Análisis y Diseño de Algoritmos II

Jesús Alexander Aranda Ph.D   Robinson Duque, Ph.D
Juan Francisco Díaz, Ph. D

Universidad del Valle

jesus.aranda@correounivalle.edu.co
robinson.duque@correounivalle.edu.co
juanfco.diaz@correounivalle.edu.co
Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

El problema de la mochila 0/1

Programación dinámica

Se tienen N objetos y una mochila de capacidad (de peso) M, cada objeto tiene un peso w_i, $1 \leq i \leq N$. Cada objeto puede estar, o no, en la mochila. Ademas, se tiene un beneficio b_i por cada objeto

El problema consiste en maximizar el beneficio. La solución se representa indicando para cada objeto si se debe colocar o no en la mochila

Programación dinámica

Se tienen N objetos y una mochila de capacidad (de peso) M, cada objeto tiene un peso w_i, $1 \leq i \leq N$. Cada objeto puede estar, o no, en la mochila. Además, se tiene un beneficio b_i por cada objeto

De manera formal, el problema consiste en encontrar $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ tal que:

$$\sum_{1 \leq i \leq N} b_i x_i \text{ sea máximo, sujeto a}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq N} w_i x_i \leq M$$

$x_i \in \{0,1\}$, donde 0 significa que el objeto i no se coloca en la mochila y 1 que si

Programación dinámica

Se tienen N objetos y una mochila de capacidad (de peso) M, cada objeto tiene un peso w_i, $1 \leq i \leq N$. Cada objeto puede estar, o no, en la mochila. Además, se tiene un beneficio b_i por cada objeto

De manera formal, el problema consiste en encontrar $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ tal que:

$$\sum_{1 \leq i \leq N} b_i x_i \text{ sea máximo, sujeto a}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq N} w_i x_i \leq M$$

Problema mochila(1, N, M)

$x_i \in \{0,1\}$, donde 0 significa que el objeto i no se coloca en la mochila y 1 que si

Programación dinámica

N=3, M=9, b=<10,6,8>, w=<3,4,5>

<1,0,1> es una solución que indica colocar en la mochila los objetos 1 y 3, esto implica un beneficio de 18

<1,1,0> es una solución que indica colocar en la mochila los objetos 1 y 2, esto implica un beneficio de 16

<0,1,1> es una solución que indica colocar en la mochila los objetos 2 y 3, esto implica un beneficio de 14

<1,0,0>, <0,1,0>, <0,0,1>

Debido a los pesos no se pueden colocar todos los objetos en la mochila

Programación dinámica

$N=3$, $M=9$, $b=\langle 10,6,8\rangle$, $w=\langle \underline{7},4,5\rangle$

Muestre soluciones indicando el beneficio

Programación dinámica

N=3, M=9, b=<10,6,8>, w=<$\underline{7}$,4,5>

<1,0,0>: beneficio 10

<0,1,0>: beneficio 6

<0,0,1>: beneficio 8

<0,1,1>: beneficio 14

Solución óptima: <0,1,1>

Programación dinámica

$N=4$, $M=20$, $b=\langle 3,2,1,4\rangle$, $w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Muestre todas las soluciones indicando el beneficio.
Presente la solución óptima

Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

<1,1,1,0> W=18, B=6

<0,1,1,1> W=19, B=7

<1,0,1,1> W=21 X

<1,1,0,1> W=20, B=9

Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Considere la solución óptima <1,1,0,1>

Encuentre subproblemas y soluciones óptimas a esos subproblemas (utilice la notación mochila(L,N,M) para indicar el problema de la mochila utilizando de L a N elementos y una capacidad M)

Programación dinámica

Problema: encontrar $\langle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l \rangle$ tal que:

$$\sum_{k \le i \le l} b_i x_i$$ sea máximo, sujeto a

$$\sum_{k \le i \le l} w_i x_i \le P$$

Problema mochila(k, l, P)

Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Si <1,1,0,1> es una solución óptima de mochila(1,4,20) ...

Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Si <1,1,0,1> es una solución óptima de mochila(1,4,20)

entonces <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,20-8)

mochila(1,3,12) es el problema de colocar los elementos 1, 2 y 3 en la mochila de capacidad 12

Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Si <1,1,0,1> es una solución óptima de mochila(1,4,20)

entonces <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,20-8)

Si <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,12)

entonces <1,1> es una solución óptima de mochila(1,2,12)

Un 0 en la solución óptima significa que el elemento no se coloca en la mochila. Note que no se disminuye la capacidad de la mochila

Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Si <1,1,0,1> es una solución óptima de mochila(1,4,20)

entonces <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,20-8)

Si <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,12)

entonces <1,1> es una solución óptima de mochila(1,2,12)

Si <1,1> es una solución óptima de mochila(1,2,12)

entonces <1> es una solución óptima de mochila(1,1,12-5)

Programación dinámica

En términos generales se tiene que, sea $\langle y_1, y_2,\ldots,y_N\rangle$ una secuencia óptima para $\langle x_1,x_2,\ldots x_N\rangle$, dada una mochila de capacidad M, entonces:

- Si $y_N=0$ entonces $\langle y_1,\ldots,y_{N-1}\rangle$ es una secuencia óptima para mochila(1,N-1, M)

- Si $y_N=1$ entonces $\langle y_1,\ldots,y_{N-1}\rangle$ es una secuencia óptima para mochila(1,N-1, M-w_N)

Programación dinámica

Sea $g_j(M)$ el valor de la solución óptima de mochila(1,j,M), por la subestructura óptima, se puede decir que:

$$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$$

$$g_0(M)=0$$

esto es, seleccionar el máximo entre los beneficios de 1) no colocar el elemento j en la mochila y 2) colocar j en la mochila, se debe entonces colocar el beneficio b_j y disminuir el peso máximo de la mochila, que ahora será $M-w_j$

Programación dinámica

El valor de $g_N(M)$ se expresa en términos de
$g_{N-1}(M)$ y $g_{N-1}(M-w_N)$

El valor de $g_{N-1}(M)$ se expresa en términos de
$g_{N-2}(M)$, $g_{N-2}(M-w_{N-2})$ y $g_{N-2}(M-w_{N-2}-w_{N-1})$

hasta llegar a $g_0(M)$ que vale 0

Programación dinámica

$N=4$, $M=20$, $b=\langle 3,2,1,4\rangle$, $w=\langle 7,5,6,8\rangle$

mochila(1,4,20) tiene valor $g_4(20)$, donde:

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$$

Programación dinámica

$g_4(20)=max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_j(M)=max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$

$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$

$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$

$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$

$g_1(20)=\max(g_0(20),\ g_0(13)+3)$

$g_1(15)=\max(g_0(15),\ g_0(8)+3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$g_4(20)=max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20)=max(g_2(20), g_2(14)+1)$

$g_3(12)=max(g_2(12), g_2(6)+1)$

$g_2(20)=max(g_1(20), g_1(15)+2)$

$g_2(14)=max(g_1(14), g_1(9)+2)$

$g_1(20)=max(g_0(20), g_0(13)+3)$

$g_1(20)=max(0,3)$

$g_1(15)=max(g_0(15), g_0(8)+3)$

$g_1(15)=max(0,3)$

$\boxed{g_j(M)=max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$
$=5$

$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$

$g_1(20)=\max(g_0(20),\ g_0(13)+3)$

$g_1(20)=3$

$g_1(15)=\max(g_0(15),\ g_0(8)+3)$

$g_1(15)=\max(0,3)$

$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$
$=5$

$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$

$g_1(20)=\max(g_0(20),\ g_0(13)+3)$

$g_1(20)=3$

$g_1(15)=\max(g_0(15),\ g_0(8)+3)$

$g_1(15)=\max(0,3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$$

$$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$$

$$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$$

$$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$$
$$=5$$

$$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$$

$$g_1(14)=\max(g_0(14),\ g_0(7)+3)$$

$$g_1(14)=3$$

$$g_1(9)=\max(g_0(9),\ g_0(2)+3)$$

$$g_1(9)=3$$

$$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$$

$$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20), g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12), g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20), g_1(15)+2)$
$=5$

$g_2(14)=\max(g_1(14), g_1(9)+2)$
$=\max(3,5)=5$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$ $\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12),\ g_1(7)+2)$

$g_2(6)=\max(g_1(6),\ g_1(1)+2)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12),\ g_1(7)+2)$

$g_2(6)=\max(g_1(6),\ g_1(1)+2)$

$g_1(12)=\max(g_0(12),\ g_0(5)+3)$

$g_1(7)=\max(g_0(7),\ g_0(0)+3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20), g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12), g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12), g_1(7)+2)$

$g_2(6)=\max(g_1(6), g_1(1)+2)$

$g_1(12)=\max(g_0(12), g_0(5)+3)$
$=\max(0,3)$

$g_1(7)=\max(g_0(7), g_0(0)+3)$
$=\max(0,3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$$

$$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$$
$$=\max(5,6)$$

$$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$$

$$g_2(12)=\max(g_1(12),\ g_1(7)+2)$$
$$=\max(3,5)$$

$$g_2(6)=\max(g_1(6),\ g_1(1)+2)$$

$$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$$

$$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20), g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12), g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12), g_1(7)+2)$
$=\max(3,5)$

$g_2(6)=\max(g_1(6), g_1(1)+2)$

$g_1(6)=0$
(no cabe)

$g_1(1)=0$
(no cabe)

$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12),\ g_1(7)+2)$
$=\max(3,5)$

$g_2(6)=\max(g_1(6),\ g_1(1)+2)$
$=\max(0,2)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$ $\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20), g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12), g_2(6)+1)$
$=\max(5, 3)$

$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$=\max(6,9)$

$=9$

9 es el valor óptimo

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$ $\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

Programación dinámica

Construir una matriz BMAX de dimensiones MXN de forma que BMAX[i,j] contenga el beneficio máximo que se puede obtener si la capacidad de I y se cuenta con los primeros J elementos

$$BMAX(I,1)= \begin{cases} B(1) \text{ si } I \geq W(1) \\ 0 \text{ si } I < W(1) \end{cases}$$

$$BMAX(I,J)= MAX(\ BMAX(I,J-1),\ BMAX(I-W(J), J-1) + B(J)\ )$$

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

$$BMAX(I,1)=\begin{cases} B(1) \text{ si } I \geq W(1) \\ 0 \text{ si } I < W(1) \end{cases}$$

	1	2	3	4
1	0			
2	0			
3	0			
4	0			
5	0			
6	0			
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

Capacidades de la mochila

	1	2	3	4
1	0			
2	0			
3	0			
4	0			
5	0			
6	0			
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(1,2)=MAX(BMAX(1,1),

BMAX(1-W(2), 1) + B(2))

No cabe en la mochila, el elemento menos pesado es el 2 que pesa 5

	1	2	3	4
1	0			
2	0			
3	0			
4	0			
5	0			
6	0			
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(5,2)=???

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0			
6	0			
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(5,2)=MAX(BMAX(5,1),
BMAX(5-W(2), 1) + B(2))

=MAX(0,
BMAX(0, 1) + 2)

=MAX(0,2)=2

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2		
6	0			
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(5,3)=MAX(BMAX(5,2),
BMAX(5-W(3), 2) + B(3))

como 3 no cabe, el máximo sigue

siendo BMAX(5,2)=2

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	
6	0			
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(5,4)=MAX(BMAX(5,3),
BMAX(5-W(4), 3) + B(4))

como 4 no cabe, el máximo sigue siendo BMAX(5,3)=2

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0			
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(6,2)=MAX(BMAX(6,1),

BMAX(6-W(2), 1) + B(2))

=MAX(0,

BMAX(1, 1) + 2)

=2

donde BMAX(1,1) ya se conoce

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2		
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

$N=4$, $M=20$, $b=\langle 3,2,1,4\rangle$, $w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Se crea una matriz de 20x4

$$BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),\ BMAX(I-W(J),\ J-1) + B(J)\ )$$

$$BMAX(6,3)=MAX(BMAX(6,2),\ BMAX(6-W(3),\ 2) + B(3)\ )$$

$$=MAX(\ 2,\ BMAX(0,\ 1) + 1\ )$$

$$=2$$

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	
7	3			
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(7,2)=MAX(BMAX(7,1),
BMAX(7-W(2), 1) + B(2))

=MAX(3,
BMAX(2,1) + 2)

=MAX(3, 2) = 3

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	2
7	3	3		
8	3			
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(8,2)=MAX(BMAX(8,1),
BMAX(8-W(2), 1) + B(2))

=MAX(3,
BMAX(3,1) + 2)

=MAX(3, 2) = 3

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	2
7	3	3	3	3
8	3	3		
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(8,4)=MAX(BMAX(8,3),
BMAX(8-W(4), 3) + B(4))

=MAX(3,
BMAX(0,1) + 4)

=MAX(3, 4) = 4

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	2
7	3	3	3	3
8	3	3	3	4
9	3			
10	3			
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

$N=4$, $M=20$, $b=\langle 3,2,1,4 \rangle$, $w=\langle 7,5,6,8 \rangle$

Se crea una matriz de 20x4

$$BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),$$
$$BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))$$

$$BMAX(8,4)=MAX(BMAX(8,3),$$
$$BMAX(8-W(4), 3) + B(4))$$
$$=MAX(3,$$
$$BMAX(0,1) + 4)$$
$$=MAX(3, 4) = 4$$

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	2
7	3	3	3	3
8	3	3	3	4
9	3	3	3	4
10	3	3	3	4
11	3			
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(11,2)=MAX(BMAX(11,1),
BMAX(11-W(2), 1) + B(2))

=MAX(3,
BMAX(6,1) + 2)

=MAX(3, 2) = 3

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	2
7	3	3	3	3
8	3	3	3	4
9	3	3	3	4
10	3	3	3	4
11	3	3		
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(11,3)=MAX(BMAX(11,2),
BMAX(11-W(3), 2) + B(3))

=MAX(3,
BMAX(5,2) + 2)

=MAX(3, 4) = 4

El 4 se obtiene entonces por <0,1,1,0>

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	2
7	3	3	3	3
8	3	3	3	4
9	3	4	4	4
10	3	4	4	4
11	3	3	4	
12	3			
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(12,2)=MAX(BMAX(12,1),
BMAX(12-W(2), 1) + B(2))

=MAX(3,
BMAX(7,2) + 2)

=MAX(3, 5) = 5

Se continua el proceso, al final se tendrá el valor optimo

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	2
7	3	3	3	3
8	3	3	3	4
9	3	4	4	4
10	3	4	4	4
11	3	3	4	4
12	3	5		
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), J-1) + B(J))

BMAX(12,2)=MAX(BMAX(12,1),
BMAX(12-W(2), 1) + B(2))

=MAX(3,
BMAX(7,2) + 2)

=MAX(3, 5) = 5

Para obtener la respuesta se guardan los valores de j con los que se obtiene el valor máximo

	1	2	3	4
1	0	X	X	X
2	0	X	X	X
3	0	X	X	X
4	0	X	X	X
5	0	2	2	2
6	0	2	2	2
7	3	3	3	3
8	3	3	3	4
9	3	4	4	4
10	3	4	4	4
11	3	3	4	4
12	3	5		
13	3			
14	3			
15	3			
16	3			
17	3			
18	3			
19	3			
20	3			