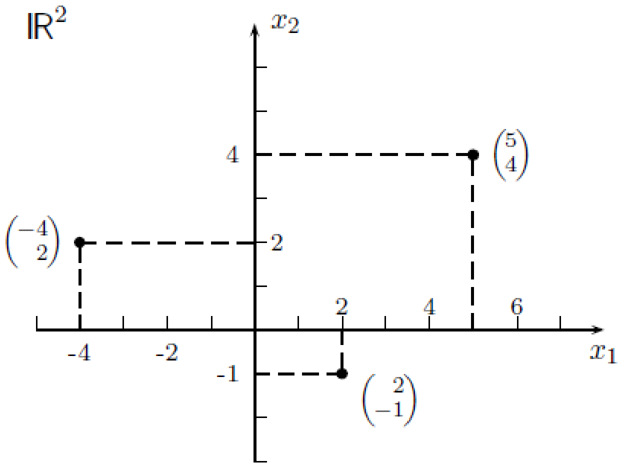
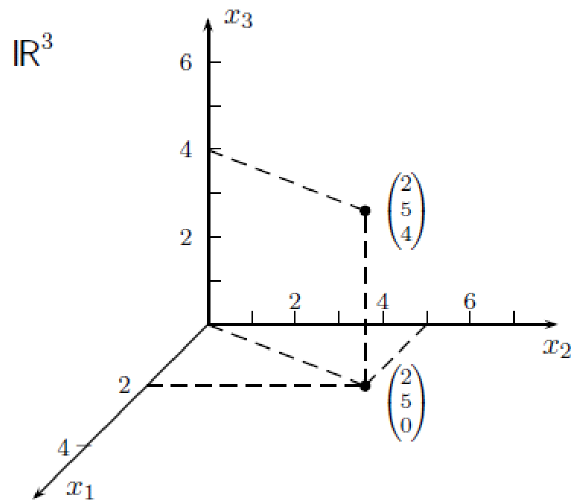
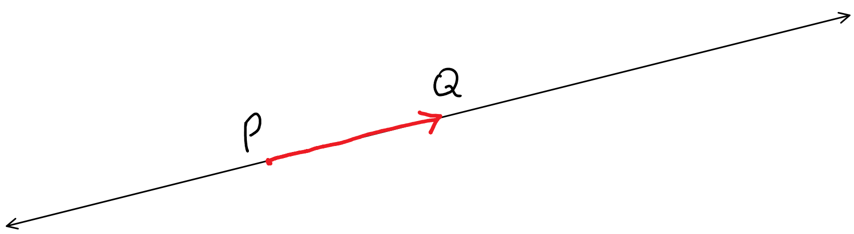
Vectores (continuación).





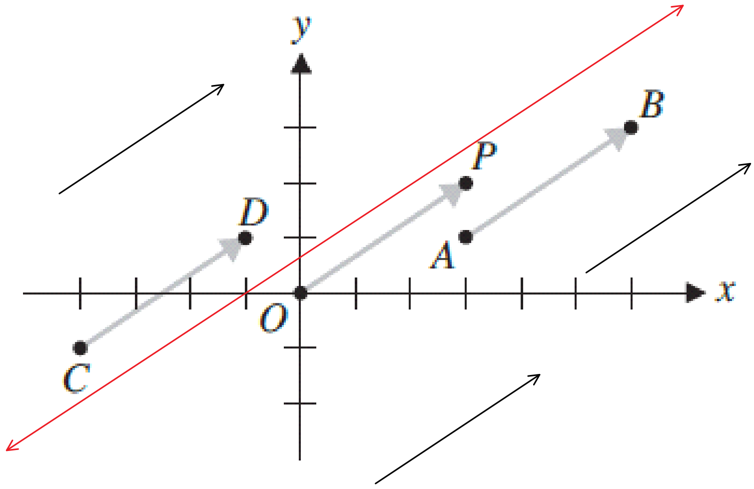
Vector libre: Segmento dirigido que tiene

- magnitud (longitud)
- dirección (determinada por la recta que lo contiene)
- Sentido (orientación de P a Q).



Vector nulo ($\vec{0}$): magnitud $= 0$.
dirección, sentido: no tiene.

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son iguales si tienen igual magnitud, dirección y sentido.



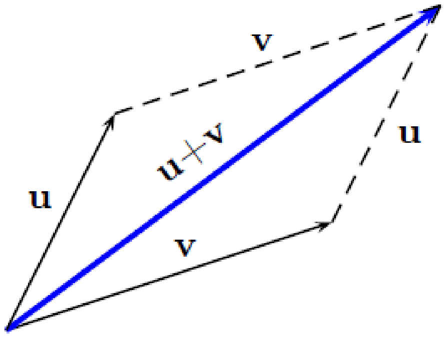
Operaciones con vectores (suma y producto por escalar)

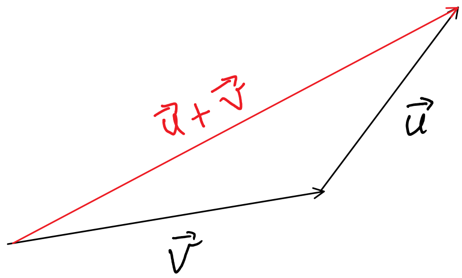
Definición 3 [*Suma de vectores de R^n*]. Definimos la *suma entre dos vectores* **u** y **v** de $\mathbb{R}^n$ como el vector $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, cuyas componentes son la suma de las componentes respectivas de los vectores **u** y **v**; es decir, dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, definimos $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$.

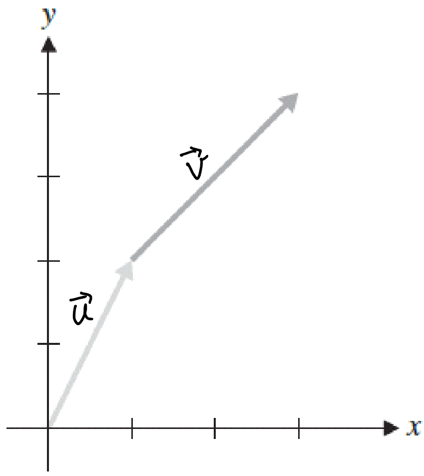
Ejemplo. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

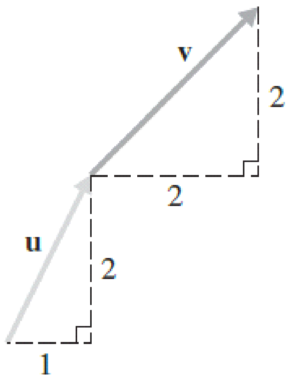
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ -4+3 \\ 6+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

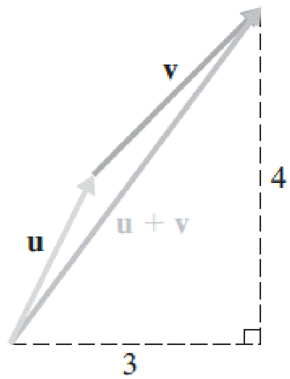
Suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en terminos de vectores libres.









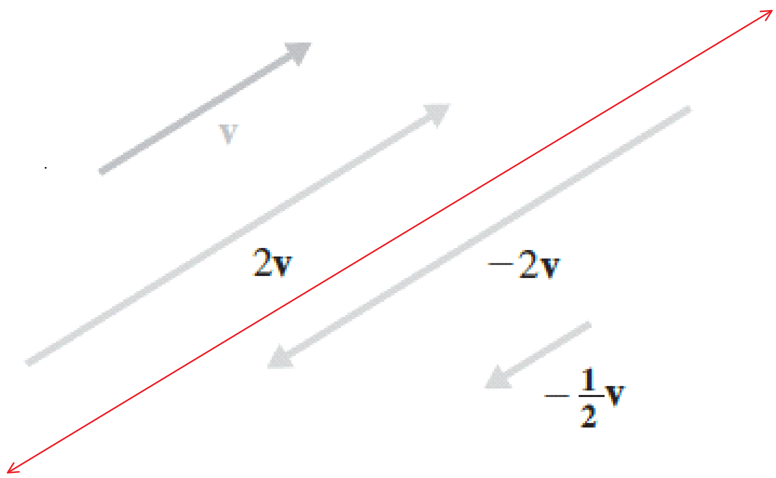


Definición 4 [*Producto por escalar en R^n*]. Definimos el *producto por escalar* de un vector **u** por un número real o escalar λ como el vector $\lambda\mathbf{u}$, cuyas componentes son el producto de λ por las componentes respectivas del vector **u**; es decir, dados

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ definimos } \lambda\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad -2u = -2\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(3) \\ -2(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}.$

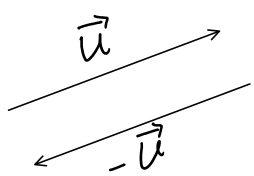
$$\text{Vectores libres}\begin{cases} \textit{magnitud de } \lambda\mathbf{u} = |\lambda| \text{ magnitud de } \vec{u}. \\ \textit{direccion de } \lambda\mathbf{u} : \text{ es igual a la dirección de } \vec{u}. \\ \textit{sentido de } \lambda\mathbf{u} \begin{cases} si\ \lambda > 0 : \text{ igual al sentido de } \vec{u} \\ si\ \lambda < 0 : \text{ contrario al de } \vec{u}. \end{cases} \end{cases}$$



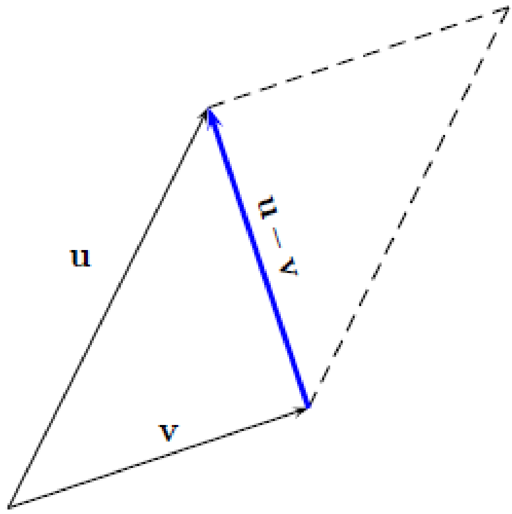
Vectores paralelos:

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no nulos, son paralelos si y solo si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ donde λ es un escalar.

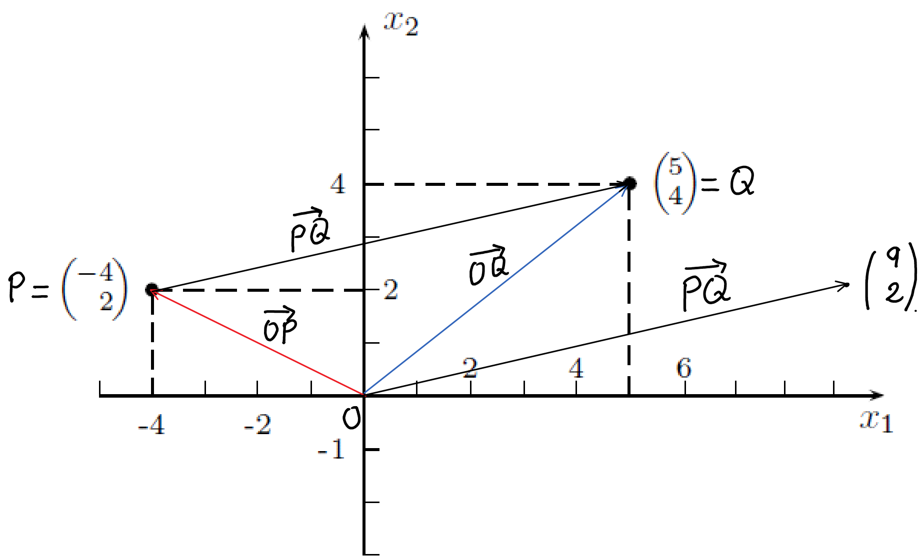
El opuesto al vector $\vec{u}$ es el vector $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.



Resta: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



$$\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} + \vec{u} - \vec{v} = \vec{u}.$$



$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \vec{Q} - \vec{P}$$

$$= \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$$

<u>Propiedades</u>.

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y α y β números reales.

1. $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

3. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

4. Existe un único $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} + \vec{z} = \vec{u}$ $(\vec{z} = \vec{0})$.

5. " " $\vec{p} \in \mathbb{R}$ " " $\vec{u} + \vec{p} = \vec{0}$ $(\vec{p} = -\vec{u})$.

6. $\alpha\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

7. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

8. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

9. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u})$.

10. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

11. $0\vec{u} = \vec{0}$

Ejemplos:

1. Simplificar $3\vec{a} - 2(5\vec{b} - 2\vec{a}) + 5(\vec{b} - \vec{a})$.

$$
\begin{aligned}
3\vec{a} - 2(5\vec{b} - 2\vec{a}) + 5(\vec{b} - \vec{a}) &= 3\vec{a} - 2(5\vec{b}) + 2(2\vec{a}) + 5\vec{b} - 5\vec{a} \\
&= 3\vec{a} - (2\cdot 5)\vec{b} + (2\cdot 2)\vec{a} + 5\vec{b} - 5\vec{a} \\
&= 3\vec{a} - 10\vec{b} + 4\vec{a} + 5\vec{b} - 5\vec{a} \\
&= (3\vec{a} + 4\vec{a} - 5\vec{a}) + (-10\vec{b} + 5\vec{b}) \\
&= (3 + 4 - 5)\vec{a} + (-10 + 5)\vec{b} \\
&= 2\vec{a} - 5\vec{b}.
\end{aligned}
$$

2. Despejar $\vec{x}$ en terminos de $\vec{a}$ si

$$5\vec{x} - \vec{a} = 2(\vec{a} + 2\vec{x})$$

$$5\vec{x} - \vec{a} = 2\vec{a} + 4\vec{x}$$

$$5\vec{x} - \vec{a} - 4\vec{x} = 2\vec{a} + 4\vec{x} - 4\vec{x}$$

$$-\vec{a} + (5\vec{x} - 4\vec{x}) = 2\vec{a} + (4-4)\vec{x}$$

$$-\vec{a} + \vec{x} = 2\vec{a} + 0\vec{x}$$

$$\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{a}$$

$$\vec{x} = 3\vec{a}.$$