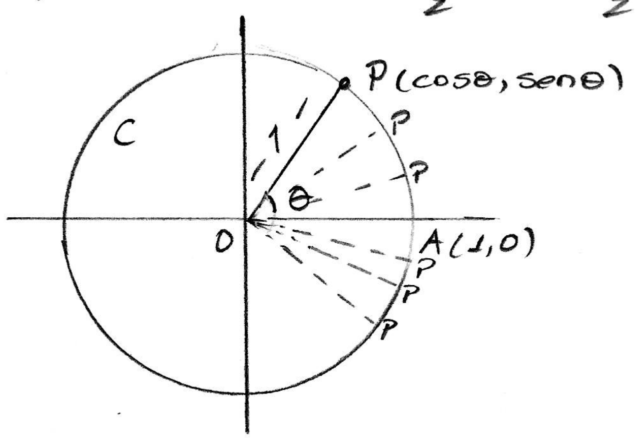
Martha Pinzón
Univ. del Valle

Limites Trigonométricos

Nuestro objetivo en esta parte es determinar $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x$ y $\lim_{x \to 0} \cos x$.

Estos límites se pueden tratar intuitivamente para ello, consideramos un círculo unitario C centrado en el origen y un ángulo θ en posición standard con $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



Sea P el punto de intersección del lado terminal de θ con el círculo C. P tiene coordenadas $P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Sea A el punto de coordenadas $(1,0)$

Si θ se aproxima a cero tanto por valores positivos como por valores negativos, el punto $P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ se aproxima al punto $A(1,0)$. Pero los puntos P y A son cercanos, si sus coordenadas son cercanas, luego

Si $\theta \to 0$ entonces $P \to A$ y por tanto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \to (1,0)$, de donde $\cos\theta \to 1$ y $\operatorname{sen}\theta \to 0$, sugiriendo que

$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1, \quad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0.$$

En general se puede probar que

$$\lim_{\theta \to a} \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} a, \qquad \lim_{\theta \to a} \cos\theta = \cos a.$$

Por ejemplo veamos que $\lim_{\theta \to a} \cos\theta = \cos a$.

Para probar este límite, hacemos un cambio de variable.

Sea $h = \theta - a$. Entonces si $\theta \to a$, $h \to 0$.

ahora, $\theta = h + a$, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to a} \cos\theta &= \lim_{h \to 0} \cos(h+a) \\
&= \lim_{h \to 0} (\cos h \cdot \cos a - \operatorname{sen} h \cdot \operatorname{sen} a) \\
&= \lim_{h \to 0} \cos h \cdot \cos a - \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} h \cdot \operatorname{sen} a \\
&= \cos a \cdot \lim_{h \to 0} \cos h - \operatorname{sen} a \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} h \\
&= \cos a \cdot 1 - \operatorname{sen} a \cdot 0 \\
&= \cos a.
\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba el otro límite.
En otras palabras lo que nos afirman este par de límites, es que el límite del $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en cualquier valor de x, es lo mismo que evaluar la función en el valor dado.

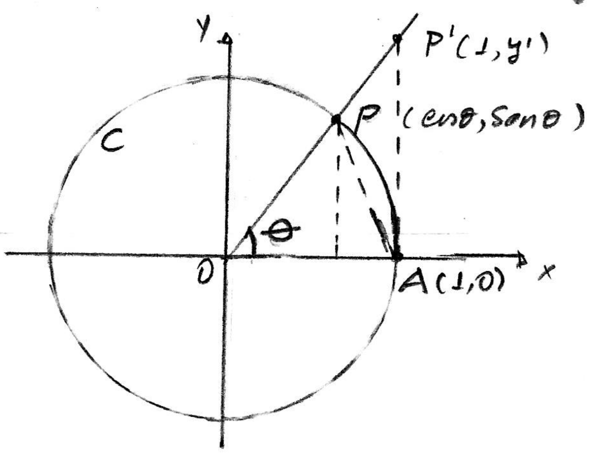
Usando estos límites vamos a demostrar un límite trigonométrico especial.

MP

Ejemplo: Demostrar $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Sol Claramente para calcular dicho límite, no se puede evaluar en $\theta = 0$. por tanto, usaremos límites laterales y el teorema de la prensa para calcular el límite.

para ello, consideramos un circulo unitario C, centrado en el origen y θ un ángulo $0 < \theta < \pi/2$.



Sea P el punto de intersección del lado terminal de θ y el Circulo C. A el punto de coordenadas $A(1,0)$. y P' el punto $P'(1, y')$

Consideramos el área de tres regiones.

A_1 = El área del triángulo AOP,

A_2 = El área del sector circular AOP y

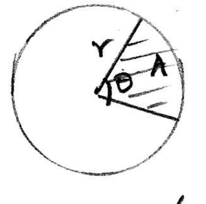
A_3 = El área del triángulo AOP'.

Entonces $A_1 < A_2 < A_3$

Hallamos cada área

$A_1 = \frac{1}{2}$ base. altura $= \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$

$A_2 = ?$



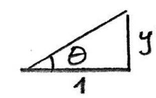
$\frac{A}{\theta} = \frac{A_{\text{TOTAL}}}{2\pi} \rightarrow \frac{A}{\theta} = \frac{\cancel{\pi} r^2}{2\cancel{\pi}} \rightarrow$

$A = \frac{1}{2}\theta r^2$.

En general el área de un sector circular de radio r y ángulo subtendido θ es $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.

En nuestro caso, como el circulo es unitario $r=1$, luego el área del sector circular es $A_2 = \frac{1}{2}\theta$.

Finalmente, $A_3 = \frac{1}{2}(1)y'$. observe que $y' = \tan\theta$ luego



$$A_3 = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

Por lo tanto, como $A_1 < A_2 < A_3$, se tiene

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad , \quad 0<\theta<\pi/2$$

Simplificando $1/2$ y dividiendo por $\operatorname{sen}\theta$ en todos los términos de la desigualdad, $\operatorname{sen}\theta>0$ pues $0<\theta<\pi/2$, se tiene

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}, \quad \text{de donde}$$

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1 \quad , \quad \text{para } 0<\theta<\pi/2$$

En efecto de la desigualdad $1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$ se tiene

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad y \quad \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Como $\operatorname{sen}\theta>0$, de la 1ra desigualdad se tiene $\operatorname{sen}\theta<\theta$, luego $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}<1$ (pues $\theta>0$).

De la 2da desigualdad $\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$ se tiene

$\theta\cos\theta < \operatorname{sen}\theta$ (pues $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta>0$), de donde $\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

Así se obtiene la desigualdad mencionada

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1 \qquad 0<\theta<\pi/2 \quad *$$

como $\theta>0$, podemos tomar límite con θ tendiendo a 0 por derecha. Así,

$$\lim_{\theta\to 0^+} \cos\theta < \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \lim_{\theta\to 0^+} 1$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad\qquad 1$$

Por el Teorema de la prensa $\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$

Consideramos ahora $\theta < 0$, para hallar $\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}.$

Sea $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, entonces $0 < -\theta < \pi/2$ y por la desigualdad $*$,

$$\cos(-\theta) < \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} < 1$$

Como $\cos\theta$ es par, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y el $\operatorname{sen}\theta$ es impar, $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, entonces de la desigualdad anterior tenemos

$$\cos\theta < -\frac{\operatorname{sen}\theta}{-\theta} < 1 \text{ , de donde}$$

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1 \text{ , con } -\frac{\pi}{2} < \theta < 0$$

Tomando límite lateral,

$$\lim_{\theta\to 0^-} \cos\theta < \lim_{\theta\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < \lim_{\theta\to 0^-} 1$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\cos 0 = 1 \qquad\qquad\qquad 1$$

por T. de la prensa $\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$

Como los límites laterales son iguales, se concluye

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Otro límite trigonométrico Importante es:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0.$$

Veamos:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} =$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} =$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} =$$

(se pueden separar los límites, porque cada límite existe)

así

$$= 1 \cdot \frac{\operatorname{sen}0}{1+\cos 0} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0.$$

Ej: Calcule los siguientes límites.

i) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$ ii) $\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{2-\cos\theta}{4+\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}$ iii) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(-2\theta)}{\operatorname{sen} 5\theta}$

iv) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2}$.

S// i) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4\operatorname{sen} 4x}{4x} = 4 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4.$

Para hallar el límite se transformó de tal manera que se obtuviera un límite del tipo $\frac{\operatorname{sen}x}{x}$. Cuando $x \to 0$, también $4x \to 0$.

luego $\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}$ tiene la misma forma y por eso

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} = 1.$ Claramente no se podía evaluar en $x=0$.

ii) $$\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{2-\cos\theta}{4+\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta} = \frac{2-\cos \pi/2}{4+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \cos \pi/2} = \frac{2-0}{4+1 \cdot 0} = \frac{2}{4} = 1/2$$

iii) $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(-2\theta)}{\operatorname{sen} 5\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{-2\theta}{-2\theta}\operatorname{sen}(-2\theta)}{\frac{5\theta}{5\theta}\operatorname{sen}5\theta} =$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{-2\cancel{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}(-2\theta)}{-2\theta}}{5\cancel{\theta}\ \frac{\operatorname{sen} 5\theta}{5\theta}} = \frac{-2}{5} \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} -2\theta}{-2\theta}}{\frac{\operatorname{sen} 5\theta}{5\theta}}$$

$$= \frac{-2}{5} \frac{\lim_{\theta \to 0} \cancel{\frac{\operatorname{sen}(-2\theta)}{-2\theta}}^{1}}{\lim_{\theta \to 0} \cancel{\frac{\operatorname{sen} 5\theta}{5\theta}}^{1}} = \frac{-2}{5}.$$

iv) $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\lim_{x \to 0} \cos x\right)^2} = 1^2 \cdot \frac{1}{1^2} = 1.$$