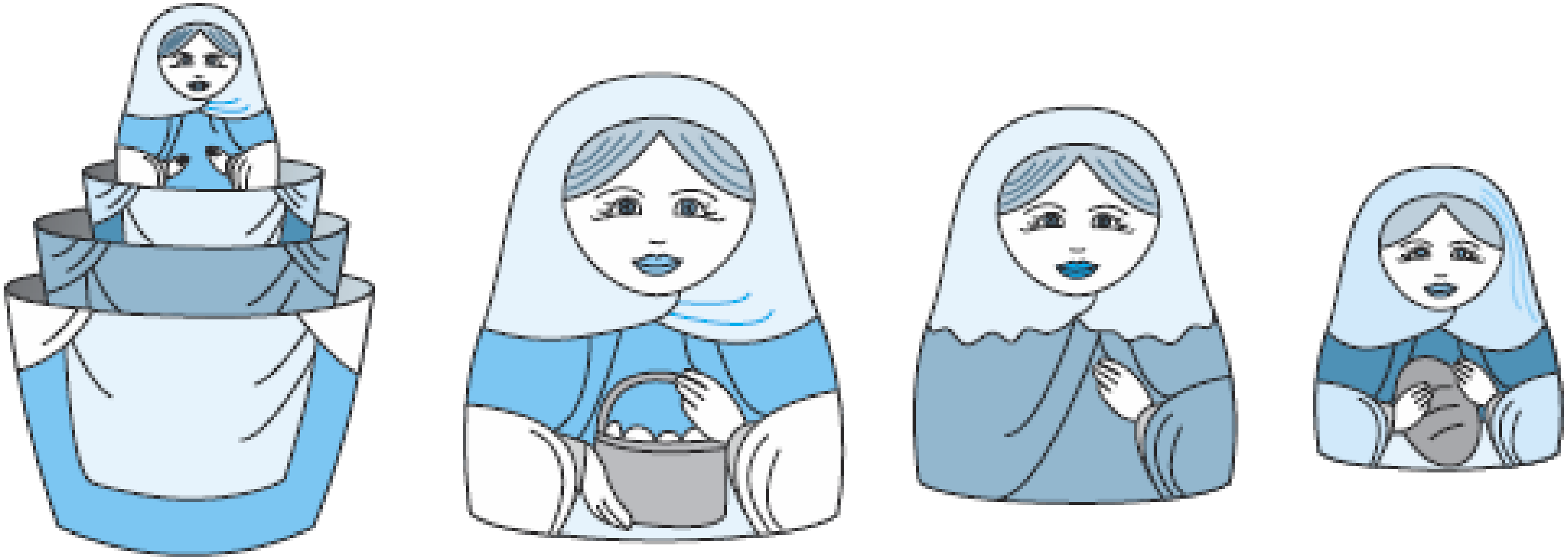
MÉTODOS PARA RESOLVER RECURRENCIAS



Recurrencias

Métodos para resolver recurrencias

- Continuación Método de ecuación característica (Sustitución) para ecuaciones de orden n

Teorema 3

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

Con k **raíces distintas** $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son constantes.

Encontrar la solución de $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con condiciones iniciales, $a_0 = 2, a_1 = 5$ y $a_2 = 15$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\quad$ $a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6\ r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $a_0=2, a_1=5 , a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6 r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6\ r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

1	-6	11	-6	
				+1
1				

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 11 & -6 & \\
 & +1 & & & +1 \\
\hline
1 & & & &
\end{array}
$$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad$ $a_0=2,\ a_1=5,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ \downarrow & +1 & & & +1 \\ \hline 1 & -5 & & & \end{array}$$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

1	-6	11	-6	
	+1	-5		+1
1	-5			

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & -6 & 11 & -6 & \\
 & +1 & -5 & & +1 \\
\hline
1 & -5 & 6 & &
\end{array}
$$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 11 & -6 & \\
 & +1 & -5 & +6 & +1 \\
\hline
1 & -5 & 6 & &
\end{array}
$$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad a_0=2,\ a_1=5,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

1	-6	11	-6	
	+1	-5	+6	+1
1	-5	6	0	

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ & +1 & -5 & +6 & +1 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$(r-1)(r^2 -5r +6)=0$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\quad a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ & +1 & -5 & +6 & +1 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$(r-1)(r^2 -5r +6)=0$

$(r-1)(r-2)(r-3)=0$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $a_0=2, a_1=5, a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$Div_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 11 & -6 & \\ & +1 & -5 & +6 & +1 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$(r-1)(r^2 -5r +6)=0$

$(r-1)(r-2)(r-3)=0$

$r_1=1, r_2= 2, r_3= 3$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$(r-1)(r^2 -5r +6)=0 \quad \rightarrow \quad (r-1)(r-2)(r-3)=0$

$r_1=1,\ r_2= 2,\ r_3= 3$

Paso 3: Expresar la solución según las raíces :

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\qquad$ $a_0=2,\ a_1=5\ ,\ a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6\,r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$(r-1)(r^2 -5r +6)=0 \quad -> \quad (r-1)(r-2)(r-3)=0$

$r_1=1,\ r_2= 2,\ r_3= 3$

Paso 3: Expresar la solución según las raíces :

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Recurrencias

$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $\quad$ $a_0=2, a_1=5, a_2=15$

$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$

Paso 1: hallar La ecuación característica :

$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$

Paso 2: Se resuelve la ecuación para hallar raíces :

$(r-1)(r^2 -5r +6)=0 \quad \to \quad (r-1)(r-2)(r-3)=0$

$r_1=1, r_2= 2, r_3= 3$

Paso 3: Expresar la solución según las raíces :

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Paso 4: Se reemplazan las condiciones iniciales $a_0=2, a_1=5$, $a_2=15$ en la solución para hallar los alfas

La solución de la recurrencia:

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Por tanto las constantes deben ser calculadas

$$\begin{aligned} a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3, \\ a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 2$, Por lo tanto la **única solución** de la recurrencia es la secuencia $\{a_n\}$ con

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

Ejercicio

Resuelva la siguiente recurrencia lineal y homogénea con coeficientes constantes

$a_n = 2\, a_{n-1} + a_{n-2} - 2\, a_{n-3}$ $\qquad a_0 = 3$; $a_1 = 6$; $a_2 = 0$

Teorema 4

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

Con t **raíces distintas** $r_1, r_2, \ldots, r_t$ con multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_t$ respectivamente, así que $m_i \geq 1$, para $i = 1, 2, \ldots, t$ y $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$ Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$\begin{aligned} a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n + \\ (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n + \ldots + \\ (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ donde $\alpha_{i,j}$ son constantes para $1 \leq i \leq t$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$

Supongamos que las raíces de la ecuacción característica son $2, 2, 2, 5, 5$ y 9 que forma tiene la solución general.

1. Hay tres raíces distintas.
2. Raíz 2 con multiplicidad 3, Raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplidad 1.

Supongamos que las raíces de la ecuacción característica son $2, 2, 2, 5, 5$ y 9 que forma tiene la solución general.

1. Hay tres raíces distintas.
2. Raíz 2 con multiplicidad 3, Raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplidad 1.
3. Solución

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)5^n + \alpha_{3,0}9^n$$

Encontrar la solución la recurrencia

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

Con $a_0 = 1, a_1 = -2$ y $a_2 = -1$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$

$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$

$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}$$

La ecuación característica de la recurrencia es:

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$

$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$

$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}$$

Entonces $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3$ y $\alpha_{1,2} = -2$, la única solución es la secuencia $\{a_0\}$

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

Ejercicio

Resuelva la siguiente recurrencia lineal y homogénea con coeficientes constantes

$a_n = 6\, a_{n-1} - 12\, a_{n-2} + 8 a_{n-3}$ $\qquad$ $a_0 = -5$; $a_1 = -9$; $a_2 = 15$