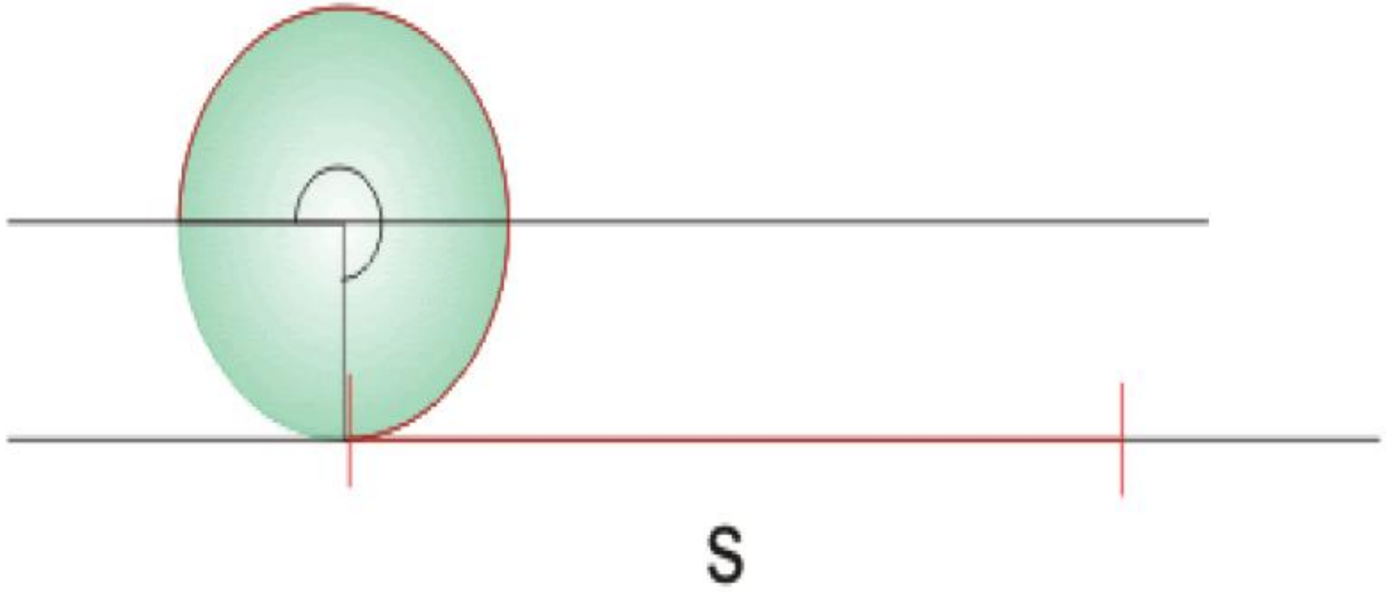
FISICA 1

Marisela Benitez Barahona

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad del valle

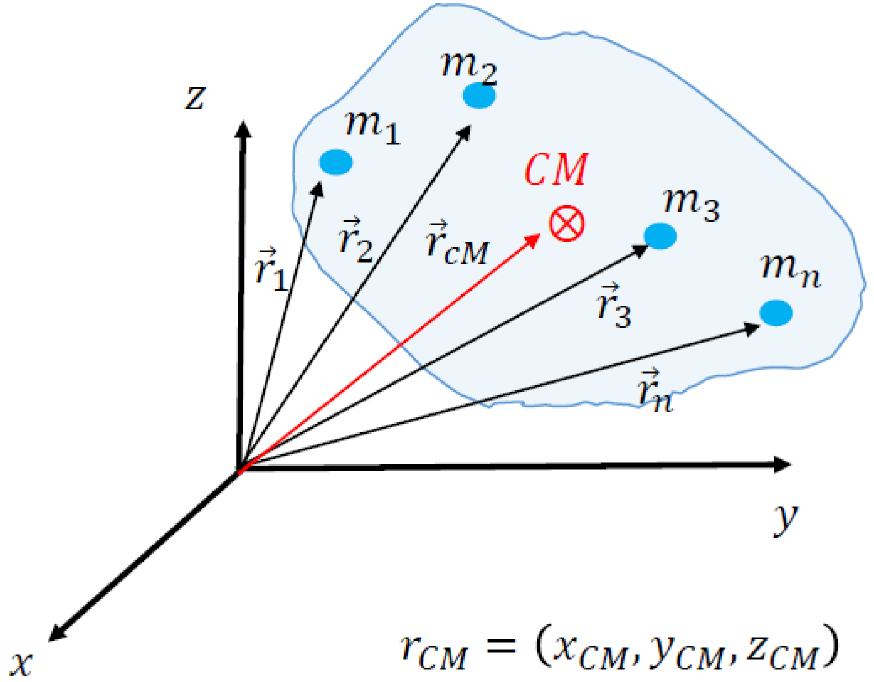
CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE ROTACIÓN DE CUERPO RÍGIDO



RESUMEN

CENTRO DE MASAS

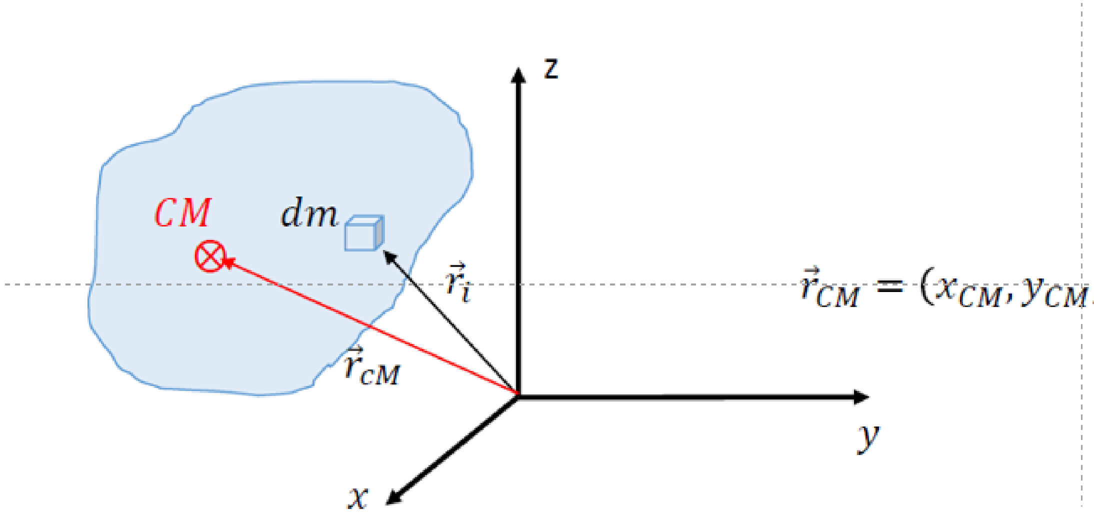
DISCRETOS
Son sistemas con un número finito de partículas.



$$r_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{M} \qquad \text{donde:} \qquad M = \sum_i m_i$$

CONTINUOS
Son sistemas con un número infinito de partículas, es decir, una distribución continua de materia.



$$\vec{r}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$$

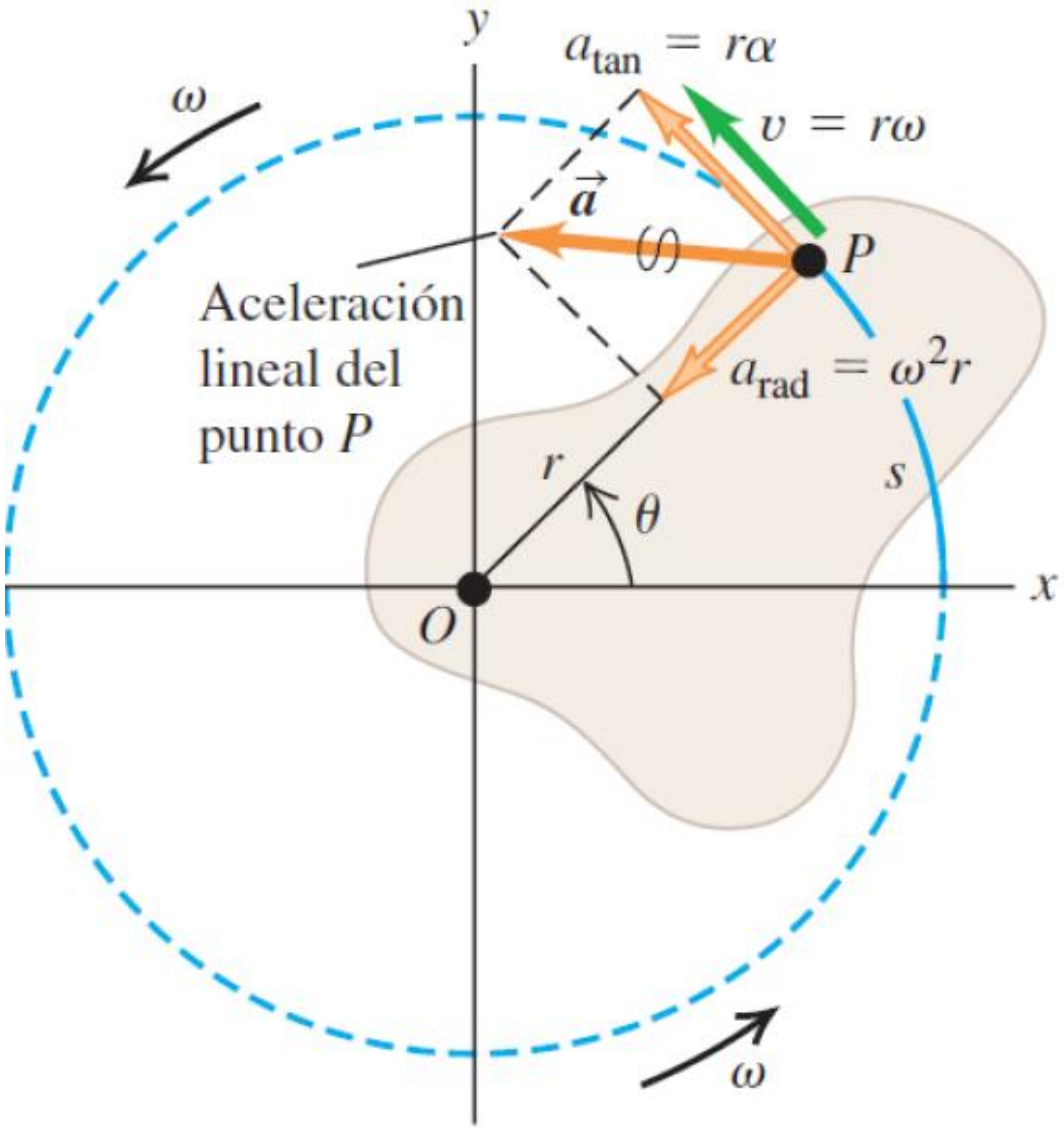
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Distribución lineal de masa $\lambda = \frac{M}{L}$

Distribución superficial de masa $\sigma = \frac{M}{A}$

Distribución volumétrica de masa $\rho = \frac{M}{V}$

CINEMÁTICA ROTACIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO



Desplazamiento lineal (longitud del arco) y desplazamiento angular:

$$\vec{s} = r\vec{\theta}$$

Velocidad lineal y velocidad angular:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d(r\vec{\theta})}{dt} = r\frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

$$\vec{v} = r\vec{\omega}$$

Aceleración tangencial y aceleración angular:

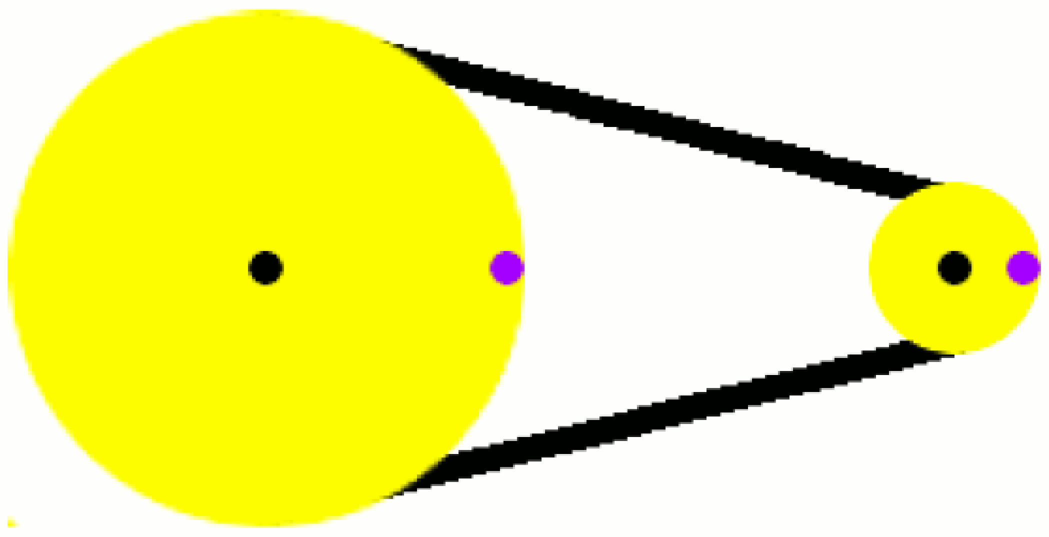
$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(r\vec{\omega})}{dt} = r\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{a}_t = r\vec{\alpha}$$

Aceleración radial y velocidad angular:

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{v}^2}{r} = r\vec{\omega}^2$$

CINEMÁTICA ROTACIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO



MOVIMIENTO CIRCULAR

VELOCIDAD ANGULAR CONSTANTE

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i$$

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_o + \vec{\omega} t$$

$$\vec{\alpha} = 0$$

ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i + \vec{\alpha} t$$

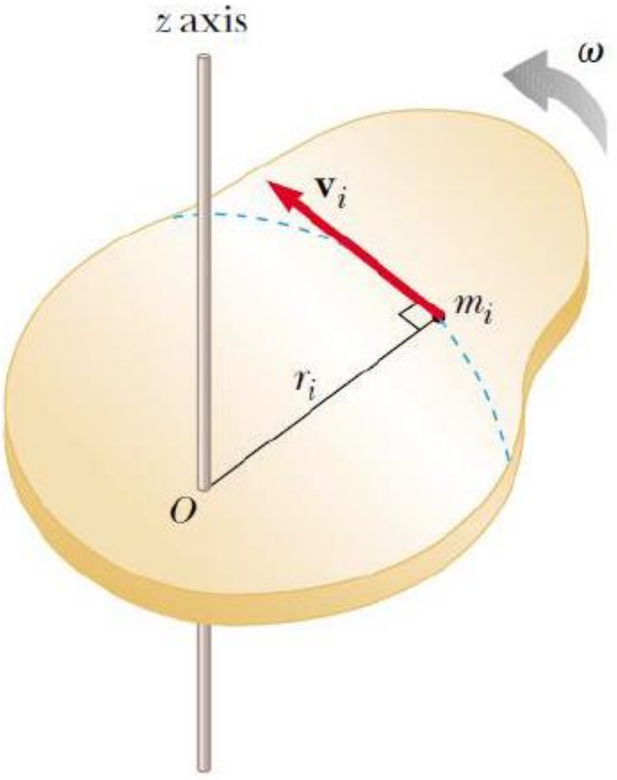
$$\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i = \frac{1}{2}(\vec{\omega}_i + \overrightarrow{\omega_f})\mathrm{t}$$

$$\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i = \vec{\omega}_i t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2$$

$$\vec{\omega}_f{}^2 = \vec{\omega}_i{}^2 + 2\vec{\alpha}(\vec{\theta}_f - \vec{\theta}_i)$$

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

Supondremos que cada partícula del cuerpo rígido esta girando alrededor de un punto fijo, si la masa de la i-ésima partícula es m_i y su rapidez tangencial es v_i:



$$v_i = r_i\omega$$

La velocidad angular es constante

ENERGÍA CINÉTICA DE CADA PARTÍCULA ES:

$$Ec_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

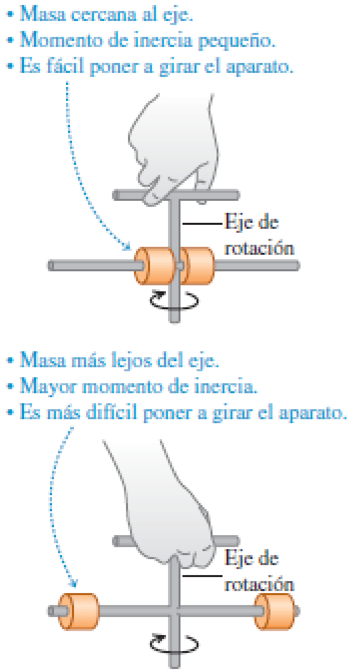
ENERGÍA CINÉTICA TOTAL DEL SISTEMA SERÁ:

$$E_T = \sum_I Ec_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2\omega^2$$

$$E_T = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{\text{MOMENTO DE INERCIA } I}\Big)\omega^2 \quad \Bigg\} \quad E_T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo, más difícil será ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando. Por esta razón, I también se denomina *inercia rotacional*.

9.15 Aparato que gira libremente en torno a un eje vertical. El momento de inercia se puede variar fijando los dos cilindros de igual masa en diferentes posiciones en la varilla horizontal.



Cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular v.

MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia es una medida de la resistencia del sistema a cambiar su rapidez angular. En el movimiento rotacional juega un papel similar a la masa en el movimiento de traslacional.

PARA UN SISTEMA DISCRETO DE PARTÍCULAS

No solo cuenta la masa de las partículas sino como están distribuidas alrededor del eje de giro.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \longrightarrow [I] = [Kg][m]^2$$

PARA UN SISTEMA CONTINUO DE PARTÍCULAS

Se puede calcular considerando que r_i es la distancia del elemento de masa Δm_i al eje de giro, al tomar el límite cuando $\Delta m_i \to 0$.

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \, \Delta m_i = \int r^2 \, dm$$

Objeto homogéneo

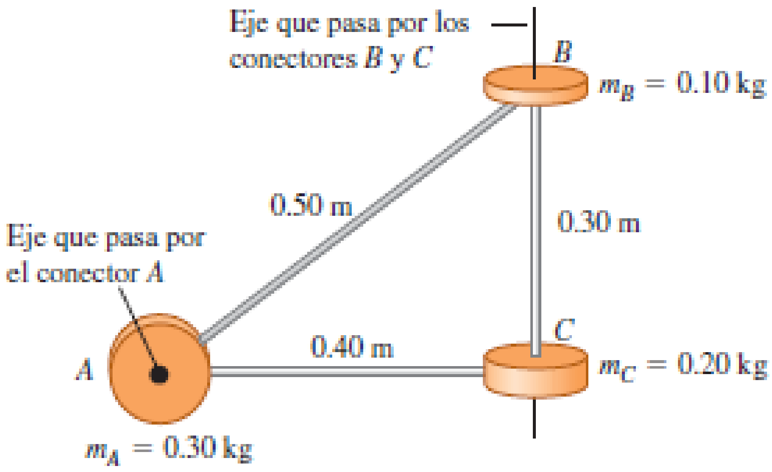
$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \rho = \frac{dm}{dV}$$

$$dm = \rho \, dV$$

$$I = \int \rho r^2 \, dV$$

Ejemplo 1

Un ingeniero está diseñando una pieza mecánica formada por tres conectores circulares gruesos unidos por puntales ligeros moldeados. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro del disco *A* y es perpendicular al plano del diagrama? *b*) ¿Qué momento de inercia tiene alrededor de un eje que pasa por el centro de los discos *B* y *C*? *c*) Si el cuerpo gira sobre el eje que pasa por *A* y es perpendicular al plano del diagrama, con rapidez angular de 4.0 rad/s, ¿qué energía cinética tiene?



$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.10\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 + (0.20\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2$$
$$= 0.057\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

b) Las partículas en *B* y C están *sobre* el eje, así que para ellas $r = 0$, y ninguna contribuye al momento de inercia. Sólo *A* contribuye, y tenemos

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.30\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2 = 0.048\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

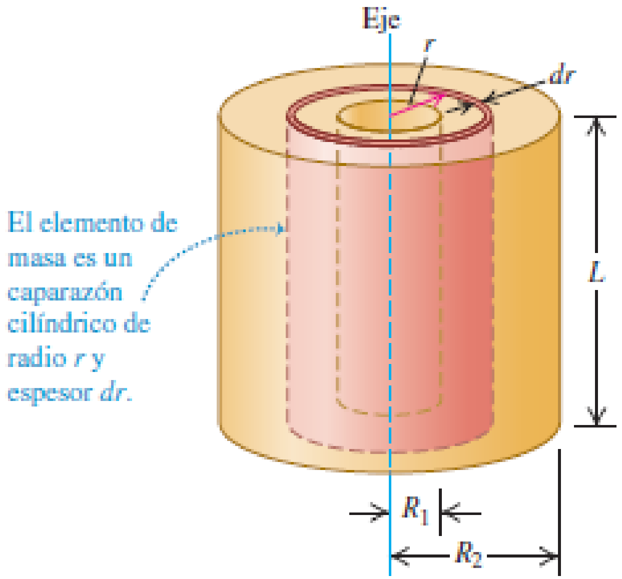
c) Por la ecuación (9.17),

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(0.057\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(4.0\ \text{rad/s})^2 = 0.46\ \text{J}$$

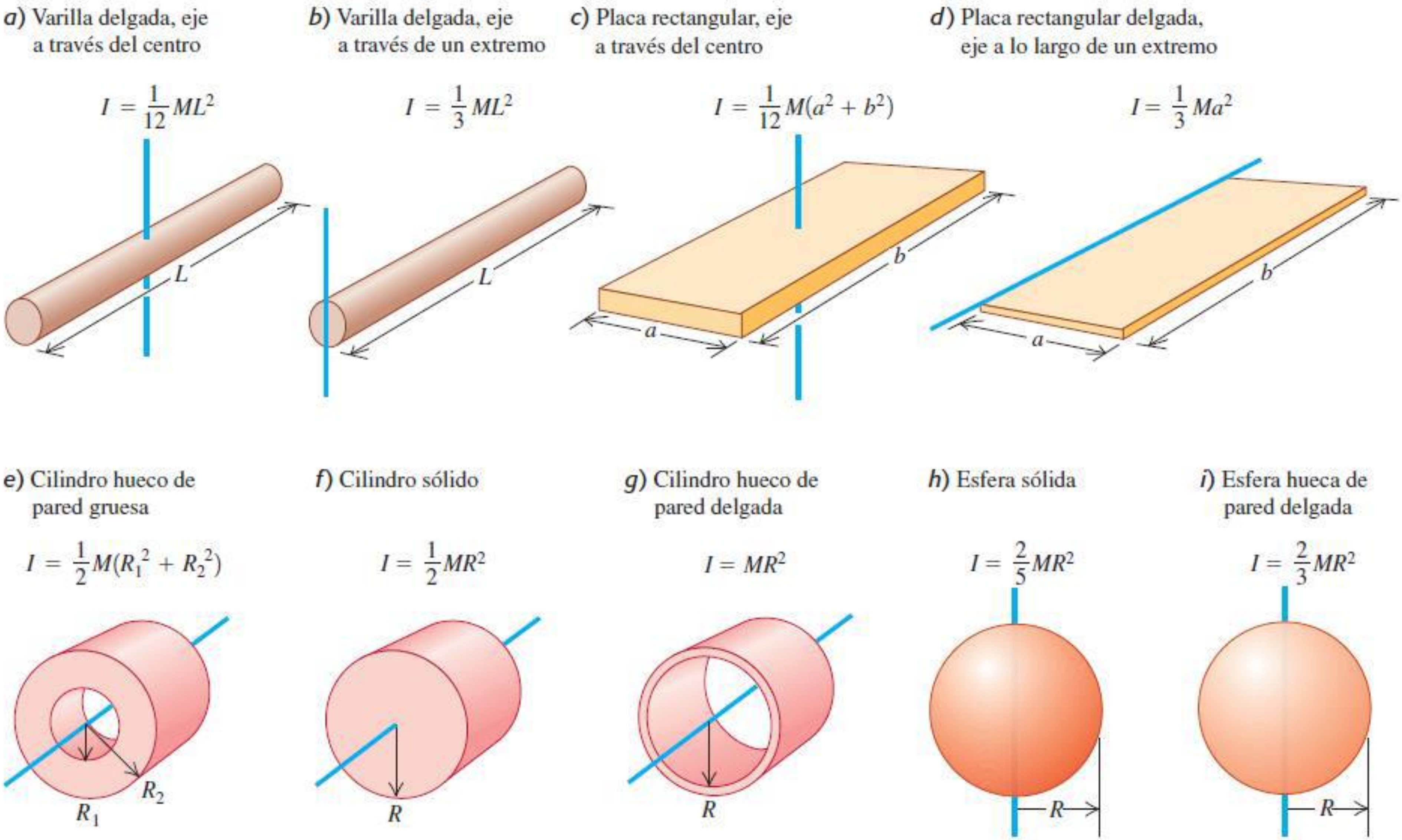
Ejemplo 2

Cilindro hueco o sólido que gira sobre el eje de simetría

La figura muestra un cilindro hueco uniforme de longitud L, radio interior $R1$ y radio exterior $R2$. Podría ser un cilindro de una imprenta o una laminadora. Calcule el momento de inercia alrededor del eje de simetría del cilindro.

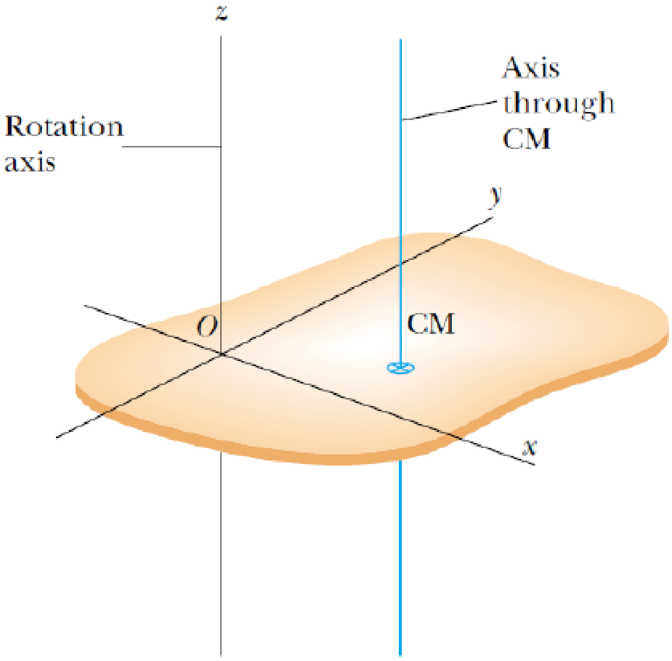


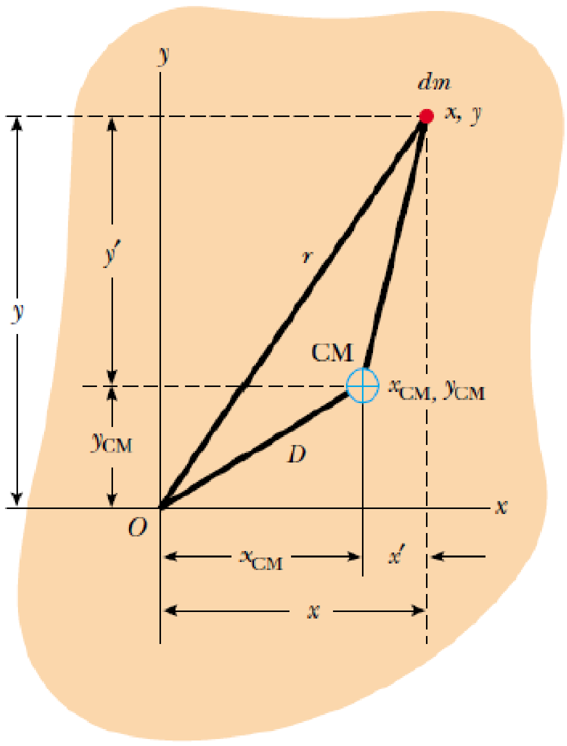
MOMENTO DE INERCIA DE OBJETOS SIMÉTRICOS



TEOREMA DE LO EJES PARALELOS

El teorema de ejes paralelos, permite simplificar el calculo de momentos de inercia de un objeto en torno a un eje arbitrario.





$$x = x' + x_{CM}$$

$$y = y' + y_{CM}$$

Elemento de masa se encuentra a una distancia r del eje de rotación:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Momento de inercia en torno al eje z

$$I = \int r^2\,dm = \int (x^2 + y^2)\,dm$$

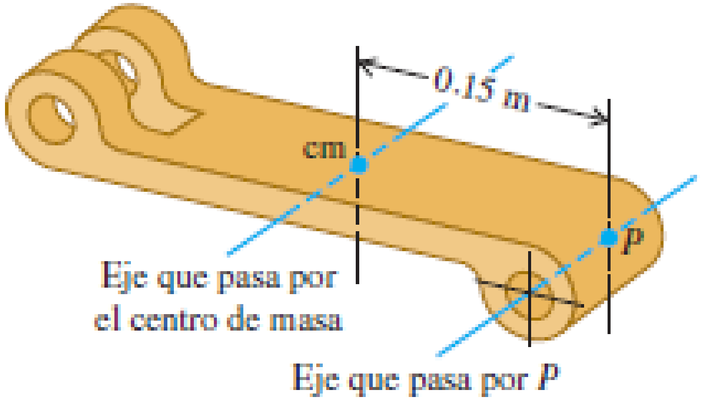
$$I = \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2]\,dm$$

$$I = I_{CM} + MD^2$$

Ejemplo 3

Uso del teorema de ejes paralelos

Una pieza de un acoplamiento mecánico tiene una masa de 3.6 kg. Medimos su momento de inercia alrededor de un eje que pasa a 0.15 m de su centro de masa y obtenemos I_P = 0.132 kg/m^2. Calcule el momento de inercia I_{cm} alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

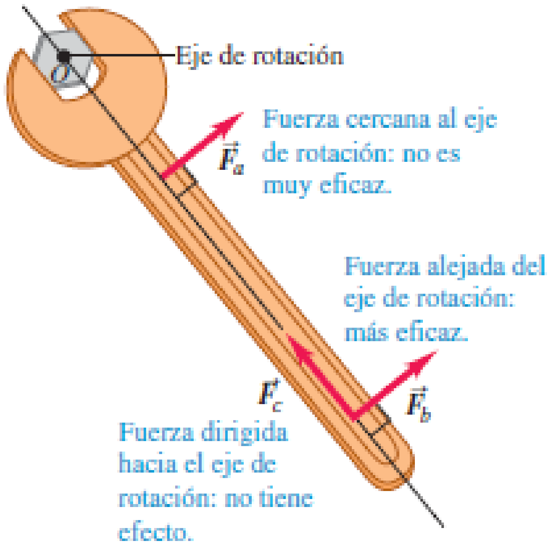


MOMENTO DE UNA FUERZA (TORQUES)

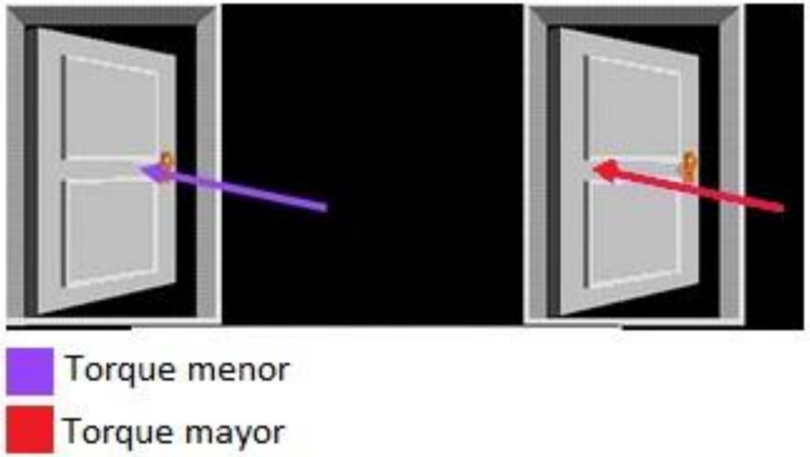
Cuerpo rígido. Se define como un cuerpo ideal cuyas partes (partículas que lo forman) tienen posiciones relativas fijas entre sí cuando se somete a fuerzas externas, es decir es no deformable. Con esta definición se elimina la posibilidad de que el objeto tenga movimiento de vibración.

Llave inglesa

10.1 ¿Cuál de estas tres fuerzas de igual magnitud tiene mayor probabilidad de aflojar el tornillo apretado?



¿Qué se requiere para impartir una aceleración *angular* a un cuerpo? Es decir, ¿qué se necesita para poner a girar un cuerpo estacionario o para detener un cuerpo que está dando vueltas? Se requiere una fuerza, pero debe aplicarse de tal manera que proporcione una acción de torcer o de dar vuelta.

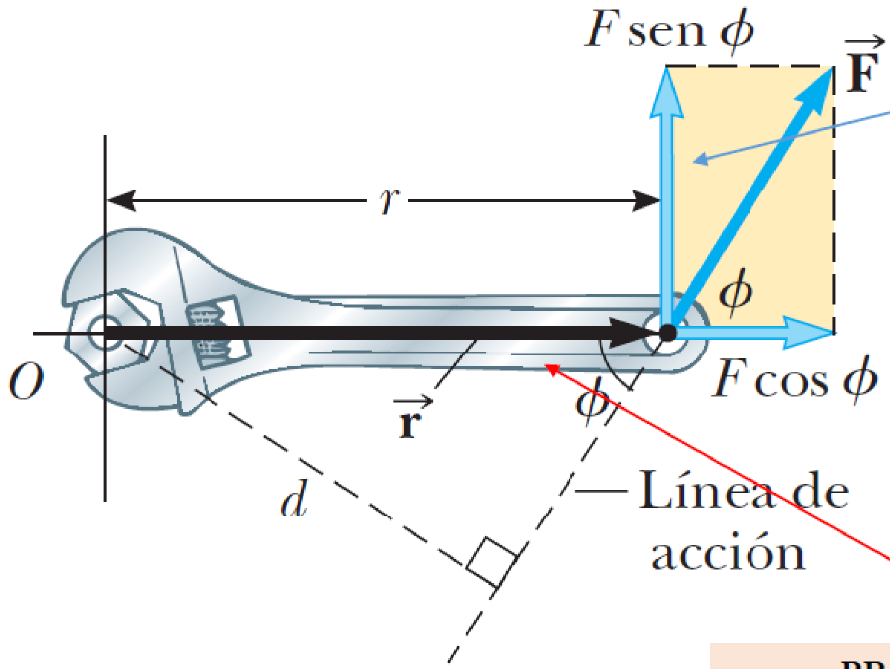


La tendencia de la fuerza para hacer girar al cuerpo alrededor de algún eje se mide con una magnitud física que llamamos torque o momento de la fuerza.

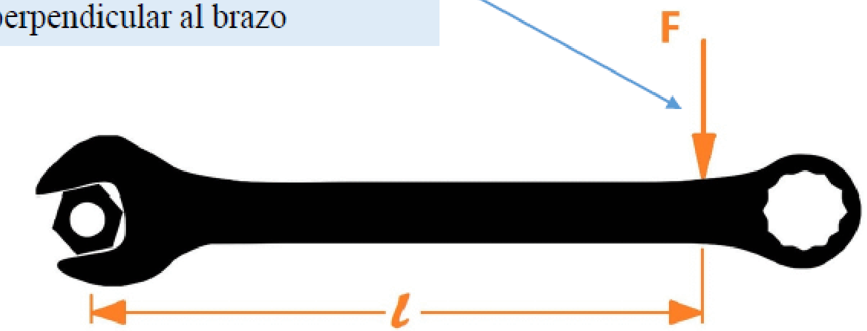
DEFINICIÓN DE TORQUE

Consideremos la llave de tuercas que gira alrededor del eje que pasa por O, el torque se define como el producto entre la fuerza que provoca la rotación y la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de F

$$\tau = Fr\sin\phi = Fd$$



FUERZA APLICADA
Fuerza que provoca la rotación, perpendicular al brazo

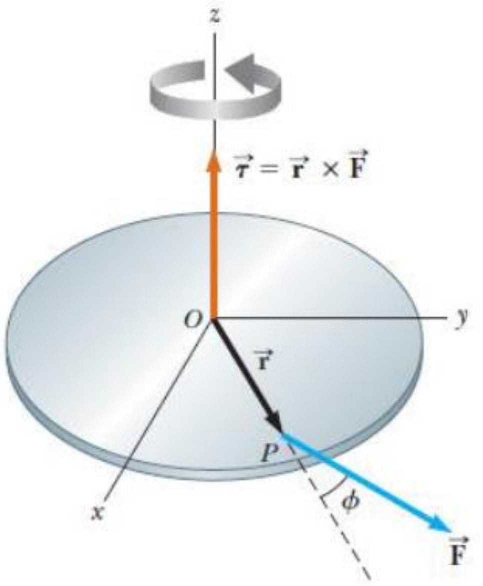


$$\tau = Fl$$

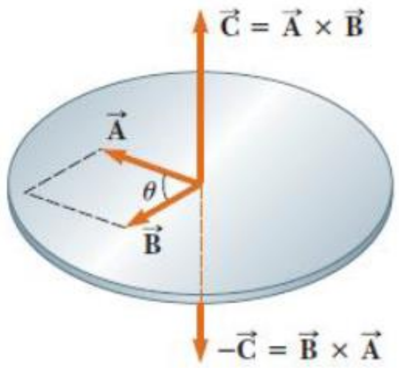
BRAZO DE LA PALANCA
Distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de la fuerza.

TORQUE COMO CANTIDAD VECTORIAL

$$\underbrace{\tau = Fr\sin\phi}_{\text{Definición del producto cruz}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

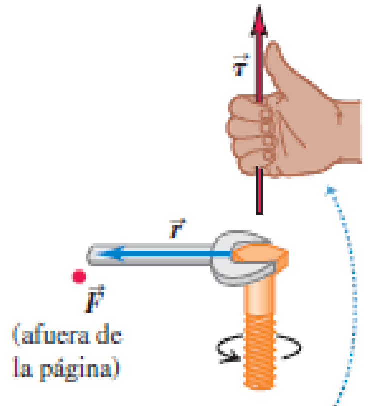


Su dirección es siempre perpendicular al plano de los vectores r y F, su sentido esta dado por la regla del producto vectorial, la regla del sentido de avance del tornillo o la regla de la mano derecha.

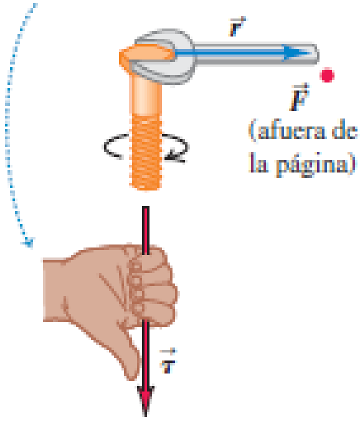


Regla de la mano derec

10.4 El vector de la torca, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige sobre el eje del tornillo, perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Vemos que los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de la rotación que la torca tiende a causar.

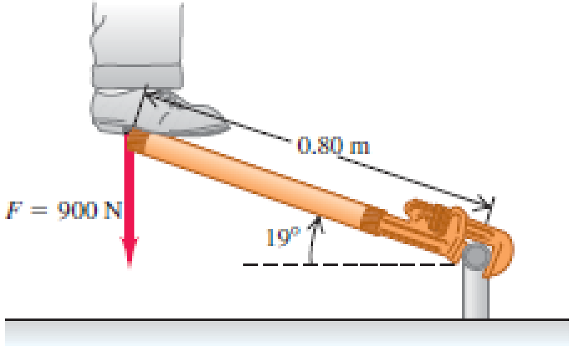


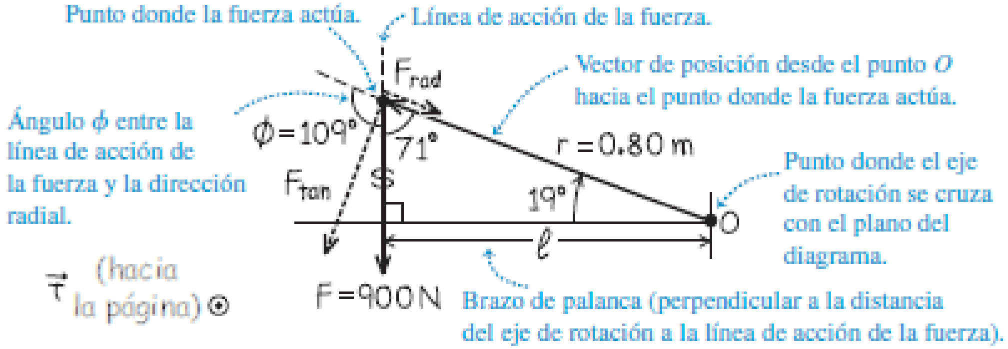
Si usted enrosca los dedos de la mano derecha de la dirección de $\vec{r}$ hacia la dirección de $\vec{F}$, su pulgar estirado apunta en la dirección de $\vec{\tau}$.



Ejemplo 4.

Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.80 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de 19° con la horizontal. Calcule la magnitud y la dirección del torque que el plomero aplica en torno al centro de la junta.





$$l = (0.80\ \text{m})\,\text{sen}\,109^\circ = (0.80\ \text{m})\,\text{sen}\,71^\circ = 0.76\ \text{m}$$

$$\tau = rF\,\text{sen}\,\phi = (0.80\ \text{m})(900\ \text{N})(\text{sen}\,109^\circ) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\tau = Fl = (900\ \text{N})(0.76\ \text{m}) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

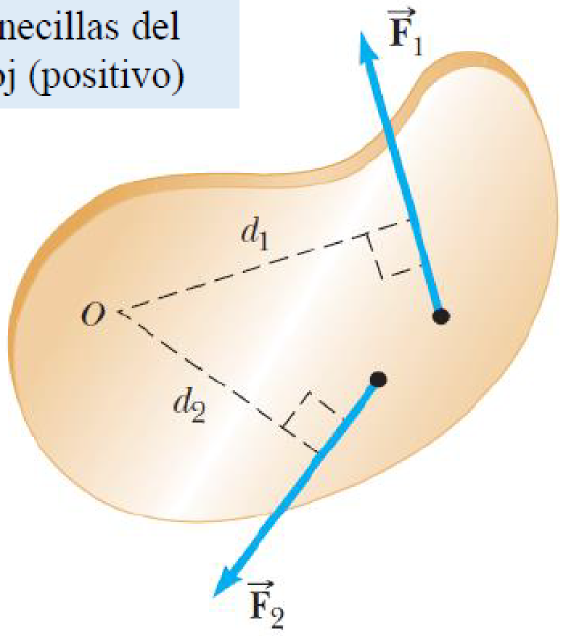
$F_{tan} = F(\cos 19^\circ) = (900\ \text{N})(\cos 19^\circ) = 851\ \text{N}$. La torca es

$$\tau = F_{tan}r = (851\ \text{N})(0.80\ \text{m}) = 680\ \text{N}\cdot\text{m}$$

TORQUE NETO

Si dos o más fuerzas actúan sobre un objeto rígido, como en la figura, cada una tiende a producir rotación en torno al eje en O.

Giro en sentido contrario a las manecillas del reloj (positivo)



Giro en sentido de las manecillas del reloj (negativo)

El torque neto sobre el cuerpo rígido será:

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\sum \tau = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

Unidades en el Sistema internacional

$$[\tau] = [N][m]$$

NOTA: NO DEBE CONFUNDIRSE CON LAS UNIDADES DE ENERGÍA