Clase 12-01-22

miércoles, 12 de enero de 2022 11:00 a. m.

La inversa de una matriz (continuación)

Ejemplo. Determine A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución.

- Escribir la M.A. Conjunta.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Aplicar operaciones elementales hasta obtener la forma

$$(I \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} = ? \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right).$$

Gauss + Sus. hacia atrás o Gauss - Jordan.

Veamos como se procede.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 + 6F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 4F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$-F_3 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$F_2 + F_3 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$F_1 + F_2 \to F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right) = (I \mid A^{-1}).$$

En consecuencia, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

Tarea. Verificar que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

Ejemplo. ¿ La matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible ?

Solución.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dado que hay una fila de ceros (solo 2 pivotes), entonces la matriz B no tiene inversa.

Nota: · Una matriz no invertible se llama matriz singular.

· Para calcular $A^{-1}\vec{b}$ es más fácil resolver $A\vec{x} = \vec{b}$, que calcular A^{-1} y despues $A^{-1}\vec{b}$.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Teorema [*Propiedades algebraicas de la inversa de una matriz*].
Sean A y B matrices invertibles de tamaño $n \times n$, λ un escalar diferente de 0 y m un número natural, entonces

1. A^{-1} también es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. λA también es invertible y $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
3. AB también es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\qquad (AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.
4. A^m también es invertible y $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m = A^{-m}$

Argumento.

① $A^{-1}A = I = AA^{-1} \Rightarrow A$ es la inversa de $A^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$.

② $\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\,(A^{-1}A) = 1\cdot I = I$.

③ $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$.

observación: Por definición $A^0 = I$.

Teorema [*Equivalencia de la invertibilidad*].
Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) La matriz A es invertible.

b) La única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

c) La única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

d) Las columnas de la matriz A son linealmente independientes ($l.i.$).

e) Toda matriz escalonada equivalente a A tiene n pivotes.

Nota: Sean A y B matrices cuadradas.

si AB es invertible, entonces A y B son invertibles.

Transposición de matrices

Definición [*Transpuesta de una matriz*]. La transpuesta de una matriz A, de tamaño $m \times n$, es la matriz A^T, de tamaño $n \times m$, que se obtiene tomando la i-ésima columna de A^T como la i-ésima fila de A.

Ejemplos.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, $\quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

3. $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad C^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

observe que $u \cdot v = u^T v$.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{v}. \end{aligned}$$

producto de matrices

Teorema [*Propiedades algebraicas de la transpuesta de matrices*].

Sean A y B matrices tales que las operaciones indicadas están bien definidas y λ un número real (escalar). Entonces,

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$. $\qquad (AB)^T \neq A^T B^T$.
5. Si A es invertible, A^T también es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

D/. 5. $A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$ //

Definición: si A es una matriz cuadrada y $A = A^T$, decimos que A es una matriz simétrica.

Ejm. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

A es una matriz simétrica.

observe que si $A_{m\times n}$ entonces $A^T_{n\times m}$ y el producto AA^T está bien definido. Además

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

$$(AA^T)^T = AA^T$$

Por lo tanto AA^T es una matriz simétrica.