Clase 16-11-21

martes, 16 de noviembre de 2021 10:50 a. m.

Eliminación de Gauss.

Definición (**Matriz escalonada**): Decimos que una matriz es escalonada si tiene las siguientes características:

1. Las filas de ceros se encuentra en la parte inferior de la matriz.

2. El pivote de la fila i está a la derecha del pivote de la fila $i-1$.

Observaciones:

- En una matriz escalonada cada fila tiene un pivote o todos sus componentes son nulas.

- Toda columna tiene a lo más un pivote.

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es escalonada

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es escalonada.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Es una matriz escalonada.

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ También es escalonada.

Variables pivotales: Las que corresponden a las columnas pivotales.

Variables libres: " " " " " no pivotales.

Método de Eliminación de Gauss

Objetivo: *Escalonar una matriz; es decir, dada una matriz, encontrar una matriz escalonada equivalente a la matriz dada.*

Paso 1 Identifique la primera columna, de izquierda a derecha, que no sea de sólo ceros.

Paso 2 Si la primera componente de esta columna es un cero, intercambie la primera fila con una que tenga una componente no cero en esta columna. Esta componente no cero corresponde al pivote de esta columna.

Paso 3 Usando la fila del pivote, aplique operaciones elementales adecuadas del Tipo Eliminación, sucesivamente, para obtener ceros debajo del pivote de esta columna.

Paso 4 Repítale este procedimiento, comenzando con el Paso 1, al conjunto de filas de la matriz resultante del paso anterior que están por debajo de la fila donde está el pivote anterior, hasta agotar las filas o hasta que las filas restantes sean de sólo ceros.

Idea básica para resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales

Paso 1 Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.

Paso 2 Aplique el método de eliminación de Gauss para reducir la matriz aumentada del sistema a una matriz escalonada equivalente (Algoritmo 1).

Paso 3 Resuelva el sistema correspondiente a la matriz escalonada por sustitución hacia atrás.

Ejemplo. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5. \end{aligned}$$

Solución.

1. Escribir la MA del sistema: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ \underline{2} & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$

1. Escribir la MA del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ \underline{2} & 3 & 1 & 5 \\ \underline{1} & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

2. Aplicar eliminación de Gauss.

$F_2 - F_1 \to F_2$

$F_3 - \frac{1}{2}F_1 \to F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \underline{-3/2} & -5/2 & -13/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrrrr} F_3: & 1 & -1 & -2 & -5 \\ -1/2\,F_1: & -1 & -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ \hline & 0 & -3/2 & -5/2 & -13/2 \end{array}$$

$F_3 + \frac{3}{4}F_2 \to F_3$

$$\begin{array}{rrrr} 0 & -3/2 & -5/2 & -13/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/2 \\ \hline 0 & 0 & -5/2 & -5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5/2 & -5 \end{array}\right)$$

- Variables pivotales: x_1, x_2, x_3
- " libres: no hay.
- No hay pivote en la columna de los terminos independientes.

3. Escribir el sistema correspondiente a la MA y aplicar sustitución hacia atrás:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_2 &= 2 \\ -\tfrac{5}{2}x_3 &= -5. \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{2(-5)}{-5} = 2$$

$$x_2 = 2/2 = 1.$$

$$2x_1 + 1 + 2 = 3 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Por lo tanto, $(0, 1, 2)$ es la única solución del sistema.

Observaciones

Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, una fila tiene su pivote en la columna de los términos independientes, **el sistema es inconsistente.**

Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, no se obtiene pivote en la columna de los términos independientes, **el sistema es consistente.**

Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, cada columna de la matriz de los coeficientes tiene pivote y el sistema es consistente, **el sistema tiene solución única** (Si el sistema es consistente y no hay variables libres, el sistema tiene solución única).

Ejemplo. Resolver el sistema.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 0x - 5y + 5z &= -1. \end{aligned}$$

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$F_2 - \frac{1}{2}F_1 \to F_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right)$ $F_3 + 2F_2 \to F_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

pivote

Dado que hay un pivote en la columna de los terminos constantes, el sistema es inconsistente.

Ejemplo. Resolver el sistema.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - w &= 1 \\ 4x + 3y + 5z + 3w &= 4 \\ -5y + z - 5w &= -2 \\ -2x - 2y - 2z - 2w &= -3 \end{aligned}$$

Solución.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$F_2 - 2F_1 \to F_2$
$F_4 + F_1 \to F_4$
$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$

$F_2 - 2F_1 \to F_2$
$F_4 + F_1 \to F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$F_3 + F_2 \to F_3$
$F_4 + \frac{3}{5}F_2 \to F_4.$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 & -4/5 \end{array}\right)$$

$F_3 \leftrightarrow F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Variables pivotales: $x, y, z.$
" libres: $w.$

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - w &= 1 \\ 5y - z + 5w &= 2 \\ 2/5\, z &= -4/5 \end{aligned}$$

$z = -2$

$5y - z + 5w = 2$

$$y = \frac{2 + z - 5w}{5} = \frac{2 + (-2) - 5w}{5} = \frac{-5w}{5} = -w$$

$y = -w$ (parámetro $w = t$)

$2x - y + 3z - w = 1$

$$x = \frac{1 + y - 3z + w}{2} = \frac{1 + (-w) - 3(-2) + w}{2} = \frac{7}{2}.$$

Conjunto solución: $\left\{ \begin{pmatrix} 7/2 \\ -t \\ -2 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$ Infinitas soluciones.

Si al escalonar la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se observan menos pivotes que columnas en la matriz de coeficientes y el sistema es consistente, el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejercicios (Anális del c.s. de un sistema).

1. $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1/5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Matriz aumentada de un sistema de ecuaciones de variables u, v.

Variables pivotales:

Variables libres:

Tamaño del conjunto solución:

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 3 & -2 & 7/2 \\ 0 & 1/3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Matriz aumentada de un sistema de ecuaciones de variables x, y, z, w.

Variables pivotales:

Variables libres:

Tamaño del conjunto solución: