Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Método de variación de parámetros

Consideremos la ecuación lineal de orden dos no homogénea en forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

Método de variación de parámetros

Consideremos la ecuación lineal de orden dos no homogénea en forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

Sean y_1 y y_2 dos soluciones lienalmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1).

Método de variación de parámetros

Consideremos la ecuación lineal de orden dos no homogénea en forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

Sean y_1 y y_2 dos soluciones lienalmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1). El método de variación de parámetros consiste en encontrar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x), \tag{2}$$

Método de variación de parámetros

Consideremos la ecuación lineal de orden dos no homogénea en forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

Sean y_1 y y_2 dos soluciones lienalmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1). El método de variación de parámetros consiste en encontrar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x), \tag{2}$$

donde v_1 y v_2 son funciones dos veces diferenciables desconocidas.

Método de variación de parámetros

Consideremos la ecuación lineal de orden dos no homogénea en forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

Sean y_1 y y_2 dos soluciones lienalmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1). El método de variación de parámetros consiste en encontrar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x), \tag{2}$$

donde v_1 y v_2 son funciones dos veces diferenciables desconocidas.

El método de variación de los parámetros se debe a Lagrange y es más general que el método de los coeficientes indeterminados.

Método de variación de parámetros

Consideremos la ecuación lineal de orden dos no homogénea en forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

Sean y_1 y y_2 dos soluciones lienalmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1). El método de variación de parámetros consiste en encontrar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x), \tag{2}$$

donde v_1 y v_2 son funciones dos veces diferenciables desconocidas.

El método de variación de los parámetros se debe a Lagrange y es más general que el método de los coeficientes indeterminados. Lo anterior debido a que funciona para cualquier término no homogéneo $g(x)$ y cuando los coeficientes p y q no necesariamente son constantes.

Método de variación de parámetros

Consideremos la ecuación lineal de orden dos no homogénea en forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{1}$$

Sean y_1 y y_2 dos soluciones lienalmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1). El método de variación de parámetros consiste en encontrar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x), \tag{2}$$

donde v_1 y v_2 son funciones dos veces diferenciables desconocidas.

El método de variación de los parámetros se debe a Lagrange y es más general que el método de los coeficientes indeterminados. Lo anterior debido a que funciona para cualquier término no homogéneo $g(x)$ y cuando los coeficientes p y q no necesariamente son constantes.

Tiene la desventaja que a veces aparecen integrales difíciles de calcular.

Dado que necesitamos encontrar v_1 y v_2 encontraremos una relación derivamos y_p y sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

Dado que necesitamos encontrar v_1 y v_2 encontraremos una relación derivamos y_p y sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'.$$

Dado que necesitamos encontrar v_1 y v_2 encontraremos una relación derivamos y_p y sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'.$$

Otra relación la obtenemos al introducir

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0, \tag{3}$$

Dado que necesitamos encontrar v_1 y v_2 encontraremos una relación derivamos y_p y sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'.$$

Otra relación la obtenemos al introducir

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0, \tag{3}$$

la cual tiene por fin simplificar y evitar derivadas de segundo orden de v_1 y v_2.

Dado que necesitamos encontrar v_1 y v_2 encontraremos una relación derivamos y_p y sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'.$$

Otra relación la obtenemos al introducir

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0, \tag{3}$$

la cual tiene por fin simplificar y evitar derivadas de segundo orden de v_1 y v_2.

Se sigue de (3) que

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$$

Dado que necesitamos encontrar v_1 y v_2 encontraremos una relación derivamos y_p y sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'.$$

Otra relación la obtenemos al introducir

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0, \tag{3}$$

la cual tiene por fin simplificar y evitar derivadas de segundo orden de v_1 y v_2.

Se sigue de (3) que

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$$

y

$$y_p'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2''.$$

Dado que necesitamos encontrar v_1 y v_2 encontraremos una relación derivamos y_p y sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'.$$

Otra relación la obtenemos al introducir

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0, \tag{3}$$

la cual tiene por fin simplificar y evitar derivadas de segundo orden de v_1 y v_2.

Se sigue de (3) que

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$$

y

$$y_p'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2''.$$

Sustituyendo en la ecuación (1) tenemos que

$$v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' + p v_1 y_1' + p v_2 y_2' + q v_1 y_1 + q v_2 y_2 = g.$$

Reordenando, tenemos que

$$v_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + v_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + v_1'y_1' + v_2'y_2' = g$$

Reordenando, tenemos que

$$v_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + v_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + v_1'y_1' + v_2'y_2' = g$$

Recordando que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1)

Reordenando, tenemos que

$$v_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + v_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + v_1'y_1' + v_2'y_2' = g$$

Recordando que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1) tenemos que

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = g. \tag{4}$$

Reordenando, tenemos que

$$v_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + v_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + v_1'y_1' + v_2'y_2' = g$$

Recordando que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1) tenemos que

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = g. \tag{4}$$

En conclusión debemos hallar funciones v_1 y v_2 satisfacen las ecuaciones (3) y (4),

Reordenando, tenemos que

$$v_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + v_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + v_1'y_1' + v_2'y_2' = g$$

Recordando que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1) tenemos que

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = g. \tag{4}$$

En conclusión debemos hallar funciones v_1 y v_2 satisfacen las ecuaciones (3) y (4), es decir, resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= g \end{aligned}$$

Reordenando, tenemos que

$$v_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + v_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + v_1'y_1' + v_2'y_2' = g$$

Recordando que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1) tenemos que

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = g. \tag{4}$$

En conclusión debemos hallar funciones v_1 y v_2 satisfacen las ecuaciones (3) y (4), es decir, resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= g \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema anterior con el método de Cramer tenemos que

$$v_1' = -\frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)}$$

Resolviendo el sistema anterior con el método de Cramer tenemos que

$$v_1' = -\frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)},$$

Resolviendo el sistema anterior con el método de Cramer tenemos que

$$v_1' = -\frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)},$$

donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano, el cual no es nulo debido a que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1).

Resolviendo el sistema anterior con el método de Cramer tenemos que

$$v_1' = -\frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)},$$

donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano, el cual no es nulo debido a que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1).
Integrando obtenemos

$$v_1 = -\int \frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} dx$$

Resolviendo el sistema anterior con el método de Cramer tenemos que

$$v_1' = -\frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)},$$

donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano, el cual no es nulo debido a que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1).

Integrando obtenemos

$$v_1 = -\int \frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad v_2 = \int \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)} dx$$

Resolviendo el sistema anterior con el método de Cramer tenemos que

$$v_1' = -\frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)},$$

donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano, el cual no es nulo debido a que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1).
Integrando obtenemos

$$v_1 = -\int \frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad v_2 = \int \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)} dx$$

y sustituyéndolos en (2) obtenemos la función y_p deseada.

Resolviendo el sistema anterior con el método de Cramer tenemos que

$$v_1' = -\frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)},$$

donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano, el cual no es nulo debido a que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1).
Integrando obtenemos

$$v_1 = -\int \frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad v_2 = \int \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)} dx$$

y sustituyéndolos en (2) obtenemos la función y_p deseada.

Nota: Podemos escoger las constantes de integración como cero, ya que si no fueran cero al multiplicar por y_1 e y_2 aparecerían términos que ya están representados en la solución general de la homogénea.

Resolviendo el sistema anterior con el método de Cramer tenemos que

$$v_1' = -\frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)},$$

donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano, el cual no es nulo debido a que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1).
Integrando obtenemos

$$v_1 = -\int \frac{y_2 g}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad v_2 = \int \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)} dx$$

y sustituyéndolos en (2) obtenemos la función y_p deseada.

Nota: Podemos escoger las constantes de integración como cero, ya que si no fueran cero al multiplicar por y_1 e y_2 aparecerían términos que ya están representados en la solución general de la homogénea.

Nota: Recordar que el método de variación de parámetros funciona con la ecuación diferencial en forma normal.

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$,

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$, por tanto $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-2x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$, por tanto $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-2x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-2x}.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$, por tanto $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-2x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-2x}.$$

Luego

$$v_1' = -\frac{e^{-2x}xe^x}{-2e^{-2x}}$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$, por tanto $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-2x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-2x}.$$

Luego

$$v_1' = -\frac{e^{-2x}xe^x}{-2e^{-2x}} = \frac{x}{2}e^x$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$, por tanto $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-2x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-2x}.$$

Luego

$$v_1' = -\frac{e^{-2x} xe^x}{-2e^{-2x}} = \frac{x}{2}e^x \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{xe^x}{-2e^{-2x}}$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + 2y' = xe^x.$$

Tenemos que la ecuación $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ tiene soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$, por tanto $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-2x}$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-2x}.$$

Luego

$$v_1' = -\frac{e^{-2x}xe^x}{-2e^{-2x}} = \frac{x}{2}e^x \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{xe^x}{-2e^{-2x}} = -\frac{x}{2}e^{3x}.$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2}$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2} \quad \text{y}$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2} \quad \text{y} \quad v_2 = -\frac{x}{6}e^{3x} + \frac{e^{3x}}{18}.$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2} \quad \text{y} \quad v_2 = -\frac{x}{6}e^{3x} + \frac{e^{3x}}{18}.$$

Concluimos que

$$y_p \quad = (\tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2})1 + (-\tfrac{x}{6}e^{3x} + \tfrac{e^{3x}}{18})e^{-2x}$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2} \quad \text{y} \quad v_2 = -\frac{x}{6}e^{3x} + \frac{e^{3x}}{18}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} y_p &= (\tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2})1 + (-\tfrac{x}{6}e^{3x} + \tfrac{e^{3x}}{18})e^{-2x} \\ &= \tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2} + -\tfrac{x}{6}e^x + \tfrac{e^x}{18} \end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2} \quad \text{y} \quad v_2 = -\frac{x}{6}e^{3x} + \frac{e^{3x}}{18}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} y_p &= (\tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2})1 + (-\tfrac{x}{6}e^{3x} + \tfrac{e^{3x}}{18})e^{-2x} \\ &= \tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2} + -\tfrac{x}{6}e^x + \tfrac{e^x}{18} \\ &= e^x \left(\tfrac{2}{6}x - \tfrac{8}{18}\right) \end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2} \quad \text{y} \quad v_2 = -\frac{x}{6}e^{3x} + \frac{e^{3x}}{18}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} y_p &= (\tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2})1 + (-\tfrac{x}{6}e^{3x} + \tfrac{e^{3x}}{18})e^{-2x} \\ &= \tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2} + -\tfrac{x}{6}e^x + \tfrac{e^x}{18} \\ &= e^x\left(\tfrac{2}{6}x - \tfrac{8}{18}\right) \\ &= e^x\left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{4}{9}\right). \end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2} \quad \text{y} \quad v_2 = -\frac{x}{6}e^{3x} + \frac{e^{3x}}{18}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} y_p &= (\tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2})1 + (-\tfrac{x}{6}e^{3x} + \tfrac{e^{3x}}{18})e^{-2x} \\ &= \tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2} + -\tfrac{x}{6}e^x + \tfrac{e^x}{18} \\ &= e^x\left(\tfrac{2}{6}x - \tfrac{8}{18}\right) \\ &= e^x\left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{4}{9}\right). \end{aligned}$$

La cual coincidió con la respuesta encontrada con el método de coeficientes indeterminados.

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \frac{x}{2}e^x - \frac{e^x}{2} \quad \text{y} \quad v_2 = -\frac{x}{6}e^{3x} + \frac{e^{3x}}{18}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} y_p &= (\tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2})1 + (-\tfrac{x}{6}e^{3x} + \tfrac{e^{3x}}{18})e^{-2x} \\ &= \tfrac{x}{2}e^x - \tfrac{e^x}{2} + -\tfrac{x}{6}e^x + \tfrac{e^x}{18} \\ &= e^x\left(\tfrac{2}{6}x - \tfrac{8}{18}\right) \\ &= e^x\left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{4}{9}\right). \end{aligned}$$

La cual coincidió con la respuesta encontrada con el método de coeficientes indeterminados. La solución general es

$$y = C_1 + C_2e^{3x} + e^x\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right)$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + y = sec\, x.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + y = sec\, x.$$

Tenemos que la ecuación auxiliar $r^2 + 1 = 0$ tiene soluciones complejas i y $-i$,

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + y = sec\, x.$$

Tenemos que la ecuación auxiliar $r^2 + 1 = 0$ tiene soluciones complejas i y $-i$, por tanto $y_1 = cos\, x$ y $y_2 = sen\, x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + y = sec\, x.$$

Tenemos que la ecuación auxiliar $r^2 + 1 = 0$ tiene soluciones complejas i y $-i$, por tanto $y_1 = cos\, x$ y $y_2 = sen\, x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} cos\, x & sen\, x \\ -sen\, x & cos\, x \end{vmatrix} = 1.$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + y = sec\, x.$$

Tenemos que la ecuación auxiliar $r^2 + 1 = 0$ tiene soluciones complejas i y $-i$, por tanto $y_1 = cos\, x$ y $y_2 = sen\, x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} cos\, x & sen\, x \\ -sen\, x & cos\, x \end{vmatrix} = 1.$$

Luego

$$v_1' = -\frac{sec\, x\, sen\, x}{1}$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + y = sec\, x.$$

Tenemos que la ecuación auxiliar $r^2 + 1 = 0$ tiene soluciones complejas i y $-i$, por tanto $y_1 = cos\, x$ y $y_2 = sen\, x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} cos\, x & sen\, x \\ -sen\, x & cos\, x \end{vmatrix} = 1.$$

Luego

$$v_1' = -\frac{sec\, x\, sen\, x}{1} = -\frac{sen\, x}{cos\, x}$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + y = sec\, x.$$

Tenemos que la ecuación auxiliar $r^2 + 1 = 0$ tiene soluciones complejas i y $-i$, por tanto $y_1 = cos\, x$ y $y_2 = sen\, x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} cos\, x & sen\, x \\ -sen\, x & cos\, x \end{vmatrix} = 1.$$

Luego

$$v_1' = -\frac{sec\, x\, sen\, x}{1} = -\frac{sen\, x}{cos\, x} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{sec\, x\, cos\, x}{1}$$

Ejemplo

Halle una solución particular de

$$y'' + y = sec\, x.$$

Tenemos que la ecuación auxiliar $r^2 + 1 = 0$ tiene soluciones complejas i y $-i$, por tanto $y_1 = cos\, x$ y $y_2 = sen\, x$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada.
Tenemos que el Wronskiano es

$$\begin{vmatrix} cos\, x & sen\, x \\ -sen\, x & cos\, x \end{vmatrix} = 1.$$

Luego

$$v_1' = -\frac{sec\, x\, sen\, x}{1} = -\frac{sen\, x}{cos\, x} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{sec\, x\, cos\, x}{1} = 1.$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \ln |cosx|$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \ln |cosx| \quad \text{y}$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \ln|cosx| \quad \text{y} \quad v_2 = x.$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \ln|cosx| \quad \text{y} \quad v_2 = x.$$

Concluimos que

$$y_p = (\ln|cosx|)cos\,x + xsen\,x$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \ln|cosx| \quad \text{y} \quad v_2 = x.$$

Concluimos que

$$y_p = (\ln|cosx|)cos\,x + xsen\,x$$

Por tanto, la solución general es

$$y = C_1 cos\,x + C_2 sen\,x + (\ln|cosx|)cos\,x + xsen\,x.$$

Integrando por partes tenemos que

$$v_1 = \ln|cosx| \quad \text{y} \quad v_2 = x.$$

Concluimos que

$$y_p = (\ln|cosx|)cos\,x + xsen\,x$$

Por tanto, la solución general es

$$y = C_1 cos\,x + C_2 sen\,x + (\ln|cosx|)cos\,x + xsen\,x.$$

Esta solución no puede ser encontrada con el método de coeficientes indeterminados.

Una ecuaciones de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{5}$$

Una ecuaciones de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{5}$$

donde a, b y c son constantes reales.

Una ecuaciones de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{5}$$

donde a, b y c son constantes reales.
En la forma normal tenemos la ecuación (5)

$$y'' + \frac{b}{ax}y' + \frac{c}{ax^2}y = h(x). \tag{6}$$

Ecuaciones de Cauchy-Euler

Una ecuaciones de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{5}$$

donde a, b y c son constantes reales.
En la forma normal tenemos la ecuación (5)

$$y'' + \frac{b}{ax}y' + \frac{c}{ax^2}y = h(x). \tag{6}$$

Con las notaciones previas tenemos que $P(x) = \frac{b}{ax}$, $Q(x) = \frac{c}{ax^2}$.

Ecuaciones de Cauchy-Euler

Una ecuaciones de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{5}$$

donde a, b y c son constantes reales.
En la forma normal tenemos la ecuación (5)

$$y'' + \frac{b}{ax}y' + \frac{c}{ax^2}y = h(x). \tag{6}$$

Con las notaciones previas tenemos que $P(x) = \frac{b}{ax}$, $Q(x) = \frac{c}{ax^2}$.
Dependiendo de h el teorema de existencia y unicidad aplica para soluciones con $x > 0$ o $x < 0$.

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes.

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes. En este caso buscamos soluciones donde $x > 0$.

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes. En este caso buscamos soluciones donde $x > 0$.

Tenemos que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ y por regla de la cadena se sigue

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes. En este caso buscamos soluciones donde $x > 0$.

Tenemos que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ y por regla de la cadena se sigue

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes. En este caso buscamos soluciones donde $x > 0$.

Tenemos que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ y por regla de la cadena se sigue

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t.$$

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes. En este caso buscamos soluciones donde $x > 0$.

Tenemos que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ y por regla de la cadena se sigue

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t.$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}. \tag{7}$$

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes. En este caso buscamos soluciones donde $x > 0$.

Tenemos que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ y por regla de la cadena se sigue

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t.$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}. \tag{7}$$

Similarmente,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx})$$

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes. En este caso buscamos soluciones donde $x > 0$.

Tenemos que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ y por regla de la cadena se sigue

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t.$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}. \tag{7}$$

Similarmente,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx}) = e^t\frac{dy}{dx} + e^t\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}$$

Método 1

Hacemos el cambio de variables $x = e^t$ y así podemos tener $y = y(t)$, transformando la ecuación (5) en una ecuación con coeficientes constantes. En este caso buscamos soluciones donde $x > 0$.

Tenemos que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ y por regla de la cadena se sigue

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t.$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}. \tag{7}$$

Similarmente,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(e^t\frac{dy}{dx}) = e^t\frac{dy}{dx} + e^t\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + e^{2t}\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{8}$$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Recordando que $x = e^t$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Recordando que $x = e^t$ y sustituyendo $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Recordando que $x = e^t$ y sustituyendo $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ tenemos

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy \quad = ae^{2t}\left(e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) + be^t(\frac{dy}{dt}e^{-t}) + cy$$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Recordando que $x = e^t$ y sustituyendo $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= ae^{2t}\left(e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) + be^t(\frac{dy}{dt}e^{-t}) + cy \\ &= a\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{dy}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cy \end{aligned}$$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Recordando que $x = e^t$ y sustituyendo $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= ae^{2t}\left(e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) + be^t(\frac{dy}{dt}e^{-t}) + cy \\ &= a\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{dy}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cy \\ &= a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy. \end{aligned} \tag{10}$$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Recordando que $x = e^t$ y sustituyendo $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= ae^{2t}\left(e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) + be^t(\frac{dy}{dt}e^{-t}) + cy \\ &= a\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{dy}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cy \\ &= a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy. \end{aligned} \tag{10}$$

De lo anterior, la ecuación (5) toma la forma

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = f(t), \tag{11}$$

Despejando tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{9}$$

Recordando que $x = e^t$ y sustituyendo $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= ae^{2t}\left(e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) + be^t\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) + cy \\ &= a\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{dy}{dt} + b\frac{dy}{dt} + cy \\ &= a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy. \end{aligned} \tag{10}$$

De lo anterior, la ecuación (5) toma la forma

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = f(t), \tag{11}$$

donde $f(t) = g(e^t)$.

La ecuación (11) es una ecuación de coeficientes constantes y se pueden utilizar los métodos conocidos previamente para obtener $y(t)$.

La ecuación (11) es una ecuación de coeficientes constantes y se pueden utilizar los métodos conocidos previamente para obtener $y(t)$.

Usando que $t = \ln x$, podemos encontrar $y(x)$.

La ecuación (11) es una ecuación de coeficientes constantes y se pueden utilizar los métodos conocidos previamente para obtener $y(t)$.

Usando que $t = \ln x$, podemos encontrar $y(x)$.

Por otro lado, si nos interesa encontrar soluciones tales que $x < 0$,

La ecuación (11) es una ecuación de coeficientes constantes y se pueden utilizar los métodos conocidos previamente para obtener $y(t)$.

Usando que $t = \ln x$, podemos encontrar $y(x)$.

Por otro lado, si nos interesa encontrar soluciones tales que $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -z$

La ecuación (11) es una ecuación de coeficientes constantes y se pueden utilizar los métodos conocidos previamente para obtener $y(t)$.

Usando que $t = \ln x$, podemos encontrar $y(x)$.

Por otro lado, si nos interesa encontrar soluciones tales que $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -z$ y obtenemos la ecuación

$$az^2y'' + bzy' + cy = g(-z), \tag{12}$$

La ecuación (11) es una ecuación de coeficientes constantes y se pueden utilizar los métodos conocidos previamente para obtener $y(t)$.

Usando que $t = \ln x$, podemos encontrar $y(x)$.

Por otro lado, si nos interesa encontrar soluciones tales que $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -z$ y obtenemos la ecuación

$$az^2y'' + bzy' + cy = g(-z), \tag{12}$$

aplicamos el procedimiento descrito anteriormente para resolver la ecuación para $z > 0$, es decir, la sustitución $z = e^t$ y sustituimos en la ecuación (12).

La ecuación (11) es una ecuación de coeficientes constantes y se pueden utilizar los métodos conocidos previamente para obtener $y(t)$.

Usando que $t = \ln x$, podemos encontrar $y(x)$.

Por otro lado, si nos interesa encontrar soluciones tales que $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -z$ y obtenemos la ecuación

$$az^2y'' + bzy' + cy = g(-z), \tag{12}$$

aplicamos el procedimiento descrito anteriormente para resolver la ecuación para $z > 0$, es decir, la sustitución $z = e^t$ y sustituimos en la ecuación (12).

Nota: Si la función g es par, es decir, $g(-z) = g(z)$, entonces las ecuaciones (5) y (12) coinciden. Por tanto, en este caso si $y_1(x)$ es una solución de (5) entonces $y_2(x) = y_1(-x)$ también será solución de (5).

La ecuación (11) es una ecuación de coeficientes constantes y se pueden utilizar los métodos conocidos previamente para obtener $y(t)$.

Usando que $t = \ln x$, podemos encontrar $y(x)$.

Por otro lado, si nos interesa encontrar soluciones tales que $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -z$ y obtenemos la ecuación

$$az^2y'' + bzy' + cy = g(-z), \tag{12}$$

aplicamos el procedimiento descrito anteriormente para resolver la ecuación para $z > 0$, es decir, la sustitución $z = e^t$ y sustituimos en la ecuación (12).

Nota: Si la función g es par, es decir, $g(-z) = g(z)$, entonces las ecuaciones (5) y (12) coinciden. Por tanto, en este caso si $y_1(x)$ es una solución de (5) entonces $y_2(x) = y_1(-x)$ también será solución de (5). Un caso particular de lo anterior es una ecuación de Cauchy-Euler homogénea.

Ejemplo

Para $x > 0$, encontrar la solución general de la ecuación

$$2x^2y'' - xy' - 2y = -3x.$$

Ejemplo

Para $x > 0$, encontrar la solución general de la ecuación

$$2x^2y'' - xy' - 2y = -3x.$$

Podemos analizar la ecuación homogénea asociada

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0 \tag{13}$$

utilizando el cambio de variable $x = e^t$.

Ejemplo

Para $x > 0$, encontrar la solución general de la ecuación

$$2x^2y'' - xy' - 2y = -3x.$$

Podemos analizar la ecuación homogénea asociada

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0 \tag{13}$$

utilizando el cambio de variable $x = e^t$. Después buscamos una solución particular utilizando el método de variación de parámetros.

Ejemplo

Para $x > 0$, encontrar la solución general de la ecuación

$$2x^2y'' - xy' - 2y = -3x.$$

Podemos analizar la ecuación homogénea asociada

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0 \tag{13}$$

utilizando el cambio de variable $x = e^t$. Después buscamos una solución particular utilizando el método de variación de parámetros.

Otra forma es utilizando el cambio de variable $x = e^t$ en la ecuación no homogénea, resolver la nueva ecuación ya sea usando método de coeficientes indeterminados o variación de parámetros y por último recuperar la solución original.

Supongamos que $x = e^t$, tenemos que este cambio de variables, las ecuaciones (7) y (9) nos lleva a que la ecuación toma la forma

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + (-1 - 2)\frac{dy}{dt} - 2y = -3x. \tag{14}$$

Supongamos que $x = e^t$, tenemos que este cambio de variables, las ecuaciones (7) y (9) nos lleva a que la ecuación toma la forma

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + (-1-2)\frac{dy}{dt} - 2y = -3x. \tag{14}$$

o equivalentemente,

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = -3e^t. \tag{15}$$

Supongamos que $x = e^t$, tenemos que este cambio de variables, las ecuaciones (7) y (9) nos lleva a que la ecuación toma la forma

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + (-1-2)\frac{dy}{dt} - 2y = -3x. \tag{14}$$

o equivalentemente,

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = -3e^t. \tag{15}$$

Resolvamos primero la ecuación homogénea asociada, la cual tiene ecuación auxiliar

$$2r^2 - 3r - 2 = 0,$$

Supongamos que $x = e^t$, tenemos que este cambio de variables, las ecuaciones (7) y (9) nos lleva a que la ecuación toma la forma

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + (-1-2)\frac{dy}{dt} - 2y = -3x. \tag{14}$$

o equivalentemente,

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = -3e^t. \tag{15}$$

Resolvamos primero la ecuación homogénea asociada, la cual tiene ecuación auxiliar

$$2r^2 - 3r - 2 = 0,$$

cuyas raíces son $r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = 2$.

Supongamos que $x = e^t$, tenemos que este cambio de variables, las ecuaciones (7) y (9) nos lleva a que la ecuación toma la forma

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + (-1-2)\frac{dy}{dt} - 2y = -3x. \tag{14}$$

o equivalentemente,

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = -3e^t. \tag{15}$$

Resolvamos primero la ecuación homogénea asociada, la cual tiene ecuación auxiliar

$$2r^2 - 3r - 2 = 0,$$

cuyas raíces son $r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = 2$.
Tenemos que la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (15) es

$$y_h(t) = C_1e^{-\frac{1}{2}t} + C_2e^{2t}.$$

Supongamos que $x = e^t$, tenemos que este cambio de variables, las ecuaciones (7) y (9) nos lleva a que la ecuación toma la forma

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + (-1-2)\frac{dy}{dt} - 2y = -3x. \tag{14}$$

o equivalentemente,

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = -3e^t. \tag{15}$$

Resolvamos primero la ecuación homogénea asociada, la cual tiene ecuación auxiliar

$$2r^2 - 3r - 2 = 0,$$

cuyas raíces son $r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = 2$.
Tenemos que la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (15) es

$$y_h(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 e^{2t}.$$

Nota: Usando $t = \ln x$ podemos encontrar la solución general $y_h(x)$ de (13). Luego resolver la ecuación original con variación de parámetros.

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Usaremos el método de variación de parámetros en la ecuación (16)

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Usaremos el método de variación de parámetros en la ecuación (16) (recordar que funciona sólo en la forma normal)

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Usaremos el método de variación de parámetros en la ecuación (16) (recordar que funciona sólo en la forma normal) para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(t) = v_1(t)e^{-\frac{1}{2}t} + v_2(t)e^{2t}.$$

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Usaremos el método de variación de parámetros en la ecuación (16) (recordar que funciona sólo en la forma normal) para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(t) = v_1(t)e^{-\frac{1}{2}t} + v_2(t)e^{2t}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}.$$

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Usaremos el método de variación de parámetros en la ecuación (16) (recordar que funciona sólo en la forma normal) para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(t) = v_1(t)e^{-\frac{1}{2}t} + v_2(t)e^{2t}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}.$$

Luego

$$v_1(t) = -\int \frac{e^{2t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt$$

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Usaremos el método de variación de parámetros en la ecuación (16) (recordar que funciona sólo en la forma normal) para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(t) = v_1(t)e^{-\frac{1}{2}t} + v_2(t)e^{2t}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}.$$

Luego

$$v_1(t) = -\int \frac{e^{2t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = \frac{3}{5}\int \frac{e^{3t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt$$

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Usaremos el método de variación de parámetros en la ecuación (16) (recordar que funciona sólo en la forma normal) para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(t) = v_1(t)e^{-\frac{1}{2}t} + v_2(t)e^{2t}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}.$$

Luego

$$v_1(t) = -\int \frac{e^{2t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = \frac{3}{5}\int \frac{e^{3t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = \frac{3}{5}\int e^{\frac{3}{2}t}dt$$

Escribamos la ecuación (15) en forma normal

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt} - y = -\frac{3}{2}e^t. \tag{16}$$

Usaremos el método de variación de parámetros en la ecuación (16) (recordar que funciona sólo en la forma normal) para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(t) = v_1(t)e^{-\frac{1}{2}t} + v_2(t)e^{2t}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & e^{2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}.$$

Luego

$$v_1(t) = -\int \frac{e^{2t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = \frac{3}{5}\int \frac{e^{3t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = \frac{3}{5}\int e^{\frac{3}{2}t}dt = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^{t})}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^{t})}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt = \frac{3}{5}e^{-t}.$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt = \frac{3}{5}e^{-t}.$$

Por tanto

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}(e^{-\frac{1}{2}t}) + \frac{3}{5}e^{-t}(e^{2t})$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^{t})}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt = \frac{3}{5}e^{-t}.$$

Por tanto

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}(e^{-\frac{1}{2}t}) + \frac{3}{5}e^{-t}(e^{2t}) = e^{t}.$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt = \frac{3}{5}e^{-t}.$$

Por tanto

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}(e^{-\frac{1}{2}t}) + \frac{3}{5}e^{-t}(e^{2t}) = e^t.$$

Recordando que $t = \ln x$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt = \frac{3}{5}e^{-t}.$$

Por tanto

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}(e^{-\frac{1}{2}t}) + \frac{3}{5}e^{-t}(e^{2t}) = e^t.$$

Recordando que $t = \ln x$ obtenemos que

$$y_h(x) \quad = C_1e^{-\frac{1}{2}\ln x} + C_2e^{2\ln x}$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt = \frac{3}{5}e^{-t}.$$

Por tanto

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}(e^{-\frac{1}{2}t}) + \frac{3}{5}e^{-t}(e^{2t}) = e^t.$$

Recordando que $t = \ln x$ obtenemos que

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1 e^{-\frac{1}{2}\ln x} + C_2 e^{2\ln x} \\ &= C_1 e^{\ln(x^{-\frac{1}{2}})} + C_2 e^{\ln x^2} \end{aligned}$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^{t})}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt = \frac{3}{5}e^{-t}.$$

Por tanto

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}(e^{-\frac{1}{2}t}) + \frac{3}{5}e^{-t}(e^{2t}) = e^{t}.$$

Recordando que $t = \ln x$ obtenemos que

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1 e^{-\frac{1}{2}\ln x} + C_2 e^{2\ln x} \\ &= C_1 e^{\ln(x^{-\frac{1}{2}})} + C_2 e^{\ln x^2} \\ &= C_1(x^{-\frac{1}{2}}) + C_2 x^2 \end{aligned}$$

y

$$y_p(x) = e^{\ln x}$$

$$v_2(t)=\int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^{t})}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt=-\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt=-\frac{3}{5}\int e^{-t}dt=\frac{3}{5}e^{-t}.$$

Por tanto

$$y_p(t)=\frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}(e^{-\frac{1}{2}t})+\frac{3}{5}e^{-t}(e^{2t})=e^{t}.$$

Recordando que $t=\ln x$ obtenemos que

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1e^{-\frac{1}{2}\ln x}+C_2e^{2\ln x} \\ &= C_1e^{\ln(x^{-\frac{1}{2}})}+C_2e^{\ln x^2} \\ &= C_1(x^{-\frac{1}{2}})+C_2x^2 \end{aligned}$$

y

$$y_p(x)=e^{\ln x}=x.$$

$$v_2(t) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{3}{2}e^t)}{\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^{\frac{3}{2}t}}dt = -\frac{3}{5}\int e^{-t}dt = \frac{3}{5}e^{-t}.$$

Por tanto

$$y_p(t) = \frac{2}{5}e^{\frac{3}{2}t}(e^{-\frac{1}{2}t}) + \frac{3}{5}e^{-t}(e^{2t}) = e^t.$$

Recordando que $t = \ln x$ obtenemos que

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1 e^{-\frac{1}{2}\ln x} + C_2 e^{2\ln x} \\ &= C_1 e^{\ln(x^{-\frac{1}{2}})} + C_2 e^{\ln x^2} \\ &= C_1(x^{-\frac{1}{2}}) + C_2 x^2 \end{aligned}$$

y

$$y_p(x) = e^{\ln x} = x.$$

Por tanto, la solución general para $x > 0$ es

$$y(x) = C_1(x^{-\frac{1}{2}}) + C_2 x^2 + x.$$

También se podía usar el método de coeficientes indeterminados para solucionar la ecuación (15), suponiendo que la solución particular es de la forma $y_p = Ae^t$.

También se podía usar el método de coeficientes indeterminados para solucionar la ecuación (15), suponiendo que la solución particular es de la forma $y_p = Ae^t$. Dado que en este caso se sigue que $y_p = y_p' = y_p''$

También se podía usar el método de coeficientes indeterminados para solucionar la ecuación (15), suponiendo que la solución particular es de la forma $y_p = Ae^t$. Dado que en este caso se sigue que $y_p = y_p' = y_p''$ sustituyendo obtenemos que $A = 1$ y por tanto la solución particular $y_p(t) = e^t$.

También se podía usar el método de coeficientes indeterminados para solucionar la ecuación (15), suponiendo que la solución particular es de la forma $y_p = Ae^t$. Dado que en este caso se sigue que $y_p = y_p' = y_p''$ sustituyendo obtenemos que $A = 1$ y por tanto la solución particular $y_p(t) = e^t$.

Por otro lado, si quisiéramos soluciones con $x < 0$ usando la observación que si $y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ y $y_2(x) = x^2$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada

También se podía usar el método de coeficientes indeterminados para solucionar la ecuación (15), suponiendo que la solución particular es de la forma $y_p = Ae^t$. Dado que en este caso se sigue que $y_p = y_p' = y_p''$ sustituyendo obtenemos que $A = 1$ y por tanto la solución particular $y_p(t) = e^t$.

Por otro lado, si quisiéramos soluciones con $x < 0$ usando la observación que si $y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ y $y_2(x) = x^2$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada entonces $\tilde{y}_1(x) = y_1(-x) = (-x)^{-\frac{1}{2}}$ y $\tilde{y}_2(x) = y_2(-x) = (-x)^2 = x^2$ son soluciones para $x < 0$ de la ecuación homogénea asociada.

También se podía usar el método de coeficientes indeterminados para solucionar la ecuación (15), suponiendo que la solución particular es de la forma $y_p = Ae^t$. Dado que en este caso se sigue que $y_p = y_p' = y_p''$ sustituyendo obtenemos que $A = 1$ y por tanto la solución particular $y_p(t) = e^t$.

Por otro lado, si quisiéramos soluciones con $x < 0$ usando la observación que si $y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ y $y_2(x) = x^2$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada entonces $\tilde{y}_1(x) = y_1(-x) = (-x)^{-\frac{1}{2}}$ y $\tilde{y}_2(x) = y_2(-x) = (-x)^2 = x^2$ son soluciones para $x < 0$ de la ecuación homogénea asociada.

Por otro lado, dado que la solución particular $y_p(x) = x$ es una función real tenemos que también es una solución particular para el caso $x < 0$.

También se podía usar el método de coeficientes indeterminados para solucionar la ecuación (15), suponiendo que la solución particular es de la forma $y_p = Ae^t$. Dado que en este caso se sigue que $y_p = y_p' = y_p''$ sustituyendo obtenemos que $A = 1$ y por tanto la solución particular $y_p(t) = e^t$.

Por otro lado, si quisiéramos soluciones con $x < 0$ usando la observación que si $y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ y $y_2(x) = x^2$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada entonces $\tilde{y}_1(x) = y_1(-x) = (-x)^{-\frac{1}{2}}$ y $\tilde{y}_2(x) = y_2(-x) = (-x)^2 = x^2$ son soluciones para $x < 0$ de la ecuación homogénea asociada.

Por otro lado, dado que la solución particular $y_p(x) = x$ es una función real tenemos que también es una solución particular para el caso $x < 0$.

Concluimos que la solución general para $x < 0$ es

$$y(x) = C_1((-x)^{-\frac{1}{2}}) + C_2x^2 + x.$$