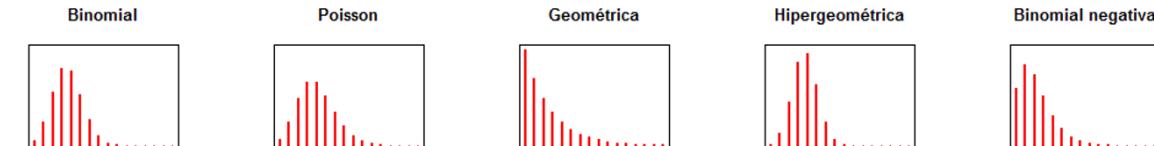


VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

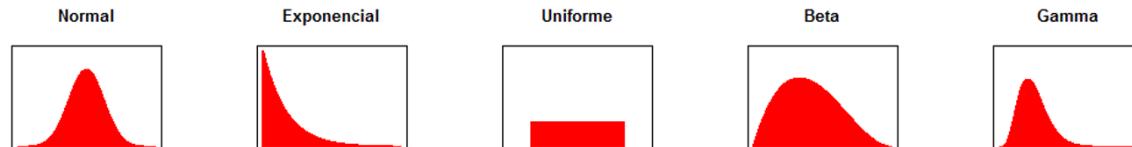
Modelando la realidad



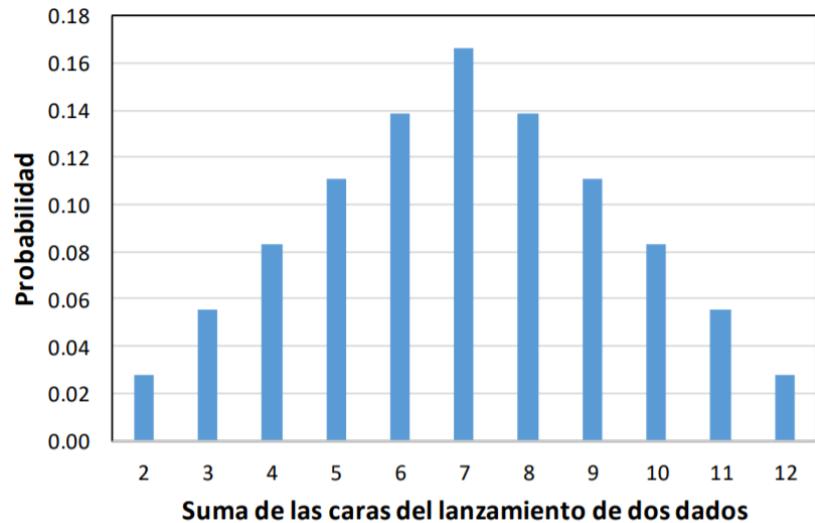
Discretas



Continuas



Distribución de Probabilidad



Describe como se distribuyen las probabilidades de los diferentes valores de la variable aleatoria. Pues algunos valores de la variable aleatoria pueden ser más probables que otros.

Características de una distribución de probabilidad

1. La probabilidad de un resultado en particular se encuentra entre 0 y 1, inclusive.
2. Los resultados son eventos mutuamente excluyentes.
3. La lista es exhaustiva. Por lo tanto, la suma de las probabilidades de los diversos eventos es igual a 1.

Distribución	Parámetros
Binomial	n, p
Poisson	λ
Exponencial	$1/\lambda$
Normal	μ, σ

Variables Aleatorias

La elección de una distribución de probabilidad depende del tipo de variable aleatoria a estudiar:

- **Variable aleatoria discreta:**

Los valores que puede asumir son números enteros finitos o infinitos contables.

- ✓ El número de llamadas telefónicas que recibe un conmutador en un intervalo de cinco minutos.
Discreta: $x = 0, 1, 2, \dots$

- ✓ El número de artículos defectuosos en un lote de 100 artículos.
Discreta: $x = 0, 1, 2, \dots, 99, 100$

- **Variables aleatoria continua:**

Los valores que puede asumir son números reales en un intervalo de a a b o desde $-\infty$ a $+\infty$.

- ✓ Tiempo en minutos, entre dos llegadas consecutivas de los clientes a un banco. **Continua:** $x \geq 0$.

- ✓ Cantidad de llenado de una bebida en un vaso de 30 onzas.

Continua: $0 \leq x \leq 30$.

El experimento consiste en lanzar dos dados:



¿Cuántos y cuáles son resultados del experimento aleatorio?

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

Resultado	Valores de X	Número de ocurrencias	$P(x)$
(1,1)			
(1,2), (2,1)			
(1,3), (2,2), (3,1)			
(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)			
(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)			
(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)			
(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)			
(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)			
(4,6), (5,5), (6,4)			
(5,6), (6,5)			
(6,6)			

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

Resultado	Valores de X	Número de ocurrencias	$P(x)$
(1,1)	2		
(1,2), (2,1)	3		
(1,3), (2,2), (3,1)	4		
(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	5		
(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	6		
(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	7		
(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	8		
(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	9		
(4,6), (5,5), (6,4)	10		
(5,6), (6,5)	11		
(6,6)	12		

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

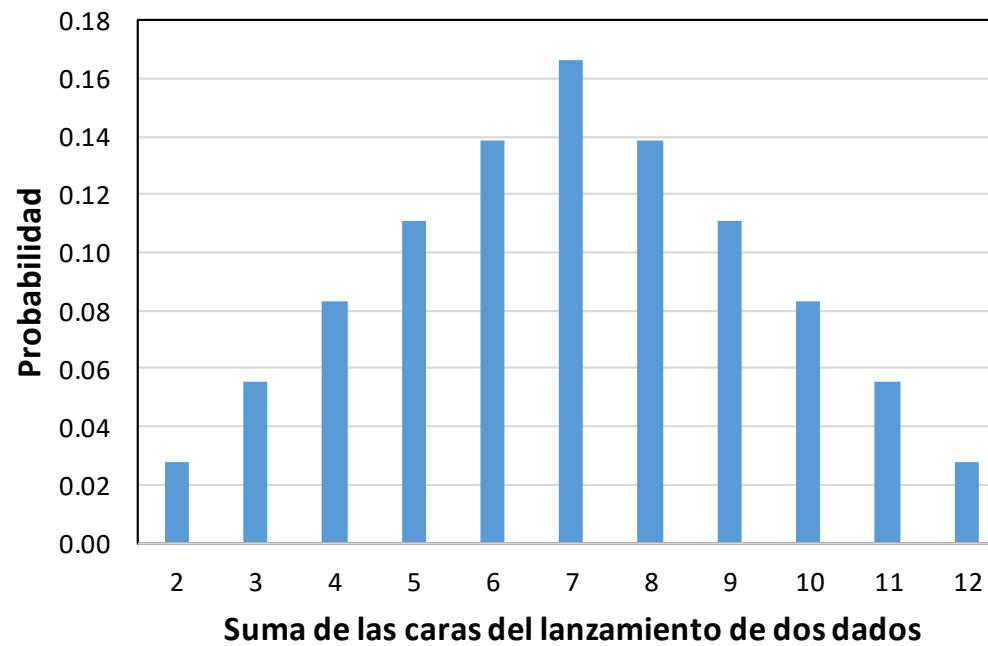
Resultado	Valores de X	Número de ocurrencias	$P(x)$
(1,1)	2	1	
(1,2), (2,1)	3	2	
(1,3), (2,2), (3,1)	4	3	
(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	5	4	
(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	6	5	
(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	7	6	
(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	8	5	
(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	9	4	
(4,6), (5,5), (6,4)	10	3	
(5,6), (6,5)	11	2	
(6,6)	12	1	

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

Resultado	Valores de X	Número de ocurrencias	$P(x)$
(1,1)	2	1	1/36
(1,2), (2,1)	3	2	2/36
(1,3), (2,2), (3,1)	4	3	3/36
(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	5	4	4/36
(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	6	5	5/36
(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	7	6	6/36
(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	8	5	5/36
(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	9	4	4/36
(4,6), (5,5), (6,4)	10	3	3/36
(5,6), (6,5)	11	2	2/36
(6,6)	12	1	1/36

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

Valores de X	$P(x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



$$p(x) = \frac{6 - |7 - x|}{36} ; \quad x = 2, 3, \dots, 12.$$

Distribuciones de probabilidad discretas

Es una función que asigna a cada suceso definido sobre una variable aleatoria discreta su valor de probabilidad correspondiente. Es decir, la probabilidad de que un evento ocurra para un valor de la variable.

Características de una distribución de probabilidad discreta:

- La probabilidad de un resultado particular es un número mayor o igual a cero y menor o igual a uno.
- La suma de las probabilidades de los diversos eventos es igual a 1.00.

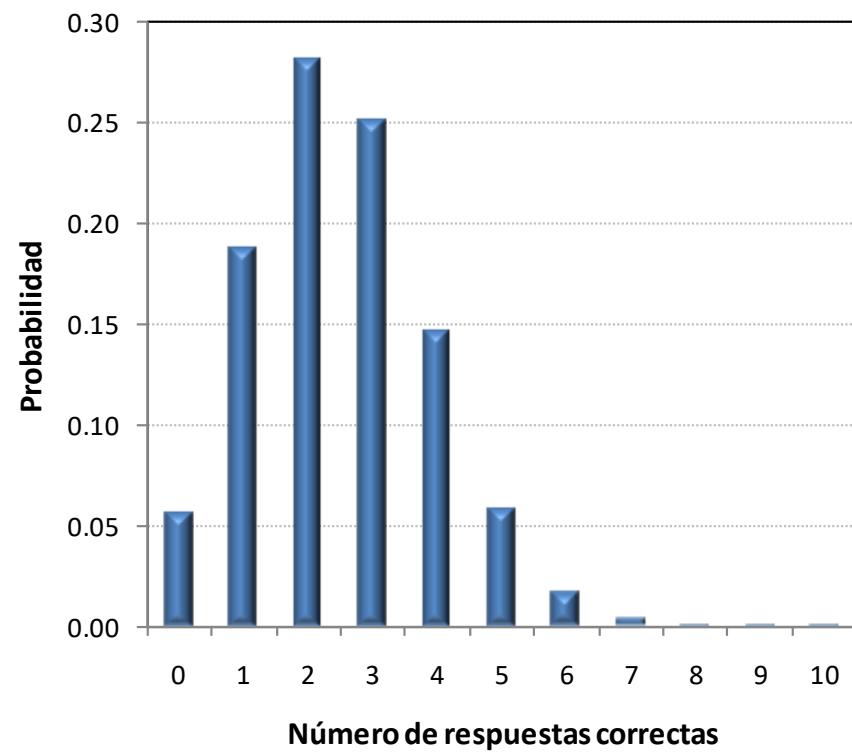
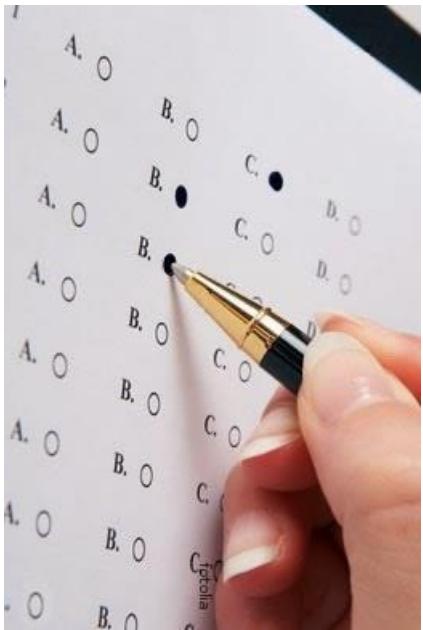
Parámetros:

Valor Esperado  $E(X) = \mu = \sum [X * P(X)]$

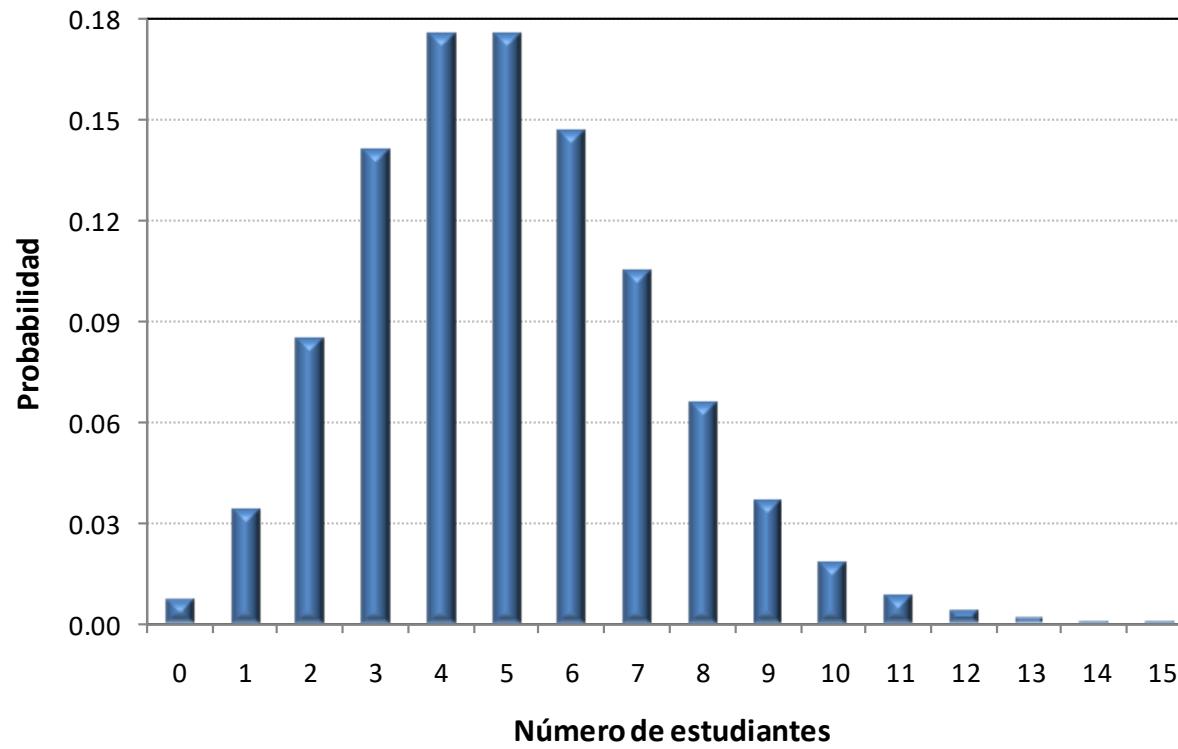
Varianza  $Var(X) = \sigma^2 = \sum [(X - \mu)^2 * P(X)]$

Resultados de una prueba de 10 preguntas de opción múltiple, cuando no se estudia y se marca al azar.

Marque la respuesta correcta.



Número de estudiantes que llegan a una fila de una cafetería, para comprar almuerzos entre las 12:00 y 12:15 de la tarde los días viernes.



Desigualdades:

Sea X una variable, donde a, b y c son constantes:

Notación	Significa que:
$X = c$	X sea igual a C
$X < c$	X menor que C
$X > c$	X mayor que C
$X \leq c$	X sea menor o igual C (Hasta, a lo sumo, como máximo... C)
$X \geq c$	X sea mayor o igual C (por lo menos, como mínimo... C)
$a \leq X \leq b$	X mayor o igual que a y menor o igual que b (está entre a y b, tome valores desde a hasta b)

Sean los valores de $x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Encontrar:

$X > 10$	{11, 12}
$X < 5$	{2, 3, 4}
$X \geq 8$	{8, 9, 10, 11, 12}
$X \leq 3$	{2, 3}
$4 < X < 8$	{5, 6, 7}
$8 \leq X \leq 11$	{8, 9, 10, 11}
$5 < X \leq 9$	{6, 7, 8, 9}
$2 \leq X < 6$	{2, 3, 4, 5}
X sea como máximo 4	{2, 3, 4}
X sea como mínimo 10	{10, 11, 12}
X sea mayor a 5 y menor a 10	{6, 7, 8, 9}
X este entre 8 y 11	{8, 9, 10, 11}

Propiedad	Variable aleatoria discreta X
Función de probabilidad $p(x)$	$P(X = x)$ Es la probabilidad puntual de que X tome el valor de x .
Función acumulada $F(x)$	$P(X \leq x)$ Es la suma de las probabilidades puntuales hasta el valor x de X .
$P(X > c)$	$1 - P(X \leq c)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$

Donde x, a, b y c son valores observados de la variable aleatoria X

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

Valores de X	$P(x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

¿Cuál es la probabilidad de que?:

X sea igual 6	5/36
X sea mayor a 10	3/36
X sea menor o igual a 4	6/36
X se encuentre entre 5 y 8	20/36
X sea igual a 15	0

Ejercicio

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

Valores de X	$P(x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Emplear la notación de probabilidad:

X sea igual 6

$P(X = 6)$

X sea mayor a 10

$P(X > 10)$

X sea menor o igual a 4

$P(X \leq 4)$

X se encuentre entre 5 y 8

$P(5 \leq X \leq 8)$

X sea igual a 15

$P(X = 15)$

Ejercicio

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

Valores de X	$P(x)$	$F(x)$
2	$1/36$	
3	$2/36$	
4	$3/36$	
5	$4/36$	
6	$5/36$	
7	$6/36$	
8	$5/36$	
9	$4/36$	
10	$3/36$	
11	$2/36$	
12	$1/36$	

Determinar la función acumulada $F(x)$ y calcular las siguientes probabilidades:

X sea menor o igual a 3

X sea mayor a 4

X se encuentre entre 4 y 10

Ejercicio

Sea la variable X la suma de las caras del resultado de lanzar dos dados:

Valores de X	$P(x)$	$F(x)$
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36

Determinar la función acumulada $F(x)$ y calcular las siguientes probabilidades:

X sea menor o igual a 3

$$P(X \leq 3) = 3/36$$

X sea mayor a 4

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 30/36$$

X se encuentre entre 4 y 10

$$\begin{aligned}P(4 \leq X \leq 10) &= P(X \leq 10) - P(X \leq 3) \\&= 33/36 - 3/36 \\&= 30/36\end{aligned}$$

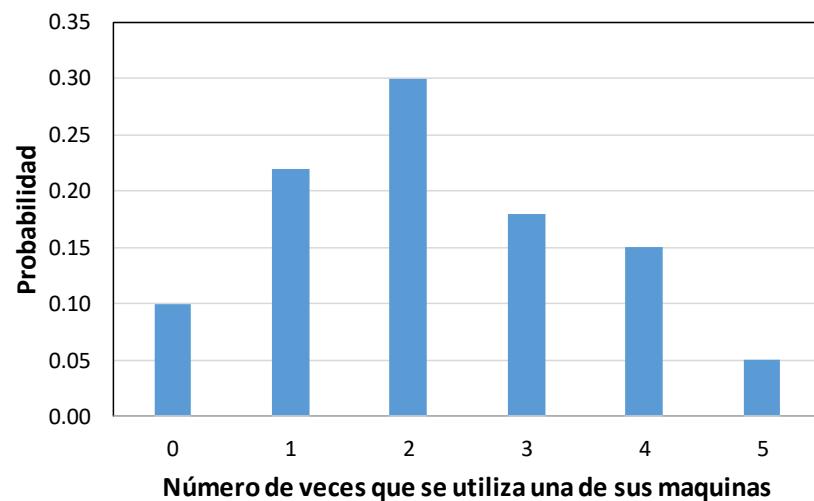
Ejercicio

El gerente de un almacén elaboró la siguiente distribución de probabilidad de la demanda diaria (Y : Número de veces que se utiliza una de las máquinas):

Y	0	1	2	3	4	5
$p(y)$	0.10	0.22	0.30	0.18	0.15	0.05

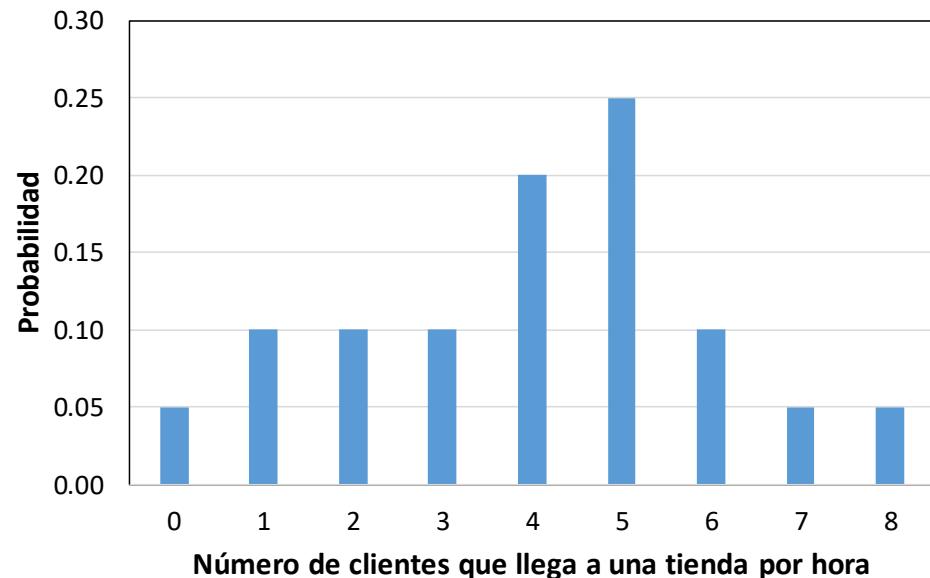
Encontrar:

$P(Y = 2)$	0.30
$P(Y \leq 1)$	0.32
$P(Y > 3)$	0.20
$P(1 < Y \leq 4)$	0.63
$P(1 < Y < 4)$	0.48
$P(1 \leq Y \leq 4)$	0.85
$P(Y > 0)$	0.90
$P(Y = 6)$	0.00



Ejercicio

El administrador de un negocio ha caracterizada la distribución de probabilidad del número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora, mediante la siguiente gráfica:



Emplear la respectiva notación de probabilidad y determinar su resultado:

Que lleguen 5 clientes: $P(X = 5) = 0.25$

Que lleguen entre 3 y 6 clientes: $P(3 \leq X \leq 6) = 0.65$

Que lleguen máximo 2 clientes: $P(X \leq 2) = 0.25$

Que lleguen más de 2 clientes: $P(X > 2) = 0.75$

Ejercicio

Un psicólogo encuentra que el número de sesiones necesarias para ganarse la confianza de un paciente es 1, 2 o 3. Sea X la variable aleatoria que representa el número de sesiones necesarias para ganarse la confianza de un paciente.

Se ha propuesto que la función de distribución de probabilidad para la variable aleatoria es la siguiente:

$$p(x) = \frac{x}{6} ; \quad x = 1, 2, 3.$$

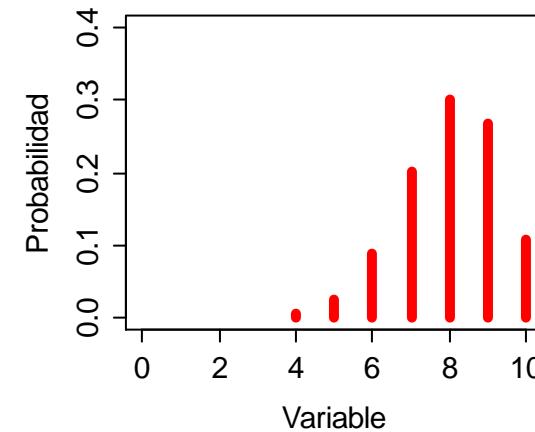
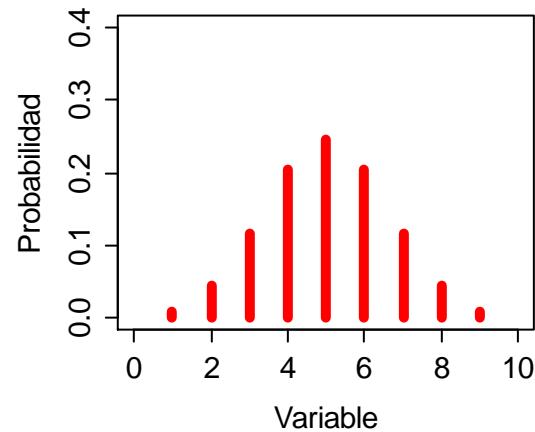
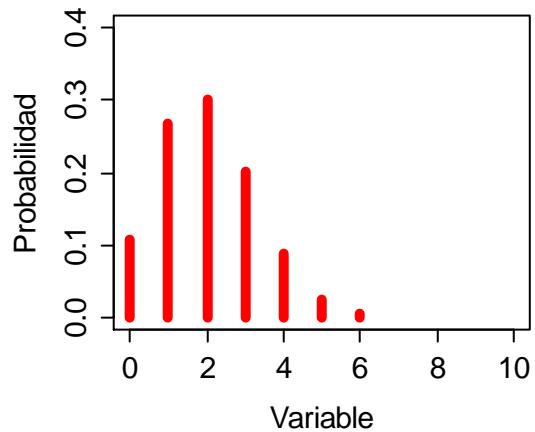
- a) ¿Cuál es la probabilidad de qué se necesiten exactamente 2 sesiones para ganarse la confianza del paciente?

$$P(X = 2) = \frac{2}{6} = 0.3333$$

- b) ¿Cuál es la probabilidad de qué se necesiten por lo menos 2 sesiones para ganarse la confianza del paciente?

$$P(X \geq 2) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6} = 0.8333$$

Distribución de Probabilidad Binomial



• Experimento de Probabilidad Binomial

¿Que modelamos con la Distribución Binomial?

x = El Número de éxitos en la muestra

Función de probabilidad

$$P(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Parámetros

$$E(x) = \mu = np$$

$$V(x) = \sigma^2 = npq$$

Un experimento sigue el modelo de la distribución binomial o de Bernoulli si:

1. El experimento consiste en una sucesión de **n** intentos o ensayos idénticos.
2. En cada intento o ensayo son posibles dos resultados. A uno lo llamaremos **éxito** y al otro **fracaso**.
3. La probabilidad de un éxito, representada por **p**, no cambia de un intento o ensayo a otro.
4. Los intentos o ensayos son independientes.

Distribución Binomial

Experimentos Binomiales:

- Lanzar una moneda 10 veces, y observar el numero de veces que se obtiene cara.

n : 10 lanzamientos idénticos de una moneda.

Éxito : Obtener una cara en un lanzamiento.

Fracaso : Obtener un sello en un lanzamiento.

p : 0.5

q=(1-p) : 0.5

X: Número de veces que se obtiene un cara en 10 lanzamientos.

Distribución Binomial

Experimentos Binomiales:

- El número de respuestas correctas en una prueba de opción múltiple (A, B, C y D) conformada por 10 preguntas, cuando no se ha estudiado y se marca al azar

n : 10 preguntas

Éxito : Responder correctamente la pregunta.

Fracaso : Responder incorrectamente la pregunta.

p : 0.25

q=(1-p) : 0.75

X: Número de respuestas correctas en una prueba de 10 preguntas.

Distribución Binomial

Experimentos Binomiales:

- Observar el número de maletines defectuosos en lotes de 100 maletines, si la línea de ensamblaje presenta una probabilidad de 0.05 de ensamblar defectuosamente un maletín.

n : 10 maletines

Éxito : Obtener un maletín defectuoso.

Fracaso : Obtener un maletín no defectuoso.

p : 0.05

q=(1-p) : 0.95

X : Número de maletines defectuosos en un lote
de 100 maletines.

Ejemplo Binomial:

Cual es la probabilidad de que se obtengan 3 artículos defectuosos de un lote de 20, si la línea de ensamblaje presenta una probabilidad de 0.05 de ensamblar defectuosamente un articulo. Calcular la media y la varianza de la distribución binomial.

$$P(x = 3) = ???$$

$$P(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x} \rightarrow P(x = 3) = 0.05958 \approx 0.06$$

$$E(x) = \mu = np = (20)(0.05) = 1$$

$$V(x) = \sigma^2 = npq = (20)(0.05)(0.95) = 0.95$$

Ejercicio:

Según la OMS, la probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es del 40%. Si se sabe que hay 15 personas que contrajeron la enfermedad.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan 5 personas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan al menos 10 personas?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan de 4 a 7 personas?

Solución:

Se tiene que: $n = 15$ y $p = 0.40$.

- a) $P(X = 5) = 0.1859$
- b) $P(X \geq 10) = 0.0338$
- c) $P(4 \leq X \leq 7) = 0.6964$

Ejercicio:

La probabilidad de que un alumno pierda este curso es de 0.3, si en el curso hay matriculados 25 alumnos.

Cual es la probabilidad de:

X: Número de estudiantes que pierden este curso de un total de 25.

$$n = 25.$$

$p = 0.3$, la cual es independiente para cada alumno.

- a) La probabilidad de que exactamente 4 alumnos pierdan la materia:

$$P(X = 4) = 0.0572$$

- b) La probabilidad de que pierdan la materia entre 3 y 5 alumnos:

$$P(3 \leq X \leq 5) = 0.1845$$

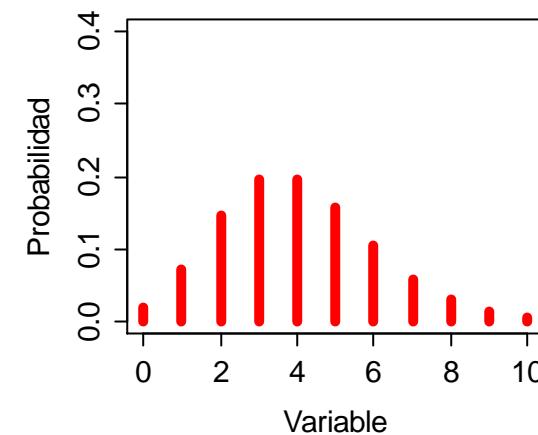
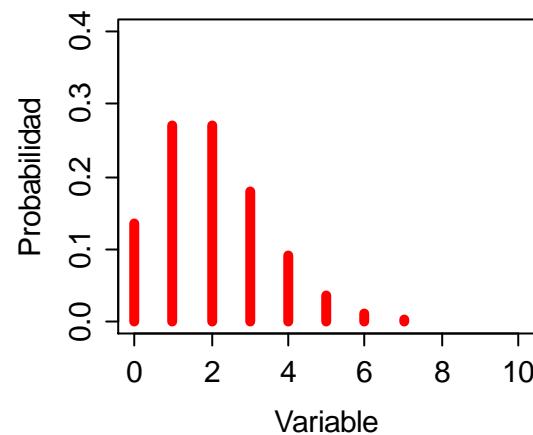
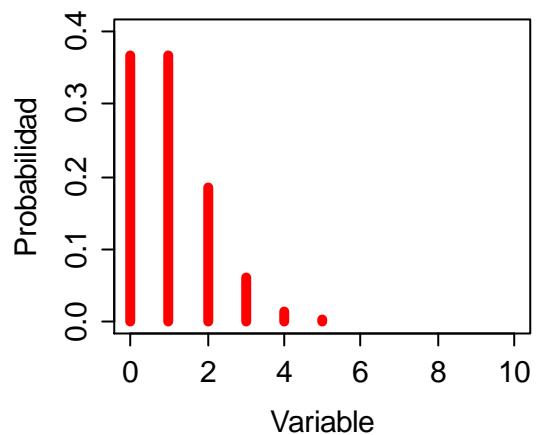
- c) La probabilidad de que pierdan la materia como máximo 2 alumnos:

$$P(X \leq 2) = 0.0090$$

- d) Promedio de alumnos que se espera que pierdan la materia:

$$E(X) = np = (25)(0.3) = 7.5 \approx 8$$

Distribución de Probabilidad Poisson



• Experimento de Probabilidad Poisson

¿Que modelamos con la Distribución Poisson?

x = numero de veces que ocurre un evento durante un intervalo definido (Tiempo, volumen, área).

Función de probabilidad

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Parámetros

$$E(x) = \mu = \lambda$$

$$V(x) = \sigma^2 = \lambda$$

Un experimento sigue el modelo de la distribución Poisson si:

1. La probabilidad de una ocurrencia es igual en dos intervalos cualesquiera de igual longitud.
2. La ocurrencia o no ocurrencia en cualquier intervalo es independiente de la ocurrencia o no ocurrencia en cualquier otro intervalo.
3. Presenta un parámetro que es λ , el cual representa el número promedio de ocurrencias del evento durante el intervalo definido.

Distribución Poisson

Algunos ejemplos son:

- Número de personas que llegan a una tienda en dos horas.
- Número de errores ortográficos por página en una tarea.
- Número de solicitudes de admisión recibidas en un día en la universidad.
- Número de llamadas telefónicas que se reciben en una hora en un Call Center.
- Número de personas que llega a una sala de urgencias en una semana.
- Número defectos de una tela por m^2 .

Ejemplo Poisson:

Una entidad financiera la asaltan en promedio 6 veces al año, ¿Cuáles son las probabilidades de que se presenten:

- a) 4 asaltos en un año?
- b) 10 asaltos en dos años consecutivos?
- c) Mínimo 3 asaltos en seis meses?

Solución:

- a) 4 asaltos en un año? $\lambda=6$ (1 año)

$$P(X = 4) = \frac{e^{-6} 6^4}{4!} = \frac{e^{-6} 1296}{24} = e^{-6} 54 = 0.1339$$

=POISSON.DIST(4;6;0)

- b) 10 asaltos en dos años consecutivos?

$$P(X = 10) = \frac{e^{-12} 12^{10}}{10!} = 0.1048$$

$\lambda=12$ (dos años)

X: Número de asaltos en la entidad financiera en un año cualquiera.

λ : 6 asaltos por año.

La distribución de probabilidad de X está dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{6^x \cdot e^{-6}}{x!}, & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

- c) Mínimo 3 asaltos en seis meses?

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \quad \lambda=3 \text{ (6 meses)}$$

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^2 P(X = i) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} 3^2}{2!} = 0.0498 + 0.1494 + 0.2240 = 0.4232$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.4232 = 0.5768$$

Ejercicio:

Durante un experimento de laboratorio, el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo (ms) es 4:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un ms?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que entren de 3 a 5 partículas al contador en dos ms?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que entren no más de 50 partículas al contador en diez ms?

Solución:

a) Intervalo: 1 ms

λ : 4 partículas.

$$P(X = 6) = 0.1042$$

b) Intervalo: 2 ms

λ : 8 partículas.

$$P(3 \leq X \leq 5) = 0.1775$$

c) Intervalo: 10 ms

λ : 40 partículas.

$$P(X \leq 50) = 0.9474$$

Ejercicio:

Suponga que nos interesa el número de estudiantes que llegan a una cafetería para comprar almuerzos, durante un periodo de 15 minutos los días viernes. Un análisis de datos histórico muestra que el número promedio de estudiantes que llega en un periodo de 15 minutos es 10.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 3 estudiantes en 15 minutos?

$$P(X = 3) = 0.0076$$

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen como máximo 3 estudiantes en 15 minutos?

$$P(X \leq 3) = 0.0103$$

- c) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 35 estudiantes en una hora?

$$P(X = 35) = 0.0485$$

- d) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen entre 7 y 10 estudiantes en media hora?

$$P(7 \leq X \leq 10) = 0.0106$$