

MÉTODOS PARA RESOLVER RECURRENCIAS



Recurrencias

Métodos para resolver recurrencias

- Continuación Método de ecuación característica (Sustitución) para ecuaciones de orden n

Teorema 3

Sean c_1, c_2, \dots, c_k reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$$

Con k **raíces distintas** r_1, r_2, \dots, r_k . Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$$

Para $n = 0, 1, 2, \dots$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son constantes.

Encontrar la solución de $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con condiciones iniciales, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ y $a_2 = 15$

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$$\begin{array}{r r r r} 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & & & \end{array}$$

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

A synthetic division diagram for the polynomial $r^3 - 6r^2 + 11r - 6$. The coefficients are listed as 1, -6, 11, -6. A vertical line separates the coefficients from the quotient and remainder. A red arrow points down to the first coefficient 1. To the right of the vertical line, '+1' is written above the remainder line.

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

A synthetic division diagram for the polynomial $r^3 - 6r^2 + 11r - 6$ divided by $(r - 1)$. The divisor is 1, and the quotient is $r^2 - 5r + 6$. The remainder is 0.

1	-6	11	-6	
	+1			+1
1				

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

The diagram shows the synthetic division of the polynomial $r^3 - 6r^2 + 11r - 6$ by $(r - 1)$. The coefficients of the dividend are 1, -6, 11, and -6. The divisor is $r - 1$, with 1 as the root. A red arrow points down from the first coefficient 1 to the first column. The quotient is written to the right of the vertical line, with the first term being +1 and the second term being +1.

1	-6	11	-6	
+1				+1
1	-5			

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$$\begin{array}{r} 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & +1 & -5 & \\ \hline 1 & -5 & & \end{array}$$

Above the first column, there is a red arrow pointing down from the top row to the bottom row.

To the right of the second column, there is a red '+1' written above the line.

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

1	-6	11	-6	
+1	-5			+1
1	-5	6		

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$$\begin{array}{r} 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline +1 & -5 & +6 & +1 \\ \hline 1 & -5 & 6 \end{array}$$

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & +1 & -5 & +6 & +1 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

1	-6	11	-6	(r-1)(r ² -5r+6)=0
↓	+1	-5	+6	+1
1	-5	6	0	

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$\begin{array}{cccc c} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ \downarrow & & & & \\ +1 & -5 & +6 & & +1 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$	$(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0$ $(r-1)(r-2)(r-3) = 0$
--	--

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$\text{Div}_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$\begin{array}{cccc c} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ \downarrow & & & & \\ +1 & -5 & +6 & & +1 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$	$(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0$ $(r-1)(r-2)(r-3) = 0$ $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$
--	---

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0 \quad \rightarrow \quad (r-1)(r-2)(r-3) = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$$

Paso 3: Expresar la solución según las raíces :

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0 \quad \rightarrow \quad (r-1)(r-2)(r-3) = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$$

Paso 3: Expresar la solución según las raíces :

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Recurrencias

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad a_0=2, a_1=5, a_2=15$$

$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$$(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0 \quad \rightarrow \quad (r-1)(r-2)(r-3) = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$$

Paso 3: Expresar la solución según las raíces :

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Paso 4: Se reemplazan las condiciones iniciales $a_0=2, a_1=5, a_2=15$ en la solución para hallar los alfas

La solución de la recurrencia:

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Por tanto las constantes deben ser calculadas

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3,$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 2$, Por lo tanto la **única solución** de la recurrencia es la secuencia $\{a_n\}$ con

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

Ejercicio

Resuelva la siguiente recurrencia lineal y homogénea con coeficientes constantes

$$a_n = 2 a_{n-1} + a_{n-2} - 2 a_{n-3}$$

$$a_0 = 3; a_1 = 6; a_2 = 0$$

Teorema 4

Sean c_1, c_2, \dots, c_k reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$$

Con t **raíces distintas** r_1, r_2, \dots, r_t con multiplicidad m_1, m_2, \dots, m_t respectivamente, así que $m_i \geq 1$, para $i = 1, 2, \dots, t$ y $m_1 + m_2 + \dots + m_t = k$. Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \dots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n + \\ & (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \dots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n + \dots + \\ & (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + \dots + \alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned}$$

Para $n = 0, 1, 2, \dots$ donde $\alpha_{i,j}$ son constantes para $1 \leq i \leq t$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$

Supongamos que las raíces de la ecuación característica son 2, 2, 2, 5, 5 y 9 que forma tiene la solución general.

- ① Hay tres raíces distintas.
- ② Raíz 2 con multiplicidad 3, Raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplicidad 1.

Supongamos que las raíces de la ecuación característica son 2, 2, 2, 5, 5 y 9 que forma tiene la solución general.

- ① Hay tres raíces distintas.
- ② Raíz 2 con multiplicidad 3, Raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplicidad 1.

③ Solución

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)5^n + \alpha_{3,0}9^n$$

Encontrar la solución la recurrencia

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

Con $a_0 = 1, a_1 = -2$ y $a_2 = -1$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$

$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$

$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}$$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$

$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$

$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}$$

Entonces $\alpha_{1,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = 3$ y $\alpha_{1,2} = -2$, la única solución es la secuencia $\{a_0\}$

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

Ejercicio

Resuelva la siguiente recurrencia lineal y homogénea con coeficientes constantes

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$$

$$a_0 = -5; a_1 = -9; a_2 = 15$$