

Relaciones

Recordando conceptos..

- Conjunto
- Igualdad de conjuntos, cardinalidad
- Subconjunto \subseteq

$A \subseteq B$ si y solo si $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$ es verdadera

- Subconjunto propio \subset
- Conjunto potencia $P(s)$
- Producto cartesiano

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Relaciones

Sea $A=\{1,2,3,4\}$

Identifique los pares ordenados (a,b) con $a \in A$, $b \in A$ que cumplen la condición $a > b$

Relaciones

Sea $A=\{1,2,3,4\}$

Identifique los pares ordenados (a,b) con $a \in A$, $b \in A$ que cumplen la condición $a > b$

$$R=\{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$R=\{(a,b) \mid a \in A, b \in A \text{ } a > b\}$$

El conjunto resultante R es una relación en A

$$R \subseteq A \times A$$

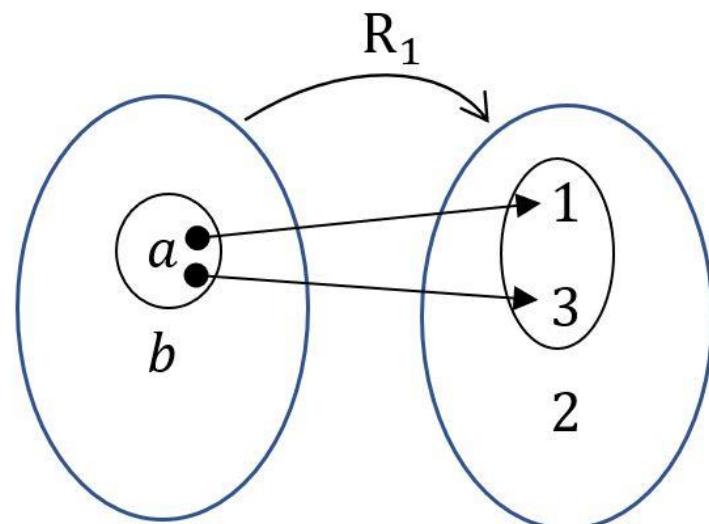
Relaciones

Sean A y B conjuntos

Una relación binaria definida de A en B es un subconjunto de $A \times B$

$$R = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Otra notación **aRb**



Relaciones

Exprese la siguiente relación R por extensión

$$R = \{(a,b) \mid a|b \text{ para } A=B= \{1,2,3,4,5\}\}$$

Relaciones

Exprese la siguiente relación R por extensión

$$R = \{(a,b) \mid a|b \text{ para } A=B= \{1,2,3,4,5\}\}$$

$$\begin{aligned} R = & \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \\ & (2,2), (2,4), \\ & (3,3), \\ & (4,4), \\ & (5,5)\} \end{aligned}$$

Relaciones

Las siguientes relaciones están definidas sobre el conjunto de los **enteros**

$$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) | a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) | a+b \leq 3\}$$

¿Cuales de las relaciones contiene alguno de estos pares?:

(-1,-1) (1,2) (2,1) (1,-1) (4,2)

Relaciones

Las siguientes relaciones están definidas sobre el conjunto de los **enteros**

$$R_1 = \{(a,b) | a \leq b\} \quad (-1, -1) \quad (1, 2)$$

$$R_2 = \{(a,b) | a > b\} \quad (2, 1) \quad (1, -1) \quad (4, 2)$$

$$R_3 = \{(a,b) | a+b \leq 3\} \quad (-1, -1) \quad (1, 2) \quad (2, 1) \quad (1, -1)$$

¿Cuales de las relaciones contiene alguno de estos pares?:

$$(-1, -1) \quad (1, 2) \quad (2, 1) \quad (1, -1) \quad (4, 2)$$

Relaciones

Las siguientes relaciones están definidas sobre el conjunto de los **enteros**

$$R_4 = \{(a,b) \mid a=b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) \mid a=b+1\}$$

¿Cuales de las relaciones contiene alguno de estos pares?:

(-1,-1) (1,2) (2,1) (1,-1) (4,2)

Relaciones

Las siguientes relaciones están definidas sobre el conjunto de los **enteros**

$$R_4 = \{(a,b) \mid a=b\} \quad (-1, -1)$$

$$R_5 = \{(a,b) \mid a=b+1\} \quad (2, 1)$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida en el conjunto A es **reflexiva** si

- $\forall a \in A (a,a) \in R$

Sea $A=\{1,2,3\}$. ¿Es R reflexiva?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,3),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_3=\{(2,3),(1,2),(3,1)\}$$

$$R_4=\{(2,3),(2,2),(1,2),(3,1),(1,1)\}$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida en el conjunto A es **reflexiva** si

- $\forall a \in A (a,a) \in R$

Sea $A=\{1,2,3\}$. ¿Es R reflexiva?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,3),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_3=\{(2,3),(1,2),(3,1)\}$$

$$R_4=\{(2,3),(2,2),(1,2),(3,1),(1,1)\}$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida en el conjunto A es **irreflexiva** si

- $\forall a \in A (a,a) \notin R$
- ≡ R es irreflexiva si $\forall a | a \in A : \neg aRa$.

Sea $A=\{1,2,3\}$. ¿Es R irreflexiva?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,3),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_3=\{(2,3),(1,2),(3,1)\}$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida en el conjunto A es **irreflexiva** si

- $\forall a \in A (a,a) \notin R$
- ≡ R es irreflexiva si $\forall a | a \in A : \neg aRa$.

Sea A={1,2,3}. ¿Es R irreflexiva?

$$R_1 = \{(1,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,2), (3,3)\}$$

$$R_3 = \{(2,3), (1,2), (3,1)\}$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida sobre un conjunto A es **simétrica** si

$$\forall a \ \forall b ((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R)$$

Sea $A=\{1,2,3\}$ ¿Es R simétrica?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,1)\}$$

$$R_3=\{(2,3),(1,2),(3,1),(3,2),(2,1),(3,3)\}$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida sobre un conjunto A es **simétrica** si

$$\forall a \ \forall b ((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R)$$

Sea $A=\{1,2,3\}$ ¿Es R simétrica?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,1)\}$$

$$R_3=\{(2,3),(1,2),(3,1),(3,2),(2,1),(3,3)\}$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida sobre un conjunto A es **asimétrica**

$$\forall a \forall b ((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R)$$

R es **asimétrica** si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$

Relaciones: Propiedades

Sea $A=\{1,2,3\}$ ¿Cuáles relaciones son asimétricas?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(2,3),(3,1),(2,1)\}$$

$$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_4=\{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1),(2,2), (1,2)\}$$

Relaciones: Propiedades

Sea $A=\{1,2,3\}$ ¿Cuáles relaciones son asimétricas?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(2,3),(3,1),(2,1)\}$$

$$R3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_4=\{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1),(2,2), (1,2)\}$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida sobre un conjunto A es
antisimétrica

$$\forall a \ \forall b ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \rightarrow (a=b)$$

Relaciones: Propiedades

Sea $A=\{1,2,3\}$ ¿Cuáles relaciones son antisimétricas?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1)\}$$

$$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_4=\{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1),(2,2), (1,2)\}$$

Relaciones: Propiedades

Sea $A=\{1,2,3\}$ ¿Cuáles relaciones son antisimétricas?

$$R_1=\{(1,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1)\}$$

$$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_4=\{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1),(2,2), (1,2)\}$$

Relaciones: Propiedades

Una relación R definida sobre un conjunto A es **transitiva** si cuando $(a,b) \in R$, y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$

$$\forall a,b,c (((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R)$$

Relaciones: Propiedades

Sea $A=\{1,2,3\}$ ¿Cuáles de las relaciones son transitivas?

$$R_1=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,1),(1,2)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,3),(3,1),(2,2)\}$$

$$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_4=\{(1,1),(2,3),(3,2),(2,2),(3,3),(1,2)\}$$

Clausura - Relaciones

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{ \quad \}$$

Clausura

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. **R es simétrica?**, cuál es la clausura simétrica de R , $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{ \quad \}$$

Clausura

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es reflexiva?**, cuál es la clausura reflexiva de R , $\rho(R)$?

$$\rho(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

En general, $\rho(R) = I \cup R$

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. **R es simétrica?**, cuál es la clausura simétrica de R , $\sigma(R)$?

$$\sigma(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 3), (2, 1)\}$$

En general, $\sigma(R) = R \cup R^T$

Clausura

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es transitiva?**, Cuál es la clausura transitiva de R , $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{ \quad \}$$

Clausura

Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ es útil en algunos problemas buscar la **relación más pequeña posible que cumpla una propiedad** (reflexiva, simétrica, transitiva) y que incluya a R .

- La **Clausura- ϕ** de R es la relación más pequeña posible que cumple ϕ y que contiene a R .
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$. **R es transitiva?**, Cuál es la clausura transitiva de R , $\tau(R)$?

$$\tau(R) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

Representación de Relaciones

Representaciones para conjuntos finitos:

- ✓ Enumeración de pares ordenados
- ✓ Grafos dirigidos

Grafos Dirigidos

Conjunto de **vértices V (nodos)**

Conjunto **E de pares ordenados** de elementos de **V**, llamados **aristas o arcos**

a: es el vértice inicial de la arista (a,b)

b: es el vértice final de la arista (a,b)

arista (a,a): arco conectando a con si mismo, **bucle**

Grafo Dirigido

Relación: $\{(1,2),(1,4),(2,2),(3,1),(3,4),(4,5)(4,2),(5,4)\}$

Grafo Dirigido

Se tiene las siguientes relaciones. Dibuje los grafos dirigidos que las represente

R1: $\{(a,b),(b,e),(c,c),(c,d),(c,b),(d,c),(e,d),(e,e),(e,a)\}$

R2: $\{(Brian, Linda), (Brian, Yvonne), (Yvonne, Brian), (Yvonne, Fred), (Fred, Brian), (Deborah, Brian), (Deborah, Linda), (Deborah, Fred)\}$

R3: $\{(a,d), (b,d), (c,b), (d,b), (a,a), (d,d), (a,c), (c, a), (d,c), (a,b)\}$

Grafo Dirigido

Una aerolínea tiene rutas para diferentes ciudades del país, y por cada una se le da una cantidad de millas a cada pasajero. Represente la situación por un grafo dirigido:



Se le da 4 millas al pasajero de Bogotá a Neiva, dos millas de Neiva a Bogotá, tres millas de Neiva a Cali, y dos de Cali a Neiva. Una milla de Neiva a Medellín, y dos millas de Medellín a Neiva, tres millas de Neiva a Leticia, dos millas de Leticia a Neiva y una milla de Leticia a Cali.

Grafo Dirigido

Dibuje el grafo para representar la siguiente situación:

1. Un mensajero necesita entregar 6 pedidos. él conoce la cantidad de minutos que se demora entre cada punto donde debe entregar los pedidos. los cuales se describen a continuación:

- ✓ Desde el punto 1 al punto 2 se demora 7 minutos, y del 1 al punto 4 se demora 2 minutos.
- ✓ Desde el punto 2 al punto 3 se demora 4 minutos. Y desde el punto 2 al 5 se demora 1 minuto.
- ✓ Desde el punto 3 al punto 6 se demora 3 minutos.
- ✓ Desde el punto 4 al punto 2 se demora 4 minutos.
- ✓ Desde el punto 5 al punto 3 se demora 2 minutos, lo mismo que del punto 5 al 1.
- ✓ Desde el punto 6 al punto 2 se demora 1 minuto



Relaciones de Equivalencia

Una relación R es de equivalencia si es **reflexiva, simétrica y transitiva**

Ejemplo:

Conjunto: una bolsa de m&m.

Relación: a tiene el mismo color que b



- ✓ **Reflexivo:** Todo chocolate tiene el mismo color que si mismo
- ✓ **Simétrico:** Si el chocolate a tiene el mismo color que el chocolate b, el chocolate b tiene el mismo color que el chocolate a
- ✓ **Transitivo:** Si a tiene el mismo color que b y b tiene el mismo color que c, entonces a tiene el mismo color que c.

Relaciones de Equivalencia

Ejemplo 2:

Conjunto: los estudiantes de la universidad.

Relación: a tiene la misma fecha de cumpleaños que b



¿Es una relación de equivalencia?

Relaciones de Equivalencia

Ejemplo 2:

Conjunto: los estudiantes de la universidad.

Relación: a tiene la misma fecha de cumpleaños que b

- ✓ **Reflexivo:** Todo estudiante tiene la misma fecha de cumpleaños que si mismo
- ✓ **Simétrico:** Si el estudiante a tiene la misma fecha de cumpleaños que el estudiante b, el estudiante b tiene la misma fecha de cumpleaños que el estudiante a
- ✓ **Transitivo:** Si a tiene la misma fecha de cumpleaños que b y b tiene la misma fecha de cumpleaños que c, entonces a tiene la misma fecha de cumpleaños que c.



Relaciones de Equivalencia

Ejemplo 2:

Conjunto: todas las personas

Relación: a es hermano de b

¿Es una relación de equivalencia?



Relaciones de Equivalencia

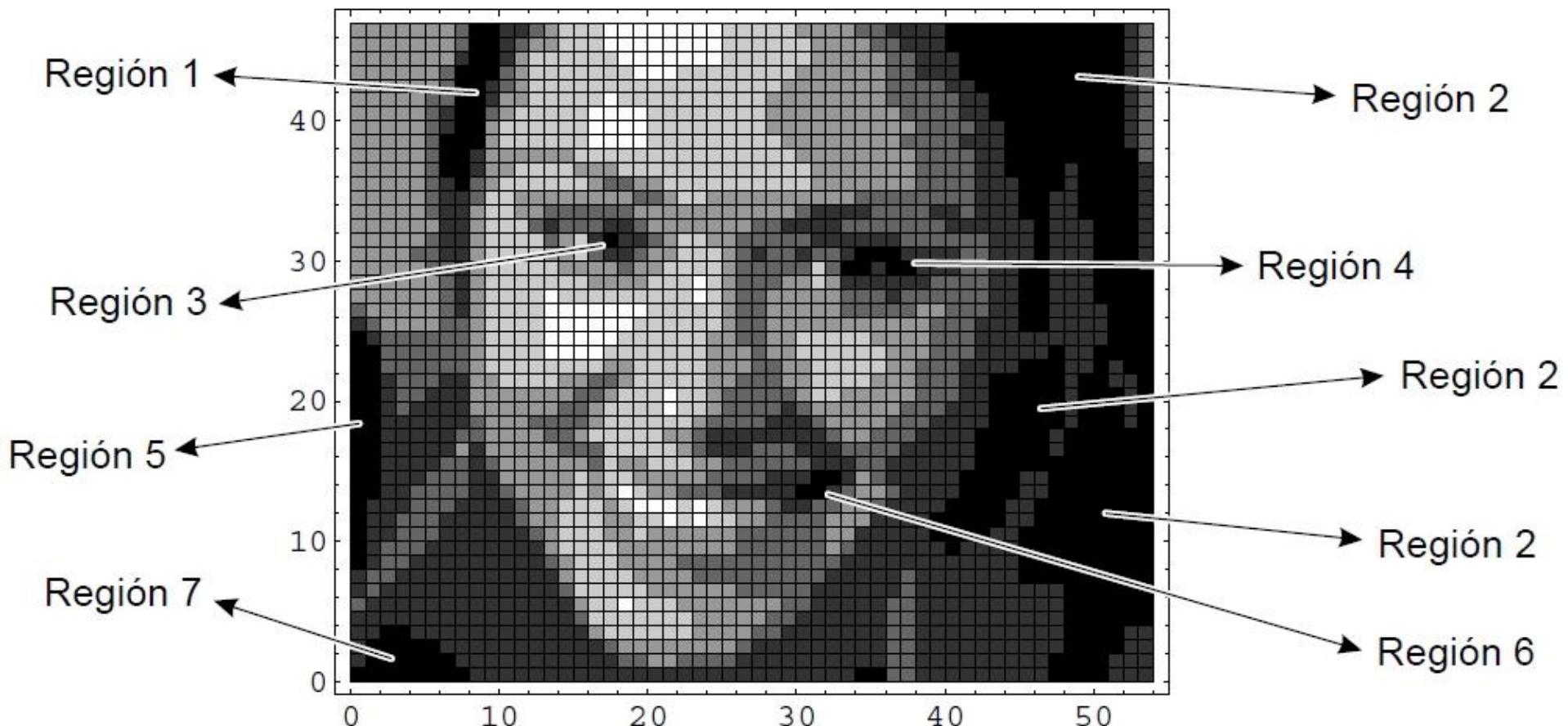
Determine si las siguientes relaciones son de equivalencia

$$R_1 = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (3,1), (1,3) \}$$

$$R_3 = \{ (p_1, p_2) \mid p_1 \text{ tiene la misma longitud que } p_2 \}$$

$$R_4 = \{ (p_1, p_2) \mid p_1 \text{ y } p_2 \text{ tienen todas sus letras diferentes} \}$$

Clases de Equivalencia - uso



Particiones

Una relación de equivalencia R en A genera una división del conjunto A en subconjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es A

Propiedades de las relaciones

- Las relaciones binarias sobre un mismo conjunto son muy utilizadas y estudiadas (por ejemplo $=: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$, $\leq: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\geq: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$, ...). Dada una relación $R : A \leftrightarrow A$ se dice que:
- R es **reflexiva** si $\forall a | a \in A : aRa$. Por ejemplo: $\geq: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **irreflexiva** si $\forall a | a \in A : \neg aRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **simétrica** si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies bRa$. Por ejemplo: *hermano* : *Persona* \leftrightarrow *Persona* tal que *hermano*(a, b) \equiv "a es hermano de b "
- R es **asimétrica** si $\forall a, b | a, b \in A : aRb \implies \neg bRa$. Por ejemplo: $<: \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$
- R es **antisimétrica** si $\forall a, b | a, b \in A : (aRb \wedge bRa) \implies a = b$. Por ejemplo: $\subseteq: \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(A)$
- R es **transitiva** si $\forall a, b, c | a, b, c \in A : (aRb \wedge bRc) \implies aRc$. Por ejemplo: $| : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ tal que $a|b \equiv$ "a divide a b "