

Programación Lineal

Método Simplex

- El algoritmo simplex es el método clásico para resolver problemas de programación lineal.
- Su tiempo de ejecución es no polinomial en el peor caso. Sin embargo, en la práctica es considerablemente rápido.
- El algoritmo simplex tiene alguna similaridad con la eliminación Gaussiana.

Programación Lineal

Método Simplex

- El algoritmo simplex es el método clásico para resolver problemas de programación lineal.
- Su tiempo de ejecución es no polinomial en el peor caso. Sin embargo, en la práctica es considerablemente rápido.
- El algoritmo simplex tiene alguna similaridad con la eliminación Gaussiana.

Programación Lineal

Método Simplex

- El algoritmo simplex es el método clásico para resolver problemas de programación lineal.
- Su tiempo de ejecución es no polinomial en el peor caso. Sin embargo, en la práctica es considerablemente rápido.
- El algoritmo simplex tiene alguna similaridad con la eliminación Gaussiana.

Programación Lineal

Método Simplex

- La eliminación Gaussiana comienza con un sistema de igualdades lineales cuya solución es desconocida.
- En cada iteración, el sistema es reescrito en una forma equivalente que tiene alguna estructura adicional.
- Después de algún número de iteraciones, es simple obtener la solución a partir del sistema de ecuaciones actual.
- El algoritmo simplex funciona de una forma similar y puede ser visto como una eliminación Gaussiana para inigualdades.

Programación Lineal

Método Simplex

- La eliminación Gaussiana comienza con un sistema de igualdades lineales cuya solución es desconocida.
- En cada iteración, el sistema es reescrito en una forma equivalente que tiene alguna estructura adicional.
- Después de algún número de iteraciones, es simple obtener la solución a partir del sistema de ecuaciones actual.
- El algoritmo simplex funciona de una forma similar y puede ser visto como una eliminación Gaussiana para inigualdades.

Programación Lineal

Método Simplex

- La eliminación Gaussiana comienza con un sistema de igualdades lineales cuya solución es desconocida.
- En cada iteración, el sistema es reescrito en una forma equivalente que tiene alguna estructura adicional.
- Después de algún número de iteraciones, es simple obtener la solución a partir del sistema de ecuaciones actual.
- El algoritmo simplex funciona de una forma similar y puede ser visto como una eliminación Gaussiana para inigualdades.

Programación Lineal

Método Simplex

- La eliminación Gaussiana comienza con un sistema de igualdades lineales cuya solución es desconocida.
- En cada iteración, el sistema es reescrito en una forma equivalente que tiene alguna estructura adicional.
- Después de algún número de iteraciones, es simple obtener la solución a partir del sistema de ecuaciones actual.
- El algoritmo simplex funciona de una forma similar y puede ser visto como una eliminación Gaussiana para inigualdades.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Consideremos nuevamente el programa lineal asociado al problema de las pinturas:

Maximizar

$$3x_e + 2x_i$$

sujeto a

$$x_e + 2x_i \leq 6$$

$$2x_e + x_i \leq 8$$

$$-x_e + x_i \leq 1$$

$$x_i \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Consideremos nuevamente el programa lineal asociado al problema de las pinturas:

Maximizar

$$3x_e + 2x_i$$

sujeto a

$$x_e + 2x_i \leq 6$$

$$2x_e + x_i \leq 8$$

$$-x_e + x_i \leq 1$$

$$x_i \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$\begin{aligned} z &= 3x_e + 2x_i \\ x_1 &= 6 - x_e - 2x_i \\ x_2 &= 8 - 2x_e - x_i \\ x_3 &= 1 + x_e - x_i \\ x_4 &= 2 - x_i \end{aligned}$$

Inicialmente, se busca una solución básica factible. En una solución básica se igualan todas las variables en la parte derecha de las ecuaciones (variables no-básicas) a 0 y luego se calcula el valor de las variables en la parte izquierda (variables básicas).

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$\begin{aligned} z &= 3x_e + 2x_i \\ x_1 &= 6 - x_e - 2x_i \\ x_2 &= 8 - 2x_e - x_i \\ x_3 &= 1 + x_e - x_i \\ x_4 &= 2 - x_i \end{aligned}$$

Inicialmente, se busca una solución básica factible. En una solución básica se igualan todas las variables en la parte derecha de las ecuaciones (variables no-básicas) a 0 y luego se calcula el valor de las variables en la parte izquierda (variables básicas).

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$\begin{aligned} z &= 3x_e + 2x_i \\ x_1 &= 6 - x_e - 2x_i \\ x_2 &= 8 - 2x_e - x_i \\ x_3 &= 1 + x_e - x_i \\ x_4 &= 2 - x_i \end{aligned}$$

Inicialmente, se busca una solución básica factible. En una solución básica se igualan todas las variables en la parte derecha de las ecuaciones (variables no-básicas) a 0 y luego se calcula el valor de las variables en la parte izquierda (variables básicas).

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$z = 3x_e + 2x_i$$

$$x_1 = 6 - x_e - 2x_i$$

$$x_2 = 8 - 2x_e - x_i$$

$$x_3 = 1 + x_e - x_i$$

$$x_4 = 2 - x_i$$

Una solución básica es $(x_e, x_i, x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 6, 8, 1, 2)$. Esta solución es una solución factible y el valor de la función objetivo es 0.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe seleccionar una variable que al modificarse genere que el valor de la función objetivo aumente.
- En general, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_e tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_i tiene coeficiente 2.
- Por esta razón se selecciona x_e para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe seleccionar una variable que al modificarse genere que el valor de la función objetivo aumente.
- En general, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_e tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_i tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_e para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe seleccionar una variable que al modificarse genere que el valor de la función objetivo aumente.
- En general, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_e tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_i tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_e para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe seleccionar una variable que al modificarse genere que el valor de la función objetivo aumente.
- En general, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_e tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_i tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_e para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_e .
- Para esto, es necesario determinar cuál es el valor más alto que puede tomar x_e sin violar las restricciones. Esto es, que la parte derecha de las restricciones alcance un valor mayor o igual a 0.
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_e = 6$

Si $x_2 = 0$ entonces $x_e = 4$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_e = -1$

Si $x_4 = 0$ entonces no hay solución

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_e = 4$ y se selecciona la variable x_2 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_e .
- Para esto, es necesario determinar cuál es el valor más alto que puede tomar x_e sin violar las restricciones. Esto es, que la parte derecha de las restricciones alcance un valor mayor o igual a 0.
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_e = 6$

Si $x_2 = 0$ entonces $x_e = 4$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_e = -1$

Si $x_4 = 0$ entonces no hay solución

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_e = 4$ y se selecciona la variable x_2 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_e .
- Para esto, es necesario determinar cuál es el valor más alto que puede tomar x_e sin violar las restricciones. Esto es, que la parte derecha de las restricciones alcance un valor mayor o igual a 0.
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_e = 6$

Si $x_2 = 0$ entonces $x_e = 4$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_e = -1$

Si $x_4 = 0$ entonces no hay solución

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_e = 4$ y se selecciona la variable x_2 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_e .
- Para esto, es necesario determinar cuál es el valor más alto que puede tomar x_e sin violar las restricciones. Esto es, que la parte derecha de las restricciones alcance un valor mayor o igual a 0.
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_e = 6$

Si $x_2 = 0$ entonces $x_e = 4$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_e = -1$

Si $x_4 = 0$ entonces no hay solución

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_e = 4$ y se selecciona la variable x_2 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se despeja x_e en la restricción $x_2 = 8 - 2x_e - x_i$ y se obtiene

$$x_e = 4 - 1/2x_i - 1/2x_2$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_e de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se despeja x_e en la restricción $x_2 = 8 - 2x_e - x_i$ y se obtiene

$$x_e = 4 - \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_2$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_e de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 12 + \frac{1}{2}x_i - \frac{3}{2}x_2$$

$$x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_i + \frac{1}{2}x_2$$

$$x_e = 4 - \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_2$$

$$x_3 = 5 - \frac{3}{2}x_i - \frac{1}{2}x_2$$

$$x_4 = 2 - x_i$$

El anterior procedimiento recibe el nombre de **pivote**.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 12 + \frac{1}{2}x_i - \frac{3}{2}x_2$$

$$x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_i + \frac{1}{2}x_2$$

$$x_e = 4 - \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_2$$

$$x_3 = 5 - \frac{3}{2}x_i - \frac{1}{2}x_2$$

$$x_4 = 2 - x_i$$

El anterior procedimiento recibe el nombre de **pivote**.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_1 es la única con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_i es la única con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_1 es la única con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_i .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_i = 4/3$

Si $x_e = 0$ entonces $x_i = 8$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_i = 10/3$

Si $x_4 = 0$ entonces $x_i = 2$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_i = 4/3$ y se selecciona la variable x_1 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_i .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_i = 4/3$

Si $x_e = 0$ entonces $x_i = 8$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_i = 10/3$

Si $x_4 = 0$ entonces $x_i = 2$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_i = 4/3$ y se selecciona la variable x_1 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_i .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_i = 4/3$

Si $x_e = 0$ entonces $x_i = 8$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_i = 10/3$

Si $x_4 = 0$ entonces $x_i = 2$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_i = 4/3$ y se selecciona la variable x_1 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se despeja x_i en la restricción $x_1 = 2 - 3/2x_i + 1/2x_2$ y se obtiene

$$x_i = 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_i de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se despeja x_i en la restricción $x_1 = 2 - 3/2x_i + 1/2x_2$ y se obtiene

$$x_i = 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_i de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 38/3 - 1/3x_1 - 4/3x_2$$

$$x_i = 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2$$

$$x_e = 10/3 - 1/3x_1 - 2/3x_2$$

$$x_3 = 3 + x_1 - x_2$$

$$x_4 = 2/3 + 2/3x_1 - 1/3x_2$$

En este punto, no es posible mejorar el valor de la función objetivo puesto que depende de variables con coeficiente negativo. Por tanto hemos llegado a la solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 38/3 - 1/3x_1 - 4/3x_2$$

$$x_i = 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2$$

$$x_e = 10/3 - 1/3x_1 - 2/3x_2$$

$$x_3 = 3 + x_1 - x_2$$

$$x_4 = 2/3 + 2/3x_1 - 1/3x_2$$

En este punto, no es posible mejorar el valor de la función objetivo puesto que depende de variables con coeficiente negativo. Por tanto hemos llegado a la solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 38/3 - 1/3x_1 - 4/3x_2$$

$$x_i = 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2$$

$$x_e = 10/3 - 1/3x_1 - 2/3x_2$$

$$x_3 = 3 + x_1 - x_2$$

$$x_4 = 2/3 + 2/3x_1 - 1/3x_2$$

La solución básica $(x_e, x_i, x_1, x_2, x_3, x_4) = (10/3, 4/3, 0, 0, 3, 2/3)$ es la solución óptima. Por ende, en el problema original $x_e = 10/3$, $x_i = 4/3$ y el valor de la función objetivo es $z = 38/3$.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

Considere el siguiente programa lineal:

Maximizar

$$3x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

Considere el siguiente programa lineal:

Maximizar

$$3x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

Una solución básica es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 30, 24, 36)$. Esta solución es una solución factible y el valor de la función objetivo es 0.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

Una solución básica es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 30, 24, 36)$. Esta solución es una solución factible y el valor de la función objetivo es 0.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- En este momento, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_1 tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_2 tiene coeficiente 1 y x_3 tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_1 para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- En este momento, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_1 tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_2 tiene coeficiente 1 y x_3 tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_1 para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- En este momento, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_1 tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_2 tiene coeficiente 1 y x_3 tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_1 para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_1 .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_4 = 0$ entonces $x_1 = 30$

Si $x_5 = 0$ entonces $x_1 = 12$

Si $x_6 = 0$ entonces $x_1 = 9$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_1 = 9$ y se selecciona la variable x_6 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_1 .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_4 = 0$ entonces $x_1 = 30$

Si $x_5 = 0$ entonces $x_1 = 12$

Si $x_6 = 0$ entonces $x_1 = 9$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_1 = 9$ y se selecciona la variable x_6 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_1 .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_4 = 0$ entonces $x_1 = 30$

Si $x_5 = 0$ entonces $x_1 = 12$

Si $x_6 = 0$ entonces $x_1 = 9$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_1 = 9$ y se selecciona la variable x_6 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_1 en la restricción $x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$ y se obtiene

$$x_1 = 9 - 1/4x_2 - 1/2x_3 - 1/4x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_1 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_1 en la restricción $x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$ y se obtiene

$$x_1 = 9 - 1/4x_2 - 1/2x_3 - 1/4x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_1 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 27 + 1/4x_2 + 1/2x_3 - 3/4x_6$$

$$x_1 = 9 - 1/4x_2 - 1/2x_3 - 1/4x_6$$

$$x_4 = 21 - 3/4x_2 - 5/2x_3 + 1/4x_6$$

$$x_5 = 6 - 3/2x_2 - 4x_3 + 1/2x_6$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_3 tiene mayor coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_3 tiene mayor coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_3 tiene mayor coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_3 .
- De esta manera se tiene que:

$$\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_3 = 18$$

$$\text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_3 = 42/5$$

$$\text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_3 = 3/2$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_3 = 3/2$ y se selecciona la variable x_5 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_3 .
- De esta manera se tiene que:

$$\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_3 = 18$$

$$\text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_3 = 42/5$$

$$\text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_3 = 3/2$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_3 = 3/2$ y se selecciona la variable x_5 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_3 .
- De esta manera se tiene que:

$$\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_3 = 18$$

$$\text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_3 = 42/5$$

$$\text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_3 = 3/2$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_3 = 3/2$ y se selecciona la variable x_5 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_3 en la restricción

$$x_5 = 6 - 3/2x_2 - 4x_3 + 1/2x_6$$

y se obtiene

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_3 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_3 en la restricción

$$x_5 = 6 - 3/2x_2 - 4x_3 + 1/2x_6$$

y se obtiene

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_3 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 111/4 + 1/16x_2 - 1/8x_5 - 11/16x_6$$

$$x_1 = 33/4 - 1/16x_2 + 1/8x_5 - 5/16x_6$$

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

$$x_4 = 69/4 + 3/16x_2 + 5/8x_5 - 1/16x_6$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_2 es la única variable con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_2 es la única variable con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_2 es la única variable con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_2 .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_2 = 132$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_2 = 4$

Si $x_4 = 0$ entonces $x_2 = -92$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_2 = 4$ y se selecciona la variable x_3 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_2 .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_2 = 132$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_2 = 4$

Si $x_4 = 0$ entonces $x_2 = -92$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_2 = 4$ y se selecciona la variable x_3 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_2 .
- De esta manera se tiene que:

Si $x_1 = 0$ entonces $x_2 = 132$

Si $x_3 = 0$ entonces $x_2 = 4$

Si $x_4 = 0$ entonces $x_2 = -92$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_2 = 4$ y se selecciona la variable x_3 .

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_2 en la restricción

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

y se obtiene

$$x_2 = 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_2 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_2 en la restricción

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

y se obtiene

$$x_2 = 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_2 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 28 - 1/6x_3 - 1/6x_5 - 2/3x_6$$

$$x_1 = 8 + 1/6x_3 + 1/6x_5 - 1/3x_6$$

$$x_2 = 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6$$

$$x_4 = 18 - 1/2x_3 + 1/2x_5$$

En este punto no es posible mejorar el valor de la función objetivo puesto que todos los coeficientes son negativos. Por consiguiente, hemos alcanzado la solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = 28 - 1/6x_3 - 1/6x_5 - 2/3x_6$$

$$x_1 = 8 + 1/6x_3 + 1/6x_5 - 1/3x_6$$

$$x_2 = 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6$$

$$x_4 = 18 - 1/2x_3 + 1/2x_5$$

La solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (8, 4, 0, 18, 0, 0)$ es la solución óptima. Por ende, en el problema original $x_e = 10/3$, $x_i = 4/3$ y el valor de la función objetivo es $z = 28$.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejercicio

Maximizar

$$18x_1 + 12.5x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 12$$

$$x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejercicio

Maximizar

$$5x_1 - 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejercicio

Minimizar

$$x_1 + x_2 + x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + 7.5x_2 + x_3 \geq 10000$$

$$20x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 30000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Consideremos nuevamente el programa lineal asociado al problema de las pinturas:

Maximizar

$$3x_e + 2x_i$$

sujeto a

$$x_e + 2x_i \leq 6$$

$$2x_e + x_i \leq 8$$

$$-x_e + x_i \leq 1$$

$$x_i \leq 2$$

$$x_e, x_i \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Consideremos la forma de holgura del anterior programa lineal:

$$z = 3x_e + 2x_i$$

$$x_1 = 6 - x_e - 2x_i$$

$$x_2 = 8 - 2x_e - x_i$$

$$x_3 = 1 + x_e - x_i$$

$$x_4 = 2 - x_i$$

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Las anteriores ecuaciones pueden ser expresadas como sigue:

$$z - 3x_e - 2x_i = 0$$

$$x_e + 2x_i + x_1 = 6$$

$$2x_e + x_i + x_2 = 8$$

$$-x_e + x_i + x_3 = 1$$

$$x_i + x_4 = 2$$

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Es posible utilizar un tablero para facilitar el procedimiento:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS |
|---------------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|
| z | 1 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| x_2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| x_3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |

Luego, se debe seleccionar una variable no-básica para volverla básica. Se elige la variable con mayor coeficiente negativo:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|---------------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|-------------|
| z | 1 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | entra x_e |
| x_1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | |
| x_2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | |
| x_3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Es posible utilizar un tablero para facilitar el procedimiento:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS |
|---------------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|
| z | 1 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| x_2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| x_3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |

Luego, se debe seleccionar una variable no-básica para volverla básica. Se elige la variable con mayor coeficiente negativo:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|---------------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|-------------|
| z | 1 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | entra x_e |
| x_1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | |
| x_2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | |
| x_3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se debe seleccionar una variable básica para intercambiarla con x_e :

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|----------------------|
| z | 1 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | entra x_e |
| x_1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | $6/1 = 6$ |
| x_2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | $8/2 = 4$ sale x_2 |
| x_3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $1/-1 = -1$ |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | — |

Luego, se debe actualizar el tablero. Se debe multiplicar la fila de la variable x_e con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote). Además, se suma cada una de las demás filas un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente).

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se debe seleccionar una variable básica para intercambiarla con x_e :

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----------------------|
| z | 1 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | entra x_e |
| x_1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | $6/1 = 6$ |
| x_2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | $8/2 = 4$ sale x_2 |
| x_3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $1/-1 = -1$ |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | — |

Luego, se debe actualizar el tablero. Se debe multiplicar la fila de la variable x_e con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote). Además, se suma cada una de las demás filas un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente).

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se debe seleccionar una variable básica para intercambiarla con x_e :

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----------------------|
| z | 1 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | entra x_e |
| x_1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | $6/1 = 6$ |
| x_2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | $8/2 = 4$ sale x_2 |
| x_3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $1/-1 = -1$ |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | — |

Luego, se debe actualizar el tablero. Se debe multiplicar la fila de la variable x_e con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote). Además, se suma cada una de las demás filas un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente).

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se debe seleccionar una variable básica para intercambiarla con x_e :

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----------------------|
| z | 1 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | entra x_e |
| x_1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | $6/1 = 6$ |
| x_2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | $8/2 = 4$ sale x_2 |
| x_3 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $1/-1 = -1$ |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | — |

Luego, se debe actualizar el tablero. Se debe multiplicar la fila de la variable x_e con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote). Además, se suma cada una de las demás filas un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente).

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

De esta manera, se obtiene la siguiente configuración:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--|
| z | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 12 | |
| x_1 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 2 | |
| x_e | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 4 | |
| x_3 | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 5 | |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Ahora se debe seleccionar una variable no-básica para volverla básica:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------------|
| z | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 12 | entra x_i |
| x_1 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 2 | |
| x_e | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 4 | |
| x_3 | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 5 | |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

De esta manera, se obtiene la siguiente configuración:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--|
| z | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 12 | |
| x_1 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 2 | |
| x_e | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 4 | |
| x_3 | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 5 | |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Ahora se debe seleccionar una variable no-básica para volverla básica:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-------------|
| z | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 12 | entra x_i |
| x_1 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 2 | |
| x_e | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 4 | |
| x_3 | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 5 | |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se selecciona la variable básica que debe salir:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|----------------|
| z | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 12 | entra x_i |
| x_1 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 2 | 4/3 sale x_1 |
| x_e | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 4 | 8 |
| x_3 | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 5 | 10/3 |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Posteriormente, se actualiza el tablero como se mencionó anteriormente:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|--|
| z | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 4/3 | 0 | 0 | 38/3 | |
| x_i | 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/3 | 0 | 0 | 4/3 | |
| x_e | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 2/3 | 0 | 0 | 10/3 | |
| x_3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | -2/3 | 1/3 | 0 | 1 | 2/3 | |

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se selecciona la variable básica que debe salir:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|----------------|
| z | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 12 | entra x_i |
| x_1 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 2 | 4/3 sale x_1 |
| x_e | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 4 | 8 |
| x_3 | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 5 | 10/3 |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Posteriormente, se actualiza el tablero como se mencionó anteriormente:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|--|
| z | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 4/3 | 0 | 0 | 38/3 | |
| x_i | 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/3 | 0 | 0 | 4/3 | |
| x_e | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 2/3 | 0 | 0 | 10/3 | |
| x_3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | -2/3 | 1/3 | 0 | 1 | 2/3 | |

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se selecciona la variable básica que debe salir:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|----------------|
| z | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 12 | entra x_i |
| x_1 | 0 | 0 | 3/2 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 2 | 4/3 sale x_1 |
| x_e | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 4 | 8 |
| x_3 | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 5 | 10/3 |
| x_4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |

Posteriormente, se actualiza el tablero como se mencionó anteriormente:

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|--|
| z | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 4/3 | 0 | 0 | 38/3 | |
| x_i | 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/3 | 0 | 0 | 4/3 | |
| x_e | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 2/3 | 0 | 0 | 10/3 | |
| x_3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | -2/3 | 1/3 | 0 | 1 | 2/3 | |

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

A este punto ya no se debe iterar más y la solución es $x_i = 4/3$, $x_e = 10/3$ para un valor óptimo $z = 38/3$.

| Var. Básicas | z | x_e | x_i | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | RHS | |
|--------------|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|--|
| z | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 4/3 | 0 | 0 | 38/3 | |
| x_i | 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/3 | 0 | 0 | 4/3 | |
| x_e | 0 | 1 | 0 | -1/3 | 2/3 | 0 | 0 | 10/3 | |
| x_3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | -2/3 | 1/3 | 0 | 1 | 2/3 | |

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

En algunos programas lineales, la solución básica inicial no es una solución factible. Por ejemplo, considere el siguiente programa lineal:

Maximizar

$$2x_1 - x_2$$

sujeto a

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

En algunos programas lineales, la solución básica inicial no es una solución factible. Por ejemplo, considere el siguiente programa lineal:

Maximizar

$$2x_1 - x_2$$

sujeto a

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 5x_2 \leq -4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

El anterior programa en forma de holgura es como sigue:

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - x_2 \\ x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 \\ x_4 &= -4 - x_1 + 5x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, -4)$ no es factible. Por esta razón, se debe realizar un procedimiento adicional para determinar si el programa anterior es factible y obtener una forma de holgura con la que sí se pueda aplicar el método simplex.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

El anterior programa en forma de holgura es como sigue:

$$z = 2x_1 - x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 + x_2$$

$$x_4 = -4 - x_1 + 5x_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

La solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, -4)$ no es factible. Por esta razón, se debe realizar un procedimiento adicional para determinar si el programa anterior es factible y obtener una forma de holgura con la que sí se pueda aplicar el método simplex.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

El anterior programa en forma de holgura es como sigue:

$$z = 2x_1 - x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 + x_2$$

$$x_4 = -4 - x_1 + 5x_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

La solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, -4)$ no es factible. Por esta razón, se debe realizar un procedimiento adicional para determinar si el programa anterior es factible y obtener una forma de holgura con la que sí se pueda aplicar el método simplex.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Inicialmente, se utilizar una variable nueva x_0 y se sustituye la función de optimización como sigue:

$$z = -x_0$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_0$$

$$x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Luego, se aplican los pasos del método simplex (flexible) sobre este nuevo programa.
- Si el valor óptimo que se obtiene es 0, significa que el programa original tiene solución.
- En caso contrario, el programa original no tiene solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Inicialmente, se utilizar una variable nueva x_0 y se sustituye la función de optimización como sigue:

$$z = -x_0$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_0$$

$$x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Luego, se aplican los pasos del método simplex (flexible) sobre este nuevo programa.
- Si el valor óptimo que se obtiene es 0, significa que el programa original tiene solución.
- En caso contrario, el programa original no tiene solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Inicialmente, se utilizar una variable nueva x_0 y se sustituye la función de optimización como sigue:

$$z = -x_0$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_0$$

$$x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Luego, se aplican los pasos del método simplex (flexible) sobre este nuevo programa.
- Si el valor óptimo que se obtiene es 0, significa que el programa original tiene solución.
- En caso contrario, el programa original no tiene solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Inicialmente, se utilizar una variable nueva x_0 y se sustituye la función de optimización como sigue:

$$z = -x_0$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_0$$

$$x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Luego, se aplican los pasos del método simplex (flexible) sobre este nuevo programa.
- Si el valor óptimo que se obtiene es 0, significa que el programa original tiene solución.
- En caso contrario, el programa original no tiene solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Se debe incluir la variable x_0 entre las variables básicas.
- Por esta razon, se selecciona la variable x_4 para realizar el intercambio.
- Al despejar x_0 en la ecuación $x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$, se obtiene

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_0 por la expresión anterior.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Se debe incluir la variable x_0 entre las variables básicas.
- Por esta razon, se selecciona la variable x_4 para realizar el intercambio.
- Al despejar x_0 en la ecuación $x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$, se obtiene

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_0 por la expresión anterior.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Se debe incluir la variable x_0 entre las variables básicas.
- Por esta razon, se selecciona la variable x_4 para realizar el intercambio.
- Al despejar x_0 en la ecuación $x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$, se obtiene

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_0 por la expresión anterior.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Se debe incluir la variable x_0 entre las variables básicas.
- Por esta razon, se selecciona la variable x_4 para realizar el intercambio.
- Al despejar x_0 en la ecuación $x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$, se obtiene

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_0 por la expresión anterior.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = -4 - x_1 + 5x_2 - x_4$$

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

$$x_3 = 6 - x_1 - 4x_2 + x_4$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- En este punto, es posible mejorar el valor de z si se incrementa el valor de x_2 .
- Luego se debe seleccionar una variable para intercambiarla con x_2 .
- Así, se selecciona la variable x_0 para realizar el intercambio.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = -4 - x_1 + 5x_2 - x_4$$

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

$$x_3 = 6 - x_1 - 4x_2 + x_4$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- En este punto, es posible mejorar el valor de z si se incrementa el valor de x_2 .
- Luego se debe seleccionar una variable para intercambiarla con x_2 .
- Así, se selecciona la variable x_0 para realizar el intercambio.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = -4 - x_1 + 5x_2 - x_4$$

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

$$x_3 = 6 - x_1 - 4x_2 + x_4$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- En este punto, es posible mejorar el valor de z si se incrementa el valor de x_2 .
- Luego se debe seleccionar una variable para intercambiarla con x_2 .
- Así, se selecciona la variable x_0 para realizar el intercambio.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = -4 - x_1 + 5x_2 - x_4$$

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

$$x_3 = 6 - x_1 - 4x_2 + x_4$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- En este punto, es posible mejorar el valor de z si se incrementa el valor de x_2 .
- Luego se debe seleccionar una variable para intercambiarla con x_2 .
- Así, se selecciona la variable x_0 para realizar el intercambio.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Al despejar x_2 en la ecuación $x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$, se obtiene

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_2 por la expresión anterior.
- De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = -x_0$$

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

$$x_3 = 14/5 + 4x_0/5 - 9x_1/5 + x_4/5$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Al despejar x_2 en la ecuación $x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$, se obtiene

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_2 por la expresión anterior.
- De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = -x_0$$

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

$$x_3 = 14/5 + 4x_0/5 - 9x_1/5 + x_4/5$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Al despejar x_2 en la ecuación $x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$, se obtiene

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_2 por la expresión anterior.
- De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$z = -x_0$$

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

$$x_3 = 14/5 + 4x_0/5 - 9x_1/5 + x_4/5$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- El valor de la función objetivo en el programa anterior no puede ser mejorado.
- Este valor es igual a 0 y por lo tanto el programa original tiene solución.
- Ahora, el programa anterior puede ser modificado para retomar el programa original.
- La función objetivo en el programa original era $2x_1 - x_2$. Al sustituir x_2 con la expresión obtenida para el programa anterior se obtiene

$$2x_1 - (4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5) = -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- El valor de la función objetivo en el programa anterior no puede ser mejorado.
- Este valor es igual a 0 y por lo tanto el programa original tiene solución.
- Ahora, el programa anterior puede ser modificado para retomar el programa original.
- La función objetivo en el programa original era $2x_1 - x_2$. Al sustituir x_2 con la expresión obtenida para el programa anterior se obtiene

$$2x_1 - (4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5) = -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- El valor de la función objetivo en el programa anterior no puede ser mejorado.
- Este valor es igual a 0 y por lo tanto el programa original tiene solución.
- Ahora, el programa anterior puede ser modificado para retomar el programa original.
- La función objetivo en el programa original era $2x_1 - x_2$. Al sustituir x_2 con la expresión obtenida para el programa anterior se obtiene

$$2x_1 - (4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5) = -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- El valor de la función objetivo en el programa anterior no puede ser mejorado.
- Este valor es igual a 0 y por lo tanto el programa original tiene solución.
- Ahora, el programa anterior puede ser modificado para retomar el programa original.
- La función objetivo en el programa original era $2x_1 - x_2$. Al sustituir x_2 con la expresión obtenida para el programa anterior se obtiene

$$2x_1 - (4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5) = -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Luego, se remueven las ocurrencias de x_0 puesto que es una variable auxiliar cuyo valor es 0. Así, se obtiene el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} z &= -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5 \\ x_2 &= 4/5 + x_1/5 + x_4/5 \\ x_3 &= 14/5 - 9x_1/5 + x_4/5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En este programa la solución básica inicial es factible y por lo tanto se puede aplicar el método simplex.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Luego, se remueven las ocurrencias de x_0 puesto que es una variable auxiliar cuyo valor es 0. Así, se obtiene el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} z &= -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5 \\ x_2 &= 4/5 + x_1/5 + x_4/5 \\ x_3 &= 14/5 - 9x_1/5 + x_4/5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En este programa la solución básica inicial es factible y por lo tanto se puede aplicar el método simplex.