APÉNDICE - TEORÍA PÉNDULO SIMPLE

Se dice que el movimiento de un cuerpo es periódico, cuando su trayectoria se repite con un intervalo de tiempo constante, llamado periodo (T).

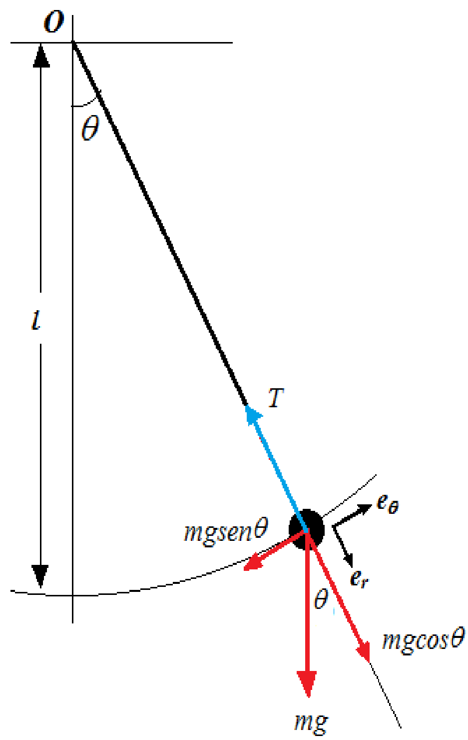

Figura 2: Fuerzas actuantes sobre el péndulo.

En la figura 2 se muestra parte de la trayectoria del péndulo y las dos fuerzas que sobre él actúan: el peso $m\vec{\boldsymbol{g}}$, y la tensión ejercida por la cuerda, $\vec{\boldsymbol{T}}$.La trayectoria descrita es un arco de círculo de radio ***l***, debido a que la cuerda se supone inextensible. Esta condición de ligadura permite expresar la posición del péndulo en el plano en términos de una única variable, $\boldsymbol{\theta}$, el ángulo formado por la cuerda con la vertical. Obsérvese que las coordenadas rectangulares de la posición de la masa ***(x,y)***, en términos de las coordenadas polares ***(l,θ)***, tienen las expresiones:

$$x = lsen\theta, \qquad y = lcos\theta$$

Para estudiar el movimiento conviene utilizar un par de ejes rectangulares que faciliten su descripción; como la trayectoria es circular conviene escoger uno de los ejes en la dirección radial $\boldsymbol{e_r}$, y el otro en la dirección de la tangente a la trayectoria $\boldsymbol{e_\theta}$ (Figura 2).Referidas a este par de ejes, la tensión de la cuerda es $\vec{T} = -Te_r$, dado que es radial hacia el centro; el peso, con que tiene componentes a lo largo de ambas direcciones, se expresa como $mg(-sen\theta\ \boldsymbol{e_\theta} + cos\theta\ \boldsymbol{e_r})$. Aplicada a esta situación, la segunda ley de Newton,

$$\vec{\boldsymbol{T}} + m\vec{\boldsymbol{g}} = m\vec{\boldsymbol{a}},$$

conduce a dos ecuaciones escalares, una para cada dirección. A lo largo de la radial

$$mgcos\theta - T = \ ma_r. \qquad (1)$$

Tangencialmente existe una fuerza neta, la componente del peso, que imprime a la masa aceleración en esta dirección, se tiene:

$$m\boldsymbol{a_\theta} = -mgsen\theta; \qquad \boldsymbol{a_\theta} = \ -gsen\theta,$$

recordando que en un movimiento circular de radio ***R***, las aceleraciones lineal $\boldsymbol{a_\theta}$ y angular ***α***, se relacionan según $\boldsymbol{a_\theta = \alpha R}$ y utilizando para la aceleración angular la notación $\ddot{\theta} \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2}$, se llega a:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sen\theta = 0, \qquad (2)$$

ecuación diferencial compleja que debe resolverse para encontrar la expresión analítica del ángulo en función del tiempo; la solución exacta de esta ecuación supera los alcances de este curso.

Oscilaciones pequeñas.

Para ángulos "pequeños" $sen\theta \ \cong \ \theta$, y (2) puede aproximarse a:

$$\ddot{\theta} + \ \frac{g}{l}\theta = 0. \qquad (3)$$

La solución de esta ecuación diferencial es bien conocida dada su trascendental importancia física, describe el *movimiento armónico simple*, movimiento que adquiere una masa sometida a la acción de una fuerza proporcional y de signo contrario al desplazamiento de la masa, como ocurre, por ejemplo, con una masa sujeta a un resorte; el movimiento resultante es una oscilación periódica, de frecuencia angular ω igual a la raíz cuadrada del coeficiente de la variable en la ec (3), en nuestro caso,

$$\omega = \ \sqrt{\frac{g}{l}}$$

el periodo del movimiento *T* es entonces:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (4)$$

Se puede escribir también:

$$l = g\,\frac{T^2}{4\pi^2} \qquad (5)$$

la cual representa una relación cuadrática entre la longitud L y el período T, es decir un polinomio grado 2. Despejando la gravedad también tenemos:

$$g = l\,\frac{4\pi^2}{T^2} \qquad (6)$$