Análisis de Algoritmos II

Jesús Alexander Aranda Ph.D   Robinson Duque, Ph.D
Juan Francisco Díaz, Ph. D

Universidad del Valle

jesus.aranda@correounivalle.edu.co
robinson.duque@correounivalle.edu.co
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co

Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Overview

Subset Sum (SS)

Definición

Una instancia es un conjunto de números naturales y un valor.

Pregunta

¿Existe un subconjunto de ese conjunto cuya suma sea ese valor?

Formalmente

Entrada: $S \subseteq \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{N}$

Salida: $\exists S' \subseteq S : \sum_{s \in S'} = t$

Subset Sum (SS)

Definición

Una instancia es un conjunto de números naturales y un valor.

Pregunta

¿Existe un subconjunto de ese conjunto cuya suma sea ese valor?

Formalmente

Entrada: $S \subseteq \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{N}$
Salida: $\exists S' \subseteq S : \sum_{s \in S'} = t$

Subset Sum (SS): ejemplos

Entrada:
$S = \{1, 4, 16, 64, 256, 1040, 1041, 1093, 1284, 1344\}, t = 3690$
Salida: *true* porque si
$S' = \{1, 16, 256, 1040, 1093, 1284\}, \sum_{s \in S'} = 3690$
Entrada:
$S = \{1, 4, 16, 64, 256, 1040, 1041, 1093, 1284, 1344\}, t = 6144$
Salida: *false* porque si $\forall S' \subseteq S : \sum_{s \in S'} \neq 6144$

Subset Sum (SS): ejemplos

Entrada:
$S = \{1, 4, 16, 64, 256, 1040, 1041, 1093, 1284, 1344\}, t = 3690$
Salida: *true* porque si
$S' = \{1, 16, 256, 1040, 1093, 1284\}, \sum_{s \in S'} = 3690$
Entrada:
$S = \{1, 4, 16, 64, 256, 1040, 1041, 1093, 1284, 1344\}, t = 6144$
Salida: *false* porque si $\forall S' \subseteq S : \sum_{s \in S'} \neq 6144$

¿Está SS en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto S' de números de S candidato a sumar t.

$SS \in NP$

Dada una instancia positiva de SS y el certificado S', sólo se debe verificar que $S' \subseteq S$ y que $\sum_{s \in S'} = t$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(|S'||S| + |S'|)$.
Dada una instancia negativa de VC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no es subconjunto o falla porque la suma no da).
Por tanto $SS \in NP$

¿Está SS en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto S' de números de S candidato a sumar t.

$SS \in NP$

Dada una instancia positiva de SS y el certificado S', sólo se debe verificar que $S' \subseteq S$ y que $\sum_{s \in S'} = t$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(|S'||S| + |S'|)$.
Dada una instancia negativa de VC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no es subconjunto o falla porque la suma no da).
Por tanto $SS \in NP$

¿Está SS en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto S' de números de S candidato a sumar t.

$SS \in NP$

Dada una instancia positiva de SS y el certificado S', sólo se debe verificar que $S' \subseteq S$ y que $\sum_{s \in S'} = t$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(|S'||S| + |S'|)$.
Dada una instancia negativa de VC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no es subconjunto o falla porque la suma no da).
Por tanto $SS \in NP$

¿Está SS en NP?

Recordemos: la clase NP es aquella cuyos problemas son verificables en tiempo polinomial. Si se tuviera alguna clase de certificado de una solución, entonces, es posible verificar en tiempo polinomial que el certificado es correcto.
Para este caso, el certificado es el conjunto S' de números de S candidato a sumar t.

$SS \in NP$

Dada una instancia positiva de SS y el certificado S', sólo se debe verificar que $S' \subseteq S$ y que $\sum_{s \in S'} = t$. Esto se puede hacer en tiempo $\mathcal{O}(|S'||S| + |S'|)$.
Dada una instancia negativa de VC ningún certificado puede hacer que el algoritmo verifique la instancia (o falla porque no es subconjunto o falla porque la suma no da).
Por tanto $SS \in NP$

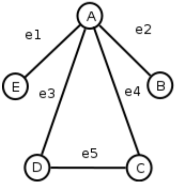
¿Es SS NP-Hard? Escogiendo un problema para reducir

Se procede a realizar una reducción desde un problema NP-Completo conocido. Tenemos: $SAT, 3-SAT, IP, VC, MC$. Escogemos VC:

$$VC \prec_p SS$$

¿Es SS NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 1: Representar el grafo original como una matriz de incidencia:

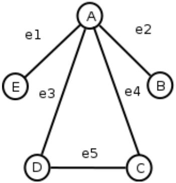


	e1	e2	e3	e4	e5
A	1	1	1	1	0
B	0	1	0	0	0
C	0	0	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	1	0	0	0	0

- Número de 1's en cada fila: grado del vértice
- Número de 1's en cada columna: 2

¿Es SS NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 1: Representar el grafo original como una matriz de incidencia:



	e1	e2	e3	e4	e5
A	1	1	1	1	0
B	0	1	0	0	0
C	0	0	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	1	0	0	0	0

- Número de 1's en cada fila: grado del vértice
- Número de 1's en cada columna: 2

¿Es SS NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 2: Un cubrimiento debe alumbrar al menos un 1 en cada columna

		e1	e2	e3	e4	e5
A	1	1	1	1	1	0
B	0	0	1	0	0	0
C	1	0	0	0	1	1
D	0	0	0	1	0	1
E	0	1	0	0	0	0

Figura: $\{A, C\}$ cubre el grafo

		e1	e2	e3	e4	e5
A	1	1	1	1	1	0
B	0	0	1	0	0	0
C	1	0	0	0	1	1
D	0	0	0	1	0	1
E	0	1	0	0	0	0

Figura: $\{A, E\}$ no cubre $e5$

¿Es SS NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 3: Añadir una fila por arista, de manera que un cubrimiento se pueda completar para tener dos 1's por columna. Y la primera columna determina los vértices del cubrimiento.

		e1	e2	e3	e4	e5
A	1	1	1	1	1	0
B	0	0	1	0	0	0
C	1	0	0	0	1	1
D	0	0	0	1	0	1
E	0	1	0	0	0	0
e1	0	1	0	0	0	0
e2	0	0	1	0	0	0
e3	0	0	0	1	0	0
e4	0	0	0	0	1	0
e5	0	0	0	0	0	1
	K	2	2	2	2	2

¿Es SS NP-Hard? Definiendo la reducción

Idea 4: Verlo como un problema de suma de números en base 4

		e1	e2	e3	e4	e5	S		
A	1	1	1	1	1	0	1364		K 2
B	1	0	1	0	0	0	1088		
C	1	0	0	0	1	1	1029		
D	1	0	0	1	0	1	1041		
E	1	1	0	0	0	0	1280		
e1	0	1	0	0	0	0	256		
e2	0	0	1	0	0	0	64		
e3	0	0	0	1	0	0	16		
e4	0	0	0	0	1	0	4		
e5	0	0	0	0	0	1	1		2730 ×
	2	2	2	2	2	2	2730	t	=I4+I6+I9+I10+I11+I13

¿Es SS NP-Hard? Definiendo la reducción

Procedimiento de reducción

Dada una instancia de *VC*:
un grafo $G = (V, E)$, representado por la matriz de incidencia M tal que $M[v, e] = 1$ si v es incidente a e, y 0 si no,
y K el tamaño del cubrimiento deseado,
aplicamos las ideas 1, 2 , 3 y 4, para crear una instancia de *SubsetSum*:

- Por cada vértice $v \in V$ creamos $s_v \in S$, tal que

$$s_v = 4^{|E|} + \sum_{j=0}^{|E|-1} 4^j M[v, e_j]$$

- Por cada arista $e_j \in E$ creamos $s_{e_j} \in S$ tal que

$$s_{e_j} = 4^j$$

-

$$t = k * 4^{|E|} + \sum_{j=0}^{|E|-1} (2 * 4^j)$$

¿Es SS NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en *VC* se reducen a instancias positivas en *SubsetSum*

- Si una instancia de *VC* es positiva, es porque existe un cubrimiento V' de tamaño K. Vamos a mostrar que entonces la instancia reducida de *SubsetSum*, (S, t) es positiva:
- Para cada $v \in V', s_v \in S'$
- Para cada arista $e_j = (u, v) \in E$
  - Si $u \notin V', s_{e_j} \in S'$
  - Si $v \notin V', s_{e_j} \in S'$
- Se puede asegurar, por construcción, que

$$V' \text{ cubre } G \implies \sum_{s \in S'} = t$$

¿Es SS NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en *VC* se reducen a instancias positivas en *SubsetSum*

- Si una instancia de *VC* es positiva, es porque existe un cubrimiento V' de tamaño K. Vamos a mostrar que entonces la instancia reducida de *SubsetSum*, (S, t) es positiva:
- Para cada $v \in V', s_v \in S'$
- Para cada arista $e_j = (u, v) \in E$
  - Si $u \notin V', s_{e_j} \in S'$
  - Si $v \notin V', s_{e_j} \in S'$
- Se puede asegurar, por construcción, que

$$V' \text{ cubre } G \implies \sum_{s \in S'} = t$$

¿Es SS NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en *VC* se reducen a instancias positivas en *SubsetSum*

- Si una instancia de *VC* es positiva, es porque existe un cubrimiento V' de tamaño K. Vamos a mostrar que entonces la instancia reducida de $SubsetSum, (S, t)$ es positiva:
- Para cada $v \in V', s_v \in S'$
- Para cada arista $e_j = (u, v) \in E$
  - Si $u \notin V', s_{e_j} \in S'$
  - Si $v \notin V', s_{e_j} \in S'$
- Se puede asegurar, por construcción, que

$$V' \text{ cubre } G \implies \sum_{s \in S'} = t$$

¿Es SS NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias positivas en *VC* se reducen a instancias positivas en *SubsetSum*

- Si una instancia de *VC* es positiva, es porque existe un cubrimiento V' de tamaño K. Vamos a mostrar que entonces la instancia reducida de *SubsetSum*, (S, t) es positiva:
- Para cada $v \in V', s_v \in S'$
- Para cada arista $e_j = (u, v) \in E$
  - Si $u \notin V', s_{e_j} \in S'$
  - Si $v \notin V', s_{e_j} \in S'$
- Se puede asegurar, por construcción, que

$$V' \text{ cubre } G \implies \sum_{s \in S'} = t$$

¿Es SS NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en *VC* se reducen a instancias negativas en *SubsetSum*

- Si una instancia de *VC* es negativa, es porque no existe un cubrimiento V' de tamaño K. Vamos a mostrar que entonces la instancia reducida de *SubsetSum*, (S, t) es negativa:
- Por contradicción, suponga que existe $S' \subseteq S$ tal que $\sum_{s \in S'} = t$.
- Sea $V' = \{v \in V : s_v \in S'\}$
  - Como $\sum_{s \in S'} = t$, por construcción, $|\{s_v \in S'\}| = K$. Si hay menos o más la suma no daría t.
  - V' cubre G porque sino, la suma no daría t

  Por tanto, V' sería un cubrimiento de G de tamaño K. Contradicción.
- Se puede concluir entonces que, por construcción,

$$\sum_{s \in S'} = t \implies V' \text{ cubre } G$$

¿Es SS NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en *VC* se reducen a instancias negativas en *SubsetSum*

- Si una instancia de *VC* es negativa, es porque no existe un cubrimiento V' de tamaño K. Vamos a mostrar que entonces la instancia reducida de *SubsetSum*, (S, t) es negativa:
- Por contradicción, suponga que existe $S' \subseteq S$ tal que $\sum_{s \in S'} = t$.
- Sea $V' = \{v \in V : s_v \in S'\}$
  - Como $\sum_{s \in S'} = t$, por construcción, $|\{s_v \in S'\}| = K$. Si hay menos o más la suma no daría t.
  - V' cubre G porque sino, la suma no daría t

  Por tanto, V' sería un cubrimiento de G de tamaño K. Contradicción.
- Se puede concluir entonces que, por construcción,

$$\sum_{s \in S'} = t \implies V' \text{ cubre } G$$

¿Es SS NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en *VC* se reducen a instancias negativas en *SubsetSum*

- Si una instancia de *VC* es negativa, es porque no existe un cubrimiento V' de tamaño K. Vamos a mostrar que entonces la instancia reducida de $SubsetSum, (S, t)$ es negativa:
- Por contradicción, suponga que existe $S' \subseteq S$ tal que $\sum_{s \in S'} = t$.
- Sea $V' = \{v \in V : s_v \in S'\}$
  - Como $\sum_{s \in S'} = t$, por construcción, $|\{s_v \in S'\}| = K$. Si hay menos o más la suma no daría t.
  - V' cubre G porque sino, la suma no daría t

  Por tanto, V' sería un cubrimiento de G de tamaño K. Contradicción.
- Se puede concluir entonces que, por construcción,

$$\sum_{s \in S'} = t \implies V' \text{ cubre } G$$

¿Es SS NP-Hard? Corrección de la reducción

Instancias negativas en *VC* se reducen a instancias negativas en *SubsetSum*

- Si una instancia de *VC* es negativa, es porque no existe un cubrimiento V' de tamaño K. Vamos a mostrar que entonces la instancia reducida de $SubsetSum, (S, t)$ es negativa:
- Por contradicción, suponga que existe $S' \subseteq S$ tal que $\sum_{s \in S'} = t$.
- Sea $V' = \{v \in V : s_v \in S'\}$
  - Como $\sum_{s \in S'} = t$, por construcción, $|\{s_v \in S'\}| = K$. Si hay menos o más la suma no daría t.
  - V' cubre G porque sino, la suma no daría t

  Por tanto, V' sería un cubrimiento de G de tamaño K. Contradicción.
- Se puede concluir entonces que, por construcción,

$$\sum_{s \in S'} = t \implies V' \text{ cubre } G$$

¿Es SS NP-Hard? Complejidad de la reducción

Complejidad de la reducción

Evidentemente, la reducción se hace en tiempo polinomial:

- Si se tienen n vértices y m aristas en la instancia de VC, se crea un conjunto S con $n + m$ números y un número t.
- Por tanto la reducción toma tiempo polinomial en el tamaño de la entrada de VC

SS es NP-Completo

- Se demostró que SS está en NP.
- También se mostró que SS es NP-Hard
  - Se propuso reducción de *VC* a *SS*
  - Se probó la corrección de la reducción
  - Se mostró la complejidad polinomial de la reducción

SS es NP-Completo

SS es NP-Completo

- Se demostró que SS está en NP.
- También se mostró que SS es NP-Hard
  - Se propuso reducción de *VC* a *SS*
  - Se probó la corrección de la reducción
  - Se mostró la complejidad polinomial de la reducción

SS es NP-Completo

- Se demostró que SS está en NP.
- También se mostró que SS es NP-Hard
  - Se propuso reducción de *VC* a *SS*
  - Se probó la corrección de la reducción
  - Se mostró la complejidad polinomial de la reducción

SS es NP-Completo

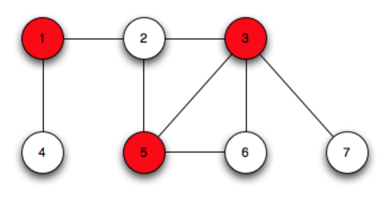
- Se demostró que SS está en NP.
- También se mostró que SS es NP-Hard
  - Se propuso reducción de *VC* a *SS*
  - Se probó la corrección de la reducción
  - Se mostró la complejidad polinomial de la reducción

SS es NP-Completo

Apliquemos la reducción

Ejemplo

Realicemos la reducción a la instancia de VC en la figura:



- con $K = 3$
- con $K = 2$

Fin de la Presentación

¿Preguntas?