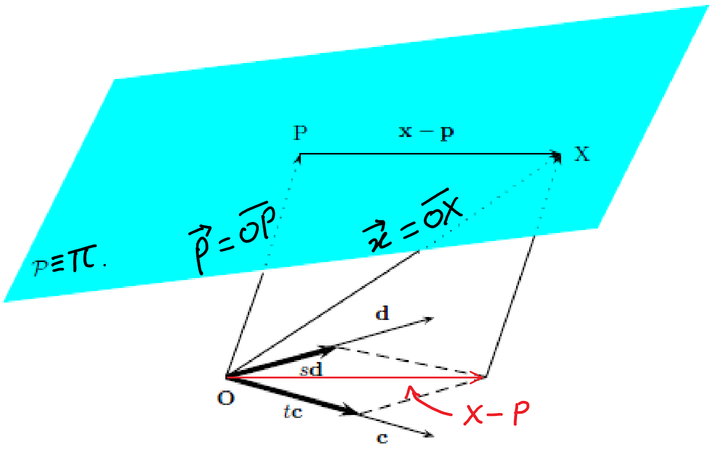
Clase 15-12-21

miércoles, 15 de diciembre de 2021 10:50 a. m.

Definición [*Plano*]. Dado un punto $P \in R^n$ y dos vectores **c** y **d** $\in R^n$ diferentes de cero y no paralelos, diremos que el conjunto de puntos X que determinan vectores $\overline{PX}$ que son combinación lineal de los vectores **c** y **d**, es el *plano* $\mathcal{P}$ que pasa por el punto P y tiene direcciones **c** y **d**. A los vectores **c** y **d** los llamamos *vectores directores* o *vectores dirección del plano.*



$$\vec{x} - \vec{p} = t\vec{c} + s\vec{d}$$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + t\vec{c} + s\vec{d}}$$ Ecuación vectorial del plano.

observe que si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tc_1 + sd_1 \\ x_2 &= a_2 + tc_2 + sd_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + tc_n + sd_n \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas del plano.}$$

Ejemplo. Considerar la ecuaciones paramétricas de un plan π.

$$x_1 = 2 + t - s$$

$$x_2 = 2t$$
$$x_3 = 1 + 5s$$
$$x_4 = -2.$$

a. Hallar un punto P del plano π.

Si $t = 0$ y $s = 1$, entonces:

$$x_1 = 2 + 0 - 1 = 1$$
$$x_2 = 2(0) = 0$$
$$x_3 = 1 + 5(1) = 6$$
$$x_4 = -2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \in \pi.$$

b. Encontrar 2 vectores directores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ del plano π.

$$x_1 = 2 + t - s$$
$$x_2 = 2t = 0 + 2t + s \cdot 0$$
$$x_3 = 1 + 5s = 1 + t \cdot 0 + 5s$$
$$x_4 = -2. = -2 + t \cdot 0 + s \cdot 0$$

Escribamos la ecuacion vectorial de π.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c. Si $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ son puntos de π, verificar que $\overline{PQ}, \overline{PR} \in \text{Gen}\{\vec{c}, \vec{d}\}$.

$$\overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \overline{PR} = R - P = \begin{pmatrix}2\\2\\-5\\0\end{pmatrix}.$$

Veamos si existen α, β, λ y μ tales que

$$\alpha\vec{c} + \beta\vec{d} = \overline{PQ} \qquad y \qquad \lambda\vec{c} + \mu\vec{d} = \overline{PR}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-5\\0\end{pmatrix}.$$

M.A. conjunta:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 2\\2 & 0 & 2 & 2\\0 & 5 & 0 & -5\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 2\\0 & 2 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \quad \text{F.E.}$$

Los dos sistemas son consistentes.

Asi que $\overline{PQ}$ y $\overline{PR} \in \text{Gen}\{\vec{c}, \vec{d}\}$.

d. ¿Los puntos $M = \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix}6\\4\\-9\\-2\end{pmatrix}$ están en π?

Veamos si existen t, s, α y β tales que

$$M = P + tc + sd \qquad y \qquad N = P + \alpha c + \beta d.$$

$$tc + sd = M - P \qquad \alpha c + \beta d = N - P.$$

$$\begin{pmatrix}4\\4\\-10\\0\end{pmatrix} = N - P.$$

$$t\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

M.A. Conjunta:

Inconsistente

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 0 & 4\\2 & 0 & 2 & 4\\0 & 5 & 0 & -10\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 0 & 4\\0 & 2 & 2 & -4\\0 & 0 & -5 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Consistente.

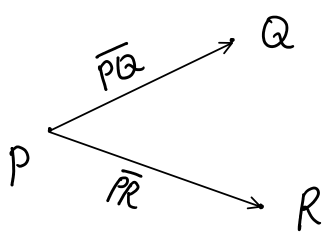
En consecuencia,

✓ $tc + sd = M - P$ Inconsistente $\Rightarrow M \notin \Pi$.

✓ $\alpha c + \beta d = N - P$ Consistente $\Rightarrow N \in \Pi$.

Ejm. Hallar la ecuación vectorial del plano que contiene los puntos:

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



Dos vectores directores del plano son

$$c = \overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

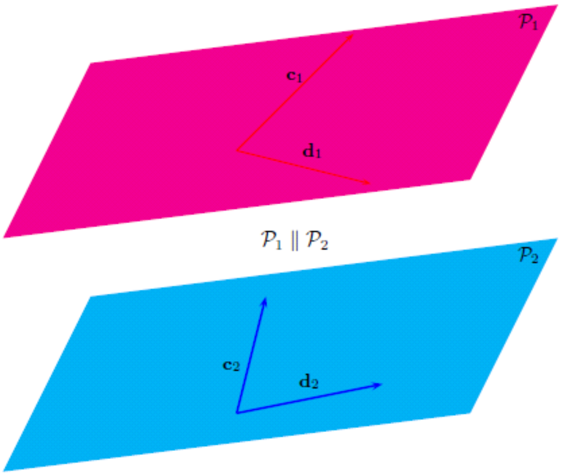
$$d = \overline{PR} = R - P = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ecuación plano:

$$\vec{x} = P + t\vec{c} + s\vec{d}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Definición [*Planos paralelos*]. Diremos que dos planos son paralelos, si y solo si, los vectores directores de uno de los planos son combinación lineal de los vectores directores del otro plano.



$P_1 \parallel P_2$ si y solo si:

$c_2 = \alpha c_1 + \beta d_1$ y $d_2 = \lambda c_1 + \mu d_1$.

Ejemplo. Si P_1 es un plano con vectores directores

$$c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } d_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ y P_2 contiene los puntos

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$ determine si $P_1 \parallel P_2$.

Vectores directores de P_2:

$$c_1 = \overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } d_1 = \overline{PR} = R - P = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Veamos si existen α, β, λ y μ tales que

$$\alpha c_2 + \beta d_2 = c_1 \qquad \text{y} \qquad \lambda c_2 + \mu d_2 = d_1.$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

M.A. Conjunta:

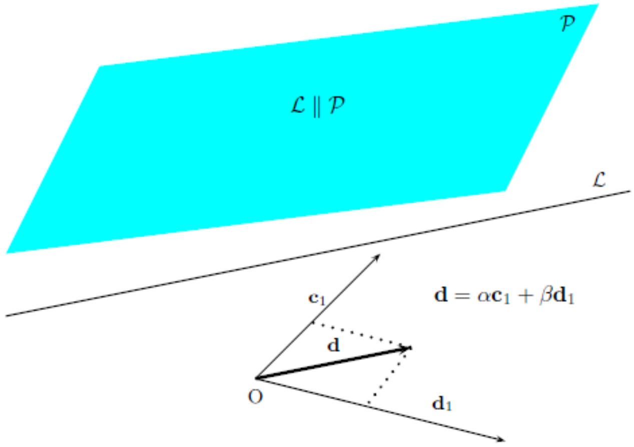
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 9 & -2 & -7 & -5 \\ -2 & 4 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 16 & -16 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & \vert & -4 \\ -2 & 4 & \vert & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 16 & -16 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

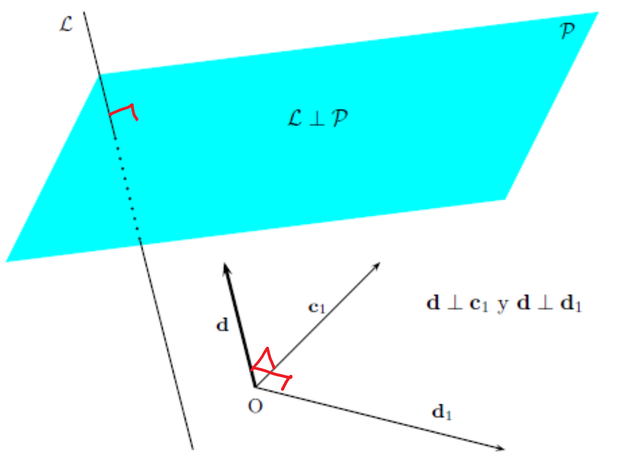
Consistentes.

Dado que los dos sistemas son consistentes, entonces los planos P_1 y P_2 son paralelos.

Definición 21 [*Recta y plano paralelos*]. Sean $\mathcal{L}$ una recta con vector director $\mathbf{d} \in R^n$ y $\mathcal{P}$ un plano con vectores directores $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1 \in R^n$. Diremos que la recta $\mathcal{L}$ es paralela al plano $\mathcal{P}$, si y solo si, el vector $\mathbf{d}$ es combinación lineal de $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1$.



Definición [*Recta y plano ortogonales*]. Sean $\mathcal{L}$ una recta con vector director $\mathbf{d} \in R^n$ y $\mathcal{P}$ un plano con vectores directores $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{d}_1 \in R^n$. Diremos que la recta $\mathcal{L}$ es ortogonal al plano $\mathcal{P}$, si y solo si, el vector $\mathbf{d}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{c}_1$, como a $\mathbf{d}_1$.



$d \cdot c_1 = 0$ y $d \cdot d_1 = 0$