Ejemplo. Sea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\mathcal{M}_{2\times 2}$: Conjunto de todas las matrices 2×2 (es un e.v.).

¿ M es un conjunto generador $\mathcal{M}_{2\times 2}$?

Solución.

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}$. Veamos si existen α, β y λ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \lambda & \beta \\ \beta + \lambda & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda &= a \\ \beta &= b \\ \beta + \lambda &= c \\ \alpha &= d. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha + 0\beta + \lambda &= a \\ 0\alpha + \beta + 0\lambda &= b \\ 0\alpha + \beta + \lambda &= c \\ \alpha + 0\beta + 0\lambda &= d. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & K \end{array}\right)$$

Si $K \neq 0$, el sistema es inconsistente.

Asi que M no genera a $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Tarea. revisar ejm. 14, pág. 222.

Definición [*Conjunto de vectores linealmente dependiente*]. Sea V un espacio vectorial. Diremos que el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ es *linealmente dependiente*$(l.d.)$, si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, **no todos cero**, tales que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

En caso contrario, diremos que el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente $(l.i.)$; es decir, si siempre que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$; en otras palabras, un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es *linealmente independiente*, si la única combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ igual a cero es la combinación lineal trivial.

Ejm. Determine si $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto $l.i.$

Solución. Sea λ_1, λ_2 y λ_3 tales

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda_3 = 0$
$2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$
$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$

Como el sistema homogéneo tiene solución única, entonces S es $l.i.$

Ejm. ¿Es $T = \{1 - x, 2x - x^2, -1 + 2x^2, 1 + x + x^2\}$ $l.i.$?

Solución. Sean α_1, α_2, α_3 y α_4 tales que

$$\alpha_1(1 - x) + \alpha_2(2x - x^2) + \alpha_3(-1 + 2x^2) + \alpha_4(1 + x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$(\underbrace{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4}_{=0}) + (\underbrace{-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4}_{=0})x + (\underbrace{-\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4}_{=0})x^2 = 0 + 0x + 0x^2 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Como el sistema tiene infinitas soluciones, T <u>no</u> es $l.i.$

Teorema [*Propiedades de independencia y dependencia lineal*].
Dado un espacio vectorial V y S un subconjunto de V.

1. Si S contiene el vector $\mathbf{0}$, S es un conjunto linealmente dependiente.
2. Si S consta de **dos** elementos, S es linealmente dependiente, si y solo si, uno de ellos es un múltiplo por escalar del otro.
3. Si S contiene un subconjunto linealmente dependiente, S es linealmente dependiente.
4. Si S es linealmente independiente, cualquier subconjunto de S es también linealmente independiente.

Argumento para 2.

Sea $S = \{V_1, V_2\}$

- Suponga que S es l.d., entonces existen α y β que no son nulos simultáneamente tales que

$$\alpha V_1 + \beta V_2 = 0.$$

Si $\alpha \neq 0$,
$$\alpha V_1 = -\beta V_2$$
$$V_1 = -\frac{\beta}{\alpha} V_2 \;/\!\!/$$

- Supongamos que $V_1 = \alpha V_2$

$$V_1 - \alpha V_2 = 0$$

Como esta es un C.L. no trival, entonces S es l.d.

Teorema [*Propiedades de un conjunto linealmente independiente*].
Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores $l.i.$ de un espacio vectorial V.

1. Si $\mathbf{v} \in Gen\ S$, entonces $\mathbf{v}$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de S. En otras palabras, si

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \mu_n\mathbf{v}_n,$$

   entonces

$$\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2,\ \ldots,\ \lambda_n = \mu_n.$$

2. Si $\mathbf{v} \notin Gen\ S$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ es $l.i.$

Ejemplo. $S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

observe que S es l.i.

$$Gen\ S = \left\{ \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \notin Gen\ S.$$

Por tanto $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto l.i.

Ejm. clasificar los siguientes conjuntos como l.i. o l.d.

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \right\}$

   Como $\mathbf{0} \in A \Rightarrow A$ es l.d.

2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

B es l.i. ¿por qué?

3. $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

M es l.d.

4. $C = \{ u, v, w, 4u \}$.

$\{u, 4u\} \subseteq C$ y es l.d. $\Rightarrow$ C también es l.d.