Clase 08-02-22

martes, 8 de febrero de 2022 11:01 a. m.

Bases y dimensión

Definición [*Base*]. Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto no vacío del espacio vectorial V. Diremos que $\mathcal{B}$ es una *base* de V, si y sólo si, el conjunto $\mathcal{B}$ satisface las siguientes condiciones

1. $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente.
2. $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de V.

Ejemplos.

1. $$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right\}$$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

- $\mathcal{B}$ es l.i. pues la ecuación

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene solamente la solución trivial: $\alpha = \beta = \lambda = 0$.

- $\mathcal{B}$ genera a $\mathbb{R}^3$. $\operatorname{Gen} \mathcal{B} = \mathbb{R}^3$.

Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ Veamos si existen $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

Como el sistema tiene solucion para cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, Se concluye que $B=\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

En general, $B=\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, llamada base canónica (estándar) de $\mathbb{R}^n$.

2. Mostrar que $B=\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es una base de P_n.

- $\text{Gen}\, B = \{\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n : \alpha_i \in \mathbb{R},\ i=0,1,\dots,n\} = P_n$

- $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n = \Theta$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Por tanto B es l.i. y es una base de P_n.

Al conjunto $B=\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ se llama base canónica de P_n.

3. $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $M_{2\times 2}$ y se le llama base canónica de $M_{2\times 2}$. En efecto,

- $\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. solo tiene la solución trivial.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

- Sea $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$. Puede verse que

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

siempre tiene solución.

4. Determine si $S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\right\}$ es una base $M_{2\times 2}$.

Solucion.

Veamos si $\operatorname{Gen} S = M_{2\times 2}$.

Sea $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}$ veamos si existen α,β,δ tales que

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+\delta & -2\beta+2\delta\\ \beta+3\delta & -\alpha+\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha+0\beta+\delta&=a\\ 0\alpha-2\beta+2\delta&=b\\ 0\alpha+\beta+3\delta&=c\\ -\alpha+0\beta+\delta&=d.\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&-2&2&b\\0&1&3&c\\-1&0&1&d\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&?\\0&-2&2&?\\0&0&4&?\\0&0&0&K\end{array}\right)\qquad K=?$$

Si $K\neq 0$, el sistema no tiene solución. $\operatorname{Gen} S\neq M_{2\times 2}$.

En consecuencia S no es una base $M_{2\times 2}$.

Tarea. Revisar ejemplo 21, pág. 232.

$B=\{1-x,\ 1+x,\ x^2\}$ es una base P_2.

5. Encontrar una base para $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$.

$$2x - y + 3z = 0$$

$$y = 2x + 3z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\pi = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dado que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ son l.i., entos el conjunto

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constituye una base para π.

Teorema [*Existencia de una base*].
Todo espacio vectorial, excepto el espacio vectorial trivial $V = \{\mathbf{0}\}$, tiene al menos una base.

Teorema [*Caracterización de una base*].
Un subconjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial V es una base de V, si y solo si, para cada vector $\mathbf{v}$ de V existen escalares únicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

$$V = \text{Gen}\, B = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

Si $v \in V \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_1$. $\lambda_i,\ i = 1, 2, \dots n\}$ son únicos.

Teorema (propiedad maximal de un conjunto l.i.).

Si un e.v. V tiene un conjunto generador de n elementos, entonces cualquier subconjunto de V con más de n elementos es linealmente dependiente.

Ejemplo: sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

observe que $\text{Gen } B = \mathbb{R}^2$

¿ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ es un con l.i. ? NO.

Ejemplo. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$\text{Gen } B = \mathbb{R}^3.$

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i. ? NO.