Clase 16-02-22

miércoles, 16 de febrero de 2022 10:48 a. m.

# Coordenadas respecto a una base ordenada (continuación)

**Teorema 16** [*Unicidad e invertibilidad de la matriz de transición*]. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ bases de un espacio vectorial $V$ y sea $P$ la matriz de transición de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$. Es decir,

$$P = [[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}'} \ [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [\mathbf{v}_n]_{\mathcal{B}'}] \, .$$

1. Si existe otra matriz $P'$ tal que, para cada vector $\mathbf{v} \in V$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = P' [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, entonces $P = P'$.
2. La matriz de transición $P$ es invertible y su inversa es la matriz de transición de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

Ejemplo. Del ejemplo anterior tenemos que

$$P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad P' = P_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificar que $P \cdot P' = I$ y $P'P = I$.

$$PP' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P'P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean $B$ y $B'$ bases de un e.v. $V$ y $v \in V$.

$[v]_B = P_{B'B}[v]_{B'}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, shift left, "P_{BB'}"] & & B' \arrow[ll, shift left, "P_{B'B}"] \\ {[v]_B} \arrow[dr, "P_{BC}"'] & & {[v]_{B'}} \arrow[dl, "P_{B'C}"] \\ & {[v]_C} & \end{tikzcd}$$

$[v]_{B'} = P_{BB'}[v]_B$.

$C \leftarrow$ base canónica.

$$\boxed{[v]_C = P_{BC}[v]_B = P_{B'C}[v]_{B'}}$$

Ecuación cambio de base.

**Ejemplo 35**. Sean $\mathcal{B} = \{2, 1-x, x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, x-1, 1+x^2\}$ bases de $\mathcal{P}_2$. Si $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculemos $[p(x)]_{\mathcal{B}'}$.

Solución.

Forma 1: Usando la matriz cambio de base de $B$ a $B'$.

$$P_{BB'} = \left( [2]_{B'} \quad [1-x]_{B'} \quad [x^2]_{B'} \right).$$

Sean $\alpha_1$, $\alpha_2$ y $\alpha_3$ tales que

- $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(1+x^2) = 2$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 2 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [2]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\alpha_1 = 2$.

- $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(1+x^2) = 1-x$

• $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 (x-1) + \alpha_3 (1+x^2) = 1-x$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_2 &= -1 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow [1-x]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

· Análogamente se tiene $[x^2]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Luego, $P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$[v]_{B'} = P_{BB'} [v]_B.$

$v = p(x)$

$[p(x)]_{B'} = P_{BB'} [p(x)]_B$

$$[p(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Forma 2: Usando la ecuación cambio de base.

$$\begin{tikzcd} {[v]_B} \quad B \arrow[dr, "P_{BC}"'] & & B' \quad {[v]_{B'}} \arrow[dl, "P_{B'C}"] \\ & C \\ & {[v]_C.} \end{tikzcd}$$

$P_{BC} [v]_B = P_{B'C} [v]_{B'}.$ $\qquad v = p(x)$

$P_{BC} [p(x)]_B = P_{B'C} [p(x)]_{B'}$

Base canónica de $P_2$: $C = \{1, x, x^2\}.$

• $P_{BC} = \left( [2]_C \quad [1-x]_C \quad [x^2]_C \right)$

Sean $\alpha_1$, $\alpha_2$ y $\alpha_3$ tales que

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 x^2 = x^2$$

$$[2]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [1-x]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [x^2]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $P_{B'C} = \left( [1]_C \quad [x-1]_C \quad [1+x^2]_C \right).$

Sean $\alpha_1$, $\alpha_2$ y $\alpha_3$ tales que

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 1 + x^2$$

$$[1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [x-1]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [1+x^2]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{B'C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{B'C} [p(x)]_{B'} = P_{BC} [p(x)]_B \qquad [p(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [p(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -5 \end{array} \Rightarrow [p(x)]_{B'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$