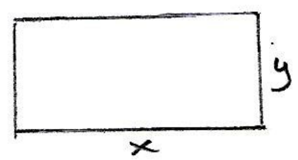
Martha Pinzón
Univ. del Valle.

Problema 1: Un rectángulo tiene área de $16\,m^2$. Exprese su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.

En general para encontrar el modelo que representa el problema es útil:

i) Hacer un dibujo. (Si es posible),
ii) Definir la variable dependiente, vble independiente.
iii) Se busca relación entre las variables.

S//



x : Longitud de la base
y : Longitud de la altura
P : Perímetro
A : Área.

$$A = xy = 16.$$
$$P = 2x + 2y$$

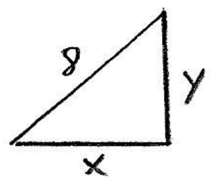
Para expresar el perímetro en términos de x o y se busca una relación entre las variables. Como $A = xy = 16$ se despeja x o y. Por ejemplo despejamos y.

$$A = xy = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x}.$$ Reemplazando en P

Se tiene $$P = 2x + 2y = 2x + 2\cdot\frac{16}{x} = 2x + \frac{32}{x}.$$

Así, $$P(x) = 2x + \frac{32}{x} = \frac{2x^2 + 32}{x},$$ con $x > 0$. Pues x es una longitud.

Problema 2: Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa de longitud 8 unidades. Exprese el área del triángulo en función de uno de sus catetos.

S//  Sean x: Longitud de la base
y: Longitud de la altura
A: área.

$A(x) = ?$ ó $A(y) = ?$

Se sabe $A = \frac{1}{2}$ base. altura $= \frac{1}{2} x y$. Entonces se busca la relación entre x e y.

Por Teorema de pitágoras, $8^2 = x^2 + y^2$.

Se despeja una de las dos variables. Por ejemplo y.

$$y^2 = 64 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{64 - x^2}.$$

Como x, y representan Longitudes, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Así, $y = \sqrt{64 - x^2}$. De otro lado, $64 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 64$

de donde $|x| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 8$. Como $x \geq 0$.

$x \in [0, 8]$

Así, $A = \frac{1}{2} x y = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{64 - x^2}$, $x \in [0, 8]$.

<u>Observe:</u> Si V es la función definida como

$V = xyz$, entonces el dominio es

$$D_V = \{(x, y, z) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

Pero si V representa el volumen de una caja de Largo x, ancho y, alto z, entonces $V = xyz$ y su dominio es $D_V = \{(x, y, z) / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

Es decir, el dominio de una función depende del contexto.

Veremos algunos ejemplos de cálculo de dominio y rango.

Ej 1: Sea $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$

i) Halle el dominio de f, D_f.

ii) Calcule $f(-2)$, $f(1/2)$, $f(a)+1$, $f(a+1)$.

iii) Simplifique $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

S/ $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$.

i) $D_f = \mathbb{R}$, pues la expresión tiene sentido para todo valor de x.

ii) $f(-2) = -2(-2)^2 + 4(-2) - 1 = -8 - 8 - 1 = -17$

$f(1/2) = -2(\frac{1}{2})^2 + 4(1/2) - 1 = -\frac{2}{4} + \frac{4}{2} - 1 = \frac{-1}{2} + 2 - 1 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$f(a)+1 = (-2a^2 + 4a - 1) + 1 = -2a^2 + 4a$.

$$\begin{aligned} f(a+1) &= -2(a+1)^2 + 4(a+1) - 1 \\ &= -2(a^2+2a+1) + 4a + 4 - 1 \\ &= -2a^2 - 4a - 2 + 4a + 3 \\ &= -2a^2 + 1 \end{aligned}$$

observe $f(a)+1 \neq f(a+1)$

iii) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-2(x+h)^2 + 4(x+h) - 1 - (-2x^2 + 4x - 1)}{h} =$$

$$\frac{\cancel{-2x^2} - 4xh - 2h^2 + \cancel{4x} + 4h \cancel{-1} + \cancel{2x^2} - \cancel{4x} + \cancel{1}}{h} = \frac{-4xh - 2h^2 + 4h}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(-4x - 2h + 4)}{\cancel{h}} = -4x - 2h + 4.$$

Ej 2: Encuentre el dominio y el rango de las siguientes funciones.

i) $f(x) = -9x + 1$, ii) $f(x) = 1 - x^2$, iii) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

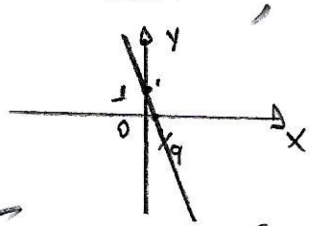
iv) $f(x) = 3 + \sqrt{x - 4}$

5/1 i) $f(x) = -9x+1$.

Esta función es muy sencilla de analizar. por ejemplo a partir de su gráfica se puede hallar el rango.

Así, $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$.

En efecto, la gráfica es una recta de la forma:



Se observa que f recorre todos los números reales, luego $R_f = \mathbb{R}$.

También podemos probar formalmente que $R_f = \mathbb{R}$

En primer lugar para probar que dos conjuntos A y B son iguales, se debe probar que cada conjunto está contenido en el otro. es decir,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Ahora $A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$.

Sea $y \in R_f \rightarrow$ Existe $x \in D_f = \mathbb{R}$ tq $f(x) = y = -9x+1$.

Ahora, como $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -9x \in \mathbb{R}$ y $-9x+1 = y \in \mathbb{R}$,

Por tanto $R_f \subseteq \mathbb{R}$. Probaremos ahora que $\mathbb{R} \subseteq R_f$.

Sea $y \in \mathbb{R}$ entonces para probar que $\mathbb{R} \subseteq R_f$ se debe probar que si $y \in \mathbb{R}$ ent. Existe $x \in D_f = \mathbb{R}$ tq $f(x) = y$.

En efecto, de la ecuación $f(x) = y$, es decir,

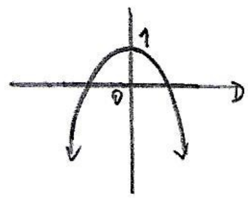
$-9x+1 = y$ despejamos x. Entonces

$x = \dfrac{y-1}{-9}$. Como $y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Así, si $x = \dfrac{y-1}{-9}$, $f(x) = f\left(\dfrac{y-1}{-9}\right) = \cancel{-9}\left(\dfrac{y-1}{\cancel{-9}}\right) + 1 = y-1+1 = y$

por lo tanto $y \in R_f$ (pues existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)=y$).
En consecuencia $R_f \subseteq \mathbb{R}$.
Por la inclusión anterior, se concluye que $R_f = \mathbb{R}$.

Ej 2: $f(x) = 1-x^2$. $D_f = \mathbb{R}$.
Geométricamente se aprecia que $R_f = (-\infty, 1]$.
La gráfica de f es una parábola que abre hacia abajo



luego $R_f = (-\infty, 1]$.

Veamos algebraicamente.

Sea $y \in R_f$, ent existe $x \in \mathbb{R} = D_f$ tal que $f(x) = 1 - x^2 = y$

Ahora, como $x^2 \geq 0 \to -x^2 \leq 0$
$1 - x^2 \leq 1 \to y \leq 1$

Por tanto $y \in R_f \to y \in (-\infty, 1]$, luego $R_f \subseteq (-\infty, 1]$.

Veamos que $(-\infty, 1] \subseteq R_f$

Sea $y \in (-\infty, 1]$, ent. de la ecuación $y = 1 - x^2$ despejamos x. Así, $x^2 = 1 - y \to x = \pm\sqrt{1-y}$
por lo tanto si $x_1 = \sqrt{1-y}$ ó $x_2 = -\sqrt{1-y}$, $f(x) = y$.

Así, si $y \in (-\infty, 1]$, existe x tal que $f(x) = y$.

Ej: Sea $x = \sqrt{1-y}$, entonces $f(x) = f(\sqrt{1-y}) =$
$1 - (\sqrt{1-y})^2 = 1 - (1-y) = 1 - 1 + y = y$, luego $y \in R_f$

igual se muestra que $f(-\sqrt{1-y}) = y$. Por tanto
$(-\infty, 1] \subseteq R_f$ y en consecuencia $R_f = (-\infty, 1]$.

iii) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

El dominio de f es $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4-x^2 \geq 0\}$

pero $\quad 4-x^2 \geq 0 \leftrightarrow 4 \geq x^2 \leftrightarrow x^2 \leq 4 \leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}$

$\leftrightarrow \quad |x| \leq 2 \quad \leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 2$

Así, $\quad D_f = [-2, 2]$

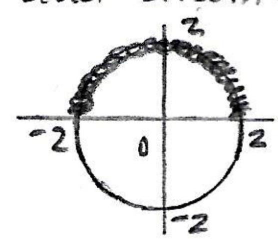
Veamos el rango. $\quad f(x) = y = \sqrt{4-x^2}$

$y^2 = 4 - x^2$

$y^2 + x^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$.

La ecuación representa geométricamente una circunferencia centrada en el origen, de radio 2.

como $y = \sqrt{4-x^2}$, es la parte positiva



luego $\quad R_f = [0, 2]$.

iv) $f(x) = 3 + \sqrt{x-4}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x-4 \geq 0\} = [4, \infty)$.

De forma muy intuitiva se puede mostrar que $R_f = [3, \infty)$. En efecto,

$\sqrt{x-4} \geq 0 \longrightarrow 3 + \sqrt{x-4} \geq 3$

$y \geq 3$.

Se puede concluir que $R_f = [3, \infty)$.

Para probarlo formalmente se tendría que mostrar que $R_f \subseteq [3, \infty)$ y $[3, \infty) \subseteq R_f$.

Si sólo necesitamos dar el rango sin probarlo, se puede proceder como antes.