades, pero son conceptos muy diferentes.

EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO

El movimiento de un cuerpo rígido en general es de traslación y de rotación. En este caso, si la resultante tanto de las fuerzas como de los torques que actúan sobre el cuerpo rígido es cero, este no tendrá aceleración lineal ni aceleración angular, y si está en reposo, estará en equilibrio estático.

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

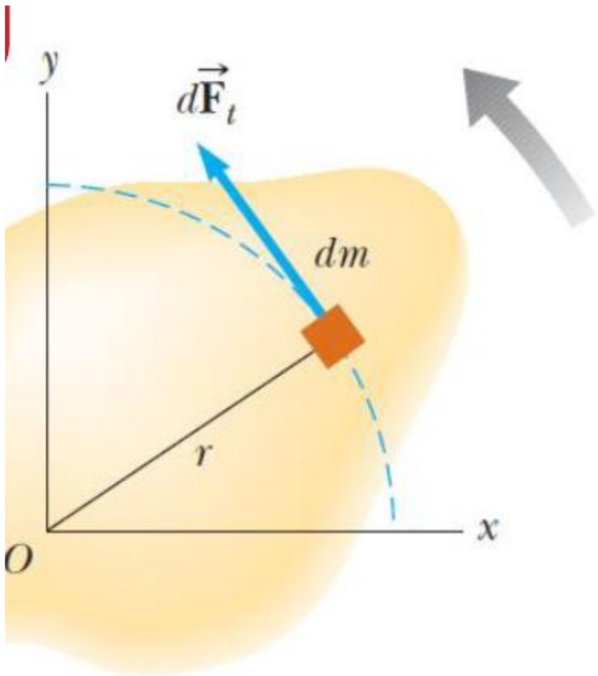
La primera condición de equilibrio es la Primera Ley de Newton, que garantiza el equilibrio de traslación.

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0}$$

La segunda condición de equilibrio, corresponde al equilibrio de rotación, se enuncia de la siguiente forma: “la suma vectorial de todos los torques externos que actúan sobre un cuerpo rígido alrededor de cualquier origen es cero”.

$$\boxed{\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots + \vec{\tau}_n = 0}$$

RELACIÓN ENTRE TORQUE Y ACELERACIÓN ANGULAR



Objeto rígido gira en torno a un eje a través de O, observemos que cada elemento de masa dm da vueltas en torno al eje con la misma aceleración angular α.

Para cualquier elemento dm determinado, se sabe de la segunda ley de Newton es:

$$d\vec{F}_t = (dm)a_t \qquad [1]$$

El momento de torsión $d\tau$ asociado con la fuerza $d\vec{F}_t$ actúa en torno al origen y se conoce por:

$$d\tau = r\,dF_t \qquad [2]$$

Sustituyendo la ecuación [1] y sabiendo que $a_t = r\alpha$, la ecuación [2] quedará:

$$d\tau = r(dm)a_t$$

$$d\tau = r(dm)(r\alpha)$$

$$d\tau = \alpha r^2 dm$$

Integrar la expresión anterior para obtener el momento de torsión neto

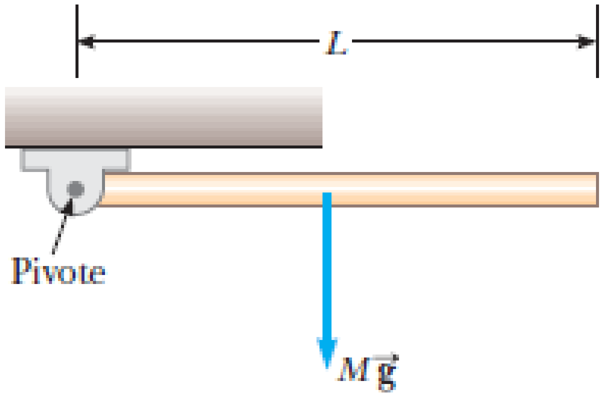
$$\tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \underbrace{\int r^2 dm}_{\text{MOMENTO DE INERCIA}}$$

EQUIVALENTE ROTACIONAL DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON $\quad \tau = \alpha I \qquad \sum F = ma.$

Ejemplo 2

Barra giratoria

Una barra uniforme de longitud *L* y masa *M* unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical, como en la figura 10.17. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleracion traslacional inicial de su extremo rígido?



$$\tau = Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$1) \qquad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \boxed{\frac{3g}{2L}}$$

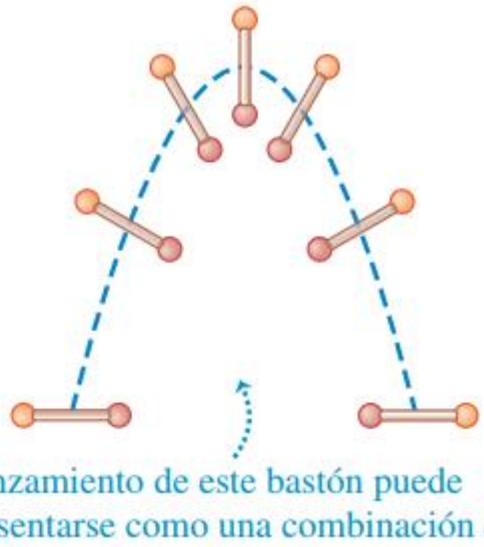
$$a_t = L\alpha = \boxed{\tfrac{3}{2}g}$$

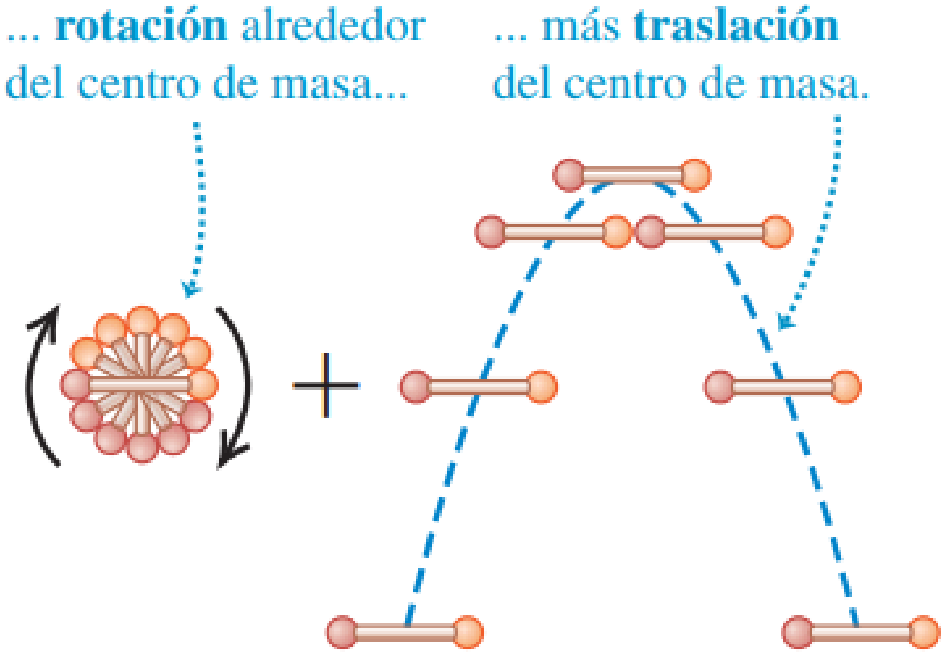
Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

Podemos extender nuestro análisis de la dinámica del movimiento rotacional a algunos casos en los que se mueve el eje de rotación. En tal caso, el movimiento del cuerpo es de **traslación y rotación combinados**.

Una combinación de *movimiento traslacional del centro de masa* y *rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa*.

10.11 El movimiento de un cuerpo rígido es una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de ese centro.





En este caso, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte asociada al movimiento del centro de masa y una parte asociada a la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

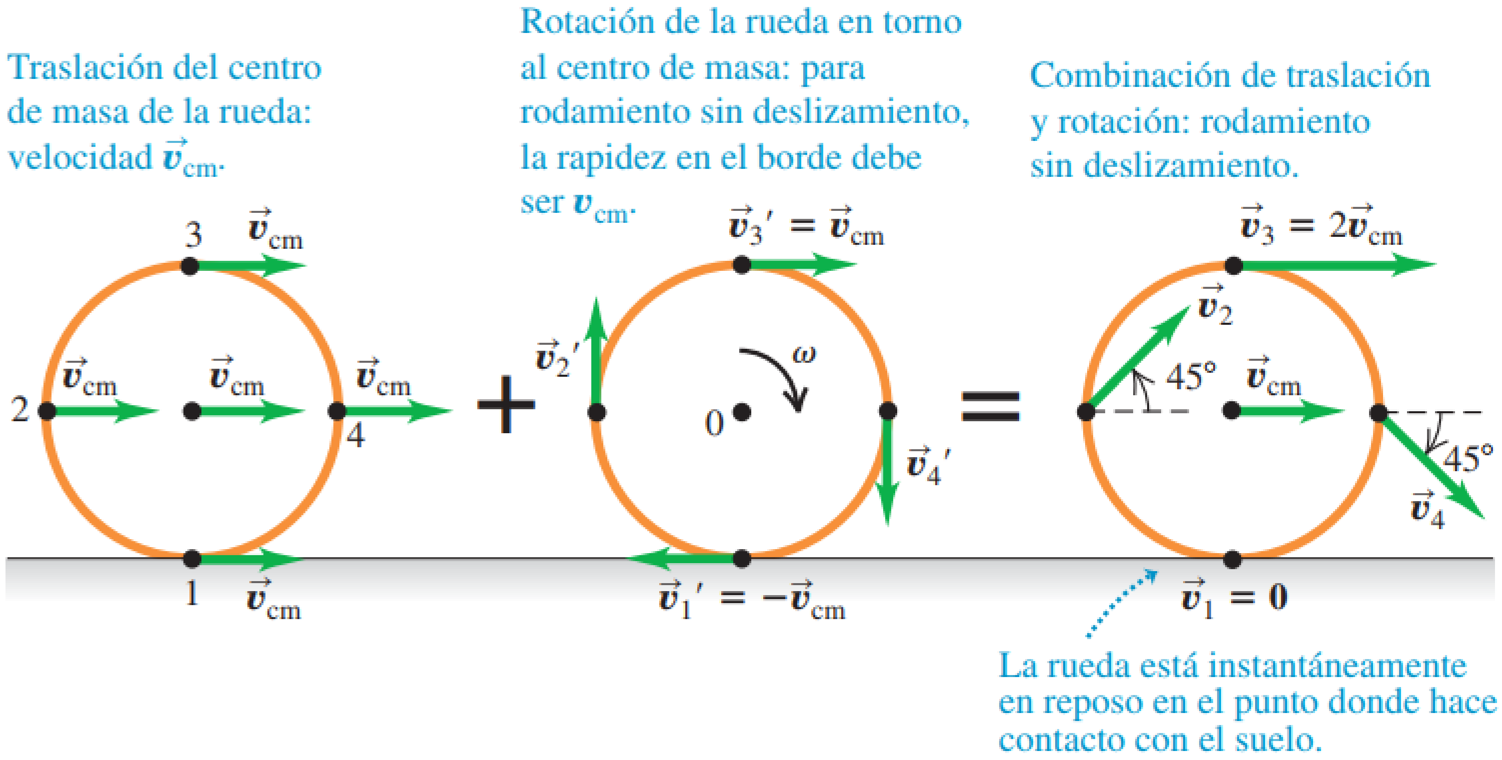
$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

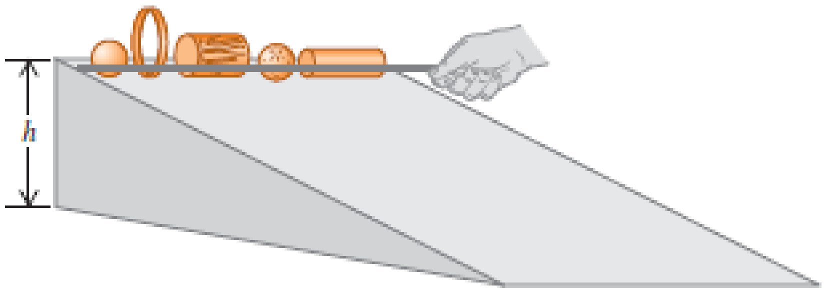
(cuerpo rígido con traslación y rotación)

Rodamiento sin deslizamiento

Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de **rodar sin deslizar**, como el movimiento de la rueda que se muestra en la figura 10.13

10.13 El movimiento de una rueda es la suma del movimiento traslacional del centro de masa y el movimiento rotacional de la rueda alrededor del centro de masa.





La condición para que el cuerpo ruede sin deslizar es que en el punto de contacto la velocidad instantáneamente sea cero, y por lo tanto la tangencial sea igual a la velocidad del centro de masa.

$$v_{cm} = R\omega$$

Rodamiento sin deslizamiento

Utilizando el teorema de ejes paralelos $I_1 = I_{cm} + MR^2,$

La energía cinética es $K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2$

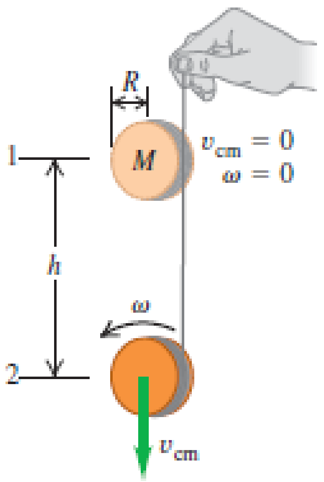
Si un cuerpo rígido cambia de altura al moverse, también debemos considerar la energía potencial gravitacional que es:

$$U = Mgy_{cm}$$

Ejemplo 10.4 Rapidez de un yoyo burdo

Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R (figura 10.15). Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez v_{cm} del centro de masa del cilindro sólido después de caer una distancia h.

10.15 Cálculo de la rapidez de un yoyo burdo.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El extremo superior del cordel está fijo, no se tira de él hacia arriba, así que la mano de la figura 10.15 no efectúa trabajo sobre el sistema del cordel y cilindro. Al igual que en el ejemplo 9.8 (sección 9.4), hay fricción entre el cordel y el cilindro pero, como el cordel no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica y podemos usar la conservación de la energía mecánica..

PLANTEAR: Las energías potenciales son $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$. El cordel no tiene energía cinética porque no tiene masa. La energía cinética inicial del cilindro es $K_1 = 0$, y la energía cinética final K_2 está dada por la ecuación (10.8). El momento de inercia es $I = \frac{1}{2}MR^2$, y $\omega = v_{cm}/R$ porque el cilindro no resbala en el cordel.

EJECUTAR: Utilizando la ecuación (10.8), la energía cinética en el punto 2 es

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$
$$= \frac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

La energía cinética es $1\frac{1}{2}$ veces mayor que si el yoyo estuviera cayendo a una rapidez v_{cm} sin girar. Dos tercios de la energía cinética total $\left(\frac{1}{2}Mv_{cm}^2\right)$ son traslacionales y un tercio $\left(\frac{1}{4}Mv_{cm}^2\right)$ es rotacional. Entonces, la conservación de la energía

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$

y

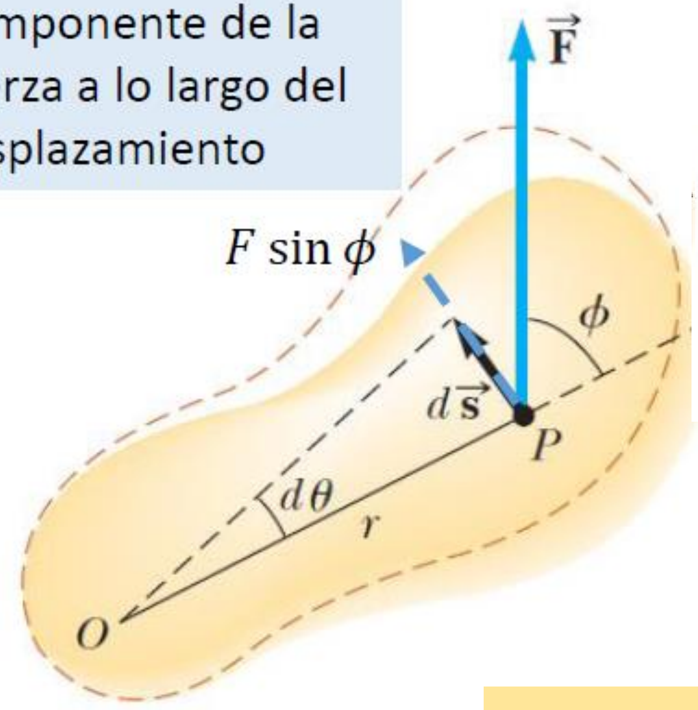
$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

EVALUAR: Ésta es menor que la rapidez $\sqrt{2gh}$ que tendría un objeto que se deja caer, porque conforme el cilindro cae un tercio de la energía potencial liberada aparece como energía cinética rotacional.

TRABAJO Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN.

El trabajo consumido en el objeto por $\vec{F}$ a medida que su punto de aplicación da vueltas a través de una distancia infinitesimal $ds = rd\theta$

Componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento

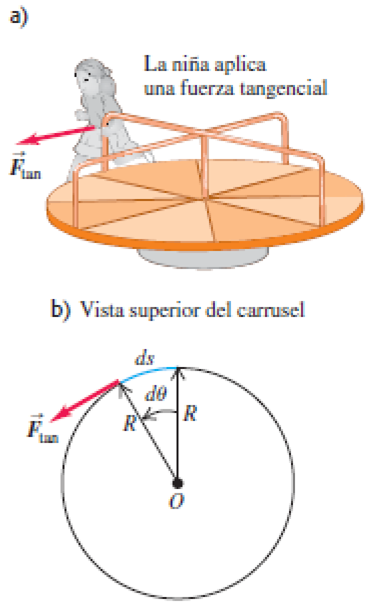


$$W = \vec{F} d\vec{s} = \underbrace{(F \sin\phi)r}_{Torque} d\theta$$

Trabajo consumido por la rotación infinitesimal se puede escribir como

$$W = \vec{F} d\vec{s} = \tau d\theta$$

10.21 Una fuerza tangencial aplicada a un cuerpo en rotación efectúa trabajo.



Potencia entregada a un objeto rígido en rotación:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathcal{P} = \tau\omega$$

ENERGÍA CINÉTICA ROTACIONAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA ROTACIONAL

Teniendo en cuenta la ecuación que relaciona el torque con la aceleración angular:

$$\tau = I\alpha$$

Y aplicando la regla de la cadena:

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

Al reagrupar esta expresión, se tiene:

$$\tau d\theta = I\omega d\omega$$

integrando:

$$W = \int_i^f \tau d\theta = \int_i^f I\omega d\omega$$

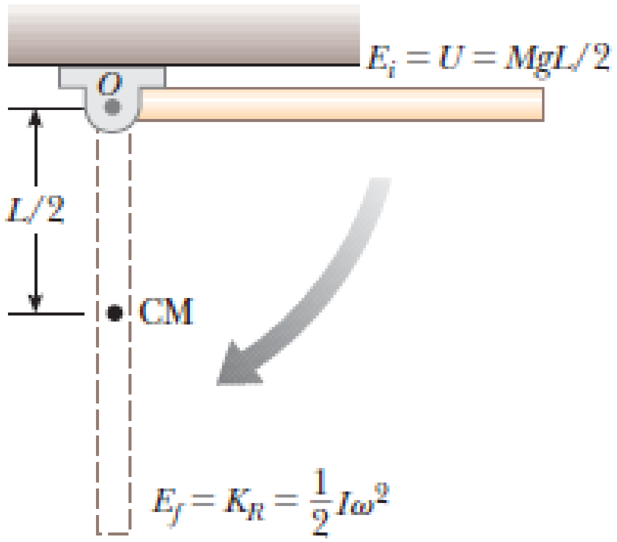
$$\Delta E_{c/rot} = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

Por lo tanto, el trabajo neto realizado por las fuerzas externas al hacer girar un cuerpo rígido es igual a la variación de energía cinética rotacional del objeto.

Ejemplo 3

Un nuevo vistazo a la barra giratoria

Una barra uniforme de longitud *L* y masa *M* tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.



A) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}MgL$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

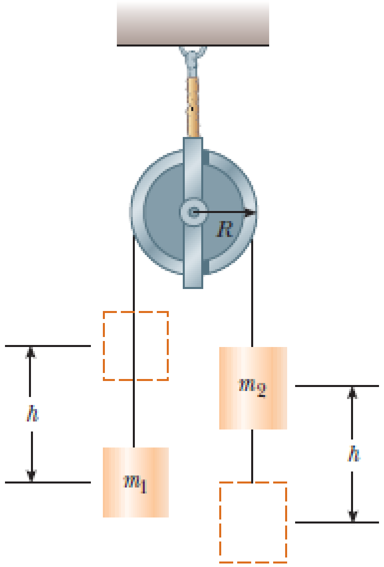
B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando este en su posición vertical.

$$v_{CM} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

$$v = 2v_{CM} = \sqrt{3gL}$$

Ejemplo 4

Dos cilindros que tienen masas diferentes m_1 y m_2 están conectados por una cuerda que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 10.22. La polea tiene un radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. La cuerda no se desliza sobre la polea y el sistema se libera desde el reposo. Encuentre las magnitudes de velocidad traslacionales de los cilindros después de que el cilindro 2 desciende una distancia h, y encuentre la rapidez angular de la polea en este momento.



$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\left(\tfrac{1}{2}m_1 v_f^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_f^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_f^2\right) + (m_1gh - m_2gh) = 0 + 0$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_f^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_f^2 + \tfrac{1}{2}\frac{I}{R^2}v_f^2 = m_2gh - m_1gh$$

$$\tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2 = m_2gh - m_1gh$$

$$1) \quad v_f = \boxed{\left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}\right]^{1/2}}$$

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \boxed{\frac{1}{R}\left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}\right]^{1/2}}$$