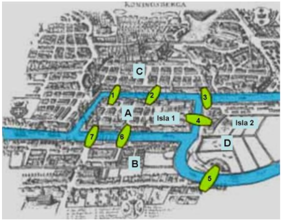
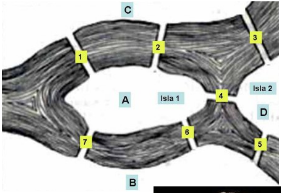
Teoría de Grafos

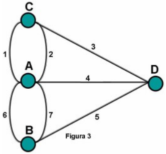
Raúl E Gutiérrez de Piñerez R.
raul.gutierrez@correounivalle.edu.co

Universidad del Valle
EISC

Problema de los puentes de Königsberg (1.736)







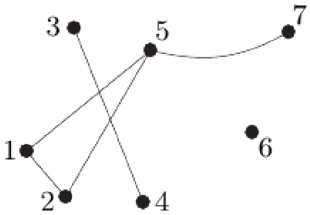
¿Es posible salir desde cualquier punto de la ciudad (A,B,C o D) y llegar al mismo punto recorriendo exactamente una vez cada puente?

Universidad del Valle

años 1945 - 2010

Que es un Grafo

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$ de conjuntos que satisfacen $E \subseteq [V]^2$ así, los elementos de E son subconjuntos de 2-elementos de V en la cual los elementos de E son aristas y los elementos de V son vértices. Tácitamente $E \cap V = \emptyset$. Saen $V = \{1, \ldots, 7\}$ y $E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5,7\}\}$.



- Un **grafo vacío** $(\emptyset, \emptyset)$ se escribe simplemente como $\emptyset$.
- El número de vértices de un grafo G es su orden, y se escribe $|G|$.
- Un grafo puede ser *finito* o *infinito* según su orden. Un grafo de orden 0 o de orden 1 es llamado el *grafo trivial*.

Grafo simple

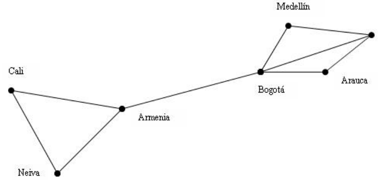
Un **grafo simple** $G = (V, E)$ es un grafo en el cual cada arista conecta dos diferentes vértices y donde dos aristas no conectan el mismo par de vértices. No tiene ni aristas paralelas ni bucles.

Multigrafo

Un **multigrafo** $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices V, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\}/u, v \in V, u \neq v\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.

Pseudografo

Un **pseudografo** $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices V, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\}/u, v \in V\}$. Una arista e es un bucle o lazo si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$.



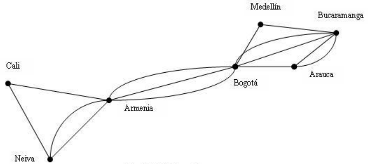


Fig 2. Multigrafo

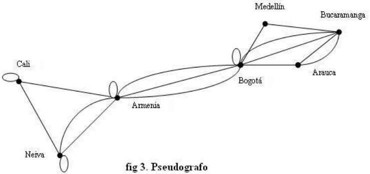


fig 3. Pseudografo

- Los grafos simples no permiten aristas paralelas.
- Los multigrafos no permiten bucles.

Grafo Dirigido

Un **Grafo dirigido** $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices V, un conjunto E de aristas que son pares ordenados de V. Usamos una flecha apuntando de u a v para indicar la dirección de la arista (u, v)

Multigrafo dirigido

Un **multigrafo dirigido** $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices V, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{(u, v)/u, v \in V\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.

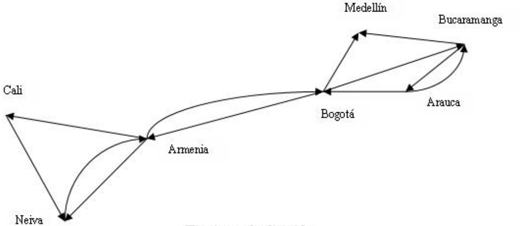
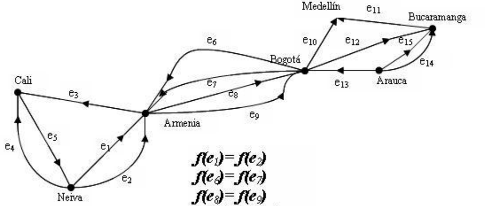


Fig 4. grafo dirigido

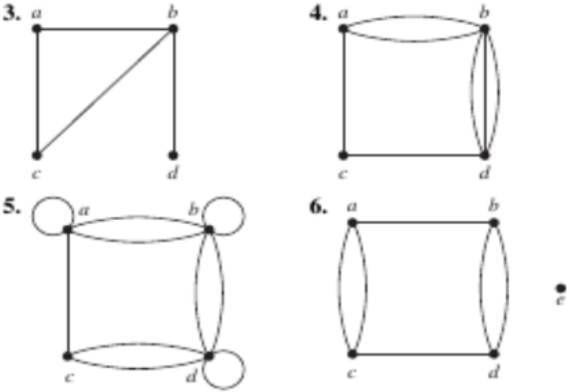


$f(e_1)=f(e_2)$
$f(e_6)=f(e_7)$
$f(e_8)=f(e_9)$
$f(e_{14})=f(e_{15})$

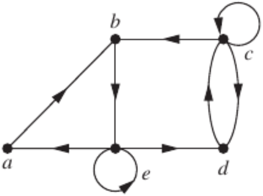
multigrafo dirigido

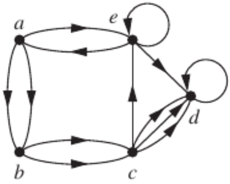
Tipos	Aristas	¿aristas múltiples?	¿bucles?
Grafo simple	no dirigidas	no	no
Multigrafo	no dirigidas	sí	no
Pseudografo	no dirigidas	sí	sí
Grafo dirigido	dirigidas	No	sí
Multigrafo dirigido	dirigidas	sí	sí

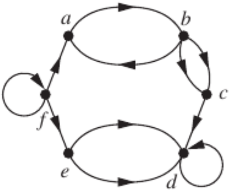
Determinar el tipo de grafo no dirigido (¿Grafo simple, multigrafo o pseudografo)



Determinar el tipo de grafo (¿Grafo dirigido o multigrafo dirigido?)







Adyacencia

Se dice que dos vértices u y v de un grafo no dirigido G son *adyacentes* (o vecinos) en G si $\{u, v\}$ es una arista de G. Si $e = \{u, v\}$, se dice que la arista e es *incidente* con los vértices u y v. También se dice que la arista *e conecta a* u *y* v. Se dice que los vértices u y v son extremos de la arista e.

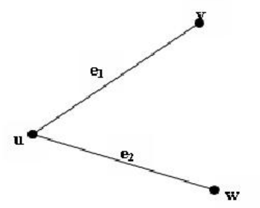


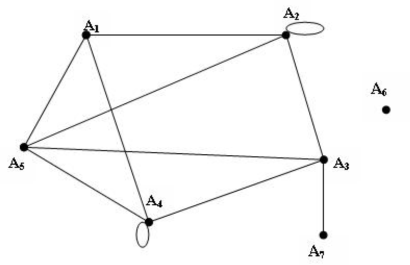
Fig 7. vertices y aristas adyacentes

- Dos aristas son adyacentes si tiene un vértice en común, por ejemplo en la fig 7. e_1 y e_2 son adyacentes.
- La vecindad de un vértice x, denotado como $N(x)$, está dado por todos los vértices adyacentes a x. $N(u) = \{v, w\}$

Universidad del Valle

El grado de un vértice

El grado de un vértice de un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes con él, exceptuando los bucles, que contribuye con dos unidades al grado del vértice. El grado del vértice se denota por $\delta(v)$.



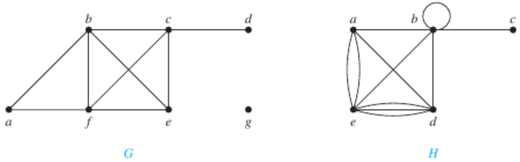
Los grados del grafo G son: $\delta(A_1) = 3$, $\delta(A_2) = 5$, $\delta(A_3) = 4$, $\delta(A_4) = 5$, $\delta(A_5) = 4$, $\delta(A_6) = 0$, $\delta(A_7) = 1$.

Teorema de Handshaking

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido con e aristas. Entonces,

$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v)$$

- Incluso si hay aristas múltiples y bucles en el grafo.
- Podemos determinar el número de aristas del grafo G, es decir $2e = 18$, $e = 9$
- la suma de los grados de un grafo no dirigido es par.



Cuál es el número de aristas de H?

Ejemplo. Cuántas aristas hay en un grafo con diez vértices, cada uno de los cuales tiene grado seis?

Teorema

Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Dem. Sea V_1: conjunto de vértices de grado par y V_2: conjunto de vértices de grado impar de un grafo $G = (V, E)$, entonces

$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v)$$

Como $\delta(v)$ si $v \in V_1$ es par y $\sum_{v \in V} \delta(v)$ es par al despejar $\sum_{v \in V_2} \delta(v)$ el resultado es par.

Aplicación del Teorema de Handshaking

¿Se puede dibujar un grafo simple de 15 vértices cada uno de grado 5?

Bucle

Si (u, v) es una arista del grafo dirigido G, se dice que u es adyacente a v y que v es adyacente desde u. Al vértice u se le llama **vértice inicial** de (u, v) y a v se le llama **vértice final** o terminal de (u, v). los vértices inicial y final de un **bucle** coinciden.

Grado en un grafo dirigido

En un grafo dirigido, *el grado de entrada de un vértice* v, denotado por $\delta^-(v)$, es el número de aristas que tienen a v como **vértice final**. *El grado de salida de un vértice* v, de notado por $\delta^+(v)$, es el número de aristas que tienen a v como **vértice inicial**.

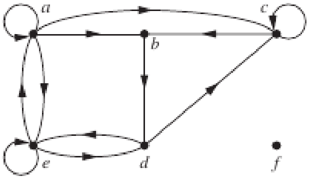
Teorema

Sea $G = (V, E)$ *un grafo dirigido. Entonces,*

$$\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v) = |E|$$

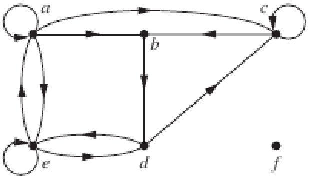
Ejemplo

Hallar los grados de entrada y de salida de cada vértice para el siguiente grafo.



Ejemplo

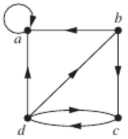
Hallar los grados de entrada y de salida de cada vértice para el siguiente grafo.

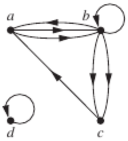


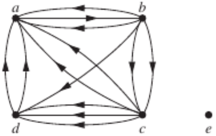
- $\delta^-(a) = 2$, $\delta^+(a) = 4$
- $\delta^-(b) = 2$, $\delta^+(b) = 1$
- $\delta^-(c) = 3$, $\delta^+(c) = 2$
- $\delta^-(e) = 3$, $\delta^+(e) = 3$
- $\delta^-(d) = 2$, $\delta^+(d) = 2$
- $\delta^-(f) = 0$, $\delta^+(f) = 0$

Entonces $\sum_{v\in V} \delta^-(v) = \sum_{v\in V} \delta^+(v) = |E| = 12$

1. ¿Existe algún grafo simple de cinco vértices con los grados siguientes?. si es así dibujar el grafo.
   1. 3,3,3,3,2; 1,2,3,4,4
   2. 0,1,2,2,3; 1,2,3,4,5
   3. 3,4,3,4,3; 1,1,1,1,1
2. ¿Cuántas aristas tiene un grafo si los grados de sus vértices son 5,2,2,2,2,1?
3. ¿Cuántos vértices tiene un grafo regular de grado 4 con 10 aristas?
4. Encontrar $\delta^-(v)$ y $\delta^+(v)$ para $\forall v \in V$ en los siguientes grafos:







Grafo Completo

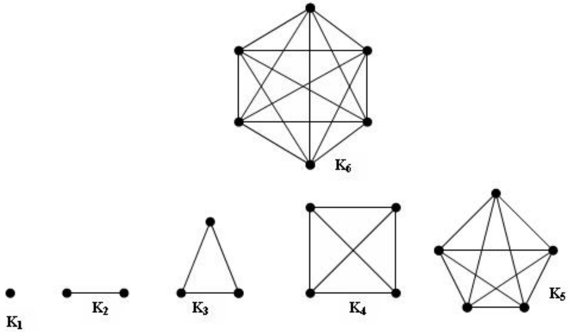
El grafo completo de n *vértices*, que se denota por K_n, es el *grafo simple* que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.

Ejemplo 1. sean Los K_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Grafo Completo

El grafo completo de n *vértices*, que se denota por K_n, es el *grafo simple* que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.

Ejemplo 1. sean Los K_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

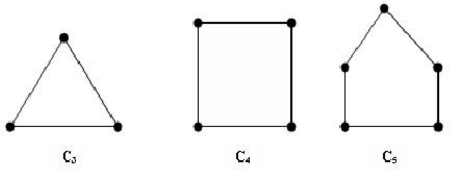


Ciclo

El *Ciclo* C_n, $n \geq 3$, consta de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y aristas

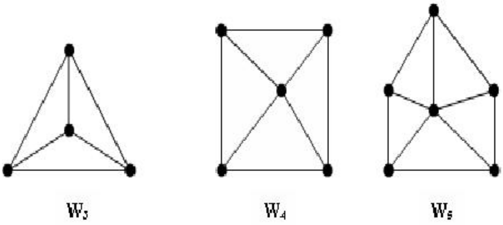
$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\} \quad y \quad \{v_n, v_1\}$$

En la siguiente figura se muestran los ciclos C_3, C_4, C_5.



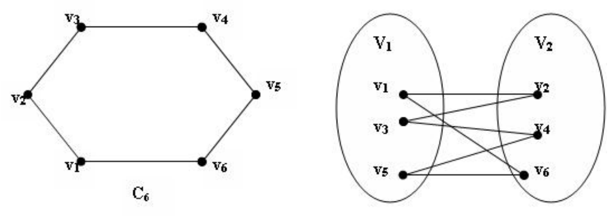
Rueda

Obtenemos una **rueda** W_n cuando añadimos un **vértice** adicional al ciclo C_n, para $n \geq 3$, y conectamos a este nuevo **vértice** con cada uno de los n vértices de C_n mediante una nueva arista. ver W_3, W_4, W_5



Grafo Bipartito o bigrafo

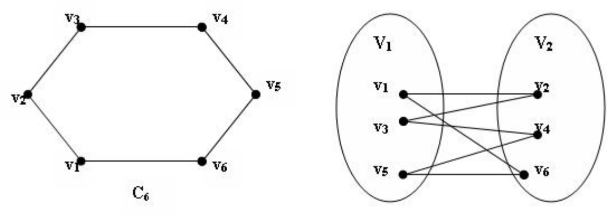
Se dice que un grafo simple G es **bipartito** si su conjunto de vértices V se puede dividir en dos conjutos disjuntos V_1 y V_2 tales que cada arista del grafo conecta un vértice V_1 con un vértice de V_2 (de manera que no haya ninguna arista que conecte entre sí dos vértices de V_1 ni tampoco dos vértices de V_2).



El ciclo C_6 es bipartito

Grafo Bipartito o bigrafo

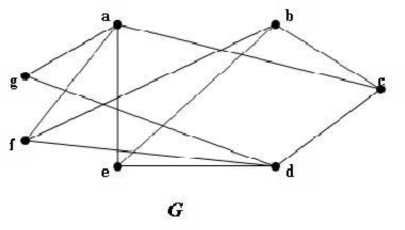
Se dice que un grafo simple G es **bipartito** si su conjunto de vértices V se puede dividir en dos conjutos disjuntos V_1 y V_2 tales que cada arista del grafo conecta un vértice V_1 con un vértice de V_2 (de manera que no haya ninguna arista que conecte entre sí dos vértices de V_1 ni tampoco dos vértices de V_2).



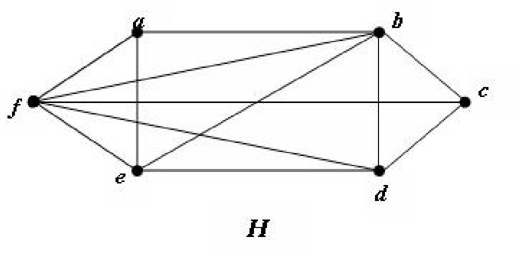
El ciclo C_6 es bipartito

El grafo C_6 es bipartito donde $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ entre v_1, v_3, v_5 no existen aritas que los comunique.

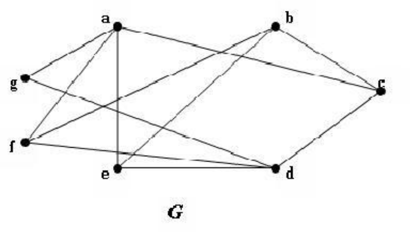
Ejemplo. Determinar si el siguiente grafo G es bipartito?



Ejemplo. Determinar si el siguiente grafo H es bipartito?

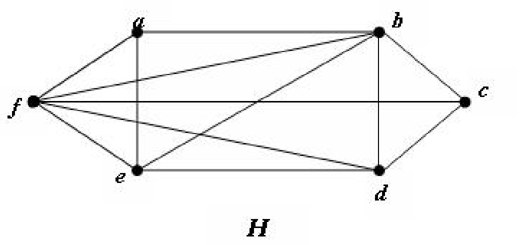


Ejemplo. Determinar si el siguiente grafo G es bipartito?

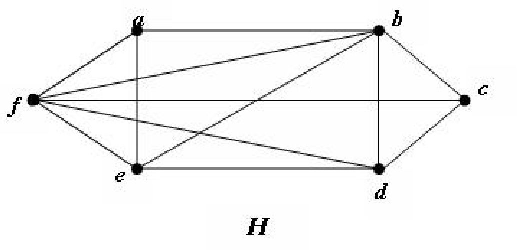


Es bipartito por que podemos encontrar dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 tale que $V_1 = \{c, e, g, f\}$ y $V_2 = \{a, b, d\}$

Ejemplo. Determinar si el siguiente grafo H es bipartito?

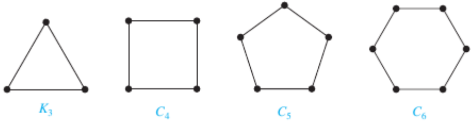


Se puede justificar un grafo que no sea bipartito definiendo un máximo de vértices para V_1 y V_2 y encontrando un contraejemplo. Sea el grafo:

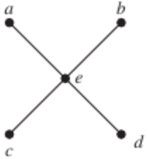


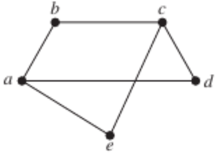
- Sean los conjuntos $V_1 = \{f\}$ y $V_2 = \{a, c\}$, entonces existen dos aristas adyacentes $\{f, a\}$ y $\{f, c\}$, en f no se pueden adicionar vértices por que todos los vértices son adyacentes con f
- Con un contraejemplo demostramos que el grafo no es bipartito, sean $V_1 = \{f\}$ y $V_2 = \{a, c\}$ y el vértice b, entonces cualquier arista incidente con b; $\{f, b\}$ y $\{a, b\}$ debe tener vértices en V_1 y V_2. Por tanto b no puede estar ni en V_1 ni en V_2.

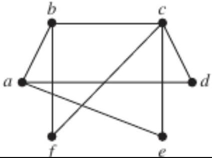
Por ejemplo, K_3 no es bipartito y C_6 si lo es, para que otros valores de n, C_n es bipartito.

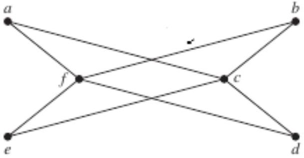


K_n solamente es bipartito cuando $n = 2$.

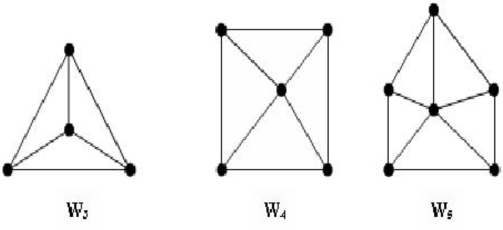








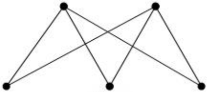
Porque los grafos rueda no son bipartitos:



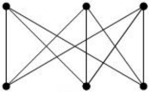
Sea k_3 un grafo completo no bipartito y sea k_3 un subgrafo contenido en los grafos rueda W_n.

Grafo Bipartito Completo

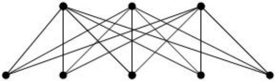
El grafo bipartito completo $K_{m,n}$ es el grafo cuyo conjunto de vértices está formado por dos subconjuntos con m y n vértices, respectivamente, y hay una arista entre dos vértices si, y sólo si, un vértice está en el **primer subconjunto** y el otro vértice está en el **segundo subconjunto**.



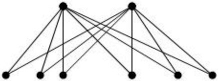
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

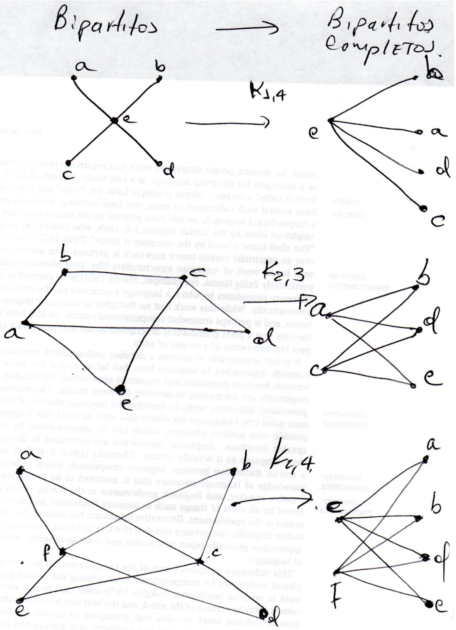


$K_{3,5}$

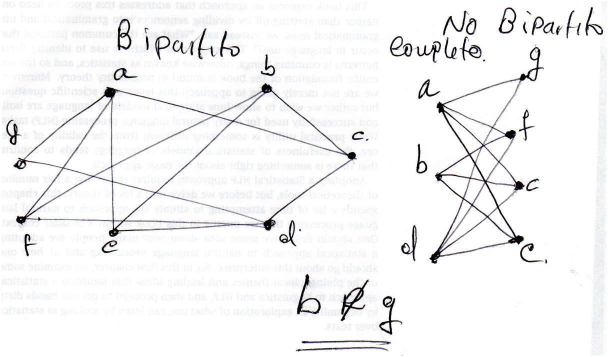


$K_{2,6}$

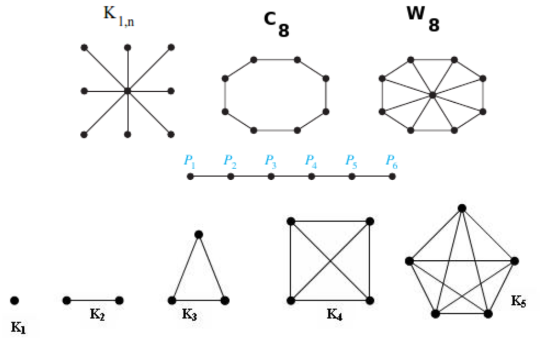
Algunos grafos bipartitos son bipartitos completos



Grafo bipartito que no es bipartito completo



Topologías para redes de área local: ESTRELLA, ANILLO E HIBRIDA y un arreglo lineal de 6 procesdores

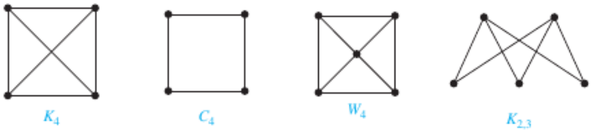


¿Cuántos vértices y cuántas aristas tiene cada uno de los grafos? K_n, C_n, W_n y $K_{n,m}$.
Por ejemplo para K_n el número de vértices es n. El número de aristas según el teorema del apretón de manos (handshaking) es $2e = \sum_{v \in V} \delta(v)$, entonces $e = (n(n-1))/2$ donde $n-1$ es el número de aristas incidentes para cada n vértices.

Secuencia de grado

Se puede encontrar la secuencia del grado de un grafo $G = (V, E)$ que es la secuencia de los grados de los vértices del grafo en orden decreciente.

- Las secuencias de grado de $K_4 = 3, 3, 3, 3, C_4 = 2, 2, 2, 2, W_4 = 4, 3, 3, 3, 3$ y $K_{2,3} = 3, 3, 2, 2, 2$

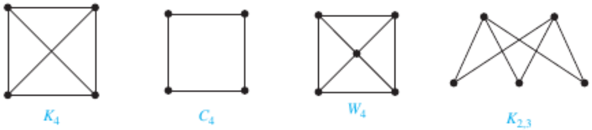


- Cuál es la secuencia de grado de K_n, donde n es un entero positivo.

Secuencia de grado

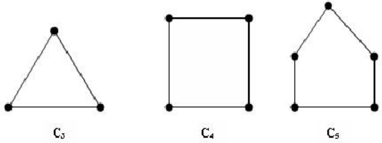
Se puede encontrar la secuencia del grado de un grafo $G = (V, E)$ que es la secuencia de los grados de los vértices del grafo en orden decreciente.

- Las secuencias de grado de $K_4 = 3, 3, 3, 3, C_4 = 2, 2, 2, 2, W_4 = 4, 3, 3, 3, 3$ y $K_{2,3} = 3, 3, 2, 2, 2$

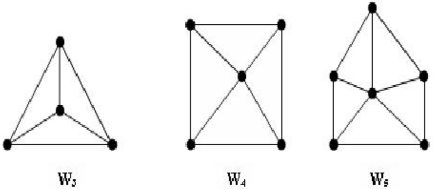


- Cuál es la secuencia de grado de K_n, donde n es un entero positivo. Cada uno de los n vértices es adyacente a cada uno de los otros $n-1$ vértices, así la secuencia del grado es $n-1, n-1, \ldots, n-1$ (n términos)

La secuencia de grados de cualquier C_n es:??

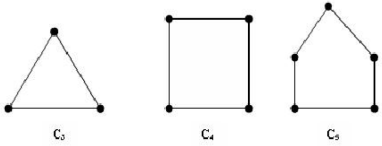


La secuencia de grado de cualquier W_n es: ??

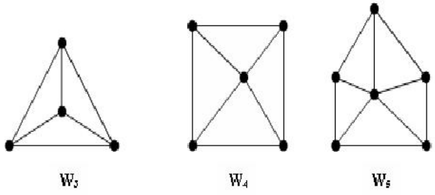


Obtener la secuencia de grado para cualquier $K_{m,n}$

La secuencia de grados de cualquier C_n es $2, 2, 2, \ldots, 2$ (n términos)



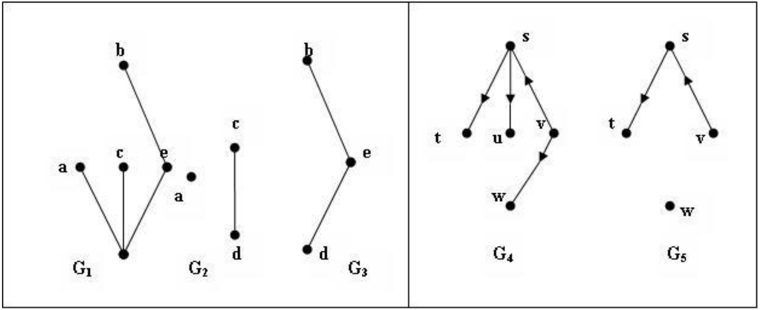
La secuencia de grado de cualquier W_n es $n, \underbrace{3, 3, 3, \ldots, 3}_{(n-t\acute{e}rminos)}$



Obtener la secuencia de grado para cualquier $K_{m,n}$

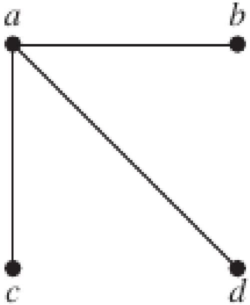
Subgrafo

Si $G = (V, E)$ es un grafo (dirigido o no), $G_1 = (V_1, E_1)$ entonces es un subgrafo de G, si $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$



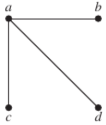
En esta figura G_2 y G_3 son subgrafos de G_1 y en el grafo derecho G_5 es subgrafo de G_4.

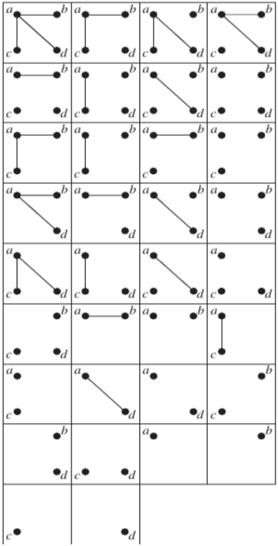
Dibujar todos los subgrafos del siguiente grafo:



Dibujar los 17 subgrafos de K_3 con al menos un vértice.

Dibujar todos los subgrafos del siguiente grafo:

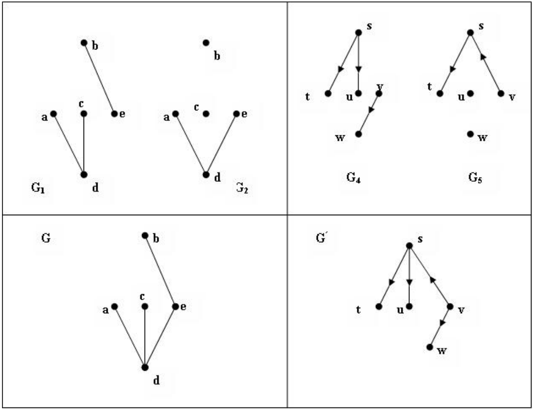




Dibujar los 17 subgrafos de K_3 con al menos un vértice.

Subgrafo recubridor.

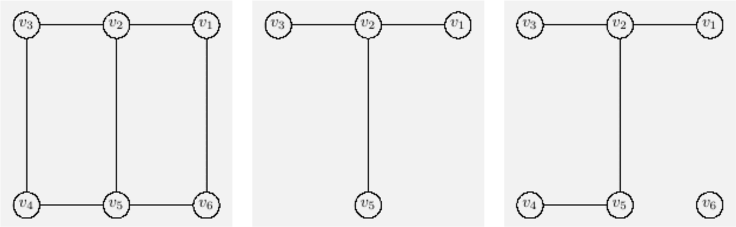
Dado un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$, sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un subgrafo de G. Si $V_1 = V$, entonces G_1 es un subgrafo recubridor de G.



En esta figura G_1 y G_2 son subgrafos recubridores de G y en el grafo derecho G_4 y G_5 son subgrafos recubridores de G'

Subgrafo inducido

Para cualquier subconjunto W de vértices de un grafo $G = (V, E)$, llamaremos subgrafo inducido por W, y lo notaremos $\langle W \rangle$, al subgrafo de G que se obtiene tomando los vértices de W y las aristas de G que son incidentes con ellos.



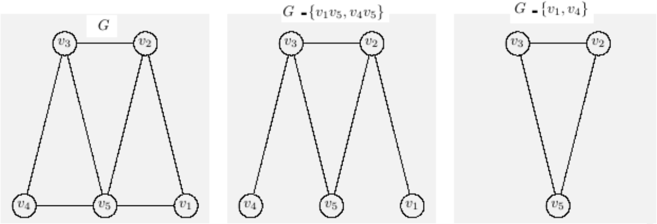
G $\quad$ H_1 $\quad$ H_2

H_1 es un subgrafo inducido ya que $W = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, el subgrafo H_1 contiene todas las aristas de G incidentes con los vértices de W, pero H_2 no lo es ya que faltan las aristas $\{v1, v_6\}$, $\{v3, v_4\}$ y $\{v5, v_6\}$.

Eliminación de aristas y vértices

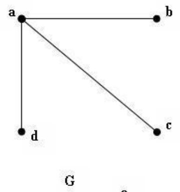
- Sea un arista e del grafo $G = (V, E)$, entonces el subgrafo $G - \{e\}$ es el grafo que se obtiene de G eliminando la arista e. En general, escribimos $G - \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ para determinar el subgrafo que se obtiene de G eliminando las aristas $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ ($V = V_1$).
- Si v es un vértice del grafo G, entonces $G - \{v\}$ es el subgrafo obtenido del G eliminando el vértice v junto con todas las aristas incidentes. En general, se escribe $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ para notar el grafo obtenido eliminando los vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ en G y todas las aristas incidentes con cualquiera de ellos.

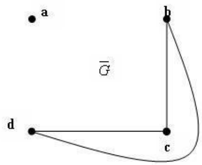
¿Cuál es el grafo inducido sobre G?

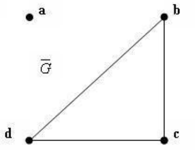


Grafo complementario

Sea G un grafo simple no dirigido sin bucles con n vértices. El complementario de G, se denota como $\overline{G}$. $\overline{G}$ de un grafo simple G tiene los mismos vértices que G. Dos vértices son adyacentes en $\overline{G}$ **sii** estos dos vértices no son adyacentes en G.
Si $G = K_n$, $\overline{G}$ es un grafo con n vértices y ninguna arista. A este grafo se le llama **grafo nulo**.

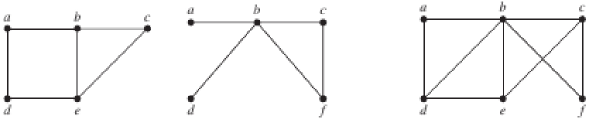






Unión de grafos

La unión de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple con el conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ y el conjunto de aristas $E_1 \cup E_2$. La unión de G_1 y G_2 es denotada por $G_1 \cup G_2$.



G_1 $\quad$ G_2 $\quad$ $G_1 \cup G_2$

Teorema

Si G es un grafo simple con n vértices, entonces la unión de G y $\overline{G}$ es K_n

Dem// La unión de G y $\overline{G}$ contienen una arista entre cada par de n vértices. Por lo tanto, esta unión es K_n.

Ejercicio

Si la secuencia de grado de un grafo simple G es $d_1, d_2, \ldots, d_n$, ¿Cuál es la secuencia de grado de $\overline{G}$?

Problema

Si el grafo simple G tiene v vértices y e aristas, ¿Cuántas aristas tiene $\overline{G}$?

Teorema

Si G es un grafo simple con n vértices, entonces la unión de G y $\overline{G}$ es K_n

Dem// La unión de G y $\overline{G}$ contienen una arista entre cada par de n vértices. Por lo tanto, esta unión es K_n.

Ejercicio

Si la secuencia de grado de un grafo simple G es $d_1, d_2, \ldots, d_n$, ¿Cuál es la secuencia de grado de $\overline{G}$?

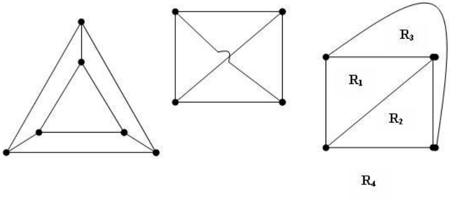
$$n-1-d_n, n-1-d_{n-1}, \ldots, n-1-d_2, n-1-d_1$$

Problema

Si el grafo simple G tiene v vértices y e aristas, ¿Cuántas aristas tiene $\overline{G}$?

Grafo plano.

Un grafo (o multigrafo) G es plano si podemos dibujar G en el plano de modo que sus aristas se intersectan sólo en los vértices de G. Este dibujo se conoce como una inmersión (*embedding*)de G.



Al igual que K_4 también K_1, K_2, K_3 son planos a diferencia de K_5 que no lo es.

Teorema

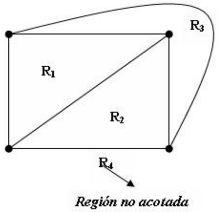
Sea G un grafo simple conexo con e aristas y v vértices. Sea r el número de regiones de una representación plana de G. Entonces, $r = e - v + 2$

Observación

Sea $G = (V, E)$ un grafo plano sin bucles con $| V |= v$, $| E |= e > 2$, y r regiones, entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$

Ejemplo. El grafo K_4, tiene $| V |= 4$, $| E |= 6 > 2$, además cumple con las dos condiciones: (ver grafo)

- $3r \leq 12 \rightarrow r \leq 4$
- $e \leq 3(4) - 6, \quad e \leq 6, 6 \leq 6$



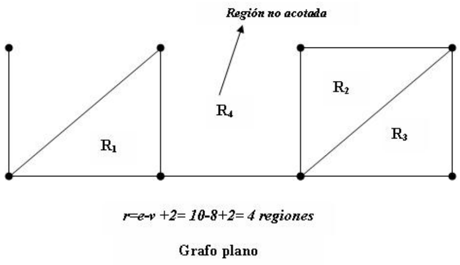
r=e-v+2
r=6-4+2
r=4

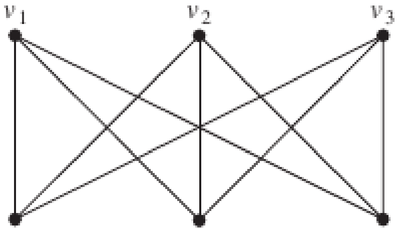
4 regiones

Ejemplo. Sea el grafo K_5, tiene $|\ V\ | = 5$, y $2e = 4 \cdot 5$, $e = 10$ no cumple con la condición:

- $e \leq 3(5) - 6, \quad e \leq 9,\ 10 \leq 9$

Ejemplo. Cálculo de las regiones en un grafo planar.

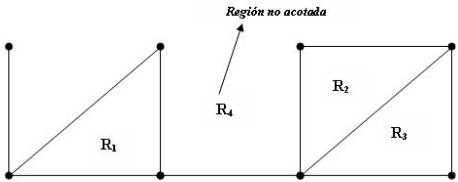




Ejemplo. Sea el grafo K_5, tiene $|V| = 5$, y $2e = 4 \cdot 5$, $e = 10$ no cumple con la condición:

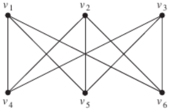
- $e \leq 3(5) - 6, \quad e \leq 9$, $10 \leq 9$

Ejemplo. Cálculo de las regiones en un grafo planar.



r=e-v +2= 10-8+2= 4 regiones

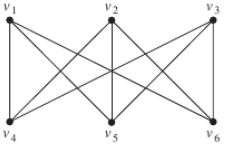
Grafo plano

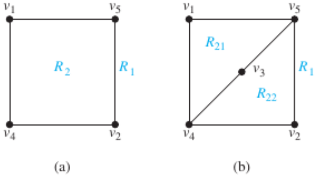


$|V| = 6$ y $|E| = 9$, $e \leq 3(6) - 6$,

$e \leq 12$ **Por lo tanto** $9 \leq 12$

y r????





- Sea v_1, v_4, v_5, v_2 un subgrafo con dos regiones R_1 y R_2 que forman una curva cerrada, entonces, el vértice v_3 estaría en R_1 o en R_2. Cuando v_3 está en R_2 al interior de la curva cerrada, las aristas $\{v_3, v_4\}$ y $\{v_3, v5\}$ separan a R_2 en dos regiones, R_{21} y R_{22}, sigue siendo plano.
- Entonces no hay manera de colocar el vértice v_6 sin cruzar, si v_6 está en R_1, entonces el lado $\{v_3, v_6\}$ no se puede dibujar sin cruzar. Si v_6 está en R_{21}, entonces $\{v_2, v_6\}$ no se puede ser dibujado sin cruzar. Si v_6 está en R_{22}, entonces $\{v_1, v_6\}$ no puede dibujar sin cruzar.
- De manera similar cuando $v_3 \in R_1$.

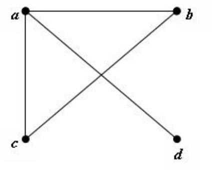
Matriz de Adyacencia

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$, la matriz de adyacencia es la **matriz booleana** de $n \times n$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de G,} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- hay $n!$ matrices de adyacencia distintas para un grafo de n vértices.
- todos los grafos no dirigidos, incluyendo multigrafos, pseudografos, tienen matrices simétricas

Ejemplo. La matriz de adyacencia de un grafo simple



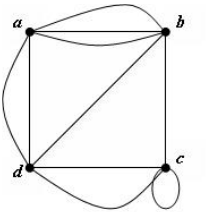
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido con bucles y con aristas paralelas tiene las siguientes características:

- Un bucle en el vértice a_i se representa por medio de un 1 en la posición (i, i) de la matriz.
- Cuando hay aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana, ya que el elemento de la posición (i, j) es igual al número de aristas asociadas a $\{v_i, v_j\}$

Ejemplo. Matriz de adyacencia de un **pseudografo**.

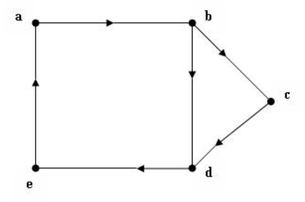


$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adyacencia de un grafo dirigido

La Matriz de adyacencia de un grafo dirigido $G = (V, E)$ tiene 1 en la posición (i, j) si hay arista de v_i a v_j, siendo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido. entonces:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de G,} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

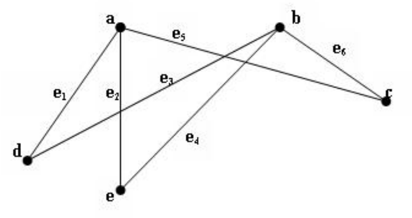


$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE INCIDENCIA

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, supongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vértices y $e_1, e_2, \ldots, e_m$ las aristas de G. Entonces, la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y E es la matriz $M = [m_{ij}]$ de $n \times m$ dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } \{e_j\} \text{ es incidente con } \{v_i\} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teorema

Sea $M_R = (m_{ij})$ *la matriz de adyacencia de un grafo.*

$M_R \bigotimes M_R = M_R^2$

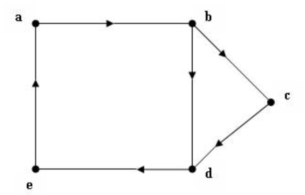
$M_R \bigotimes M_R \bigotimes M_R = M_R^3$

$\vdots$

$$\underbrace{M_R \bigotimes M_R \bigotimes M_R \ldots \bigotimes M_R}_{n} = M_R^n$$

- $\bigotimes$ es el producto booleano.
- 1 en M_R^n en un grafo dirigido significa que se puede ir del nodo i al j recorriendo exactamente n aristas en el grafo.

Ejemplo Sea el siguiente grafo y su matriz de adyacencia.

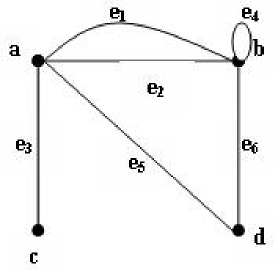


$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

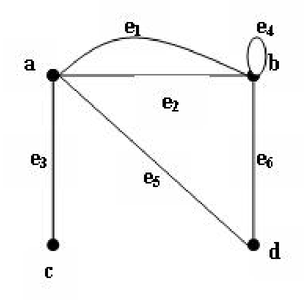
$$\mathbf{M_R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El 1 en $\mathbf{M_R^2}(1,3)$ significa que hay un camino de longitud 2 de a -c: a,b,c.

Ejemplo. Sea el siguiente pseudografo obtener la cuantía de los caminos de longitud 2.



Ejemplo. Sea el siguiente pseudografo obtener la cuantía de los caminos de longitud 2.



$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M_R^2} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

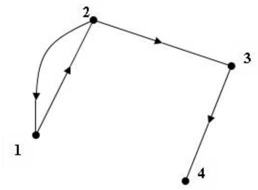
El 6 significa que hay 6 caminos de longitud 2 de a-a:

Matriz de Conectividad

La matriz de conectividad se define como:

$$M_R^{\infty} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \ldots \vee M_R^n$$

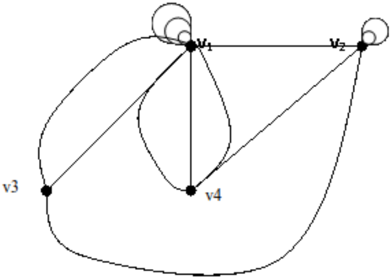
Ejemplo Obtener la matriz de conectividad para el siguiente grafo.



$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M_R^{\infty}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de Pseudografos



	v1	v2	V3	v4
v1	3	1	2	3
v2	1	2	1	1
v3	2	1	0	0
v4	3	1	0	0

Camino

Es una trayectoria que comienza en un vértice v_0 y termina en un vértice v_n donde se pueden repetir aristas y vértices.Un camino se puede representar como una sucesión de vértices $v_0, v_1 \ldots v_{n-1}, v_n$ o como una sucesión de aristas

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2) \ldots (v_{n-1}, v_n)$$

Camino simple

Es un camino que NO repite aristas.

Camino cerrado o circuito

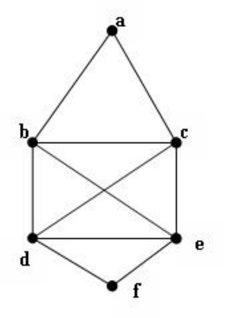
Es un camino que comienza y termina en el mismo vértice y puede repetir aristas y vértices.

Circuito simple

Es un camino cerrado en el que no se pueden repetir aristas.

Longitud de un camino

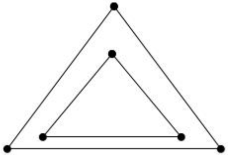
Es el número de aristas que recorre el camino. Un camino de longitud n debe tener $n+1$ vértices. Para el siguiente grafo:

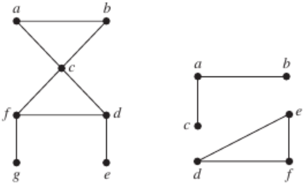


- Un camino simple de longitud 4 que empiece en b: b,a,c,e,f
- Un camino cerrado de longitud 5 que inicie en f: f,d,c,d,e,f
- Un camino de longitud 5 de d-c: d,e,c,d,b,c
- Un circuito simple de longitud 4 que empiece en c: c,b,d,e,c

Grafo conexo

Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido es conexo si para cualquiera $a, b \in V$, existe un camino o trayectoria de cualquier longitud.

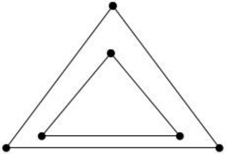




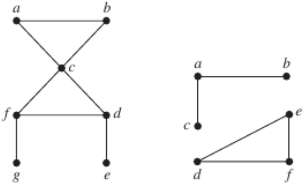
G_1 G_2

Grafo conexo

Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido es conexo si para cualquiera $a, b \in V$, existe un camino o trayectoria de cualquier longitud.



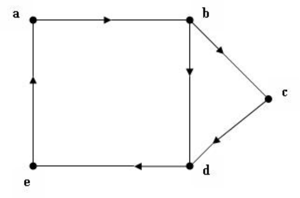
G_1 es conexo y G_2 no es conexo



G_1 G_2

Débilmente conexo

Se dice que un grafo dirigido es *débilmente conexo* si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacente.

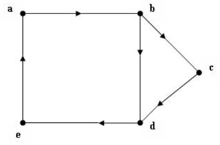


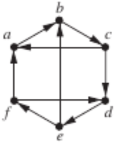
a-b: a,b
b-a: b,d,e,a
a-e: a,b,d,e
e-a: e,a
a-c: a,b,c
c-a: c,d,e,a
a-d: a,b,c,d
d-a: d,e,a
c-b: c,d,b
b-c: b,c

Grafo fuertemente conexo

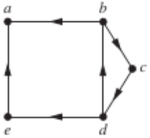
Conexidad en grafos dirigidos

Se dice que un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cualquiera dos vértices a y b en el grafo.





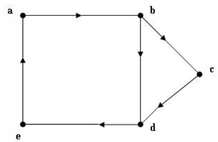
G



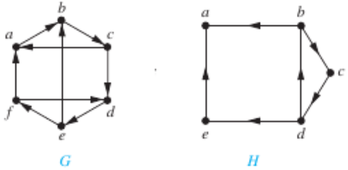
H

Conexidad en grafos dirigidos

Se dice que un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cualquiera dos vértices a y b en el grafo.



H es débilmente conexo y G es fuertemente conexo



Componente conexo

Un grafo que no es conexo, es la unión de 2 o más subgrafos conexos que dos a dos no tienen ningún vértice en común. A estos subgrafos se les denomina *componentes conexas*.

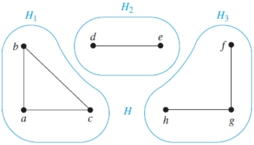
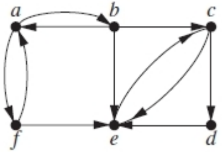


FIGURE 3 The Graph H and Its Connected Components H_1, H_2, and H_3.

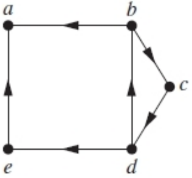
Componente fuertemente conexa

A aquellos subgrafos de un grafo dirigido G que son fuertemente conexos, pero que no están contenidos en un subgrafo fuertemente conexo mayor, se les llama *componentes fuertemente conexas* ó *componentes fuertes* de G.

Componentes fuertemente conexas

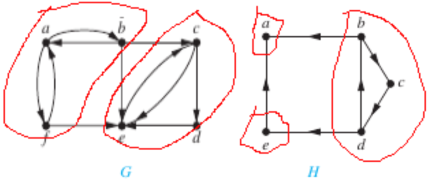


G



H

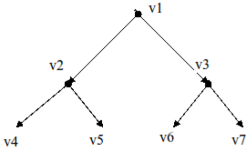
Componentes fuertemente conexas

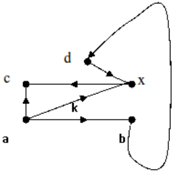


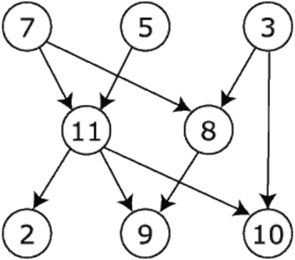
- El grafo H tiene 3 componentes fuertemente conexas; el vértice a y el vértice e por ser subgrafos y el componente que es un subgrafo consistente de los vértices $\{b, c, d\}$
- El grafo G tiene dos componentes fuertemente conexas que son los subgrafos formados por los vértices $\{a, b, f\}$ y $\{c, d, e\}$

Grafo acíclico dirigido

Es un grafo que no tiene ciclos.





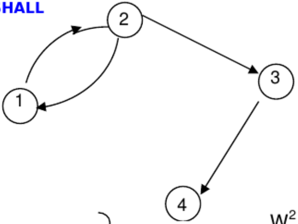


CONECTIVIDAD POR WARSHALL

$W^0 = M_R$

$W^1 = W^0 \vee (W^0_{i1} \wedge W^0_{1j})$ $i,j \geq 1,\ k \leq n$
$W^k = W^{k-1} \vee (W^{k-1}_{ik} \wedge W^{k-1}_{kj})$

$W^n = M_R^{\infty}$



$M_R = W^0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W^1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W^2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W^3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W^4

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

```
SUBROUTINE WARSHALL (M)
FOR K := 1 to N
   FOR I := 1 to N
      FOR J := 1 to N
            M[I,J] := M[I,J] OR M[I,K] AND M[K,J]
END SUBROUTINE;
```

$W^1_{i2} \wedge W^1_{2j}$ **WARSHALL PARA PESOS MÍNIMOS**

$$W^1 = W^0 \vee (W^0_{i1} \wedge W^0_{1j}) \quad i,j \geq 1,\ k \leq n$$
$$W^k = W^{k-1} \vee (W^{k-1}_{ik} \wedge W^{k-1}_{kj})$$

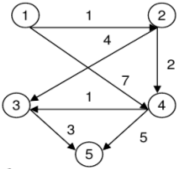
$$W^n = M_R^{\infty}$$

$\infty \wedge n = \infty$

$\infty \vee n = n$

$n_1 \wedge n_2 = n_1 + n_2$

$n_1 \vee n_2 = \text{Mín}(n_1\ n_2)$



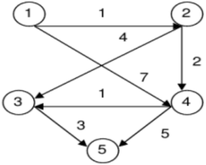
$W^1_{i2} \wedge W^1_{2j}$

$$W^0 = W^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 7 & \infty \\ \infty & 0 & 4 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \infty & 0 & 4 & 2 & \infty \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 5 & 3 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

$$W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 8 \\ \infty & 0 & 4 & 2 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 7 & \infty \\ \infty & 0 & 4 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \infty & 0 & 5 & 3 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & \infty \\ \infty & 0 & 4 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad W^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ \infty & 0 & 3 & 2 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad W^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ \infty & 0 & 3 & 2 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

WARSHALL CON PESOS MÍNIMOS Y TRAYECTORIAS



$W^0=W^1$

$$M_R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 7 & \infty \\ \infty & 0 & 4 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad P^0=P^1=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

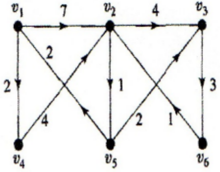
$$W^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5^* & 3^* & \infty \\ \infty & 0 & 4 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad P^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 8^* \\ \infty & 0 & 4 & 2 & 7^* \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 4^* \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad P^3=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4^* & 3 & 7^* \\ \infty & 0 & 3^* & 2 & 6^* \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{P^4=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

como $W^4=W^5$ entonces $P^4=P^5$.

$$W^5=\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ \infty & 0 & 3 & 2 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}}$$

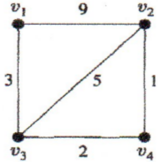


$$W = W_0 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_0 \neq W_1$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 9^* & 2 & 4^* & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 11^* & 2 & 8^* & \infty \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 8^* & \infty & 5^* & \infty \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10^* & \infty \\ \infty & 1 & 5^* & \infty & 2^* & \infty \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 11 & 2 & 8 & 14^* \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & 7^* \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 8 & \infty & 5 & 11^* \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10 & 5^* \\ \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & 8^* \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad W_4 = \begin{bmatrix} \infty & 6^* & 10^* & 2 & 7^* & 13^* \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 8 & \infty & 5 & 11 \\ 2 & 8^* & 2 & 4 & 9^* & 5 \\ \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W_5 = \begin{bmatrix} 9^* & 6 & 9^* & 2 & 7 & 12^* \\ 3^* & 9^* & 3^* & 5^* & 1 & 6^* \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 7^* & 4 & 7^* & 9^* & 5 & 10^* \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 4^* & 1 & 4^* & 6^* & 2 & 7^* \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad W^* = W_6 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 7^* & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 7^* & 4^* & 7^* & 9^* & 5^* & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & 6^* & 2 & 4 & 7^* & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad P^* = P_6 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 & \infty \\ 9 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

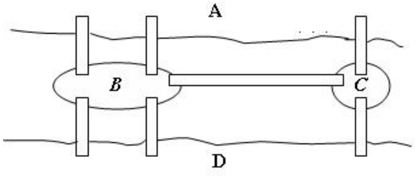
$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 & 10^* \\ 9 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 10^* & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

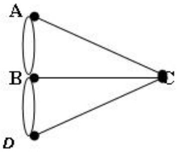
$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 8^* & 3 & 5^* \\ 8^* & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 5^* & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 6^* & 3 & 5 \\ 6^* & 0 & 3^* & 1 \\ 3 & 3^* & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^* = \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema de los puentes de Königsberg

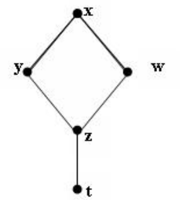
Partir de cualquier lugar (A,B,C y D) caminar sobre cada puente exactamente una vez y regresar a la posición inicial de partida.



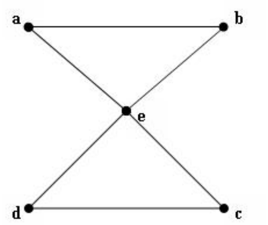


circuito de Euler

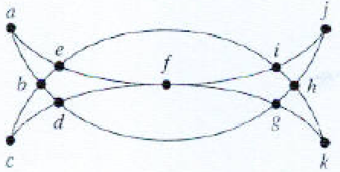
Un **circuito de Euler** en un grafo G es un *circuito simple* que pasa exactamente una vez por cada arista de G. Un **camino de Euler** en G es un camino simple que pasa exactamente una vez por cada arista.



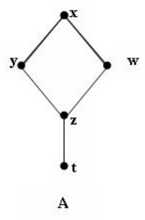
A

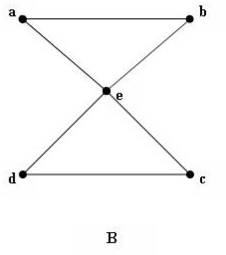


B



G

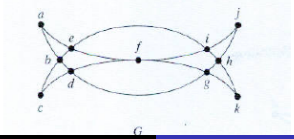




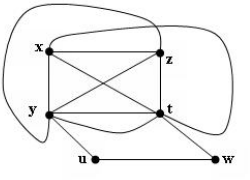
En el grafo A hay una *camino de Euler* t,z,w,x,y,z se pueden repetir vértices pero no aristas. En el grafo B hay un circuito euleriano: a,e,c,d,e,b,a

Teorema

*Un **pseudografo** conexo contiene un circuito euleriano si y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par.*

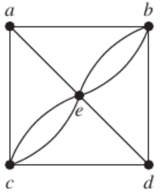


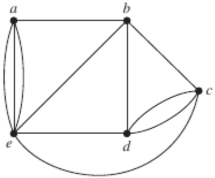
Ejemplo. Sea el siguiente grafo tiene un circuito euleriano
z,y,t,y,x,z,t,x,t,w,u,y,z



$\delta(u) = 2$
$\delta(w) = 2$
$\delta(y) = 6$
$\delta(t) = 6$
$\delta(z) = 4$
$\delta(x) = 4$

Hay camino de Euler y circuito de Euler

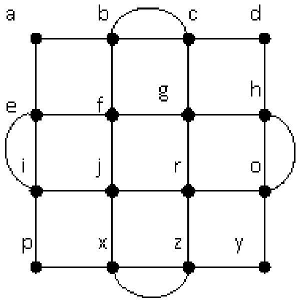




a,e,c,e,b,e,d,b,a,c,d

a,b,c,d,c,e,d,b,e,a,e,a

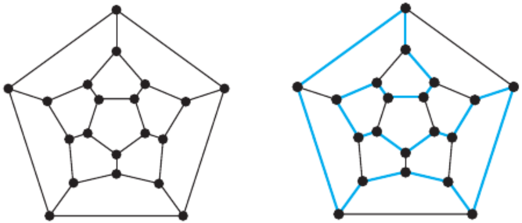
Un circuito de Euler.



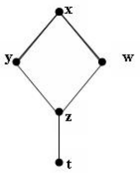
Circuito de Euler: a,b,c,b,f,g,c,d,h,g,r,o,h,o,y,z,r,j,x,z,x,p,i,j,f,e,i,e,a

Circuito de Hamilton

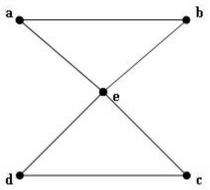
Un **camino de Hamilton** en un grafo G es un *camino simple* que pasa exactamente una vez por cada vértice, y un **circuito de Hamilton** en un grafo G es un *circuito simple* que pasa exactamente una vez por cada vértice. Es decir, el camino simple $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ en el grafo $G = (V, E)$ es un camino de Hamilton si $V = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$, y un circuito simple $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_0$ $(n > 0)$ es un circuito de Hamilton si $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ es un camino de Hamilton.



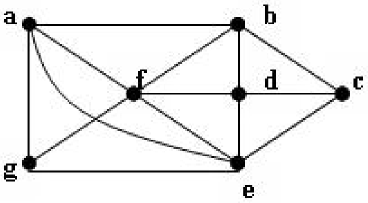
20 ciudades son visitadas pasando exactamente una vez.

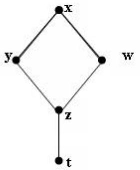


A

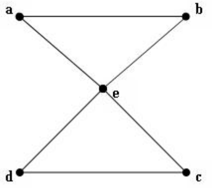


B



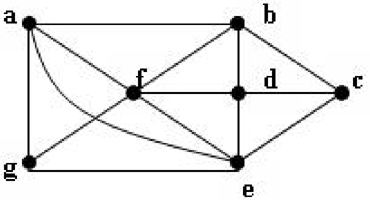


A



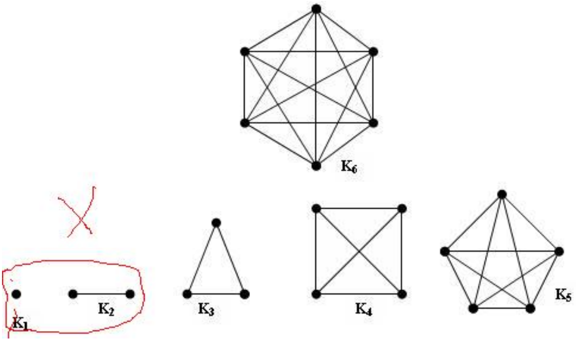
B

El grafo A tiene un camino hamiltoniano t,z,y,x,w y el grafo B tiene un camino hamiltoniano a,b,e,d,c. Ninguno de los dos grafos tiene circuito hamiltoniano.El siguiente grafo tiene el circuito hamiltoniano a,b,c,d,e,f,g,a



Hamilton y K_n

Muestre que K_n tiene un circuito de Hamilton siempre que $n \geq 3$

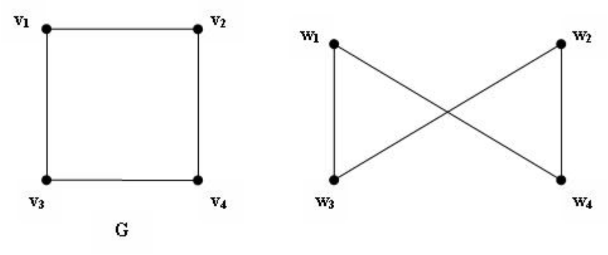


De los circuitos especiales se puede decir:

- Que son *circuitos simples*. En el caso del circuito de Euler se pueden repetir vértices pero en el caso del cicuito de Hamilton NO.
- Los caminos especiales son *caminos simples*. En el camino de Euler se pueden repetir vértices. Pero en el camino de Hamilton no se pueden repetir vértices.

Isomorfismos de Grafos

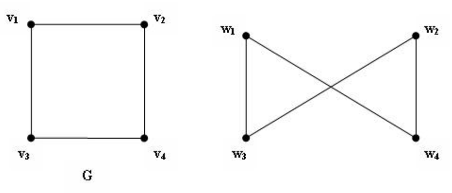
Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son `isomorfos` si hay una función biyectiva f de V_1 en V_2 con la propiedad de que, para cada par de vértices $u, v \in V_1$, u y v son adyacentes en G_1 si, y sólo si, $f(u)$ y $f(v)$ son adyacentes en G_2. Se dice que esta función f es un isomorfismo.



Isomorfismos de Grafos

Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son `isomorfos` si hay una función biyectiva f de V_1 en V_2 con la propiedad de que, para cada par de vértices $u, v \in V_1$, u y v son adyacentes en G_1 si, y sólo si, $f(u)$ y $f(v)$ son adyacentes en G_2. Se dice que esta función f es un isomorfismo.

Ejemplo. Los grafos $G = (V, E)$ y $H = (W, F)$ en la siguiente figura son isomorfos.



La función f con $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_4, f(v_3) = w_3, f(v_4) = w_2$

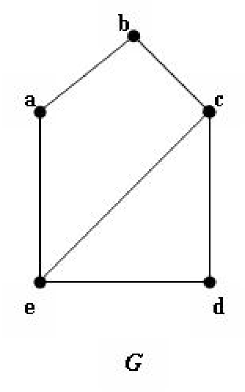
Definición 2.

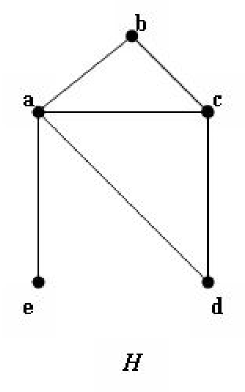
Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Una función $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es un isomorfismo de grafos si:

1. f es inyectiva y sobreyectiva.
2. $\forall a, b \in V_1, \{a, b\} \in E_1$ si y sólo si $\{f(a), f(b)\} \in E_2$.

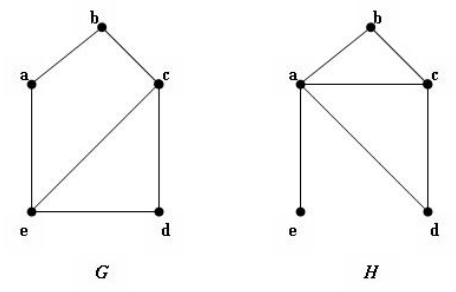
Cuando existe tal función f se dice que G_1 y G_2 son isomorfos.

Ejemplo. Sean los grafos G y H son isomorfos?





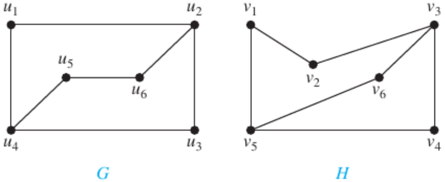
Ejemplo. Sean los grafos G y H son isomorfos?



No son isomorfos por varias razones:

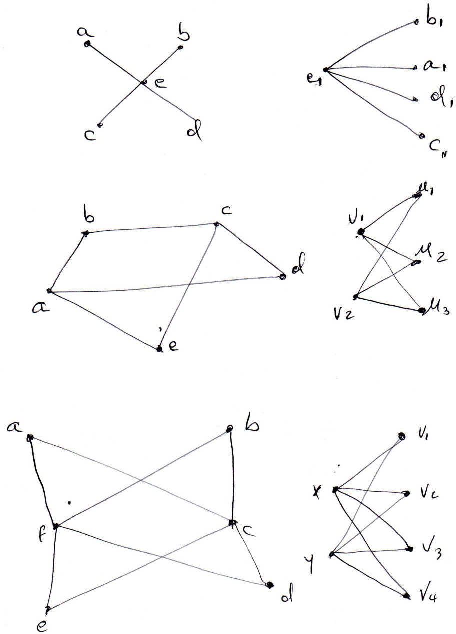
- H tiene el vértice e de grado 1, mientras que G no tiene.
- Si cualquiera de estas cantidades toma valores diferentes en dos grafos simples, dichos grafos simples no pueden ser isomorfos.
- Ahora el que estas cantidades sean iguales no garantiza que los grafos G y H sean isomorfos.

Ejemplo. Determinar si H y G son isomorfos.

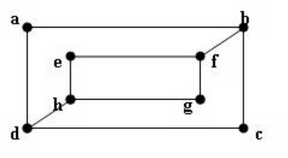


$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

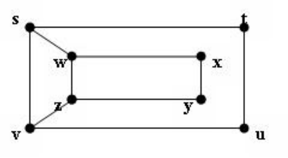
Isomorfismos



Ejemplo. Sean los grafos G y H son isomorfos?

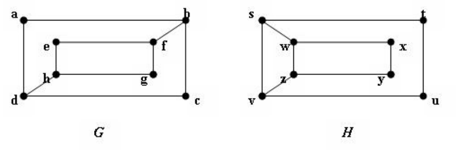


G



H

Ejemplo. Sean los grafos G y H son isomorfos?



- No son isomorfos por que por ejemplo $\delta(a) = 2$ en G y si observamos a debería corresponder con los vértices $t, u, x,$ o y de H, ya que estos son los vértices de grado dos de H. Sin embargo, cada uno de estos cuatro vértices de H son adyacentes a otros de grado dos, lo que no es cierto en a. Pasa lo mismo con c, g, e en G
- Los mejores algoritmos para determinar si dos grafos son isomorfos tienen complejidad exponencial en el peor caso.
- El mejor algoritmmo capaz de determinar si dos grafos son isomormos con 100 vértices es el NAUTY y se consigue en internet.

Determine si los siguientes par de grafos son isomorfismos, si lo son encuentre una función de correspondencia entre los vértices de cada uno de los grafos.