Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Recordar

Una ecuación de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{1}$$

Recordar

Una ecuación de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes reales.

Recordar

Una ecuación de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes reales. Suponemos que $a \neq 0$ y buscamos soluciones para $x > 0$ o $x < 0$.

Recordar

Una ecuación de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes reales. Suponemos que $a \neq 0$ y buscamos soluciones para $x > 0$ o $x < 0$.
En el caso de la ecuación

$$2x^2y'' - xy' - 2y = -3x$$

la solución general para $x > 0$ es

$$y(x) = C_1(x^{-\frac{1}{2}}) + C_2x^2 + x.$$

Recordar

Una ecuación de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes reales. Suponemos que $a \neq 0$ y buscamos soluciones para $x > 0$ o $x < 0$.
En el caso de la ecuación

$$2x^2y'' - xy' - 2y = -3x$$

la solución general para $x > 0$ es

$$y(x) = C_1(x^{-\frac{1}{2}}) + C_2x^2 + x.$$

Notamos que la soluciones en este caso de la ecuación homogénea

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0$$

son $x^{-\frac{1}{2}}$ y x^2.

Una ecuación de Cauchy-Euler es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x), \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes reales. Suponemos que $a \neq 0$ y buscamos soluciones para $x > 0$ o $x < 0$.
En el caso de la ecuación

$$2x^2y'' - xy' - 2y = -3x$$

la solución general para $x > 0$ es

$$y(x) = C_1(x^{-\frac{1}{2}}) + C_2x^2 + x.$$

Notamos que la soluciones en este caso de la ecuación homogénea

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0$$

son $x^{-\frac{1}{2}}$ y x^2. Basados en esta observación tenemos el siguiente método para encontrar soluciones de la ecuación de Cauchy-Euler.

Método 2

Buscamos soluciones de la forma $y = x^r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ de la ecuación de Cauchy-Euler homogénea

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{2}$$

Método 2

Buscamos soluciones de la forma $y = x^r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ de la ecuación de Cauchy-Euler homogénea

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $y' = rx^{r-1}$ y $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, sustituyendo en la ecuación (2) se sigue que

Método 2

Buscamos soluciones de la forma $y = x^r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ de la ecuación de Cauchy-Euler homogénea

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $y' = rx^{r-1}$ y $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, sustituyendo en la ecuación (2) se sigue que

$$ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0.$$

Método 2

Buscamos soluciones de la forma $y = x^r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ de la ecuación de Cauchy-Euler homogénea

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $y' = rx^{r-1}$ y $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, sustituyendo en la ecuación (2) se sigue que

$$ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0.$$

Factorizando x^r obtenemos

$$x^r(a(r(r-1)) + br + c) = 0. \tag{3}$$

Método 2

Buscamos soluciones de la forma $y = x^r$ para algún $r \in \mathbb{R}$ de la ecuación de Cauchy-Euler homogénea

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{2}$$

Tenemos que $y' = rx^{r-1}$ y $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, sustituyendo en la ecuación (2) se sigue que

$$ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0.$$

Factorizando x^r obtenemos

$$x^r(a(r(r-1)) + br + c) = 0. \tag{3}$$

Dado que $x^r > 0$ y por tanto no es la función nula obtenemos que

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0. \tag{4}$$

La ecuación (4) es una ecuación auxiliar de la de Cauchy-Euler (1), también la llamaremos **ecuación indicial**.

La ecuación (4) es una ecuación auxiliar de la de Cauchy-Euler (1), también la llamaremos **ecuación indicial**.

Dependiendo de los valores de raíces tenemos de la ecuación indicial tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2).

La ecuación (4) es una ecuación auxiliar de la de Cauchy-Euler (1), también la llamaremos **ecuación indicial**.

Dependiendo de los valores de raíces tenemos de la ecuación indicial tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Tenemos tres posibilidades:

La ecuación (4) es una ecuación auxiliar de la de Cauchy-Euler (1), también la llamaremos **ecuación indicial**.

Dependiendo de los valores de raíces tenemos de la ecuación indicial tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Tenemos tres posibilidades:

- Raíces reales distintas.

La ecuación (4) es una ecuación auxiliar de la de Cauchy-Euler (1), también la llamaremos **ecuación indicial**.

Dependiendo de los valores de raíces tenemos de la ecuación indicial tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Tenemos tres posibilidades:

- Raíces reales distintas.
- Raíces reales iguales.

La ecuación (4) es una ecuación auxiliar de la de Cauchy-Euler (1), también la llamaremos **ecuación indicial**.

Dependiendo de los valores de raíces tenemos de la ecuación indicial tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Tenemos tres posibilidades:

- Raíces reales distintas.
- Raíces reales iguales.
- Raíces complejas.

La ecuación (4) es una ecuación auxiliar de la de Cauchy-Euler (1), también la llamaremos **ecuación indicial**.

Dependiendo de los valores de raíces tenemos de la ecuación indicial tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Tenemos tres posibilidades:

- Raíces reales distintas.
- Raíces reales iguales.
- Raíces complejas.

Podemos tener las soluciones de la ecuación homogénea para el caso $x < 0$ después de encontrar las soluciones del caso $x > 0$ y cambiando x por $-x$.

La ecuación (4) es una ecuación auxiliar de la de Cauchy-Euler (1), también la llamaremos **ecuación indicial**.

Dependiendo de los valores de raíces tenemos de la ecuación indicial tenemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Tenemos tres posibilidades:

- Raíces reales distintas.
- Raíces reales iguales.
- Raíces complejas.

Podemos tener las soluciones de la ecuación homogénea para el caso $x < 0$ después de encontrar las soluciones del caso $x > 0$ y cambiando x por $-x$.

Luego, podemos obtener una solución particular de (1) utilizando el método de variación de parámetros.

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas de (4),

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas de (4), un conjunto fundamental de soluciones es $\{x^{r_1}, x^{r_2}\}$,

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas de (4), un conjunto fundamental de soluciones es $\{x^{r_1}, x^{r_2}\}$, en efecto, verifiquemos que su Wronskiano es diferente de cero

$$W(x^{r_1}, x^{r_2})(x) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1 - 1} & r_2 x^{r_2 - 1} \end{vmatrix}$$

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas de (4), un conjunto fundamental de soluciones es $\{x^{r_1}, x^{r_2}\}$, en efecto, verifiquemos que su Wronskiano es diferente de cero

$$W(x^{r_1}, x^{r_2})(x) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1 - 1} & r_2 x^{r_2 - 1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) x^{r_1 + r_2 - 1}$$

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas de (4), un conjunto fundamental de soluciones es $\{x^{r_1}, x^{r_2}\}$, en efecto, verifiquemos que su Wronskiano es diferente de cero

$$W(x^{r_1}, x^{r_2})(x) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1 - 1} & r_2 x^{r_2 - 1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) x^{r_1 + r_2 - 1} \neq 0.$$

Raíces reales distintas

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas de (4), un conjunto fundamental de soluciones es $\{x^{r_1}, x^{r_2}\}$, en efecto, verifiquemos que su Wronskiano es diferente de cero

$$W(x^{r_1}, x^{r_2})(x) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0.$$

Entonces, la solución homogénea es

$$y_h(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$.

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2).

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$ax^2(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}) + bx(v'x^r + vrx^{r-1}) + cvx^r = 0.$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$ax^2(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}) + bx(v'x^r + vrx^{r-1}) + cvx^r = 0.$$

Factorizando los terminos con v tenemos

$$v(ax^2(r(r-1)x^{r-2} + bx(rx^{r-1}) + cx^r) + av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = 0.$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$ax^2(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}) + bx(v'x^r + vrx^{r-1}) + cvx^r = 0.$$

Factorizando los terminos con v tenemos

$$v(ax^2(r(r-1)x^{r-2} + bx(rx^{r-1}) + cx^r) + av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = 0.$$

Usando que $ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$ax^2(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}) + bx(v'x^r + vrx^{r-1}) + cvx^r = 0.$$

Factorizando los terminos con v tenemos

$$v(ax^2(r(r-1)x^{r-2} + bx(rx^{r-1}) + cx^r) + av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = 0.$$

Usando que $ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0$ y $r = \frac{a-b}{2a}$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$ax^2(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}) + bx(v'x^r + vrx^{r-1}) + cvx^r = 0.$$

Factorizando los terminos con v tenemos

$$v(ax^2(r(r-1)x^{r-2} + bx(rx^{r-1}) + cx^r) + av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = 0.$$

Usando que $ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0$ y $r = \frac{a-b}{2a}$ tenemos que

$$av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1}$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$ax^2(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}) + bx(v'x^r + vrx^{r-1}) + cvx^r = 0.$$

Factorizando los terminos con v tenemos

$$v(ax^2(r(r-1)x^{r-2} + bx(rx^{r-1}) + cx^r) + av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = 0.$$

Usando que $ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0$ y $r = \frac{a-b}{2a}$ tenemos que

$$av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = av''x^{r+2} + av'x^{r+1}$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$ax^2(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}) + bx(v'x^r + vrx^{r-1}) + cvx^r = 0.$$

Factorizando los terminos con v tenemos

$$v(ax^2(r(r-1)x^{r-2} + bx(rx^{r-1}) + cx^r) + av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = 0.$$

Usando que $ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0$ y $r = \frac{a-b}{2a}$ tenemos que

$$av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = av''x^{r+2} + av'x^{r+1} = 0.$$

Raíces reales iguales

Si $r = r_1 = r_2 = \frac{a-b}{2a}$ son raíces reales iguales tenemos una solución de (4) es $y_1 = x^r$. Usando el método de reducción de orden busquemos otra solución $y_2 = v(x)x^r$ de la ecuación (2). Luego

$$y' = v'x^r + vrx^{r-1} \quad \text{y} \quad y'' = v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$ax^2(v''x^r + 2rv'x^{r-1} + vr(r-1)x^{r-2}) + bx(v'x^r + vrx^{r-1}) + cvx^r = 0.$$

Factorizando los terminos con v tenemos

$$v(ax^2(r(r-1)x^{r-2} + bx(rx^{r-1}) + cx^r) + av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = 0.$$

Usando que $ax^2(r(r-1)x^{r-2}) + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0$ y $r = \frac{a-b}{2a}$ tenemos que

$$av''x^{r+2} + 2arv'x^{r+1} + bv'x^{r+1} = av''x^{r+2} + av'x^{r+1} = 0.$$

Dado que $ax^{r+1} \neq 0$ tenemos que

$$v''x = -v'.$$

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación
$xw' = -w$

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación $xw' = -w$ o equivalentemente

$$\frac{1}{w}dw = -\frac{1}{x}.$$

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación $xw' = -w$ o equivalentemente

$$\frac{1}{w}dw = -\frac{1}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación exacta obtenemos que $w = \dfrac{C_1}{x}$, luego

$$v = C_1 \ln x + C_2.$$

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación $xw' = -w$ o equivalentemente

$$\frac{1}{w}dw = -\frac{1}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación exacta obtenemos que $w = \dfrac{C_1}{x}$, luego

$$v = C_1 \ln x + C_2.$$

Tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ obtenemos $v = \ln x$ y concluimos que

$$y_2 = x^r \ln x.$$

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación $xw' = -w$ o equivalentemente

$$\frac{1}{w}dw = -\frac{1}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación exacta obtenemos que $w = \frac{C_1}{x}$, luego

$$v = C_1 \ln x + C_2.$$

Tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ obtenemos $v = \ln x$ y concluimos que

$$y_2 = x^r \ln x.$$

Verifiquemos que $\{x^r, x^r \ln x\}$ es un conjunto fundamental,

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación $xw' = -w$ o equivalentemente

$$\frac{1}{w} dw = -\frac{1}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación exacta obtenemos que $w = \frac{C_1}{x}$, luego

$$v = C_1 \ln x + C_2.$$

Tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ obtenemos $v = \ln x$ y concluimos que

$$y_2 = x^r \ln x.$$

Verifiquemos que $\{x^r, x^r \ln x\}$ es un conjunto fundamental, en efecto, su wronskiano es diferente de cero

$$W(x^r, x^r \ln x)(x) = \begin{vmatrix} x^r & x^r \ln x \\ rx^{r-1} & rx^{r-1} \ln x + x^{r-1} \end{vmatrix}$$

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación $xw' = -w$ o equivalentemente

$$\frac{1}{w}dw = -\frac{1}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación exacta obtenemos que $w = \dfrac{C_1}{x}$, luego

$$v = C_1 \ln x + C_2.$$

Tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ obtenemos $v = \ln x$ y concluimos que

$$y_2 = x^r \ln x.$$

Verifiquemos que $\{x^r, x^r \ln x\}$ es un conjunto fundamental, en efecto, su wronskiano es diferente de cero

$$W(x^r, x^r \ln x)(x) = \begin{vmatrix} x^r & x^r \ln x \\ rx^{r-1} & rx^{r-1} \ln x + x^{r-1} \end{vmatrix} = x^{2r-1}$$

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación $xw' = -w$ o equivalentemente

$$\frac{1}{w}dw = -\frac{1}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación exacta obtenemos que $w = \dfrac{C_1}{x}$, luego

$$v = C_1 \ln x + C_2.$$

Tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ obtenemos $v = \ln x$ y concluimos que

$$y_2 = x^r \ln x.$$

Verifiquemos que $\{x^r, x^r \ln x\}$ es un conjunto fundamental, en efecto, su wronskiano es diferente de cero

$$W(x^r, x^r \ln x)(x) = \begin{vmatrix} x^r & x^r \ln x \\ rx^{r-1} & rx^{r-1} \ln x + x^{r-1} \end{vmatrix} = x^{2r-1} \neq 0.$$

Tomando el cambio de variable $w = v'$ obtenemos la ecuación $xw' = -w$ o equivalentemente

$$\frac{1}{w} dw = -\frac{1}{x}.$$

Resolviendo esta ecuación exacta obtenemos que $w = \dfrac{C_1}{x}$, luego

$$v = C_1 \ln x + C_2.$$

Tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ obtenemos $v = \ln x$ y concluimos que

$$y_2 = x^r \ln x.$$

Verifiquemos que $\{x^r, x^r \ln x\}$ es un conjunto fundamental, en efecto, su wronskiano es diferente de cero

$$W(x^r, x^r \ln x)(x) = \begin{vmatrix} x^r & x^r \ln x \\ rx^{r-1} & rx^{r-1} \ln x + x^{r-1} \end{vmatrix} = x^{2r-1} \neq 0.$$

Entonces, la solución homogénea es

$$y_h(x) = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x.$$

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$,

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$, por tanto

$$x^{\lambda+\eta i} = e^{(\lambda+\eta i)\ln x}$$

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$, por tanto

$$\begin{aligned} x^{\lambda+\eta i} &= e^{(\lambda+\eta i)\ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x + i\eta \ln x} \end{aligned}$$

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$, por tanto

$$\begin{aligned} x^{\lambda+\eta i} &= e^{(\lambda+\eta i)\ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x + i\eta \ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x} e^{i\eta \ln x} \end{aligned}$$

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$, por tanto

$$\begin{aligned} x^{\lambda+\eta i} &= e^{(\lambda+\eta i)\ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x + i\eta \ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x} e^{i\eta \ln x} \\ &= e^{\ln x^{\lambda}}(cos(\eta \ln x) + isen(\eta \ln x)) \end{aligned}$$

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$, por tanto

$$\begin{aligned}
x^{\lambda+\eta i} &= e^{(\lambda+\eta i)\ln x} \\
&= e^{\lambda \ln x + i\eta \ln x} \\
&= e^{\lambda \ln x} e^{i\eta \ln x} \\
&= e^{\ln x^{\lambda}}(cos(\eta \ln x) + isen(\eta \ln x)) \\
&= x^{\lambda} cos(\eta \ln x) + ix^{\lambda} sen(\eta \ln x))
\end{aligned}$$

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$, por tanto

$$\begin{aligned} x^{\lambda+\eta i} &= e^{(\lambda+\eta i)\ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x + i\eta \ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x} e^{i\eta \ln x} \\ &= e^{\ln x^{\lambda}}(cos(\eta \ln x) + isen(\eta \ln x)) \\ &= x^{\lambda} cos(\eta \ln x) + ix^{\lambda} sen(\eta \ln x)) \end{aligned}$$

Adicionalmente, la definición de $x^{\lambda+i\eta}$ permite obtener varias propiedades de la potenciación real.

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$, por tanto

$$\begin{aligned} x^{\lambda+\eta i} &= e^{(\lambda+\eta i)\ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x + i\eta \ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x} e^{i\eta \ln x} \\ &= e^{\ln x^{\lambda}}(cos(\eta \ln x) + isen(\eta \ln x)) \\ &= x^{\lambda} cos(\eta \ln x) + ix^{\lambda} sen(\eta \ln x)) \end{aligned}$$

Adicionalmente, la definición de $x^{\lambda+i\eta}$ permite obtener varias propiedades de la potenciación real.

Consideremos la función

$$y(x) = x^{\lambda+\eta i}$$

Raíces complejas

Tenemos que la función $x^{\lambda+\eta i}$ con $x > 0$ se define por

$$x^{\lambda+\eta i} := e^{(\lambda+\eta i)\ln x}.$$

Lo anterior es basado en la propiedad $a = e^{\ln a}$, por tanto

$$\begin{aligned} x^{\lambda+\eta i} &= e^{(\lambda+\eta i)\ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x + i\eta \ln x} \\ &= e^{\lambda \ln x} e^{i\eta \ln x} \\ &= e^{\ln x^{\lambda}}(cos(\eta \ln x) + isen(\eta \ln x)) \\ &= x^{\lambda} cos(\eta \ln x) + ix^{\lambda} sen(\eta \ln x)) \end{aligned}$$

Adicionalmente, la definición de $x^{\lambda+i\eta}$ permite obtener varias propiedades de la potenciación real.

Consideremos la función

$$y(x) = x^{\lambda+\eta i} = x^{\lambda} cos(\eta \ln x) + ix^{\lambda} sen(\eta \ln x). \tag{5}$$

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda+\eta i-1},$$

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda+\eta i-1}, \quad y''(x) = (\lambda + \eta i)(\lambda + \eta i - 1)x^{\lambda+\eta i-2}, \quad \ldots.$$

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda+\eta i-1}, \quad y''(x) = (\lambda + \eta i)(\lambda + \eta i - 1)x^{\lambda+\eta i-2}, \quad \ldots.$$

Supongamos que la ecuación indicial (4) tiene las raíces complejas $r_1 = \lambda + \eta i$ y $r_2 = \lambda - \eta i$

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda+\eta i-1}, \quad y''(x) = (\lambda + \eta i)(\lambda + \eta i - 1)x^{\lambda+\eta i-2}, \quad \ldots .$$

Supongamos que la ecuación indicial (4) tiene las raíces complejas $r_1 = \lambda + \eta i$ y $r_2 = \lambda - \eta i$ donde $\eta \neq 0$.

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda+\eta i-1}, \quad y''(x) = (\lambda + \eta i)(\lambda + \eta i - 1)x^{\lambda+\eta i-2}, \quad \ldots.$$

Supongamos que la ecuación indicial (4) tiene las raíces complejas $r_1 = \lambda + \eta i$ y $r_2 = \lambda - \eta i$ donde $\eta \neq 0$. En consecuencia, la función $x^{\lambda+i\eta}$ es una solución de la ecuación (2).

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda+\eta i-1}, \quad y''(x) = (\lambda + \eta i)(\lambda + \eta i - 1)x^{\lambda+\eta i-2}, \quad \ldots.$$

Supongamos que la ecuación indicial (4) tiene las raíces complejas $r_1 = \lambda + \eta i$ y $r_2 = \lambda - \eta i$ donde $\eta \neq 0$. En consecuencia, la función $x^{\lambda+i\eta}$ es una solución de la ecuación (2).

Dado que la ecuación (2) es lineal y que la función $x^{\lambda+i\eta}$ es una solución compleja

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda + \eta i - 1}, \quad y''(x) = (\lambda + \eta i)(\lambda + \eta i - 1)x^{\lambda + \eta i - 2}, \quad \ldots .$$

Supongamos que la ecuación indicial (4) tiene las raíces complejas $r_1 = \lambda + \eta i$ y $r_2 = \lambda - \eta i$ donde $\eta \neq 0$. En consecuencia, la función $x^{\lambda + i\eta}$ es una solución de la ecuación (2).

Dado que la ecuación (2) es lineal y que la función $x^{\lambda + i\eta}$ es una solución compleja entonces su parte real y su parte imaginaria

$$x^{\lambda} cos(\eta \ln x), \quad \text{y} \quad x^{\lambda} sen(\eta \ln x),$$

respectivamente, son soluciones de (2).

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda+\eta i-1}, \quad y''(x) = (\lambda + \eta i)(\lambda + \eta i - 1)x^{\lambda+\eta i-2}, \quad \ldots.$$

Supongamos que la ecuación indicial (4) tiene las raíces complejas $r_1 = \lambda + \eta i$ y $r_2 = \lambda - \eta i$ donde $\eta \neq 0$. En consecuencia, la función $x^{\lambda+i\eta}$ es una solución de la ecuación (2).

Dado que la ecuación (2) es lineal y que la función $x^{\lambda+i\eta}$ es una solución compleja entonces su parte real y su parte imaginaria

$$x^{\lambda} cos(\eta \ln x), \quad \text{y} \quad x^{\lambda} sen(\eta \ln x),$$

respectivamente, son soluciones de (2).

Es suficiente considerar solo la raíz $\lambda + i\eta$,

Tenemos que y es diferenciable y adicionalmente

$$y'(x) = (\lambda + \eta i)x^{\lambda+\eta i-1}, \quad y''(x) = (\lambda + \eta i)(\lambda + \eta i - 1)x^{\lambda+\eta i-2}, \quad \ldots .$$

Supongamos que la ecuación indicial (4) tiene las raíces complejas $r_1 = \lambda + \eta i$ y $r_2 = \lambda - \eta i$ donde $\eta \neq 0$. En consecuencia, la función $x^{\lambda+i\eta}$ es una solución de la ecuación (2).

Dado que la ecuación (2) es lineal y que la función $x^{\lambda+i\eta}$ es una solución compleja entonces su parte real y su parte imaginaria

$$x^{\lambda} cos(\eta \ln x), \quad \text{y} \quad x^{\lambda} sen(\eta \ln x),$$

respectivamente, son soluciones de (2).

Es suficiente considerar solo la raíz $\lambda + i\eta$, dado que un análisis similar con $\lambda - i\eta$ nos llevaría a las soluciones $x^{\lambda} cos(\eta \ln x)$ y $-x^{\lambda} sen(\eta \ln x)$.

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2)

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^\lambda cos(\eta \ln x), x^\lambda sen(\eta \ln x))\}$.

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^{\lambda}cos(\eta \ln x), x^{\lambda}sen(\eta \ln x))\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^\lambda cos(\eta \ln x), x^\lambda sen(\eta \ln x))\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$\left| \begin{array}{cc} x^\lambda cos(\eta \ln x) & x^\lambda sen(\eta \ln x)) \\ \lambda x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) - \eta x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) & \lambda x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) + \eta x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) \end{array} \right|,$$

el cual denotaremos por W, es diferente de cero.

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^{\lambda}cos(\eta \ln x), x^{\lambda}sen(\eta \ln x))\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$\begin{vmatrix} x^{\lambda}cos(\eta \ln x) & x^{\lambda}sen(\eta \ln x)) \\ \lambda x^{\lambda-1}cos(\eta \ln x) - \eta x^{\lambda-1}sen(\eta \ln x) & \lambda x^{\lambda-1}sen(\eta \ln x) + \eta x^{\lambda-1}cos(\eta \ln x) \end{vmatrix},$$

el cual denotaremos por W, es diferente de cero. Tenemos que

$$W = x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x)sen(\eta \ln x) + \eta cos^2(\eta \ln x))$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^{\lambda}cos(\eta \ln x), x^{\lambda}sen(\eta \ln x))\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$\begin{vmatrix} x^{\lambda}cos(\eta \ln x) & x^{\lambda}sen(\eta \ln x)) \\ \lambda x^{\lambda-1}cos(\eta \ln x) - \eta x^{\lambda-1}sen(\eta \ln x) & \lambda x^{\lambda-1}sen(\eta \ln x) + \eta x^{\lambda-1}cos(\eta \ln x) \end{vmatrix},$$

el cual denotaremos por W, es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x)sen(\eta \ln x) + \eta cos^2(\eta \ln x)) \\ &\quad -x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x)sen(\eta \ln x) - \eta sen^2(\eta \ln x)) \end{aligned}$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^\lambda cos(\eta \ln x), x^\lambda sen(\eta \ln x))\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$\begin{vmatrix} x^\lambda cos(\eta \ln x) & x^\lambda sen(\eta \ln x)) \\ \lambda x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) - \eta x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) & \lambda x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) + \eta x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) \end{vmatrix},$$

el cual denotaremos por W, es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x) sen(\eta \ln x) + \eta cos^2(\eta \ln x)) \\ &\quad -x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x) sen(\eta \ln x) - \eta sen^2(\eta \ln x)) \\ &= \eta x^{2\lambda-1}(cos^2(\eta \ln x)) + sen^2(\eta \ln x)) \end{aligned}$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^\lambda cos(\eta \ln x), x^\lambda sen(\eta \ln x))\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$\begin{vmatrix} x^\lambda cos(\eta \ln x) & x^\lambda sen(\eta \ln x)) \\ \lambda x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) - \eta x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) & \lambda x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) + \eta x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) \end{vmatrix},$$

el cual denotaremos por W, es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x) sen(\eta \ln x) + \eta cos^2(\eta \ln x)) \\ &\quad -x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x) sen(\eta \ln x) - \eta sen^2(\eta \ln x)) \\ &= \eta x^{2\lambda-1}(cos^2(\eta \ln x)) + sen^2(\eta \ln x)) \\ &= \eta x^{2\lambda-1} \end{aligned}$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^\lambda cos(\eta \ln x), x^\lambda sen(\eta \ln x))\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$\begin{vmatrix} x^\lambda cos(\eta \ln x) & x^\lambda sen(\eta \ln x)) \\ \lambda x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) - \eta x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) & \lambda x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) + \eta x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) \end{vmatrix},$$

el cual denotaremos por W, es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x) sen(\eta \ln x) + \eta cos^2(\eta \ln x)) \\ &\quad -x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x) sen(\eta \ln x) - \eta sen^2(\eta \ln x)) \\ &= \eta x^{2\lambda-1}(cos^2(\eta \ln x)) + sen^2(\eta \ln x)) \\ &= \eta x^{2\lambda-1} \neq 0 \end{aligned}$$

Vamos a probar que un conjunto fundamental de soluciones de (2) es $\{x^\lambda cos(\eta \ln x), x^\lambda sen(\eta \ln x))\}$. Para este fin verifiquemos que su Wronskiano

$$\begin{vmatrix} x^\lambda cos(\eta \ln x) & x^\lambda sen(\eta \ln x)) \\ \lambda x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) - \eta x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) & \lambda x^{\lambda-1} sen(\eta \ln x) + \eta x^{\lambda-1} cos(\eta \ln x) \end{vmatrix},$$

el cual denotaremos por W, es diferente de cero. Tenemos que

$$\begin{aligned} W &= x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x) sen(\eta \ln x) + \eta cos^2(\eta \ln x)) \\ &\quad - x^{2\lambda-1}(\lambda cos(\eta \ln x) sen(\eta \ln x) - \eta sen^2(\eta \ln x)) \\ &= \eta x^{2\lambda-1}(cos^2(\eta \ln x)) + sen^2(\eta \ln x)) \\ &= \eta x^{2\lambda-1} \neq 0 \end{aligned}$$

Se sigue que la solución general en este caso es

$$y(x) = C_1 x^\lambda cos(\eta \ln x) + C_2 x^\lambda sen(\eta \ln x))$$

Ejemplo

Solucionemos, para $x > 0$, la ecuación

$$2x^2y'' + 8xy' + 4y = 6x.$$

Ejemplo

Solucionemos, para $x > 0$, la ecuación

$$2x^2y'' + 8xy' + 4y = 6x.$$

La ecuación indicial asociada es $2r^2 + 6r + 4 = 0$,

Ejemplo

Solucionemos, para $x > 0$, la ecuación

$$2x^2y'' + 8xy' + 4y = 6x.$$

La ecuación indicial asociada es $2r^2 + 6r + 4 = 0$, o equivalentemente

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

Ejemplo

Solucionemos, para $x > 0$, la ecuación

$$2x^2y'' + 8xy' + 4y = 6x.$$

La ecuación indicial asociada es $2r^2 + 6r + 4 = 0$, o equivalentemente

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -2 \quad \text{y} \quad r_2 = -1.$$

Ejemplo

Solucionemos, para $x > 0$, la ecuación

$$2x^2y'' + 8xy' + 4y = 6x.$$

La ecuación indicial asociada es $2r^2 + 6r + 4 = 0$, o equivalentemente

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -2 \quad \text{y} \quad r_2 = -1.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{x^{-2}, x^{-1}\}$$

Ejemplo

Solucionemos, para $x > 0$, la ecuación

$$2x^2y'' + 8xy' + 4y = 6x.$$

La ecuación indicial asociada es $2r^2 + 6r + 4 = 0$, o equivalentemente

$$r^2 + 3r + 2 = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -2 \quad \text{y} \quad r_2 = -1.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{x^{-2}, x^{-1}\}$$

y la solución homogénea es

$$y_h(x) = C_1x^{-2} + C_2x^{-1}.$$

Escribiendo la ecuación de Cauchy-Euler en forma normal tenemos

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x}.$$

Escribiendo la ecuación de Cauchy-Euler en forma normal tenemos

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x}.$$

Utilicemos el método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)x^{-2} + v_2(x)x^{-1}.$$

Escribiendo la ecuación de Cauchy-Euler en forma normal tenemos

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x}.$$

Utilicemos el método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)x^{-2} + v_2(x)x^{-1}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-1} \\ -2x^{-3} & -x^{-2} \end{vmatrix} = x^{-4}.$$

Escribiendo la ecuación de Cauchy-Euler en forma normal tenemos

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x}.$$

Utilicemos el método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)x^{-2} + v_2(x)x^{-1}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-1} \\ -2x^{-3} & -x^{-2} \end{vmatrix} = x^{-4}.$$

Luego

$$v_1(x) = -\int \frac{x^{-1}(\frac{3}{x})}{x^{-4}} dx$$

Escribiendo la ecuación de Cauchy-Euler en forma normal tenemos

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x}.$$

Utilicemos el método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)x^{-2} + v_2(x)x^{-1}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-1} \\ -2x^{-3} & -x^{-2} \end{vmatrix} = x^{-4}.$$

Luego

$$v_1(x) = -\int \frac{x^{-1}(\frac{3}{x})}{x^{-4}}dx = -3\int x^2 dx$$

Escribiendo la ecuación de Cauchy-Euler en forma normal tenemos

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{3}{x}.$$

Utilicemos el método de variación de parámetros para determinar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x)x^{-2} + v_2(x)x^{-1}.$$

Tenemos que el wronskiano es

$$\begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-1} \\ -2x^{-3} & -x^{-2} \end{vmatrix} = x^{-4}.$$

Luego

$$v_1(x) = -\int \frac{x^{-1}(\frac{3}{x})}{x^{-4}}dx = -3\int x^2 dx = -x^3$$

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}} dx$$

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}} dx = 3 \int x dx$$

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}} dx = 3 \int x dx = \frac{3}{2} x^2.$$

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}} dx = 3 \int x dx = \frac{3}{2} x^2.$$

Por tanto

$$y_p(x) = -x^3(x^{-2}) + \frac{3}{2} x^2 (x^{-1})$$

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}}dx = 3\int xdx = \frac{3}{2}x^2.$$

Por tanto

$$y_p(x) = -x^3(x^{-2}) + \frac{3}{2}x^2(x^{-1}) = \frac{1}{2}x.$$

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}} dx = 3 \int x dx = \frac{3}{2} x^2.$$

Por tanto
$$y_p(x) = -x^3(x^{-2}) + \frac{3}{2} x^2 (x^{-1}) = \frac{1}{2} x.$$

Por tanto, la solución general para $x > 0$ es

$$y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{2} x.$$

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}}dx = 3\int x dx = \frac{3}{2}x^2.$$

Por tanto

$$y_p(x) = -x^3(x^{-2}) + \frac{3}{2}x^2(x^{-1}) = \frac{1}{2}x.$$

Por tanto, la solución general para $x > 0$ es

$$y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{2}x.$$

Para $x < 0$ debemos cambiar en la solución homogénea x por $-x$.

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}} dx = 3 \int x dx = \frac{3}{2} x^2.$$

Por tanto

$$y_p(x) = -x^3(x^{-2}) + \frac{3}{2} x^2 (x^{-1}) = \frac{1}{2} x.$$

Por tanto, la solución general para $x > 0$ es

$$y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{2} x.$$

Para $x < 0$ debemos cambiar en la solución homogénea x por $-x$. Dado que las funciones x^{-2} y x^{-1} son pares la solución homogénea coincide en este caso con la del caso $x > 0$.

$$v_2(x) = \int \frac{x^{-2}(\frac{3}{x})}{x^{-4}} dx = 3\int x dx = \frac{3}{2}x^2.$$

Por tanto

$$y_p(x) = -x^3(x^{-2}) + \frac{3}{2}x^2(x^{-1}) = \frac{1}{2}x.$$

Por tanto, la solución general para $x > 0$ es

$$y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{2}x.$$

Para $x < 0$ debemos cambiar en la solución homogénea x por $-x$. Dado que las funciones x^{-2} y x^{-1} son pares la solución homogénea coincide en este caso con la del caso $x > 0$.

Adicionalmente, la solución particular es obtenida con los mismos términos de la homogénea tenemos que la solución general es la misma

$$y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{2}x.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

La ecuación indicial asociada es

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

La ecuación indicial asociada es

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuyas raíz es

$$r = -1.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

La ecuación indicial asociada es

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuyas raíz es

$$r = -1.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{x^{-1}, x^{-1}\ln x\}$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

La ecuación indicial asociada es

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

cuyas raíz es

$$r = -1.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{x^{-1}, x^{-1}\ln x\}$$

y la solución general es

$$y(x) = C_1x^{-1} + C_2x^{-1}\ln x.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0.$$

La ecuación indicial asociada es

$$r^2 + 4 = 0,$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0.$$

La ecuación indicial asociada es

$$r^2 + 4 = 0,$$

cuyas raíces son

$$2i \quad \text{y} \quad -2i.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0.$$

La ecuación indicial asociada es

$$r^2 + 4 = 0,$$

cuyas raíces son

$$2i \quad \text{y} \quad -2i.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{cos(2\ln x), sen(2\ln x)\}$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0.$$

La ecuación indicial asociada es

$$r^2 + 4 = 0,$$

cuyas raíces son

$$2i \quad \text{y} \quad -2i.$$

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{cos(2\ln x), sen(2\ln x)\}$$

y la solución general es

$$y(x) = C_1 cos(2\ln x) + C_2 sen(2\ln x).$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' - 5xy' + 13y = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' - 5xy' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' - 5xy' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Tenemos que las soluciones complejas son $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' - 5xy' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Tenemos que las soluciones complejas son $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{x^3 cos(2\ln x), x^3 sen(2\ln x)\}$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' - 5xy' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Tenemos que las soluciones complejas son $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{x^3 cos(2\ln x), x^3 sen(2\ln x)\}$$

Ejemplo

Solucionemos la ecuación

$$x^2y'' - 5xy' + 13y = 0.$$

La ecuación auxiliar asociada es

$$r^2 - 6r + 13 = 0.$$

Tenemos que las soluciones complejas son $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{x^3 cos(2\ln x), x^3 sen(2\ln x)\}$$

y la solución general es

$$y(x) = C_1x^3 cos(2\ln x) + C_2x^3 sen(2\ln x).$$