UNIVERSIDAD DEL VALLE
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
Ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Averigue si la siguiente función es solución de la ecuación diferencial correspondiente:

$$\text{(a)}\ \ y=\frac{\operatorname{sen}x}{3x} \quad \text{de} \quad xy'+y=\cos x; \qquad \text{(b)}\ \ y=2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{de} \quad yy'=4x-8x^3;$$

$$\text{(c)}\ \ \left.\begin{array}{rcl} x &=& \cos t\\ y &=& e^t \end{array}\right\} \ \text{de}\ \ y'+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=0; \qquad \text{(d)}\ \ y=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt+ce^{-x^2} \quad \text{de} \quad y'+2xy=1.$$

2. Sustituye la función $y=\operatorname{arc\,sen}2x$ en la ecuación diferencial $y'=2\sec y$ para ver si la satisface.

3. Dada la ecuación diferencial, su solución general y las condiciones iniciales, determine el valor de las constantes arbitrarias:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & y^2y'-4x=0, & y^3=6x^2+c, & y\left(\frac{1}{2}\right)=0;\\
\text{(b)} & y'=y-y^2, & y=\dfrac{1}{1+ce^{-x}}, & y(0)=-\frac{1}{3};\\
\text{(c)} & y''+y=0, & y=c_1\cos x+c_2\ \operatorname{sen}x, & y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},\ \ y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.
\end{array}$$

4. Determine si el *Teorema de existencia y unicidad* garantiza que la ecuación diferencial dada tiene una única solución en el punto especificado:

$$\text{(a)}\ \ y'=\sqrt{y^2-9},\quad (2,-3); \qquad \text{(b)}\ \ y'=\sqrt{9-(x^2+y^2)},\quad (1,2).$$

5. Muestre que $y(x)=(x-2)^3$ es una solución particular del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx}=3y^{2/3}, \qquad y(2)=0.$$

Determine si el *Teorema de existencia y unicidad* puede garantizar la unicidad de esta solución. Si existe otra solución, indíquela.

6. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables:

$$\text{(a)}\ \ y'=\frac{9x^2-6}{x^2}; \qquad \text{(b)}\ \ y'=\frac{3x^2\sqrt{16+y^2}}{y}; \qquad \text{(c)}\ \ y'=\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables:

$$\text{(a)}\ \ \frac{\tan y}{\cot x}dy+\sec x dx=0; \qquad \text{(b)}\ \ (x+xy^2)dx+e^{x^2}dx=0; \qquad \text{(c)}\ \ y'=\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8. Hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas:

$$\text{(a)}\ \ y'=2\operatorname{sen}\ x-e^{-x},\quad y(0)=4; \qquad \text{(b)}\ \ y'=\frac{\cos^2 x}{y^2},\quad y(\pi)=-1.$$

9. Determinar si las siguientes ecuaciones son exactas; si lo son, resolverlas:

$$\text{(a)}\ \ \left(y-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\right)dx+\left(x+\frac{1}{x}e^{y/x}\right)dy=0; \qquad \text{(b)}\ \ \left(3x^2+y\cos xy\right)dx+\left(3y^2+x\cos xy\right)dy=0;$$

$$\text{(c)}\ \ \left(4x^3-4xy^2+y\right)dx+\left(4y^3-4x^2y+x\right)dy=0.$$

10. Determinar si las siguientes ecuaciones son exactas; si lo son, hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas:

$$\text{(a)} \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + y\right) dx + \left(x - \frac{1}{2y^{3/2}}\right) dy = 0, \quad y(9) = 1;$$

$$\text{(b)} \quad \left(\frac{1}{x} + ye^{xy}\right) dx + \left(\frac{1}{y} + xe^{xy}\right) dy = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

11. Verifique que $\mu(x) = x^{-1}$ es un factor de integración de la ecuación dada y resolverla:

$$\left(x + 3x^3 \operatorname{sen} y\right) dx + \left(x^4 \cos y\right) dy = 0,$$

12. Escoger la opción que contiene un factor de integración de la ecuación dada y resolverla:

$$\text{(a)} \quad \left(2 + \frac{y}{x}\right) dx + \left(\frac{x}{y} + 2\right) dy = 0, \qquad \text{factores:} \qquad \sqrt{xy},\ x\sqrt{y},\ y\sqrt{x},\ xy.$$

$$\text{(b)} \quad \left(\frac{y}{2} + 5x^4y\sqrt{xy}\right) dx + \left(\frac{x}{2} + x^5\sqrt{xy}\right) dy = 0, \qquad \text{factores:} \qquad xy,\ \sqrt{xy},\ \frac{1}{\sqrt{xy}},\ \frac{1}{2\sqrt{xy}},\ xy.$$

13. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando un factor de integración apropiado:

$$\text{(a)} \quad (xy + y + y^2)dx + (x + 2y)dy = 0; \qquad \text{(b)} \quad (e^x + y^2)dx + \left(xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2\right) dy = 0;$$

$$\text{(c)} \quad x^2 \ \operatorname{sen}\ x\, dx + xy\, dy = 0.$$

14. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones homogéneas:

$$\text{(a)} \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \qquad \text{(b)} \quad x^2 - y^2 = xy\, y'.$$

15. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones homogéneas:

$$\text{(a)} \quad (2xy^2 - 3y^3)dx + (7y^3 - xy^2)dy = 0; \qquad \text{(b)} \quad xydx - x^2dy = y\sqrt{x^2 + y^2}dy$$

16. Hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas:

$$\text{(a)} \quad x^2\, y' = y^2 + xy, \quad y(1) = 1; \qquad \text{(b)} \quad \left(xy \cos \frac{y}{x} + x^2 \ \operatorname{sen}\ \frac{y}{x}\right) y' = y^2 \cos \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$