Clase 23-02-22

miércoles, 23 de febrero de 2022 11:02 a. m.

Teorema 21 *[Resumen 1]*.
Sea A una matriz $m \times n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. El número de pivotes de la matriz escalonada equivalente a A es n.
2. Las columna de A forman un conjunto de vectores $l.i.$
3. $\rho(A) = n$
4. $dim\ C_A = n.$
5. $\rho(A^T) = n$
6. $dim\ F_A = n.$
7. $\nu(A) = 0.$
8. $N_A = \{\mathbf{0}\}.$
9. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial.

Corolario 22.1 Sea A una matriz $n \times n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. El número de pivotes de la matriz escalonada equivalente a A es n.
2. Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^n$.
3. Las columnas de A forman un conjunto de vectores $l.i.$
4. Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.
5. $\rho(A) = n$
6. $dim\ C_A = n.$
7. $dim\ F_A = n.$
8. Cada fila de una matriz escalonada equivalente a A tiene un pivote.
9. $\nu(A) = 0.$
10. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para todo $\mathbf{b}$.
11. La matriz A es invertible.
12. $\det A \neq 0.$

Transformaciones lineales

Función: $f : A \longrightarrow B$

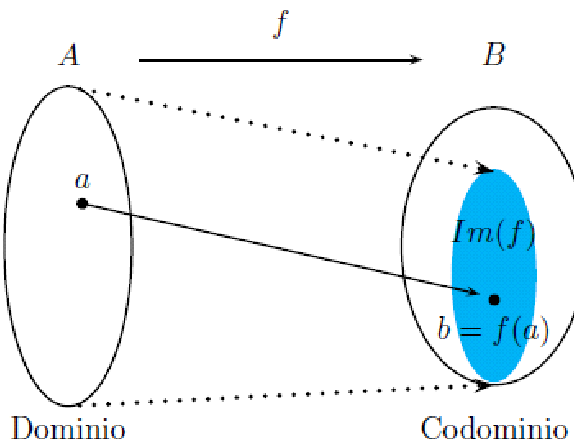
$x \longrightarrow f(x)$

A: Dominio de f

B: Codominio de f

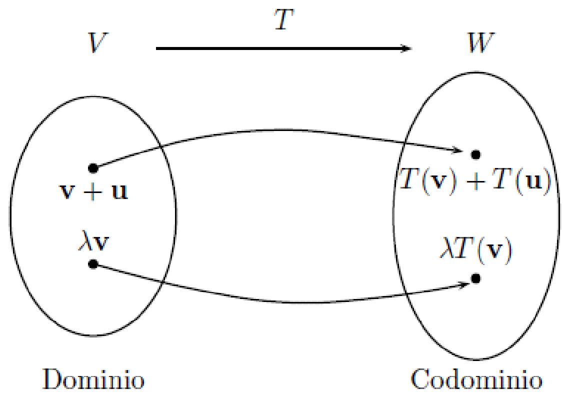
Rango (R): Conjunto de todas las imagenes de f.

$R = \{ f(x) : x \in Dom.f \} \subseteq B.$



Definición 1 [*Transformación lineal*]. Dados dos espacios vectoriales V y W, diremos que la función $T : V \longrightarrow W$ es una *transformación lineal* de V en W, si y sólo si,

1. $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. *(Propiedad aditiva)*
2. $T(\lambda \mathbf{v}_1) = \lambda T(\mathbf{v}_1)$ para todo $\mathbf{v}_1 \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$. *(Propiedad homogénea)*



Ejemplo. Considor la función $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2z - x \end{pmatrix}$$

Veamos que T es un transformacion lineal (T.L.).

- Sean $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \\ 2(z_1 + z_2) - (x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2 \\ 2z_1 - x_1 + 2z_2 - x_2 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 2z_1 - x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ 2z_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$= T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

- Sean $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x - 2(\alpha y) \\ 2(\alpha z) - (\alpha x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha(-2y) \\ \alpha(2z) + \alpha(-x) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} x - 2y \\ 2z - x \end{pmatrix}$$

$$= \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{//}$$

Otra forma de proceder:

$$\begin{aligned}
T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] &= T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\
\parallel \qquad\qquad &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \\ 2(z_1 + z_2) - (x_1 + x_2) \end{pmatrix} \\
T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 2z_1 - x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ 2z_2 - x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) \\ (2z_1 - x_1) + (2z_2 - x_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \\ 2(z_1 + z_2) - (x_1 + x_2) \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$T\left[\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]=T\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda x)-2(\lambda y)\\2(\lambda z)-(\lambda x)\end{pmatrix}$$

y $\qquad //$

$$\lambda\left[T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]=\lambda\begin{pmatrix}x-2y\\2z-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(x-2y)\\\lambda(2z-x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda x)-2(\lambda y)\\2(\lambda z)-(\lambda x)\end{pmatrix}$$

Ejemplo. $R:\mathbb{R}^2\longrightarrow P_2.$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\longrightarrow R\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=1+ax+2bx^2$$

¿ R es una T.L. ?

- Sean $\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

✓ $R\left[\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}\right]=R\begin{pmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\end{pmatrix}$

$$=1+\underbrace{(a_1+a_2)x+2(b_1+b_2)x^2}$$

✓ $R\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+R\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=(1+a_1x+2b_1x^2)+(1+a_2x+2b_2x^2).$

$$=2+\underbrace{(a_1+a_2)x+2(b_1+b_2)x^2}$$

$$R\left[\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}\right]\neq R\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+R\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Sea $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow P_2.$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\longrightarrow T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(a+c)x+2bx^2$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longrightarrow T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+c)x + 2bx^2$$

- Sean $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$

$$T\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix}$$

$$= [(a_1+a_2) + (c_1+c_2)]x + 2(b_1+b_2)x^2$$

$$= [(a_1+c_1) + (a_2+c_2)]x + 2b_1x^2 + 2b_2x^2$$

$$= [\underbrace{(a_1+c_1)x + 2b_1x^2}] + [\underbrace{(a_2+c_2)x + 2b_2x^2}].$$

$$= T\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

- Sean $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}.$

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} = (\alpha a + \alpha c)x + 2(\alpha b)x^2$$

$$= \alpha(a+c)x + \alpha(2bx^2)$$

$$= \alpha\left((a+c)x + 2bx^2\right)$$

$$= \alpha T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} //$$

Ejemplo. Sean A una matriz de tamaño $m\times n$ y

$$
\begin{aligned}
T: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
\vec{x} &\longrightarrow T(\vec{x}) = A\vec{x}.
\end{aligned}
$$

¿Es T una T.L.?

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $$
\begin{aligned}
T(\vec{x}+\vec{y}) &= A(\vec{x}+\vec{y}) \\
&= A\vec{x} + A\vec{y} \\
&= T(\vec{x}) + T(\vec{y}).
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
T(\alpha\vec{x}) &= A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x}. \\
&= \alpha T(\vec{x}).
\end{aligned}
$$

Luego, $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ es una T.L. Este tipo de transformaciones se les denomina transformaciones matriciales.

Ejemplo (transformación matricial).

Sea

$$
\begin{aligned}
T: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longrightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2z-x \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x-2y \\ 2z-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \end{pmatrix}. \\
&= x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

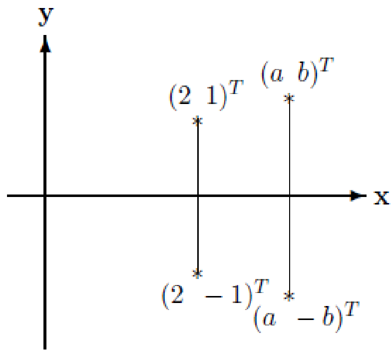
$$= x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Dado que T es un transformación matricial, se concluye que es también una T. L.

Ejemplo. Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}.$$



Veamos que T es una T. M.

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-b\end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Por tanto, T es una T. L.