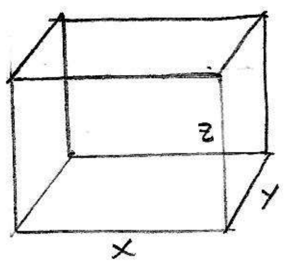
Problema 1: Una caja rectangular (con tapa) debe tener un volumen de 288 pulgadas cúbicas y el largo de su base debe medir exactamente el triple de su ancho. ¿Cuál es el área superficial mínima posible de dicha caja? Verifique que su respuesta es el mínimo global.

S// Para resolver este tipo de problemas, extremos en dominios abiertos se tienen en cuenta las mismas pautas que problemas en dominios cerrados. (Leer bien - Dibujo - Identif. vbles - usar herram proporcionada por la derivada).



Sea x: Longitud de la base

y: Longitud ancho

z: Longitud de la altura

V: Volumen de la caja

A: Área superficial.

$V = xyz$.

A = Área base + Área Tapa + Área Caras laterales

$A = xy + xy + yz + yz + xz + xz = 2xy + 2yz + 2xz$.

Pero base = triple ancho $\mapsto$ $x = 3y$. Entonces

$$A = 2(3y)y + 2yz + 2(3y)z = 6y^2 + 2yz + 6yz \rightarrow$$

$A = 6y^2 + 8yz$.

Como $V = xyz = 288 \rightarrow 3y^2z = 288 \rightarrow z = \dfrac{288}{3y^2}$ entonces

$$A(y) = 6y^2 + 8y\left(\frac{288}{3y^2}\right) = 6y^2 + \frac{8 \cdot 288}{3y} = 6y^2 + \frac{2304}{3y}, \quad y > 0$$

$$A(y) = 6y^2 + \frac{2304}{3y} = \frac{18y^3 + 2304}{3y}, \quad y>0.$$

$$A'(y) = \frac{54y^2 \cdot 3y - 3(18y^3 + 2304)}{9y^2} = \frac{162y^3 - 54y^3 - 6912}{9y^2}$$

$$= \frac{108y^3 - 6912}{9y^2}$$

$$A'(y) = 0 \Leftrightarrow 108y^3 = 6912 \Leftrightarrow y^3 = \frac{6912}{108} = 64.$$

$y^3 = 64 \rightarrow y = 4$. $A'(y)$ no existe en $y=0$, pero $0 \notin D_A$

Si $0 < y < 4$, $A'(y) < 0$

$y > 4$, $A'(y) > 0$.

En $y = 4$ hay mínimo local.
Como el mínimo local es único entonces el mínimo es absoluto.
El área mínima superficial de la caja es

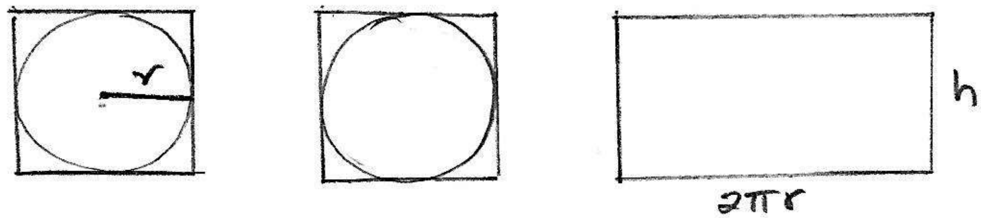
$$A = \frac{18(4)^3 + 2304}{3(4)} = \frac{18 \cdot 64 + 2304}{12} = \frac{1152 + 2304}{12} = \frac{3456}{12}$$

$A = 288$ pulgadas cuadradas

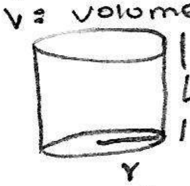
Problema 2: Se va a construir un recipiente cilíndrico con un volumen de 125 pulg^3, cortando su tapa y su fondo de cuadrados metálicos y formando la superficie curva al doblar una lámina metálica rectangular para unir los bordes. ¿Qué radio y altura minimizarán la cantidad de material que se requiere?

suponga que se desprecian las esquinas de los cuadrados.

S//



r: Radio
h: altura
V: volumen



A: área

$V = \pi r^2 \cdot h = 125$

$A =$ Area base + Área tapa + Área lateral

$A = (2r)^2 + (2r)^2 + 2\pi r \cdot h$

$A = 8r^2 + 2\pi r \cdot h$

Como $\pi r^2 h = 125$, se tiene $h = \dfrac{125}{\pi r^2}$, luego

$$A(r) = 8r^2 + 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cdot \frac{125}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} = 8r^2 + \frac{250}{r} = \frac{8r^3 + 250}{r}, \quad r > 0$$

Buscamos números críticos:

$$A'(r) = \frac{24r^2 \cdot r - (8r^3 + 250)}{r^2} = \frac{16r^3 - 250}{r^2}$$

$A'(r) = 0 \iff 16r^3 = 250 \rightarrow r^3 = \dfrac{250}{16} = \dfrac{125}{8}$

$\iff r = \sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} = \dfrac{5}{2}$

$A'(r)$ no existe en $r = 0$, pero $r > 0$

Usamos Crit. de 2da derivada

$$A''(r) = \frac{48r^2 \cdot r^2 - 2r(16r^3 - 250)}{r^4} = \frac{48r^4 - 32r^4 + 500r}{r^4}$$

$$= \frac{16r^4 + 500r}{r^4}.$$

$A''(5/2) > 0$, luego en $r = 5/2$ hay mínimo local.

Como el mínimo local es único entonces el mínimo local realmente es absoluto.

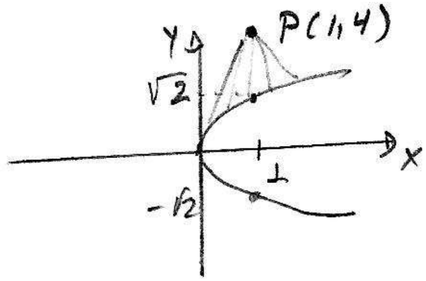
Si $r = 5/2$, $h = \frac{125}{\pi(\frac{5}{2})^2} = \frac{125}{\pi\frac{25}{4}} = \frac{\cancel{125}\cdot 4}{\cancel{25}\pi} = \frac{5\cdot 4}{\pi} = \frac{20}{\pi}$.

El radio y la altura que se requieren para usar la menor cantidad de material es

$r = 5/2$, $h = \frac{20}{\pi}$.

<u>Problema 3</u>: Hallar el punto sobre la curva $y^2 = 2x$ más cercano al punto $P(1,4)$.

Sol



Sea $Q(x,y)$ un punto sobre la curva.
Se quiere hallar la distancia mínima entre P y Q.

Sea d = distancia (P,Q).

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}.$$ Como $Q(x,y)$ está en la curva, $y^2 = 2x$, entonces $x = y^2/2$. Luego

$$d(y) = \sqrt{(y^2/2 - 1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(y^2-2)^2 + (y-4)^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}(y^4 - 4y^2 + 4) + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{\tfrac{y^4}{4} + 1 - 8y + 16}$$

$$d(y) = \sqrt{y^4/4 - 8y + 17}, \quad y \in \mathbb{R}$$ (La expresión dentro del radical es positiva)

$$d'(y) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{y^4}{4} - 8y + 17}} \left(\frac{4}{4}y^3 - 8\right)$$

$d'(y) = 0 \longleftrightarrow y^3 = 8 \leftrightarrow y = 2$

$d'(y)$ no existe (Nunca) (Siempre existe) $\left(\frac{y^4}{4} - 8y + 17 \neq 0\right)$

$(y^2/2 - 1)^2 + (y-4)^2 \neq 0$

si $y < 2$, $d'(y) < 0$

$y > 2$, $d'(y) > 0$

En $y = 2$ hay mínimo local. (Como es el único mín. local, el extremo es absoluto).

Cuando $y = 2$, $y^2 = 2x$

$4 = 2x \rightarrow x = 2$.

El punto sobre la gráfica de la curva más cercano a $P(1,4)$ es $Q(2,2)$