Martha Pinzón
Univ. del Valle.

Limites Infinitos

Existen dos tipos de limites infinitos. Limites al infinito y limites en infinito.

Limites al infinito

Halle $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$

S// Determinaremos el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x-3}$, cuando x toma valores próximos a 3, tanto por la izquierda como por la derecha.

Si x se aproxima a 3 por valores menores que 3, $x-3$ se aproxima a cero negativamente, es decir

Si $x \to 3^-$ entonces $x-3 \to 0^-$

y por lo tanto $\frac{1}{x-3}$ tiende a $-\infty$. Es decir,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

Si $x \to 3^+$, $x-3 \to 0^+$ y por tanto $\frac{1}{x-3} \to \infty$.
Es decir,

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty.$$

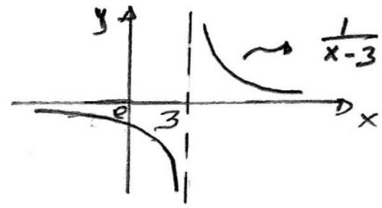
Esto nos muestra que $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$ no existe.
La no existencia del limite no se debe a que por izquierda de 3 y por derecha dió diferente, ∞ en un caso y $-\infty$ en el otro. Se debe a que ∞ y $-\infty$ no son números reales.

Por ejemplo en el caso de $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$ y También $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$

Pero no por eso el límite existe. Se puede afirmar que el límite no existe y además $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$

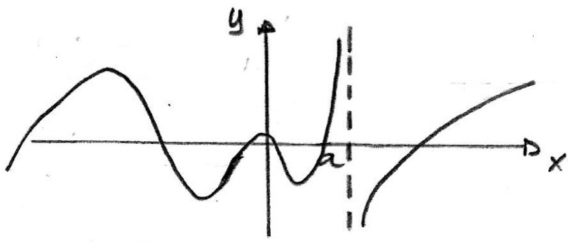
En general, la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (ó $-\infty$).
Significa que cuando x toma valores cercanos a $x=a$, los valores de la función crecen (ó decrecen) indefinidamente.



Este tipo de límites, permite definir asíntotas verticales.

__DEFINICIÓN__: La recta $x=a$ es asíntota vertical de la gráfica de una función f, si se cumple uno de los siguientes cuatro límites

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \text{ ó } -\infty, \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \text{ ó } -\infty.$$



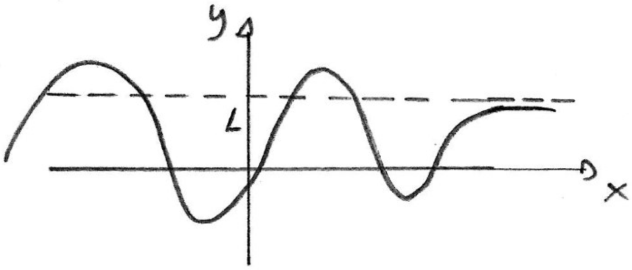
Límites en Infinito

Sea L un número real.
Si los valores de la función se aproximan al número L cuando x crece (ó decrece) indefinidamente, se dice que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ ó $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$.

Se puede definir así, las asíntotas horizontales.

DEFINICIÓN: La recta $y = L$ es asíntota horizontal de la gráfica de una función f si:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$



Ejemplo: Hallar los siguientes límites si existen.

i) $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^4 - 2x^3 + x - 4)$, ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^4 - 1}{10x^4 + 2x^2 - 6}$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^2 + 1}{x^3 - 2}$ iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}\sqrt{4x^2 - 1}$

Sol i) $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^4 - 2x^3 + x - 4)$

Las propiedades de límites enunciadas anteriormente son válidas también para límites laterales, pero no para límites infinitos, luego no se puede afirmar que el límite de la suma es igual a la suma de los límites, por tanto procedemos de manera diferente.

Así,

$$\lim_{x \to \infty} (3x^4 - 2x^3 + x - 4) = \lim_{x \to \infty} x^4\left(3 - \cancelto{0}{\frac{2}{x}} + \cancelto{0}{\frac{1}{x^3}} - \cancelto{0}{\frac{4}{x^4}}\right)$$

entonces $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^4 - 2x^3 + x - 4) = \infty.$

Así, para hallar límites de polinomios en ∞, se factoriza la máxima potencia de x y luego se calcula el límite.

ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-1}{10x^4+2x^2-6}$

para el caso de funciones racionales, tanto numerador como denominador se dividen por la máxima potencia del denominador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-1}{10x^4+2x^2-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^4-1}{x^4}}{\frac{10x^4+2x^2-6}{x^4}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{1}{x^4}}{10+\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^4}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(5-\cancel{\frac{1}{x^4}}^{0}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(10+\cancel{\frac{2}{x^2}}^{0}-\cancel{\frac{6}{x^4}}^{0}\right)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

iii) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-3x^2+1}{x^3-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^5-3x^2+1}{x^3}}{\frac{x^3-2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x^3}} = \infty.$$

iv) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{4x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{4-\frac{1}{x^2}} =$$

$$-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(4-\frac{1}{x^2}\right)} = -\sqrt{4} = -2.$$