

2. 3SAT es NP-Completo - ADA II - NP 2025-I

1.

Definición 3SAT

Una instancia de 3-SAT es una colección de C cláusulas en forma normal conjuntiva (FNC) donde cada cláusula contiene exactamente 3 literales (i.e., variables booleanas $v_i \in V$ o su negación).

$V = (x, y, z, w)$

$C = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$

¿Existe una asignación de valores para (x, y, z, w) , donde la instancia sea verdadera?

Considere el problema 3SAT descrito en la figura.

Dada la reducción de SAT a 3SAT vista en clase, determine cuáles de las siguientes aplicaciones de la reducción son correctas:

A

La cláusula

$\neg a_1$

se traduce a

$(v_1 \vee v_2 \vee \neg a_1) \wedge (v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg a_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee \neg a_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg a_1)$

- Si $k = 1$, significa que $C_i = z_1$. Se crean dos variables v_1, v_2 y cuatro nuevas cláusulas con 3 literales cada una:

$(v_1 \vee v_2 \vee z_1) \wedge (v_1 \vee \neg v_2 \vee z_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee z_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee z_1)$

Observe que esta nueva expresión con 4 cláusulas se satisface ssi z_1 es verdadera.

B

La cláusula

$a_2 \vee \neg a_3$

se traduce a

$(v_1 \vee a_2 \vee \neg a_3) \wedge (\neg v_1 \vee a_2 \vee \neg a_3)$

- Si $k = 2$, significa $(z_1 \vee z_2)$. Se crea una nueva variable v_1 y dos nuevas cláusulas con 3 literales cada una:

$(v_1 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (\neg v_1 \vee z_1 \vee z_2)$

Observe que independientemente del valor de verdad que tome la nueva variable v_1 , la nueva expresión con 2 cláusulas se satisface ssi z_1 o z_2 son verdaderas.

C

La cláusula

$(a_1 \vee \neg a_2 \vee a_3 \vee a_5 \vee a_6 \vee \neg a_7)$

se traduce a

$(a_1 \vee \neg a_2 \vee v_1) \wedge (\neg v_1 \vee a_3 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee a_5 \vee v_3) \wedge (\neg v_3 \vee a_6 \vee \neg a_7)$

- Si $k > 3$, significa $(z_1 \vee z_2 \dots \vee z_k)$. Cree $k - 3$ variables v_1, v_2, \dots, v_{k-3} y agregue $k - 2$ cláusulas, siguiendo un encadenamiento de la forma:

$(z_1 \vee z_2 \vee v_1) \wedge (\neg v_1 \vee z_3 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee z_4 \vee v_3) \wedge \dots$

$(\neg v_{i-2} \vee z_{i-1} \vee v_{i-1}) \wedge \dots (\neg v_{k-4} \vee z_{k-2} \vee v_{k-3}) \wedge (\neg v_{k-3} \vee z_{k-1} \vee z_k)$

D

La cláusula

$\neg a_1$

se traduce a

$(v_1 \vee v_2 \vee \neg a_1) \wedge (v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg a_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee a_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee a_1)$

- Si $k = 1$, significa que $C_i = z_1$. Se crean dos variables v_1, v_2 y cuatro nuevas cláusulas con 3 literales cada una:

$(v_1 \vee v_2 \vee z_1) \wedge (v_1 \vee \neg v_2 \vee z_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee z_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee z_1)$

Observe que esta nueva expresión con 4 cláusulas se satisface ssi z_1 es verdadera.

E

La cláusula

$a_2 \vee \neg a_3$

se traduce a

$(v_1 \vee a_2 \vee \neg a_3) \wedge (v_1 \vee a_2 \vee a_3)$

- Si $k = 2$, significa $(z_1 \vee z_2)$. Se crea una nueva variable v_1 y

F

La cláusula

$(a_1 \vee \neg a_2 \vee a_3 \vee a_5 \vee a_6 \vee \neg a_7)$

se traduce a

$(a_1 \vee \neg a_2 \vee v_1) \wedge (\neg v_1 \vee a_3 \vee \neg v_2) \wedge (\neg v_2 \vee a_5 \vee \neg$

dos nuevas clausulas con 3 literales cada una:

$$(v_1 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (\neg v_1 \vee z_1 \vee z_2)$$

Observe que independientemente del valor de verdad que tome la nueva variable v_1 , la **nueva expresión con 2 cláusulas se satisface ssi z_1 o z_2 son verdaderas**.

$$v_3) \wedge (\neg v_3 \vee a_6 \vee \neg a_7)$$

- Si $k > 3$, , significa $(z_1 \vee z_2 \dots \vee z_k)$. Cree $k - 3$ variables $v_1, v_2 \dots v_{k-3}$ y agregue $k - 2$ cláusulas, siguiendo un encadenamiento de la forma:

$$(z_1 \vee z_2 \vee v_1) \wedge (\neg v_1 \vee z_3 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee z_4 \vee v_3) \wedge \dots$$

$$(\neg v_i \vee z_{i+2} \vee v_{i+1}) \wedge \dots (\neg v_{k-4} \vee z_{k-2} \vee v_{k-3}) \wedge (\neg v_{k-3} \vee z_{k-1} \vee z_k)$$