Ecuaciones Diferenciales

Jhovanny Muñoz Posso

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Dada una curva de nivel $F(x, y) = C$, tomando $y = y(x)$ y derivando implícitamente

Ecuación exactas

Dada una curva de nivel $F(x, y) = C$, tomando $y = y(x)$ y derivando implícitamente

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Ecuación exactas

Dada una curva de nivel $F(x, y) = C$, tomando $y = y(x)$ y derivando implícitamente

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Inducimos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

Ecuación exactas

Dada una curva de nivel $F(x, y) = C$, tomando $y = y(x)$ y derivando implícitamente

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Inducimos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

o de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

Diremos que una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

es **exacta** en un rectángulo O

Diremos que una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

es **exacta** en un rectángulo O si existe un F tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ para todo $(x,y) \in O$.

Diremos que una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

es **exacta** en un rectángulo O si existe un F tal que
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ para todo $(x,y) \in O$.

Así, las curvas de nivel $F(x,y) = C$ son soluciones de dicha ecuación.

Diremos que una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

es **exacta** en un rectángulo O si existe un F tal que
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ para todo $(x,y) \in O$.

Así, las curvas de nivel $F(x,y) = C$ son soluciones de dicha ecuación.

Se dice que F es un potencial o integral general para la ecuación.

Diremos que una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3}$$

es **exacta** en un rectángulo O si existe un F tal que
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$ para todo $(x, y) \in O$.

Así, las curvas de nivel $F(x, y) = C$ son soluciones de dicha ecuación.

Se dice que F es un potencial o integral general para la ecuación.

Teorema: Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ funciones con derivadas parciales de primer orden continuas en un rectángulo O. Entonces, la ecuación (3) es exacta en O

Diremos que una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3}$$

es **exacta** en un rectángulo O si existe un F tal que
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ para todo $(x,y) \in O$.

Así, las curvas de nivel $F(x,y) = C$ son soluciones de dicha ecuación.

Se dice que F es un potencial o integral general para la ecuación.

Teorema: Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones con derivadas parciales de primer orden continuas en un rectángulo O. Entonces, la ecuación (3) es exacta en O si y solo si para todo $(x,y) \in O$ se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$(cosx\, senx + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0, \qquad y(0) = 2.$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$(cosx\, senx + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0, \qquad y(0) = 2.$$

En este caso $M(x, y) = cosx\, senx + xy^2$ y $N(x, y) = y + yx^2$,

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$(cosx\, senx + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0, \qquad y(0) = 2.$$

En este caso $M(x, y) = cosx\, senx + xy^2$ y $N(x, y) = y + yx^2$, comprobemos que es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(cosx\, senx + xy^2)$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$(cos x\, sen x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0, \qquad y(0) = 2.$$

En este caso $M(x, y) = cos x\, sen x + xy^2$ y $N(x, y) = y + yx^2$, comprobemos que es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(cos x\, sen x + xy^2) = 2xy$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$(cosx\, senx + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0, \qquad y(0) = 2.$$

En este caso $M(x, y) = cosx\, senx + xy^2$ y $N(x, y) = y + yx^2$, comprobemos que es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(cosx\, senx + xy^2) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(y + yx^2).$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$(cosx\, senx + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0, \qquad y(0) = 2.$$

En este caso $M(x, y) = cosx\, senx + xy^2$ y $N(x, y) = y + yx^2$, comprobemos que es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(cosx\, senx + xy^2) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(y + yx^2).$$

Integrando M con respecto a x obtenemos

$$F(x, y) = \int cosx\, senx + xy^2\, dx = \frac{sen^2 x}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \phi(y).$$

Ejemplo

Resolver el problema de valor inicial

$$(cosx\, senx + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0, \qquad y(0) = 2.$$

En este caso $M(x, y) = cosx\, senx + xy^2$ y $N(x, y) = y + yx^2$, comprobemos que es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(cosx\, senx + xy^2) = 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(y + yx^2).$$

Integrando M con respecto a x obtenemos

$$F(x, y) = \int cosx\, senx + xy^2\, dx = \frac{sen^2 x}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \phi(y).$$

Derivando con respecto a y en la ecuación anterior se sigue

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = x^2 y + \phi'(y)$$

Usando que $\dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N$ tenemos

$$x^2y + \phi'(y) = y + yx^2.$$

Usando que $\dfrac{\partial}{\partial y} F(x, y) = N$ tenemos

$$x^2 y + \phi'(y) = y + yx^2.$$

Luego $\phi'(y) = y$ y por tanto $\phi(y) = \frac{y^2}{2}$.

Usando que $\dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N$ tenemos

$$x^2y + \phi'(y) = y + yx^2.$$

Luego $\phi'(y) = y$ y por tanto $\phi(y) = \frac{y^2}{2}$. Se sigue que

$$F(x,y) = \frac{sen^2x}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

y la solución general es de la forma

$$\frac{sen^2x}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Usando que $\dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N$ tenemos

$$x^2y + \phi'(y) = y + yx^2.$$

Luego $\phi'(y) = y$ y por tanto $\phi(y) = \frac{y^2}{2}$. Se sigue que

$$F(x,y) = \frac{sen^2x}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

y la solución general es de la forma

$$\frac{sen^2x}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Dado que $y(0) = 2$ tenemos que

$$\frac{sen^2x}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2.$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2e^y + 3xseny)dx + (xe^y + x^2cosy)dy = 0.$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2e^y + 3xseny)dx + (xe^y + x^2cosy)dy = 0.$$

Notemos que la ecuación diferencial no es exacta, sin embargo si multiplicamos por x obtenemos la ecuación

$$(2xe^y + 3x^2seny)dx + (x^2e^y + x^3cosy)dy = 0,$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2e^y + 3xseny)dx + (xe^y + x^2cosy)dy = 0.$$

Notemos que la ecuación diferencial no es exacta, sin embargo si multiplicamos por x obtenemos la ecuación

$$(2xe^y + 3x^2seny)dx + (x^2e^y + x^3cosy)dy = 0,$$

la cual es exacta.

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2e^y + 3xseny)dx + (xe^y + x^2cosy)dy = 0.$$

Notemos que la ecuación diferencial no es exacta, sin embargo si multiplicamos por x obtenemos la ecuación

$$(2xe^y + 3x^2seny)dx + (x^2e^y + x^3cosy)dy = 0,$$

la cual es exacta. Sea $M = 2xe^y + 3x^2seny$ y $N = x^2e^y + x^3cosy$.

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2e^y + 3xseny)dx + (xe^y + x^2cosy)dy = 0.$$

Notemos que la ecuación diferencial no es exacta, sin embargo si multiplicamos por x obtenemos la ecuación

$$(2xe^y + 3x^2seny)dx + (x^2e^y + x^3cosy)dy = 0,$$

la cual es exacta. Sea $M = 2xe^y + 3x^2seny$ y $N = x^2e^y + x^3cosy$. Definamos

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy = \int x^2e^y + x^3cosydy = x^2e^y + x^3seny + \varphi(x)$$

Usando que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

obtenemos

$$2xe^y + 3x^2 seny + \varphi'(x) = 2xe^y + 3x^2 seny.$$

Usando que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

obtenemos

$$2xe^y + 3x^2 seny + \varphi'(x) = 2xe^y + 3x^2 seny.$$

Así, $\varphi'(x) = 0$ y φ es una constante,

Usando que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

obtenemos

$$2xe^y + 3x^2 seny + \varphi'(x) = 2xe^y + 3x^2 seny.$$

Así, $\varphi'(x) = 0$ y φ es una constante, tomando $\varphi \equiv 0$ obtenemos

$$F(x, y) = x^2 e^y + x^3 seny$$

Usando que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

obtenemos

$$2xe^y + 3x^2 seny + \varphi'(x) = 2xe^y + 3x^2 seny.$$

Así, $\varphi'(x) = 0$ y φ es una constante, tomando $\varphi \equiv 0$ obtenemos

$$F(x, y) = x^2 e^y + x^3 seny$$

y la solución general es

$$x^2 e^y + x^3 seny = C.$$

Como lo vimos en el ejemplo anterior, dada una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

que no es exacta,

Como lo vimos en el ejemplo anterior, dada una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

que no es exacta, algunas veces es posible encontrar una función $\mu(x, y)$ tal que al multiplicarla por la ecuación diferencial se convierta en exacta.

Factores integrantes

Como lo vimos en el ejemplo anterior, dada una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

que no es exacta, algunas veces es posible encontrar una función $\mu(x, y)$ tal que al multiplicarla por la ecuación diferencial se convierta en exacta. Llamaremos $\mu(x, y)$ factor integrante.

Como lo vimos en el ejemplo anterior, dada una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

que no es exacta, algunas veces es posible encontrar una función $\mu(x,y)$ tal que al multiplicarla por la ecuación diferencial se convierta en exacta. Llamaremos $\mu(x,y)$ factor integrante.

De lo anterior, se sigue que

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{4}$$

es una ecuación diferencial exacta.

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0.$$

Tenemos que

$$\mu(x, y) = xy^2$$

es un factor integrante de la ecuación,

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0.$$

Tenemos que

$$\mu(x, y) = xy^2$$

es un factor integrante de la ecuación, al multiplicarlo tenemos la ecuación exacta

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0.$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0.$$

Tenemos que

$$\mu(x,y) = xy^2$$

es un factor integrante de la ecuación, al multiplicarlo tenemos la ecuación exacta

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0.$$

Integrando respecto de y se tiene que

$$F(x,y) = \int 3x^2y^2 - 4x^3y\, dy$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0.$$

Tenemos que

$$\mu(x, y) = xy^2$$

es un factor integrante de la ecuación, al multiplicarlo tenemos la ecuación exacta

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0.$$

Integrando respecto de y se tiene que

$$F(x, y) = \int 3x^2y^2 - 4x^3y\, dy = x^2y^3 - 2x^3y^2 + \phi(x).$$

Derivando la anterior expresión con respecto de x,

Derivando la anterior expresión con respecto de x, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x).$$

Derivando la anterior expresión con respecto de x, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x).$$

Debemos tener que

$$2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x) = 2xy^3 - 6x^2y^2.$$

Derivando la anterior expresión con respecto de x, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x).$$

Debemos tener que

$$2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x) = 2xy^3 - 6x^2y^2.$$

Así, $\phi'(x) = 0$,

Derivando la anterior expresión con respecto de x, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x).$$

Debemos tener que

$$2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x) = 2xy^3 - 6x^2y^2.$$

Así, $\phi'(x) = 0$, tomando $\phi \equiv 0$

Derivando la anterior expresión con respecto de x, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x).$$

Debemos tener que

$$2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x) = 2xy^3 - 6x^2y^2.$$

Así, $\phi\,'(x) = 0$, tomando $\phi \equiv 0$ obtenemos

$$F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$$

Derivando la anterior expresión con respecto de x, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x).$$

Debemos tener que

$$2xy^3 - 6x^2y^2 + \phi'(x) = 2xy^3 - 6x^2y^2.$$

Así, $\phi'(x) = 0$, tomando $\phi \equiv 0$ obtenemos

$$F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$$

y la solución general es

$$x^2y^3 - 2x^3y^2 = C.$$

Cálculo de factores integrantes

Si $\mu(x, y)$ es un factor integrante de (4),

Cálculo de factores integrantes

Si $\mu(x, y)$ es un factor integrante de (4), la ecuación

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

es exacta.

Cálculo de factores integrantes

Si $\mu(x,y)$ es un factor integrante de (4), la ecuación

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

es exacta. Por tanto, se verificará:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Cálculo de factores integrantes

Si $\mu(x, y)$ es un factor integrante de (4), la ecuación

$$\mu M\, dx + \mu N\, dy = 0$$

es exacta. Por tanto, se verificará:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Derivando se tiene:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

Cálculo de factores integrantes

Si $\mu(x, y)$ es un factor integrante de (4), la ecuación

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

es exacta. Por tanto, se verificará:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Derivando se tiene:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

o equivalentemente

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) \tag{5}$$

La anterior ecuación es más complicada que la inicial.

La anterior ecuación es más complicada que la inicial. Sin embargo, esta se simplifica si buscamos un factor integrante que sólo depende de la variable x o y,

La anterior ecuación es más complicada que la inicial. Sin embargo, esta se simplifica si buscamos un factor integrante que sólo depende de la variable x o y, es decir, es de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$.

La anterior ecuación es más complicada que la inicial. Sin embargo, esta se simplifica si buscamos un factor integrante que sólo depende de la variable x o y, es decir, es de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$.

Factor integrante $\mu(x)$

La anterior ecuación es más complicada que la inicial. Sin embargo, esta se simplifica si buscamos un factor integrante que sólo depende de la variable x o y, es decir, es de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$.

Factor integrante $\mu(x)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(x)$.

La anterior ecuación es más complicada que la inicial. Sin embargo, esta se simplifica si buscamos un factor integrante que sólo depende de la variable x o y, es decir, es de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$.

Factor integrante $\mu(x)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(x)$. Luego $\dfrac{\partial\mu}{\partial x} = \mu'(x)$ y $\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = 0$

La anterior ecuación es más complicada que la inicial. Sin embargo, esta se simplifica si buscamos un factor integrante que sólo depende de la variable x o y, es decir, es de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$.

Factor integrante $\mu(x)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(x)$. Luego $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x)$ y $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ y la ecuación (5) toma la forma

$$-N\mu'(x) = \mu(x)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{6}$$

La anterior ecuación es más complicada que la inicial. Sin embargo, esta se simplifica si buscamos un factor integrante que sólo depende de la variable x o y, es decir, es de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$.

Factor integrante $\mu(x)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(x)$. Luego $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x)$ y $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ y la ecuación (5) toma la forma

$$-N\mu'(x) = \mu(x)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{6}$$

Luego

$$N\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \tag{7}$$

o equivalentemente

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{8}$$

o equivalentemente

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{8}$$

Notemos que la expresión del lado izquierdo de (8) sólo depende de x por tanto la derecha también debe depender sólo de x,

o equivalentemente

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{8}$$

Notemos que la expresión del lado izquierdo de (8) sólo depende de x por tanto la derecha también debe depender sólo de x, si este es el caso y también es continua,

o equivalentemente

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{8}$$

Notemos que la expresión del lado izquierdo de (8) sólo depende de x por tanto la derecha también debe depender sólo de x, si este es el caso y también es continua, integrando en ambos lados con respecto a x podemos tomar

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} \tag{9}$$

Factor integrante $\mu(y)$

Factor integrante $\mu(y)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(y)$. Luego $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$

Factor integrante $\mu(y)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(y)$. Luego $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$ y un análisis similar de (5) lleva a

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}. \tag{10}$$

Factor integrante $\mu(y)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(y)$. Luego $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$ y un análisis similar de (5) lleva a

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}. \tag{10}$$

Notemos que la expresión del lado izquierdo de (10) sólo depende de y por tanto la derecha también debe depender sólo de y,

Factor integrante $\mu(y)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(y)$. Luego $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$ y un análisis similar de (5) lleva a

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}. \tag{10}$$

Notemos que la expresión del lado izquierdo de (10) sólo depende de y por tanto la derecha también debe depender sólo de y, si este es el caso y también es continua,

Factor integrante $\mu(y)$

Si el factor integrante sólo depende de x, escribimos $\mu(y)$. Luego $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$ y un análisis similar de (5) lleva a

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}. \tag{10}$$

Notemos que la expresión del lado izquierdo de (10) sólo depende de y por tanto la derecha también debe depender sólo de y, si este es el caso y también es continua, integrando en ambos lados con respecto a y podemos tomar

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy} \tag{11}$$

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta,

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x.

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy}$$

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Luego $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{lnx} = x$.

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Luego $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{lnx} = x$. Se sigue que la siguiente ecuación exacta

$$(xy^2 - x^2)dx + x^2ydy = 0.$$

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Luego $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{lnx} = x$. Se sigue que la siguiente ecuación exacta

$$(xy^2 - x^2)dx + x^2ydy = 0.$$

Por otro lado, la ecuación original no tiene factor integrante de la forma $\mu(y)$

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Luego $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{lnx} = x$. Se sigue que la siguiente ecuación exacta

$$(xy^2 - x^2)dx + x^2ydy = 0.$$

Por otro lado, la ecuación original no tiene factor integrante de la forma $\mu(y)$ dado que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Luego $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{lnx} = x$. Se sigue que la siguiente ecuación exacta

$$(xy^2 - x^2)dx + x^2ydy = 0.$$

Por otro lado, la ecuación original no tiene factor integrante de la forma $\mu(y)$ dado que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{y - 2y}{y^2 - x}$$

Ejemplo

La ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + xydy = 0$$

no es exacta, pero tiene un factor integrante con respecto a x. En efecto, se tiene que $M = y^2 - x$, $N = xy$ y

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Luego $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{lnx} = x$. Se sigue que la siguiente ecuación exacta

$$(xy^2 - x^2)dx + x^2ydy = 0.$$

Por otro lado, la ecuación original no tiene factor integrante de la forma $\mu(y)$ dado que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{y - 2y}{y^2 - x} = \frac{-y}{y^2 - x}$$

no depende sólo de y.