
Universidad del Valle

Departamento de Matemáticas

Cálculo I



Taller N°14: Repaso

Profesoras: Martha Pinzón y Daniela Vásquez.

24 septiembre 2021

1. Calcule los siguientes límites, si existen.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{2 - \sqrt{x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)^2}{x^2 \cos x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc 2x \cot 2x$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{4+x}{\sqrt{(4+x)^2}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^7 - 2x + 1}{7x^7 + 4x^2 - 2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 - x}{x^2 + 9}}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x}$$

(use Teorema del Sandwich).

2. Determine si las funciones dadas son continuas en $x = 0$

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x - \tan 3x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Halle los valores de la constante a para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & \text{si } x > 0 \\ a^2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$.

4. Determine los valores de las constantes a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3 \\ -2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ sea continua en todos los reales.

5. Encuentre los valores de las constantes a y b para los cuales la función $f(x) = \begin{cases} 2ax^3 - 3bx^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{a+2b}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ es derivable en $x = 2$.

6. Use la definición de derivada para calcular $f'(x)$ si

a) $f(x) = 4x^2 - x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

7. Determine $\frac{dy}{dx}$ si:

a) $y = [1 + (1+x)^3]^4$

h) $y = \frac{u+1}{u-1}$, donde $u = \sqrt{x+1}$

b) $y = (1 - 3x^4)^5(4-x)^{1/3}$

i) $y = \frac{1 - e^{2x}}{e^x}$

c) $y = x(1 - \frac{1}{x^2})^{-3/2}$

j) $y = \ln(x\sqrt{x^2+1})$

d) $y = x\sqrt{4-x^2}$

k) $y = x \ln y$

e) $y = \cos^2(\sqrt{x})$

f) $y = \sin(2x) \tan(3x)$

l) $y = \arccos(\frac{1}{\sqrt{x}})$

g) $x^3 = \sin^2 y$

m) $y = e^{\arctan x^2}$

8. Sea g una función derivable. Si $f(x) = g(\sin(4x))$, $g(0) = 3$, $g'(0) = 2$, calcule $f'(\pi)$.
9. Sean f y g funciones diferenciables tales que $f(t) = t[5 - g(t)]^{1/2}$, $g(3) = 1$ y $g'(3) = \frac{1}{3}$. Calcule $f'(3)$.
10. Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, 5)$ y son tangentes a la parábola $y = 4x - x^2$.
11. Determine todos los puntos sobre la gráfica de la curva $y = \sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}$ donde la recta tangente es horizontal o vertical.
12. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ en el punto $(1, -1)$.
13. Determine los puntos del círculo $x^2 + y^2 = 1$ donde la pendiente de la recta tangente es 3.
14. Una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba en el instante $t = 0$ (segundos), con una velocidad inicial de 96 pies/seg y altura inicial de 112 pies , tiene función posición $y(t) = -16t^2 + 96t + 112$.
- a) ¿Cuál es la altura máxima de la pelota?
- b) ¿En que instante y con que velocidad impacta la bola en el suelo?
15. Un bloque cúbico de hielo se funde de modo que su arista decrece 2 pulgadas cada hora. ¿Con qué razón decrece su volumen cuando cada arista mide 10 pulgadas?
16. Se descarga grava desde un transportador de banda, a razón de $30 \text{ pies}^3/\text{min}$, si su grosor es tal que forma una pila a manera de un cono cuyo diámetro en la base y su altura siempre son iguales. ¿Con qué rapidez aumenta la altura de la pila cuando esta tiene 10 pies de alto?
17. Un avión que vuela horizontalmente a una altura de 3 millas y a una velocidad constante de 8 mi/min , pasa directamente sobre un observador en el piso. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia del observador al avión 30 segundos después?
18. La base de un rectángulo aumenta a razón de 4 cm/seg mientras que su altura decrece a razón de 3 cm/seg . ¿Con qué razón cambia su área cuando la base mide 20 cm y la altura 12 cm?

19. Determine los valores máximo y mínimo alcanzado por las siguientes funciones en el intervalo indicado

a) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$; $[1, 3]$

b) $f(x) = |2x - 3|$; $[1, 2]$

c) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$; $[-1, 1]$

20. Muestre que la ecuación $x^5 + 7x - 5 = 0$ tiene solución única en los números reales.
21. Dos postes, uno de 12 pies de altura y el otro de 28 pies, están a 30 pies de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. Dónde debe colocarse la estaca para que se use la menor cantidad de cable. ¿Cuál es la longitud mínima de cable?
22. Se desea construir un campo de deportes en forma de rectángulo terminado por un semicírculo en cada extremo. El perímetro del mismo está constituido por una pista de 440 metros. Calcule las dimensiones del rectángulo para que la superficie del campo sea la mayor posible.
23. Se desea construir una caja rectangular con tapa, de volumen 100 pies³ y largo de su base el cuádruple de su ancho. Halle el área superficial mínima de la caja.
24. Se desea construir un silo en forma de cilindro circular recto, con una semiesfera en su parte superior. Halle las dimensiones más económicas para un volumen dado V , si el costo del material por metro cuadrado es el mismo para el piso, las paredes y la parte semiesférica.
25. Trace la gráfica de las siguientes funciones, indicando: Dominio, rango, cortes con los ejes, máximos y mínimos locales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo, puntos de inflexión y asíntotas horizontales y verticales, si existen.

a) $f(x) = 3x^5 - 160x^3$ b) $f(x) = \frac{2 + x - x^2}{(x - 1)^2}$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

26. Dada la función $f(x) = x(4 - x)^{1/3}$

a) Verifique que $f'(x) = \frac{4(3 - x)}{3(4 - x)^{2/3}}$ y $f''(x) = \frac{4(x - 6)}{9(4 - x)^{5/3}}$.

- b) Trace la gráfica de f indicando: Dominio, rango, cortes con los ejes, máximos y mínimos locales, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo, puntos de inflexión y asíntotas horizontales y verticales, si existen.