武汉大学试卷纸

专业 计科 年级 2018 学号 2018302100026 姓名 龙晓怡

科目 组合数学 成绩	总分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1.(1) 红球先排，蓝球插空：$7!\,C(8,7)\cdot 7! = 7!\cdot 8! = 203212800$

红球先圆周排列，蓝球插空：$6!\,C(7,7)\cdot 7! = 6!\cdot 7! = 3628800$

(2). $x^2y^2z^2w^2$：$\dfrac{8!}{2!2!2!2!}\cdot(-1)^2\cdot(-2)^2 = 10080$

(3). 设甲得分为 $\underset{9}{n}$，乙得分为 $\underset{6}{m}$，甲得分不小于乙 则 $m \le n$

所求可能的比分记录为 $(0,0)$ 到 $(m, n+1)$ 的路径问题解

$C(m+n, m) - C(m+n, m-1)$

$= C(15,6) - C(15,5)$

$= 5005 - 3003 = 2002$

2.(1) $(x+x^2+x^3+\cdots+x^8)^3$ $\quad(1,8)\ (2,7)\ (3,6)\ (4,5)$

求 x^9 的系数 $= 4\times\dfrac{3!}{1!1!}$

$= 24$

(2) $G_e(x) = \left(1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\right)$

$= \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot(e^x-1-x)$

$\cancel{= \dfrac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})\cdot(e^x-1-x)}$

$= \dfrac{1}{4}[e^{3x}-e^{2x}-e^{-x}+e^{-2x}]$

$= \dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}[3^n-2^n-(-1)^n+(-2)^n]\dfrac{x^n}{n!}$

$\therefore a_n = \dfrac{1}{4}[3^n-2^n-(-1)^n+(-2)^n]$

1

3. 特征方程 $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$x_1=x_2=3$

3是特征方程的重根

$a_n=(A+Bn)3^n$

特解的形式为 $n(C+Dn)3^n=(Cn+Dn^2)3^n$

$\therefore (Cn+Dn^2)\cdot 3^n-6(C(n-1)+D(n-1)^2)\cdot 3^{n-1}+9(C(n-2)+D(n-2)^2)\cdot 3^n$
$=(n+1)3^n$

比较系数得 $C=0$

$\therefore D=\frac{n+1}{2}$

$\therefore a_n=(A+Bn)2^n+\frac{(n+1)}{2}\cdot n^2\cdot 3^n$

当 $a_0=1$ 时 $\therefore$ $A=1$

当 $a_1=6$ 时 $(A+B)\cdot 2+3=6$ $\Rightarrow B=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=(1+\frac{n}{2})\cdot 2^n+\frac{(1+n)}{2}\cdot n^2\cdot 3^n$

4. 设 $y_i=x_i-1$ $(1\le i\le 4)$

$\begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4=18-4=14 \\ 0\le y_i\le 7 \end{cases}$ $(1\le i\le 4)$

当无上界时，整数解组的个数为 $\binom{14+4-1}{14}=\binom{17}{3}$

设 A_i 为所有整数解中满足 $y_i\ge 8$ 的解的集合

$14-8=6$

$|A_i|=\binom{6+4-1}{6}=\binom{9}{3}$

$|A_1\cap A_2|=0$ …

$\therefore |\bar{A_1}\cap\bar{A_2}\cap\bar{A_3}\cap\bar{A_4}|=\binom{17}{3}-4\cdot\binom{9}{3}$

$=680-336$

$=344.$

5(1) 整数被3除有三种情况

余数为0（整除），余数为1，余数为2.

从5个数中取3个数 ~~两~~ 必存在3个数之和是3的倍数（也能被3整除）

。 3个余数

(2) 证明：令 $b_1, b_2, \dots b_{49}$ 分别为这7周里每天上网的时长，再做部分和

$a_1=b_1,\ a_2=b_1+b_2, \dots a_{49}=b_1+b_2+\dots b_{49}.$

$\because b_i\geq 1$ 且 $b_i\leq\frac{11}{7}$，且 $a_{49}\leq 77$

$\therefore 1\leq a_1<a_2<a_3\cdots<a_{49}\leq 77$ ①

考虑数列 $a_1,a_2,\dots a_{49},\ a_1+20, a_2+20, \dots a_{49}+20$ 都在 $1\sim(77+20)$ 之间
87

由鸽巢原理可知，其中必有2项相等。由①知，$a_1,a_2\dots a_{49}$

互不相等，从而 $a_1+20,\dots a_{49}+20$ 也互不相等，

$\therefore$ 一定存在 $1\leq i<j\leq 49$，使得 $a_j=a_i+20$

即 $20=a_j-a_i$

$=(b_1+b_2+\dots b_i+\dots b_j)-(b_1+b_2+\dots b_i)$

$=b_{i+1}+b_{i+2}+\dots+b_j$

$\therefore$ 从第 $i+1$ 天到第 j 天的连续 $j-i$ 天中，该同学正好上了20个小时网

6. (1) 把 $x=3$ 代入循环指标

方案数 $=\frac{1}{24}(3^8+6\cdot 3^2+9\times 3^4+8\times 3^2\cdot 3^2)$

$=\frac{1}{24}(6561+54+729+648)$

$=333$ (种)

(2). $P_G=\frac{1}{24}[(r+y+b)^8+6(r^4+y^4+b^4)^2+9(r^2+y^2+b^2)^4+8(r+y+b)^2\cdot(r^3+y^3+b^3)^2$

设红色为 r, 黄色为 y, 蓝色为 b

则 $r^2y^2b^4$ 的方案数

$=\frac{1}{24}[\frac{8!}{2!2!4!}+9\cdot\frac{4!}{2!}+8\cdot\frac{2!}{2!2!1\cdot1}\cdot\frac{2!}{1!})$

$=\frac{1}{24}[420+108+8]$

$=23$ 种

7. (1) 证明

满射：即B中任意一个元素在A中都有相应元素与之对应

满射个数 $=m^n-C_m^1(m-1)^n+C_n^2(m-2)^n-\ (-1)^{m-1}C_n^{m-1}$

$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$

由二项式定理得

(2) $(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$

求导: $n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}\quad(n\geq 2)$

令 $x=-1$

左边 $=0$

右边 $=\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}$

即证 $\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$