Clase 07-12-21

martes, 7 de diciembre de 2021 10:54 a. m.

Producto escalar (producto punto)

Definición [*Producto escalar*]. Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de R^n,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

definimos el *producto escalar* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, como

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n.$$

Ejemplo. Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Calcular: $u\cdot v$, $v\cdot u$, $u\cdot w$.

- $u\cdot v = 1(4) + 3(-1) + (-2)(5) = 4 - 3 - 10 = -9.$
- $v\cdot u = 4(1) + (-1)(3) + 5(-2) = 4 - 3 - 10 = -9.$
- $u\cdot w$ no está definido.

Propiedades del producto escalar.

Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de R^n y el escalar α, tenemos que

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$. *Ley conmutativa*
2. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$. *Ley distributiva para la suma de vectores*
3. $(\alpha\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = u\cdot(\alpha v)$.

Ejm. Dados los vectores $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, Calcular a. $(3u)\cdot v$

b. $(u+v)\cdot w$.

Observe que: $u\cdot v = 3(2) + 1(-5) + (-5)(1) + 0(3) = -4$.

$u\cdot w = 15 + 0 - 15 + 0 = 0$

$v\cdot w = 10 + 0 + 3 - 21 = -8$.

a. $(3u)\cdot v = 3(u\cdot v) = 3(-4) = -12$.

b. $(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w = 0 + (-8) = -8$.

Otras propiedades de producto escalar.

Si $\mathbf{u}$ es un vector de R^n, entonces:

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geq 0$.
2. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$, si y solo si, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Argumento para 1:

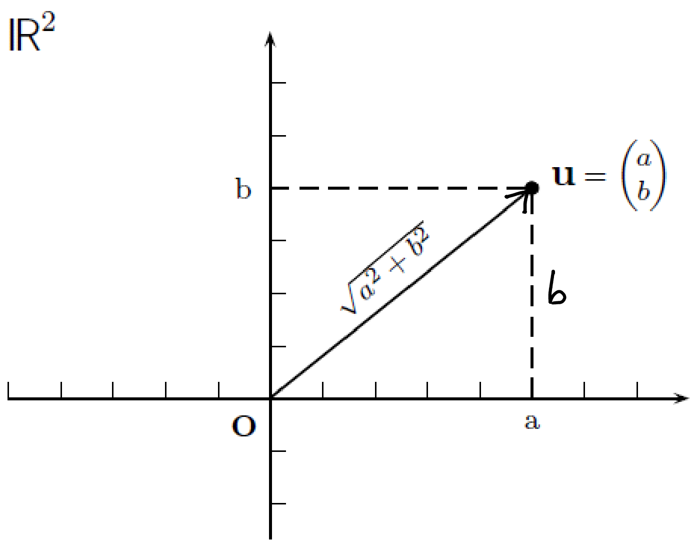
Sea $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$u\cdot u = u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$$

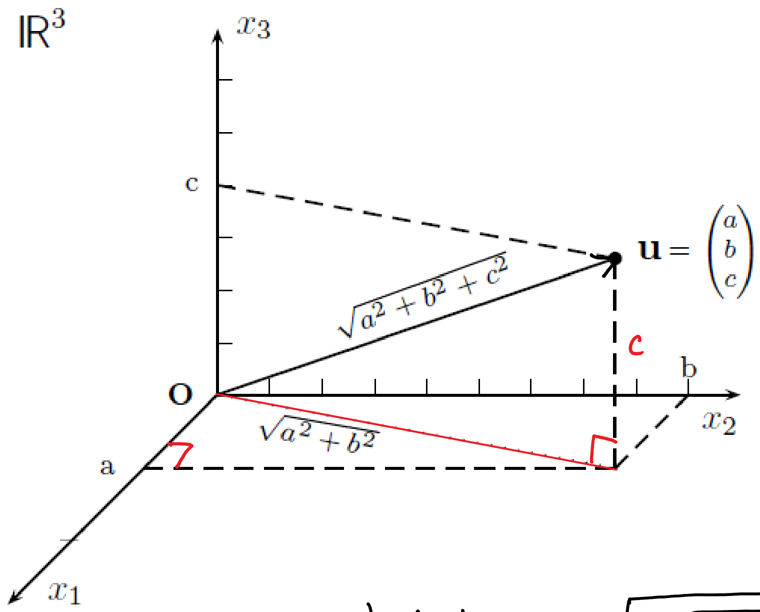
$\Rightarrow u\cdot u \geq 0$

Norma de un vector.



Por teorema de Pitágoras

$$\text{magnitud de } u = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \sqrt{aa+bb}$$
$$= \sqrt{u \cdot u}$$



$$\text{magnitud de } u = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2 + c^2}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$= \sqrt{aa+bb+cc}$$
$$= \sqrt{u \cdot u}$$

Definimos $\|\mathbf{u}\|$, la *norma del vector* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ de R^n, como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Ejemplo.

Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calcular $\|u\|$ y $\|\overline{PQ}\|$.

- $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
- $\|\overline{PQ}\| = \|Q-P\| = \sqrt{(-3-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26}$.

Propiedades de la norma.

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
2. $\|u\| = 0$ si y solo si $u = \theta$

Argumento para 1:

$$\|\alpha u\| = \sqrt{(\alpha u) \cdot (\alpha u)} = \sqrt{\alpha \alpha (u \cdot u)} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{u \cdot u} = |\alpha| \|u\|.$$

Nota:
- Decimos que $\vec{u}$ es unitario si $\|\vec{u}\| = 1$.
- Si $\vec{v} \neq \theta \Rightarrow \vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ es un vector unitario.

Ejemplo. Hallar un vector unitario en la dirección de $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- $\|v\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.
- vector unitario en la dirección de v.

$$\frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\|v\| \qquad \sqrt{14} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

Observe que $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ son vectores unitarios.

Teorema [*Norma de la suma y la resta de vectores*].
Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de R^n, tenemos que

1. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$
2. $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

$\|u\| = \sqrt{u\cdot u}$

$\|u\|^2 = u\cdot u$

D/ 1 $\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v)$.

$$= (u+v)\cdot u + (u+v)\cdot v$$

$$= u\cdot u + v\cdot u + u\cdot v + v\cdot v$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u\cdot v).$$

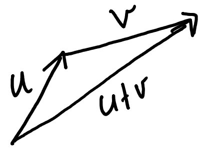
Teorema [*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*].
Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de R^n, tenemos que

$$u\cdot v \leq |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|.$$

Tenemos la igualdad, si y solo si, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ para algún $\lambda \in R$

Teorema [*Desigualdad triangular*].

Dados los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de R^n, tenemos que



$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

La igualdad se cumple, si y solo si, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ con $\lambda \geq 0$.

Argumento:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u\cdot v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|.$$

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

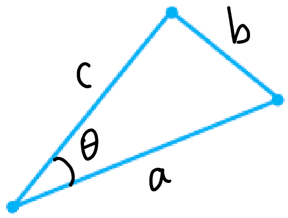
$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

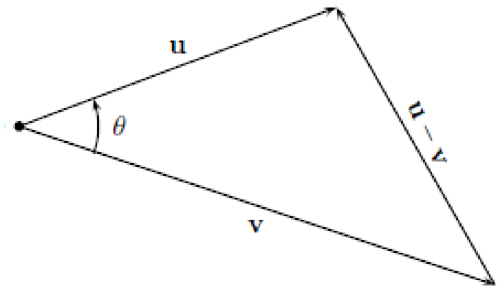
Definición [*Ángulo entre vectores*].

Dados los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de R^n, definimos el ángulo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como el menor giro positivo que hace uno de ellos para coincidir con la dirección y sentido del otro.

$$0 \leq \theta < \pi$$

¿Cómo determinar el angulo entre dos vectores u y v?





Ley del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta.$$

$$\|v\| = a, \quad \|u\| = c \quad y \quad \|u-v\| = b.$$

$$\underbrace{\|u-v\|^2} = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta.$$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u\cdot v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta.$$

$$u\cdot v = \|u\|\,\|v\|\cos\theta.$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|}.}$$

Ejemplo. $u = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix}3\\0\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$

Determinar el ángulo entre u y v.

Solución:

$$u\cdot v = 3.$$

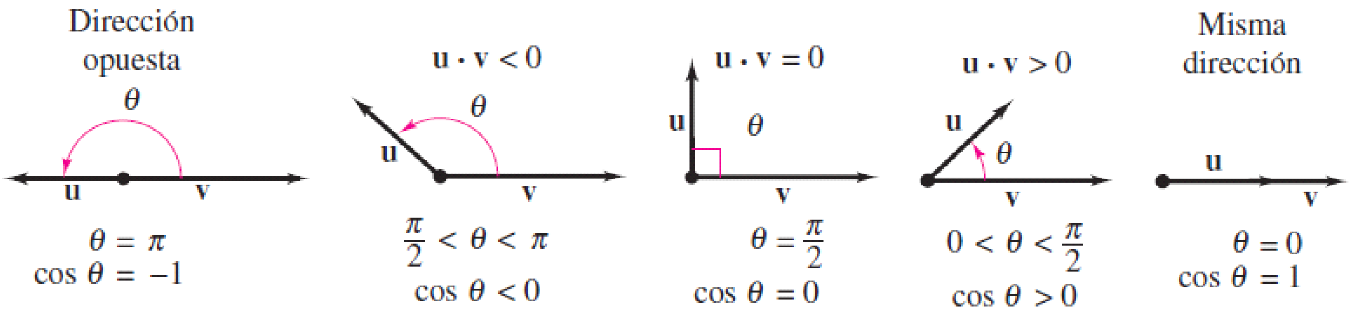
$$\|u\| = \|e_1\| = 1.$$

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{3}{1\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \,//$$



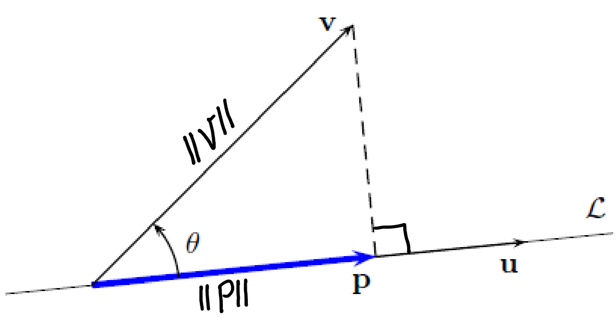
Definición [*Vectores ortogonales*]. Diremos que los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de R^n son ortogonales, si y solo si, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ejm. ¿ Son $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Ortogonales ? Si ya que:

$$u \cdot v = 3 - 2 - 1 + 0 = 3 - 3 = 0.$$

Proyección ortogonal.

$0 \leq \theta \leq \pi/2$



$$P \parallel u \Rightarrow P = \overset{?}{\alpha} u.$$

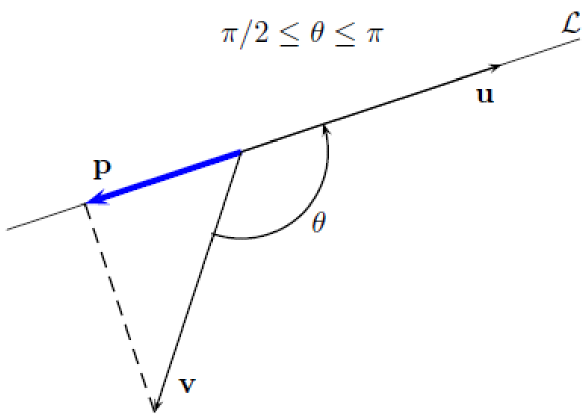
$$0 < \cos\theta = \frac{\|P\|}{\|v\|} \Rightarrow \|P\| = \|v\| \cos\theta.$$

$\dfrac{u}{\|u\|}$ es un vector unitario en la dirección de u.

Luego, $p = \|p\| \cdot \dfrac{u}{\|u\|} = \|v\| \cos\theta \cdot \dfrac{u}{\|u\|}$

$$= \cancel{\|v\|}\, \frac{u \cdot v}{\|u\| \cancel{\|v\|}} \cdot \frac{u}{\|u\|}$$

$$\vec{p} = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \cdot u \,.$$



Puede verse que en este caso también se tiene que $p = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|^2} \cdot u$

Definición [*Proyección ortogonal*]. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de R^n, definimos $\mathbf{proy_u v}$, la *proyección ortogonal* de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$, como el vector

$$p = \mathbf{proy_u v} = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}.$$