

Aplicaciones de la derivada

Profesoras: Martha Pinzón y Daniela Vásquez

La derivada de una función tiene diversas aplicaciones. Como se ha visto, permite encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, la velocidad de una partícula en movimiento y tasas de variación. También permite estudiar la monotonía de una función, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, valores máximos y mínimos, elaborar la gráfica y resolver problemas de optimización entre otras.

Empezaremos estudiando los valores extremos de una función.

0.1. Valores máximos y mínimos

Definición 0.1.1 (*Extremos absolutos o globales*). Sea f una función con dominio D y c un número en D .

1. f tiene un máximo absoluto o global en $x = c$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D$. El valor $f(c)$ se denomina máximo absoluto de f .
2. f tiene un mínimo absoluto o global en $x = c$ si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D$. El número $f(c)$ se llama mínimo absoluto de f .

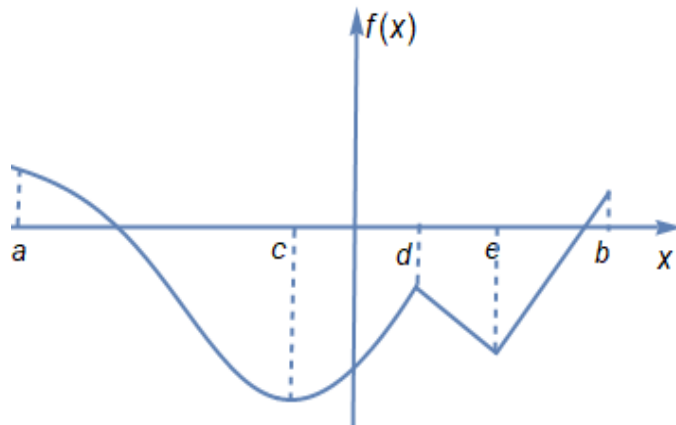
Definición 0.1.2 (*Extremos locales o relativos*). Sea f una función y c un número en el dominio de f .

1. f tiene un máximo local o relativo en $x = c$, si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c en el cual $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. El número $f(c)$ se conoce como máximo local de f .
2. f tiene un mínimo local o relativo en $x = c$, si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. El valor $f(c)$ se llama mínimo local de f .

Los valores máximos o mínimos se conocen como valores extremos.

¿Existe alguna relación entre extremos locales y absolutos?, es decir ¿Si en $x = c$ hay un extremo local entonces en $x = c$ hay un extremo absoluto ? o ¿Si en $x = c$ hay un extremo absoluto entonces en $x = c$ hay un extremo local?. Para responder estas preguntas consideraremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 0.1.1 Considere la gráfica de una función f definida en un intervalo $[a, b]$.



De acuerdo a la gráfica de f la función alcanza: máximo absoluto en $x = a$ y mínimo absoluto en $x = c$. Mínimos locales en $x = c$ y en $x = e$. Máximo local en $x = d$.

Observe que el máximo absoluto alcanzado en $x = a$, no es local porque no existe un intervalo abierto contenido en $[a, b]$ en el cual $f(a)$ es el valor mas grande. El mínimo absoluto en $x = c$ es local. En $x = d$ y $x = e$ hay extremos locales pero no son absolutos.

En conclusión, todo extremo absoluto es local excepto cuando es alcanzado en los extremos del intervalo.

También en la gráfica se observó que en los puntos donde hay extremos locales la derivada es 0 o no existe, lo cual se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 0.1.1 Sea f una función y $x = c$ un número en el dominio de f . Si f alcanza un extremo local en $x = c$ entonces $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Aquellos números c en el dominio de la función f donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, se llaman **números críticos de f** y el punto $P(c, f(c))$ es el **punto crítico**.

En términos de números críticos el teorema 0.1.1 se puede escribir de la siguiente manera

Si f alcanza un extremo local en $x = c$ entonces c es un número crítico de f .

Observe que el recíproco del teorema no es cierto, es decir, que c sea número crítico de f no implica que en $x = c$ hay un extremo local. En efecto, si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) = 3x^2$ y $f'(0) = 0$, luego $x = 0$ es un número crítico de f , pero f no tiene máximo ni mínimo local en $x = 0$, como se observa en la figura 1.

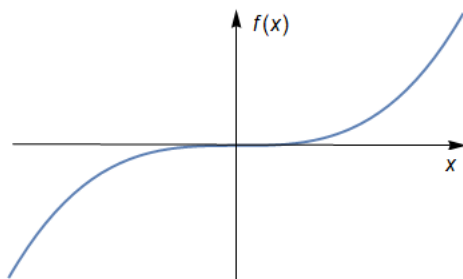


Figura 1: Gráfica de la función $y = x^3$

0.1.1. Extremos absolutos en un intervalo cerrado

El siguiente teorema garantiza la existencia de extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado.

Teorema 0.1.2 *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza sus extremos absolutos en $[a, b]$, es decir, existen números c y d en $[a, b]$ tales que $f(c)$ es el mínimo absoluto y $f(d)$ es máximo absoluto de f en $[a, b]$.*

Lo visto previamente permite encontrar extremos absolutos en intervalos cerrados.

Sea f una función continua en $[a, b]$ por teorema 0.1.2 f alcanza sus extremos absolutos en $[a, b]$, pero los extremos absolutos son locales o se alcanzan en los extremos del intervalo. Si son locales se alcanzan en números críticos, por lo tanto para hallar los extremos absolutos se procede de la siguiente manera:

1. Se buscan los números críticos de f en (a, b) .
2. Se evalúa f en los números críticos hallados en el numeral 1 y en a y b extremos del intervalo.
3. De los valores encontrados en 2, el mayor valor es el máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto.

Ejemplo 0.1.2 *Halle los extremos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado.*

1. $f(x) = x^5 - 5x + 1, \quad x \in [0, 2]$.
2. $f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad x \in [-1, 0]$.
3. $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$.
4. $f(x) = 3x^{1/3} - 5x^{1/5}, \quad x \in [-1, 1]$.

Solución:

1. $f(x) = x^5 - 5x + 1, \quad x \in [0, 2]$.

Como f es un polinomio, f es continua en \mathbb{R} , en particular es continua en $[0, 2]$, luego por el teorema 0.1.2 f alcanza su máximo y mínimo en $[0, 2]$. Ahora, se buscan los números críticos de f en $(0, 2)$, los cuales se obtienen de resolver $f'(x) = 0$ ya que la función es derivable en el intervalo.

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \rightarrow 5(x^4 - 1) = 0 \rightarrow 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$$

de donde $x^2 - 1 = 0$, lo cual implica que $x = 1$ o $x = -1$.

Se evalúa f en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$, pues $-1 \notin (0, 2)$. Así,

$$f(0) = (0)^5 - 5(0) + 1 = 1$$

$$f(1) = (1)^5 - 5(1) + 1 = -3$$

$$f(2) = (2)^5 - 5(2) + 1 = 23$$

Por lo tanto el máximo se alcanza en $x = 2$ y su valor es 23 y el mínimo se alcanza en $x = 1$ cuyo valor es -3 .

2. $f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad x \in [-1, 0]$.

La función es continua para $x \neq 1$, luego f es continua en $[-1, 0]$.

Aplicando la regla del cociente se obtiene $f'(x) = \frac{1(x-1) - x(1)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$

Observe que $f'(x)$ nunca es 0 y siempre existe en el intervalo $(-1, 0)$, por lo tanto la función no tiene números críticos en el intervalo, en consecuencia los extremos absolutos se alcanzan en $x = -1$ y en $x = 0$. Evaluando, $f(-1) = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$ y

$f(0) = \frac{0}{0-1} = 0$. Luego el máximo absoluto se alcanza en $x = -1$ y el mínimo en $x = 0$ y sus valores son respectivamente $\frac{1}{2}$ y 0.

3. $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$.

La función f es continua en \mathbb{R} , en particular es continua en $[0, 2\pi]$. Como la derivada de f existe en el intervalo $(0, 2\pi)$, los números críticos de f se obtienen únicamente de resolver la ecuación $f'(x) = 0$. Así

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2 - \sin x \\ &= \cos 2x - \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x \\ &= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin x \\ &= -2\sin^2 x - \sin x + 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0.$$

Por lo tanto $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ o $\operatorname{sen} x = -1$. Las soluciones de las ecuaciones en el intervalo $(0, 2\pi)$ son respectivamente $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

Evaluando la función en los números críticos y en los extremos del intervalo se tiene:

$$f(0) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2(0) + \cos 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \cos\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}3\pi + \cos\frac{3\pi}{2} = 0 + 0 = 0$$

$$f(2\pi) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2(2\pi) + \cos 2\pi = \frac{1}{2}\operatorname{sen}4\pi + \cos 2\pi = 0 + 1 = 1$$

El mínimo absoluto se alcanza en $x = \frac{5\pi}{6}$ cuyo valor es $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ y el máximo absoluto en $x = \frac{\pi}{6}$ igual a $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. $f(x) = 3x^{1/3} - 5x^{1/5}$, $x \in [-1, 1]$

La función f es continua en $[-1, 1]$. Su derivada es

$$f'(x) = 3\frac{1}{3}x^{-2/3} - 5\frac{1}{5}x^{-4/5} = x^{-4/5}(x^{2/15} - 1) = \frac{x^{2/15} - 1}{x^{4/5}}$$

$f'(x) = 0$ en $x = 1$ y $f'(x)$ no existe en $x = 0$. El único número crítico en el intervalo $(-1, 1)$ es $x = 0$. Luego

$$f(-1) = 3(-1)^{1/3} - 5(-1)^{1/5} = -3 + 5 = 2$$

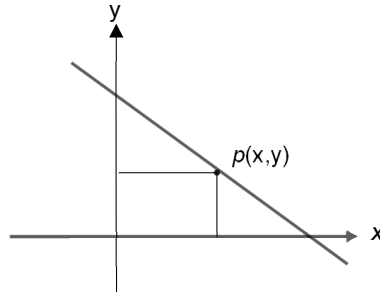
$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 3 - 5 = -2$$

El máximo absoluto es 2 y se alcanza en $x = -1$. El mínimo es -2 alcanzado en $x = 1$.

Ejemplo 0.1.3 Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área con dos de sus lados sobre los ejes coordenados y uno de sus vértices sobre la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Solución:



Sea $P(x, y)$ un punto sobre la recta. Si A representa el área del rectángulo, entonces $A = xy$. Como el punto P está en la recta, satisface la ecuación $3x + 2y - 6 = 0$, de donde $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Luego

$$A = xy = x \left(-\frac{3}{2}x + 3 \right) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

El corte de la recta con el eje x es $x = 2$. Luego el dominio de la función es el intervalo $[0, 2]$. La función es continua en el intervalo y por tanto alcanza sus extremos absolutos en el. Buscamos los números críticos en $(0, 2)$.

$$A'(x) = -\frac{3}{2}2x + 3 = -3x + 3 = -3(x - 1)$$

La función $A(x)$ es derivable, luego se analiza sólo el caso $A'(x) = 0$. La derivada es 0 si $x = 1$.

Evaluando en el número crítico y en los extremos del intervalo se tiene

$$A(0) = 0$$

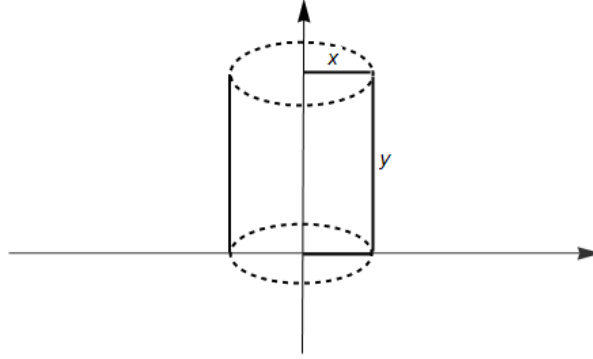
$$A(1) = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

$$A(2) = -\frac{3}{2}(2)^2 + 3(2) = -6 + 6 = 0$$

El máximo está en $x = 1$. El rectángulo de mayor área tiene base $x = 1$ y altura $y = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 0.1.4 *Un rectángulo de perímetro fijo P se gira en torno de uno de sus lados, generando un cilindro circular recto. Halle el volumen máximo posible del cilindro.*

Solución:



Sean x la longitud de la base del rectángulo e y su altura. El radio del cilindro generado por el rectángulo es x y su altura es y .

Si V es el volumen del cilindro entonces

$$V = \pi x^2 y \quad (1)$$

Se busca una relación entre x e y para expresar el volumen en términos de una sola variable. Se sabe que el perímetro del rectángulo es P , luego

$$2x + 2y = P$$

de donde

$$y = \frac{P}{2} - x$$

Reemplazando el valor de y en la expresión (1) se obtiene

$$V(x) = \pi x^2 \left(\frac{P}{2} - x \right) = \frac{\pi P}{2} x^2 - \pi x^3$$

con $x \in \left[0, \frac{P}{2} \right]$, ya que $x \geq 0$, $y \geq 0$, en consecuencia $\frac{P}{2} - x \geq 0$, lo cual implica $x \leq \frac{P}{2}$.

La función $V(x)$ es continua en $\left[0, \frac{P}{2} \right]$ y por lo tanto alcanza su máximo en el intervalo.

La función $V(x)$ es derivable, su derivada es

$$V'(x) = \pi Px - 3\pi x^2 = \pi x(P - 3x)$$

Luego $V'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$ o $x = \frac{P}{3}$. Observe que $\frac{P}{3} \in \left(0, \frac{P}{2} \right)$.

Ahora,

$$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{P}{3}\right) = \frac{\pi P^3}{54}, \quad V\left(\frac{P}{2}\right) = 0$$

El volumen máximo del cilindro generado por el rectángulo es $V = \frac{\pi P^3}{54}$.