

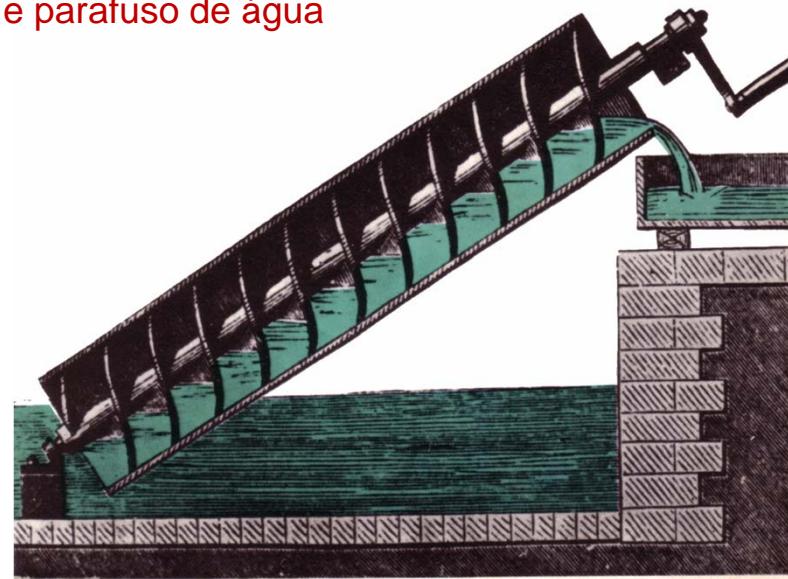
Dinâmica de Fluidos Computacional

- Computational Fluid Dynamics
- CFD

J. Carlos Teixeira
Nelson Rodrigues
2016

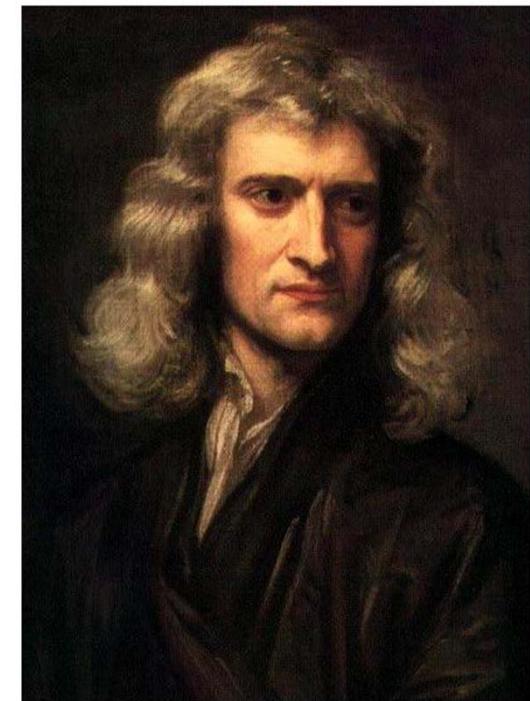
Perspectiva histórica

- * Desde cedo o homem tem procurado compreender os fenómenos ligados aos fluídos
- # Arquimedes entre 287 e 212 AC realizou estudos que englobavam a área da hidrostática
- # Princípio de **Arquimedes** e parafuso de água



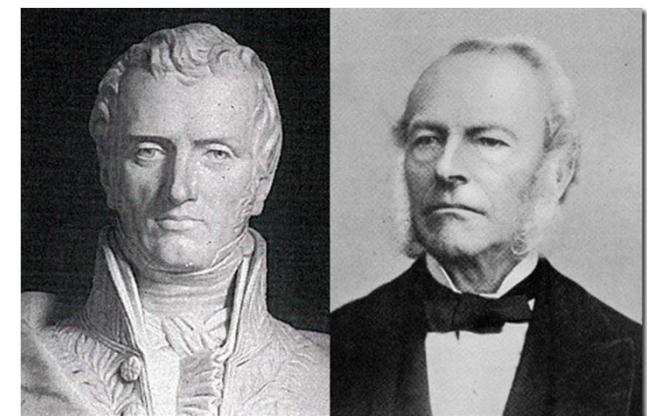
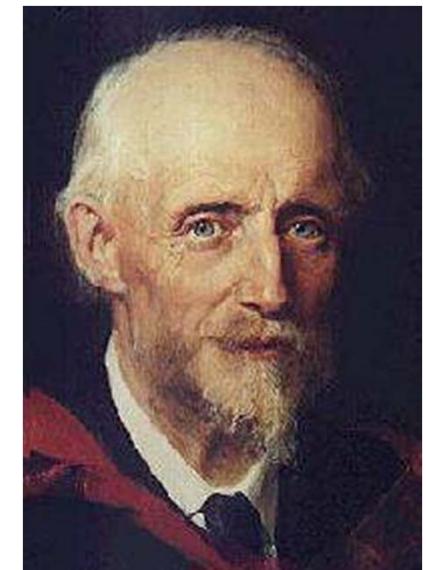
Isaac Newton - Inglaterra (1643-1727)

- * Uma das figuras mais importantes na ciência
- * As suas contribuições para a mecânica dos fluídos englobam:
 - # A 2^a lei de Newton $F=m \times a$
 - # Relação entre a velocidade das ondas numa superfície livre com o seu comprimento.



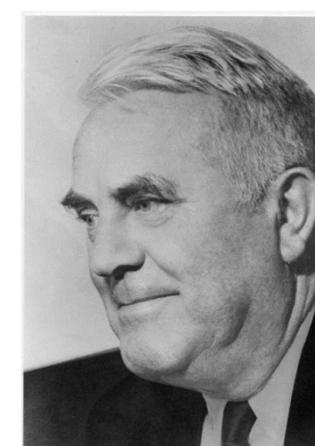
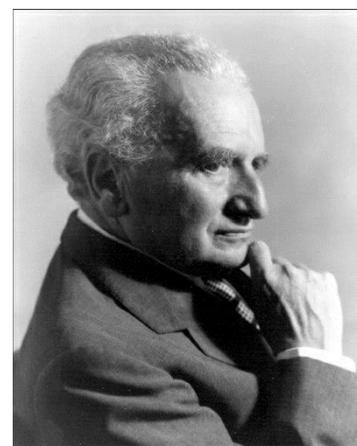
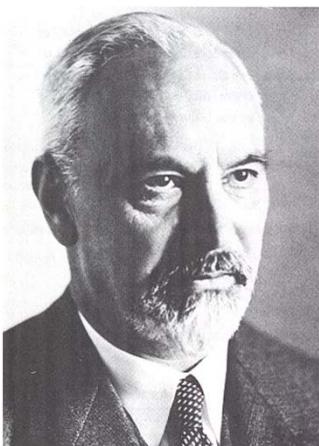
Século XVIII e XIX

- * Período de trabalho significativo para tentar descrever matematicamente o movimento dos fluidos.
 - # Daniel **Bernoulli** (1700-1782) derivou a equação de Bernoulli
 - # Leonhard **Euler** (1707- 1783) propôs as equações de Euler que descrevem a conservação do momento para um fluido inviscido.
- * Osborne **Reynolds** (1842-1912)
 - # Regimes de escoamento
- * Claude Louis Marie Henry **Navier** (1785-1836) e George Gabriel **Stokes** (1819-1903) introduziram o transporte viscoso nas equações de Euler, resultando nas equações de Navier Stokes que são a base dos modelos CFD modernos.



Século XX

- * Ludwig Prandtl (turbulência; comprimento de mistura)
- * von Kármán (turbulência)
- * Nikuradse (rugosidade)
- * Schlichting (camada limite; boundary layer) – (Stanford)



Anos 60 e 70

- * Durante os anos 60 a divisão teórica de **Los Alamos** contribuiu com vários métodos numéricos que ainda estão em uso actualmente, tais como:
 - # Particle-In-Cell (PIC).
 - # Marker-and-Cell (MAC)
 - # Vorticity-Streamfunction Methods
 - # Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE)
 - # $k-\epsilon$ turbulence model

- * Durante os anos 70 um grupo liderado por Dr. **Brian Spalding** no Imperial College de Londres desenvolveu:
 - # Parabolic flow codes (GENMIX).
 - # Vorticity-Streamfunction based codes
 - # The SIMPLE algorithm and the TEACH code
 - # The form of the $k-e$ equations that are used today
 - # Upwind differencing
 - # ‘Eddy break-up’ and ‘presumed pdf’ combustion models

Anos 80 e 90

- * Antigamente, o CFD foi elaborado utilizando códigos académicos e caseiros.
Sempre que alguém queria fazer um cálculo CFD tinha de escrever um programa.

- * Foi durante este período que a maioria dos códigos CFD comerciais hoje disponíveis originou:
 - # Fluent (UK and US)
 - # Flow3D/CFX (UK and Canada)
 - # Fidap (US)
 - # Polyflow (Belgium)
 - # Phoenix (UK)
 - # Star CD (UK)
 - # SCRYU (Japan)

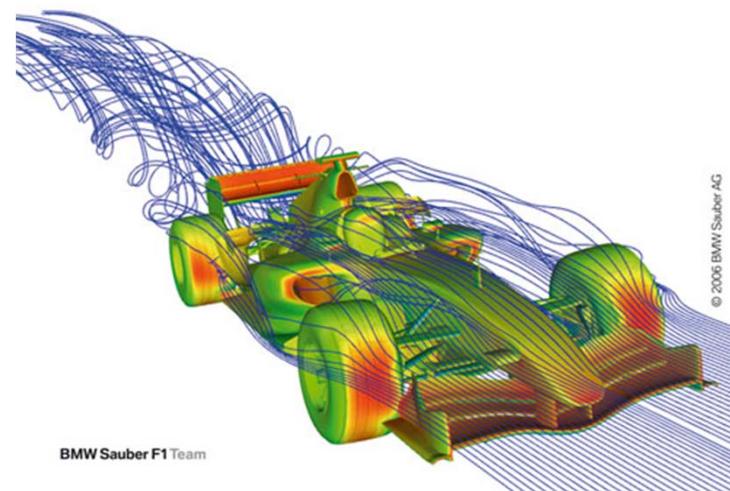
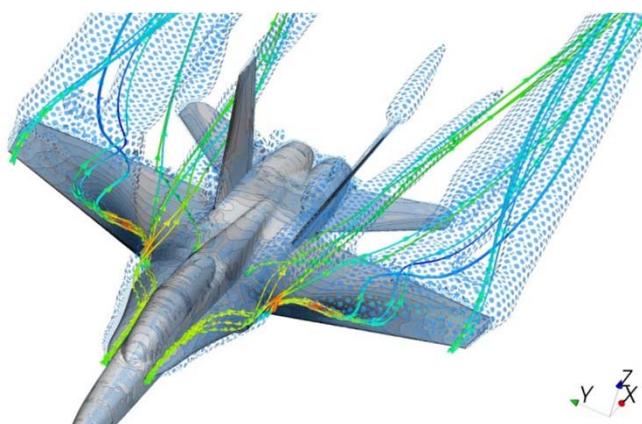
O que é?

- * **Computational Fluid Dynamics** ou **CFD** é a análise de sistemas que englobam escoamento de fluidos, transferência de calor e massa, e fenómenos associados tais como reacções químicas através de simulação baseada em computação.



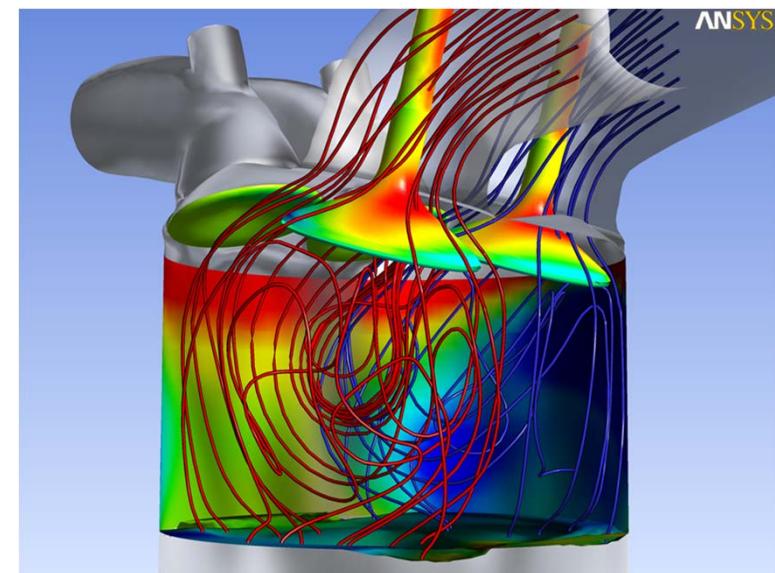
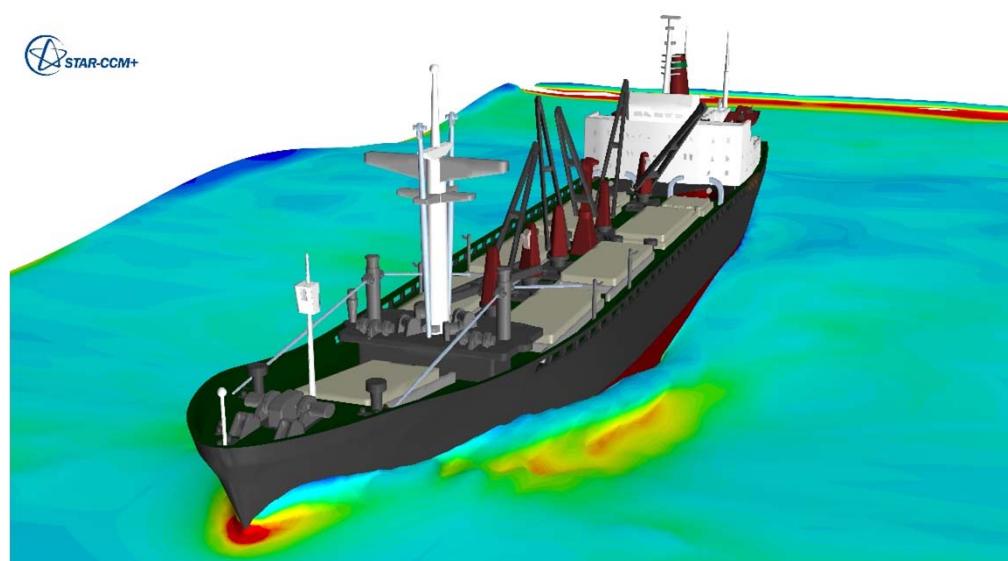
Importância

- * Aerodinâmica de aviões e veículos: impulsão e arrasto.



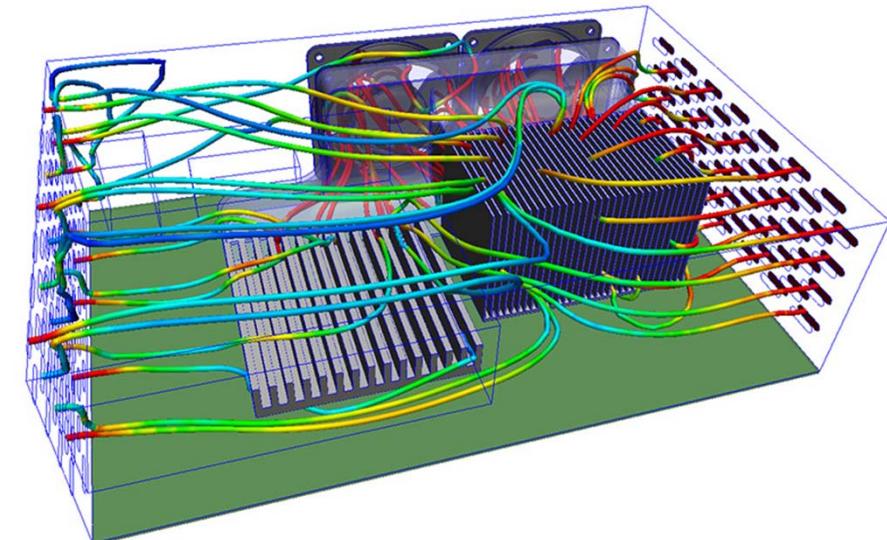
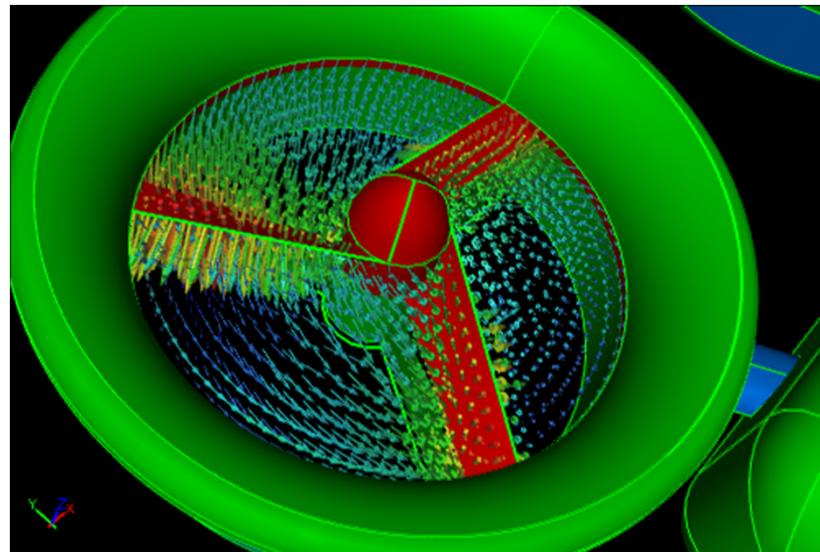
Importância

- * Hidrodinâmica de navios.
- * Centrais eléctricas: motores de combustão interna e turbinas a gás



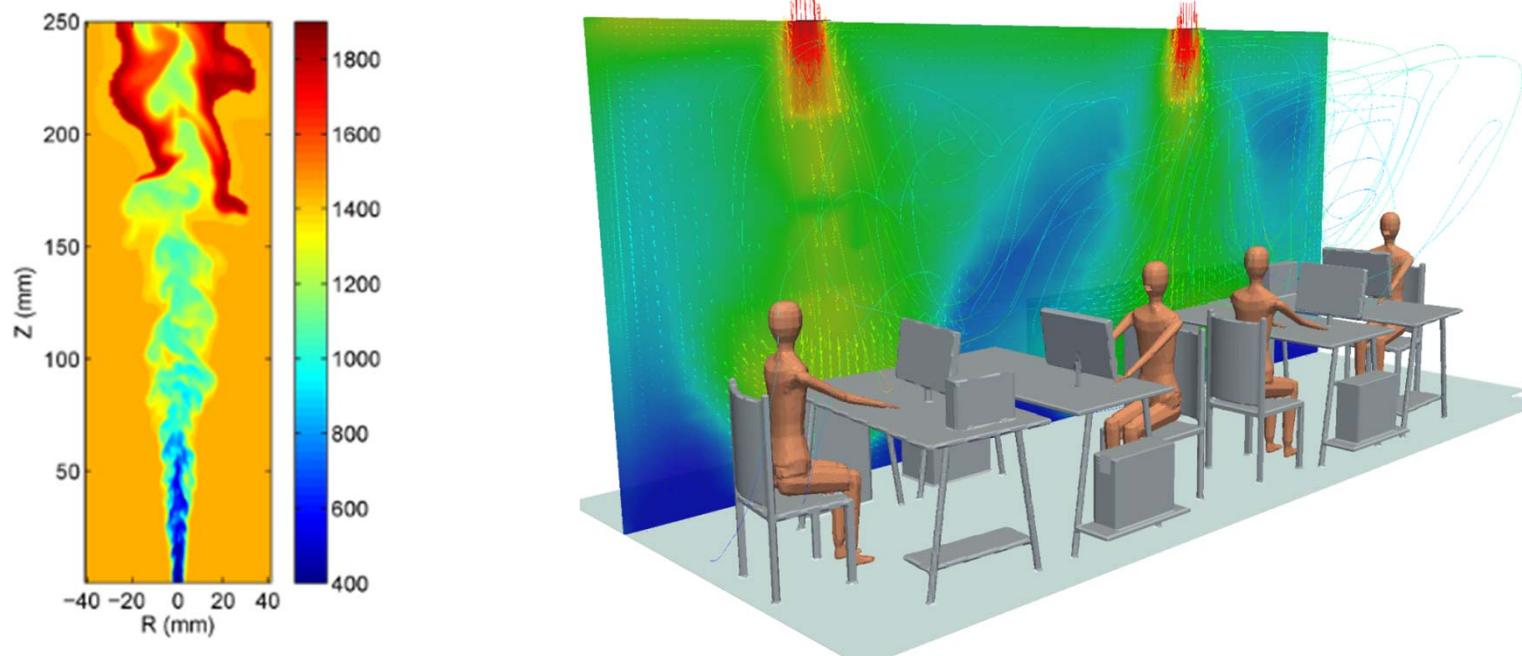
Importância

- * Turbo-maquinaria: escoamentos em rotores, difusores, etc.
- * Engenharia electrónica e de eléctrica: arrefecimento de equipamento incluindo microcircuitos.



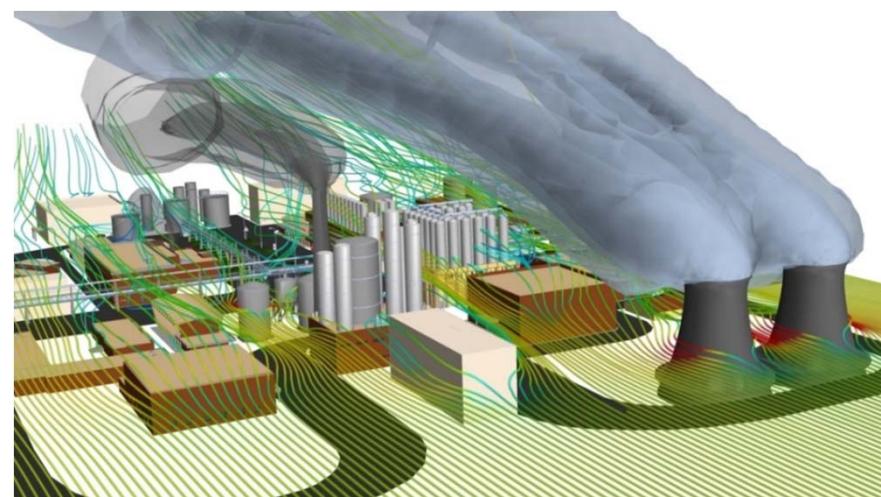
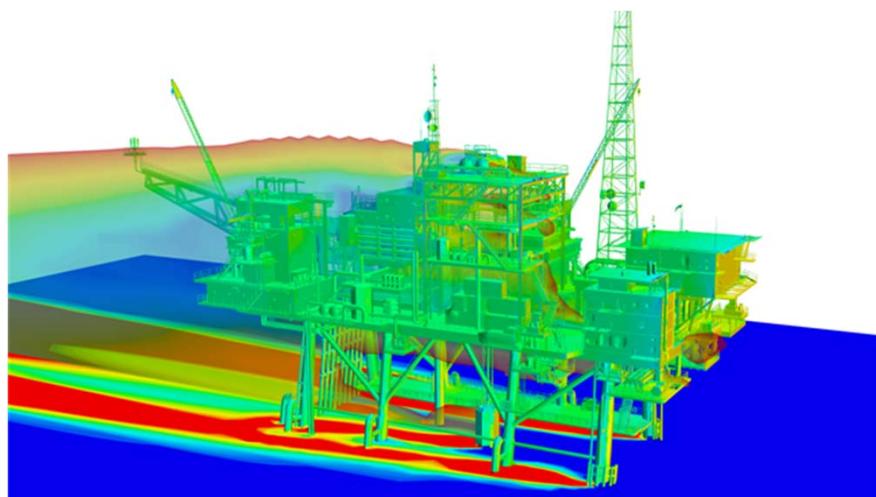
Importância

- * Engenharia de processos químicos: chamas, mistura e separação, moldes de polímeros
- * Ambientes externos e internos de edifícios: carga do vento, aquecimento e ventilação.



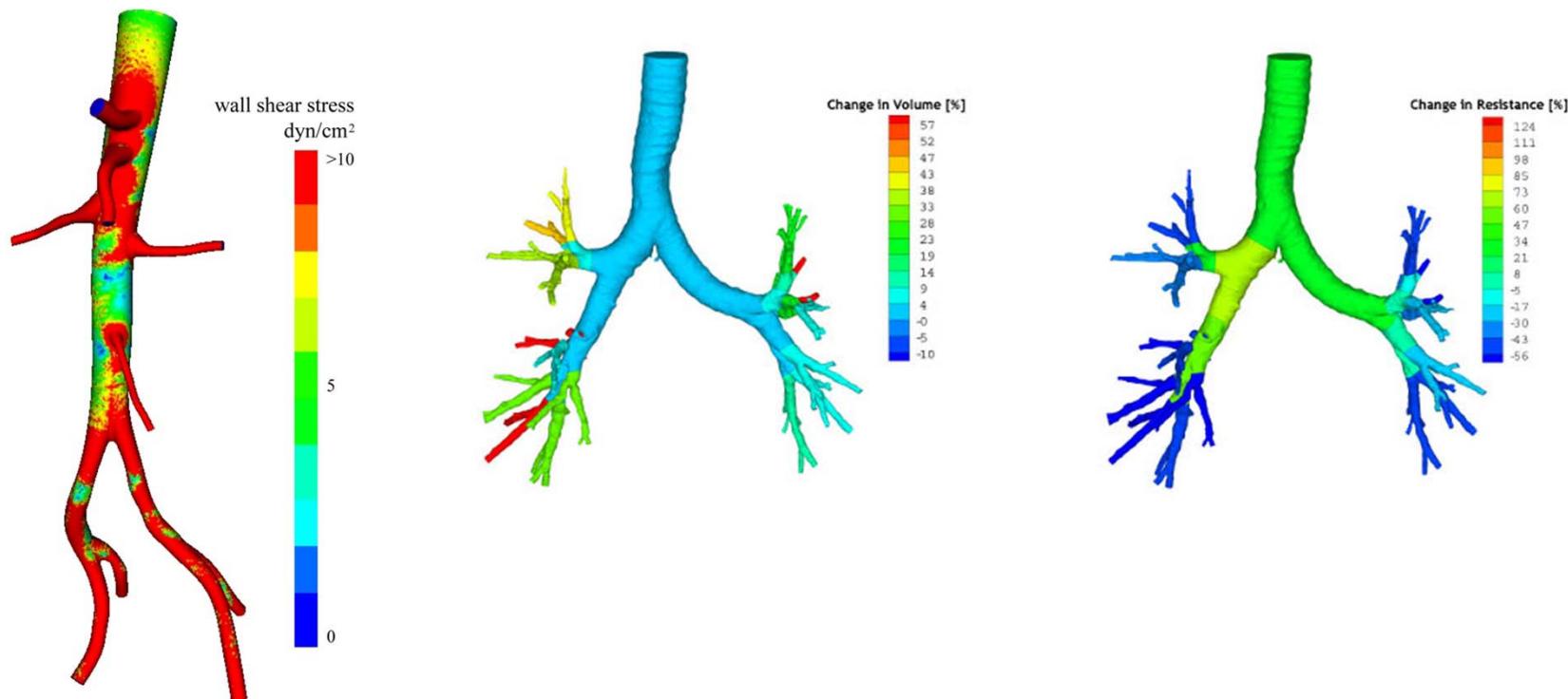
Importância

- * Engenharia marítima: cargas em estruturas marítimas
- * Engenharia ambiental: distribuição de poluentes e efluentes.



Importância

- * Engenharia biomédica: escoamento de sangue pelas artérias e veias; e do ar pelas vias respiratórias



Vantagens

- * Baixo custo na fase de projecto
- # Não é necessária a construção de modelos físicos
- # O custo em relação ao anterior provém sobretudo da obtenção de poder computacional e das licenças

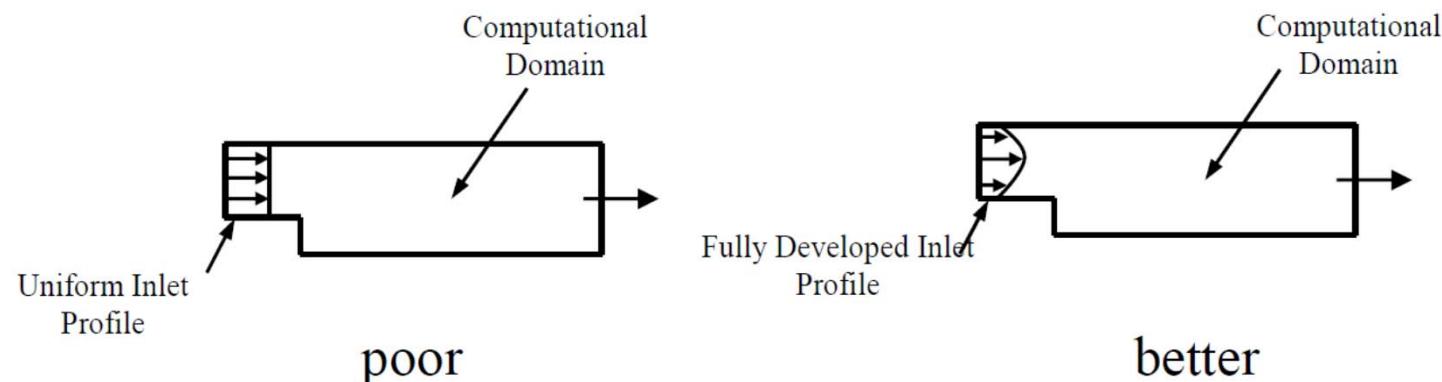
- * Baixo custo na fase de projecto
- # As simulações podem ser realizadas num espaço de tempo relativamente curto
- # Facilidade de mudar a situação de teste

- * Capacidade de estudar situações perigosas na vida real

- * Capacidade de simular condições ideais (adiabáticas, fluxos constantes...)

Limitações

- * Modelos computacionais
 - # O CFD só pode ser tão preciso quanto os modelos em que este é baseado
- * Erros numéricicos
 - # Erros por aproximação
 - # Erros por truncatura
- * Está dependente da precisão na definição do problema que muitas vezes é aproximado



Equações de conservação (eq Navier-Stokes)

Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Momentum x, y, z

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \nabla(\rho u_x \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla(\mu \operatorname{grad} u_x) + S_x$$

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \nabla(\rho u_y \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla(\mu \operatorname{grad} u_y) + S_y$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + \nabla(\rho u_z \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla(\mu \operatorname{grad} u_z) + S_z$$

Energia

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \nabla(\rho i \vec{u}) = -p \nabla(\vec{u}) + \nabla(k \operatorname{grad} T) + \Phi + S_i$$

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\nabla \vec{u})^2$$

a 2 dimensões:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u_x u_x - \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho u_x u_y - \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + S_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u_x u_y - \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho u_y u_y - \mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + S_y$$

Problemas **convectivos** ou **difusivos!** **Interpolação**

Equações de conservação (Simplificações)

Escoamento invíscido (**Euler**)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Momentum xx

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \nabla(\rho u_x \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S_x$$

Equações de conservação (Simplificações)

creeping flow (Stokes)

($\text{Re} \ll 1$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$$

Momentum xx

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla(\mu \operatorname{grad} u_x) + S_x = 0$$

ex: meios porosos, micro fluidos

Equações de conservação (Simplificações)

Aproximação de Boussinesq (cont)

se ρ não constante (g cte)

$$\rho g_i = \rho_0 g_i + (\rho - \rho_0) g_i$$

Tratar a parte variável *apenas* no termo de fonte (massa)

$$(\rho - \rho_0) g_i = -\rho_0 g_i \beta (T - T_0)$$

Discretização das Equações

Porquê

Linearizar

Equações de conservação

Formulação diferencial

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\phi\vec{u}) = \nabla(\Gamma \operatorname{grad} \phi) + S_\phi$$

Formulação integral

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \nabla(\rho\phi\vec{u}) dV = \int_{CV} \nabla(\Gamma \operatorname{grad} \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Teorema de Gauss

$$\int_{CV} \nabla \mathbf{a} dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA$$

Equações de conservação

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho \phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \vec{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \operatorname{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

(significado)

Em estado estacionário:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \vec{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \operatorname{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

Volumes finitos; difusão

Formulação diferencial

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\phi\vec{u}) = \nabla(\Gamma \operatorname{grad} \phi) + S_\phi$$

Formulação integral

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \nabla(\rho\phi\vec{u}) dV = \int_{CV} \nabla(\Gamma \operatorname{grad} \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Aplicando o Teorema de Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho\phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\vec{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \operatorname{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

Volumes finitos; difusão

Só difusão:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \operatorname{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

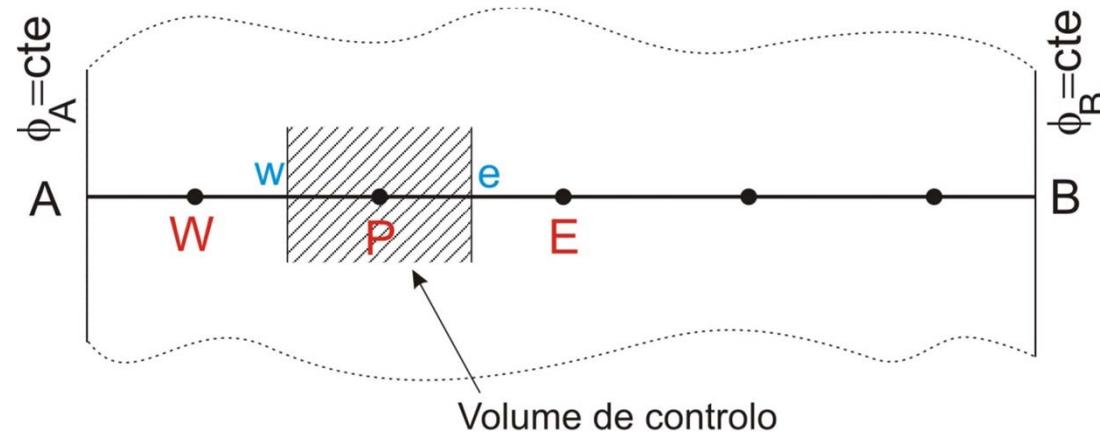
a 1D:

$$\int_A (\hat{i}) \cdot \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} \right) dA + \bar{S}_\phi dV = 0$$

$$\sum_k \int_{A_k} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dA + \bar{S}_\phi dV = 0$$

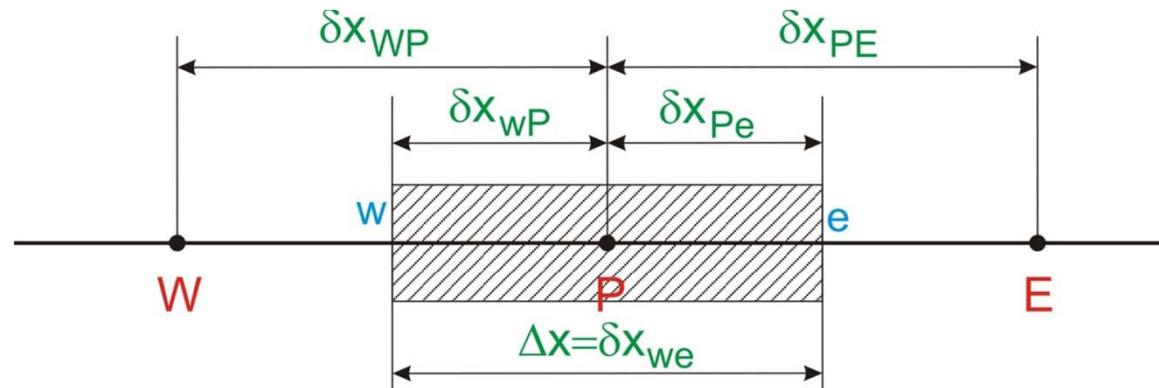
$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \bar{S}_\phi dV = 0$$

Volumes finitos; difusão



$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \bar{S}_\phi dV = 0$$

Volumes finitos; difusão



$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_e - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right)$$

$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_w}{\delta x_{WP}} \right)$$

Volumes finitos; difusão

$$\bar{S}_\phi dV = S_u + S_P \phi_P$$

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_P \phi_P) = 0$$

Agrupando:

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_P \right) \phi_P - \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W - \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E = S_u$$

Volumes finitos; difusão

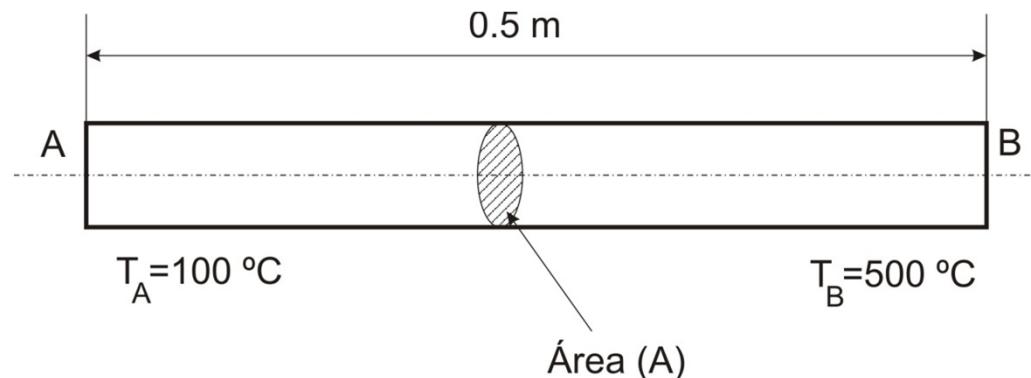
$$a_P \phi_P - a_W \phi_W - a_E \phi_E = S_u$$

onde:

$$\begin{array}{c|c|c} a_W & a_E & a_P \\ \hline \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w & \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e & a_W + a_P - S_P \end{array}$$

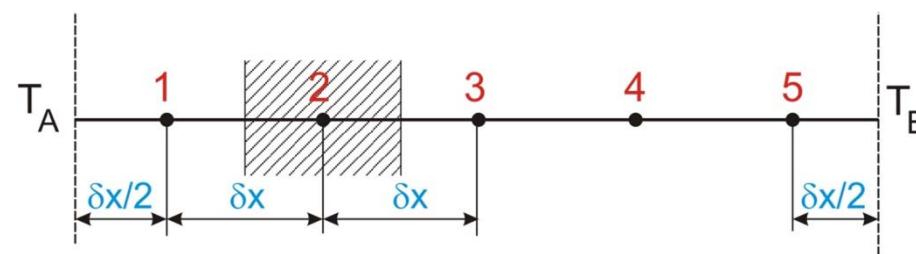
Volumes finitos; difusão

Exemplo:



$$A = 0.01 \text{ m}^2$$

$$k = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$$



Interpolação

$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right)$$

Linear

$$\phi_e = \lambda_e \phi_E + \phi_P (1 - \lambda_e)$$

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}$$

Expandindo em séries de Taylor

$$\phi_e = \lambda_e \phi_E + \phi_P (1 - \lambda_e) - \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \dots$$

Interpolação

Up-wind

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P, & \text{se } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \phi_E, & \text{se } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases}$$

Expandindo em séries de Taylor

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \dots$$

Interpolação

QUICK (quadratic upwind interpolation)

$$\phi_e = \phi_U + g_1(\phi_D - \phi_U) + g_2(\phi_U - \phi_{UU})$$

$$g_1 = \frac{(x_e - x_U)(x_e - x_{UU})}{(x_D - x_U)(x_D - x_{UU})}$$

$$g_2 = \frac{(x_e - x_U)(x_D - x_e)}{(x_U - x_{UU})(x_D - x_{UU})}$$

Erro de 3^a ordem!!

Integração no tempo

$$\rho c_p \frac{\partial(T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \rho c_p \frac{\partial(T)}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} S dV dt$$

$$\int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial(T)}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$

Derivada temporal

$$\int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial(T)}{\partial t} dt \right] dV = \rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta V$$

Integração no tempo

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta V = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(k_e A \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} \right) - \left(k_w A \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}} \right) \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$

Onde calcular temperatura?

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [\theta T_P + (1-\theta) T_P^0] \Delta t$$

Integração no tempo

$$\rho c_p \left(\frac{T_p - T_p^0}{\Delta t} \right) \Delta x = \theta \left[\left(k_e \frac{T_E - T_p}{\delta x_{PE}} \right) - \left(k_w \frac{T_p - T_W}{\delta x_{WP}} \right) \right] + (1 - \theta) \left[\left(k_e \frac{T_E^0 - T_p^0}{\delta x_{PE}} \right) - \left(k_w \frac{T_p^0 - T_W^0}{\delta x_{WP}} \right) \right] + \bar{S} \Delta x$$

explicito

$$\theta = 0$$

$$\rho c_p \left(\frac{T_p - T_p^0}{\Delta t} \right) \Delta x = (1 - \theta) \left[\left(k_e \frac{T_E^0 - T_p^0}{\delta x_{PE}} \right) - \left(k_w \frac{T_p^0 - T_W^0}{\delta x_{WP}} \right) \right] + \bar{S} \Delta x$$

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{2k}{\Delta x}$$

Integração no tempo

Crank-Nicholson

$$\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Delta t < \rho c_p \frac{\Delta x^2}{k}$$

Implícito

$$\theta = 1$$

Convecção

Convecção-difusão (estacionário)

$$\nabla(\rho\phi\vec{u}) = \nabla(\Gamma \operatorname{grad} \phi) + S_\phi$$

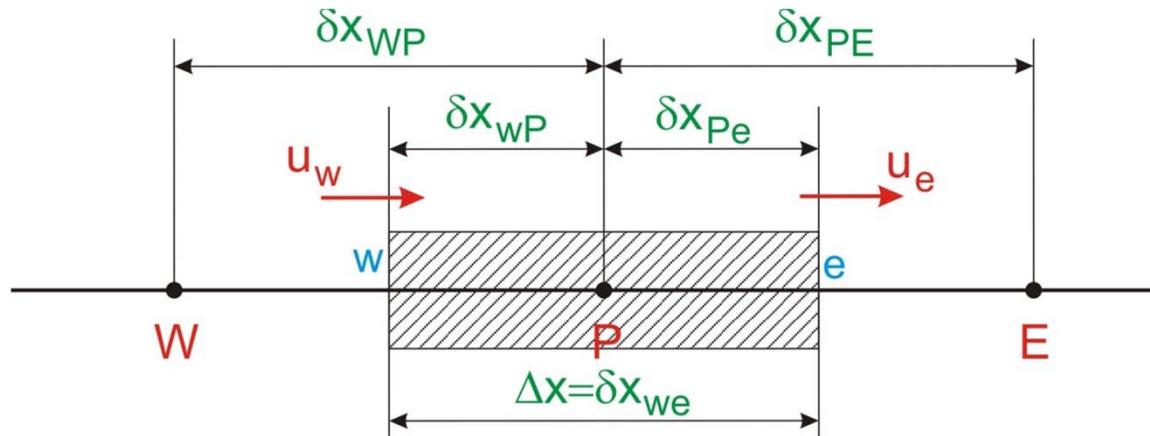
$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\vec{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \operatorname{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

Exemplo (1D; s/ termo fonte)

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0$$

Convecção



integrando

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0$$

Convecção

Fluxos nas faces

$$F = \rho u \quad \text{e} \quad D = \frac{\Gamma}{dx}$$

$$F_e = (\rho u)_e \quad F_w = (\rho u)_w$$

$$D_e = \left(\frac{\Gamma}{dx} \right)_e \quad D_w = \left(\frac{\Gamma}{dx} \right)_w$$

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_e - \phi_p) - D_w (\phi_p - \phi_w)$$

$$F_e - F_w = 0$$

Convecção

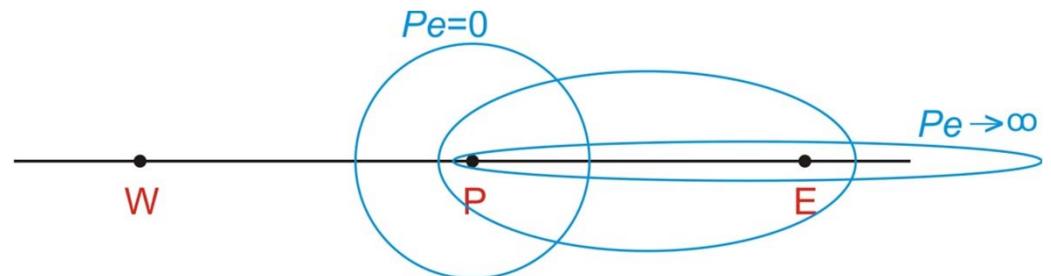
Interpolação nas faces (**diferenças centrais**)

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2}$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}$$

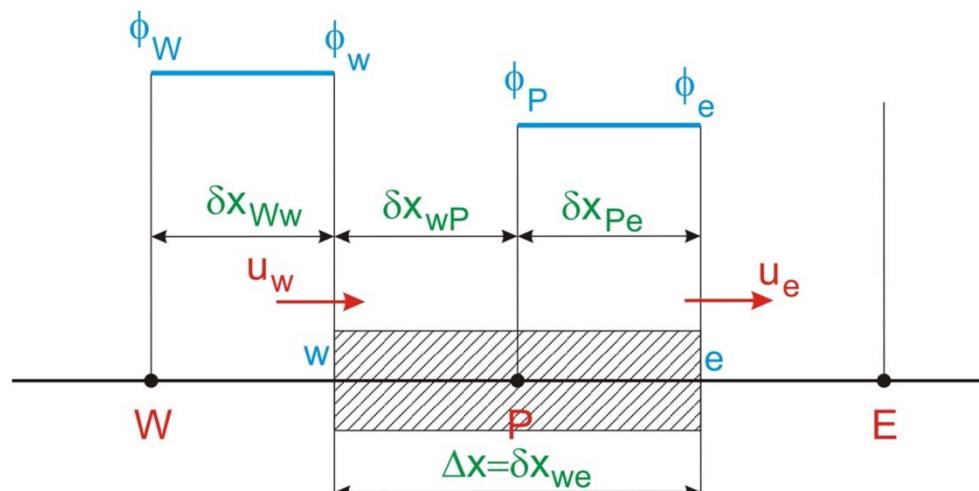
transporte

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma} \frac{dx}{dx}$$



Convecção

Interpolação nas faces (*upwind*)



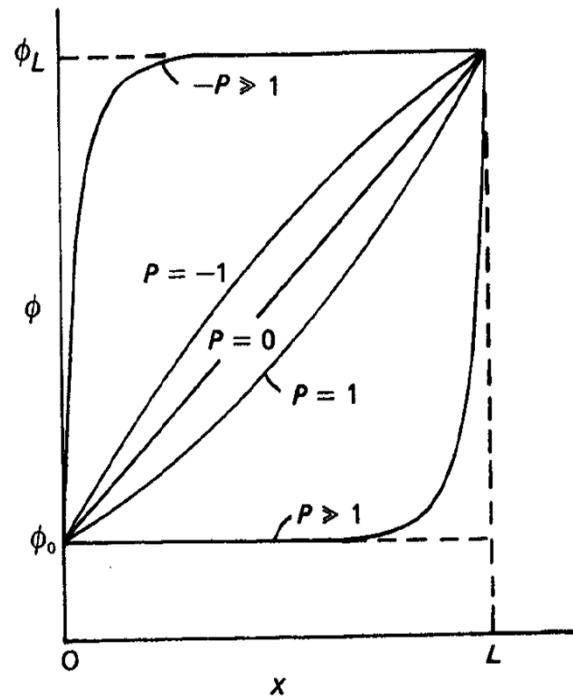
Fluxos faces

$$\phi_e = \phi_P; \quad \phi_w = \phi_W$$

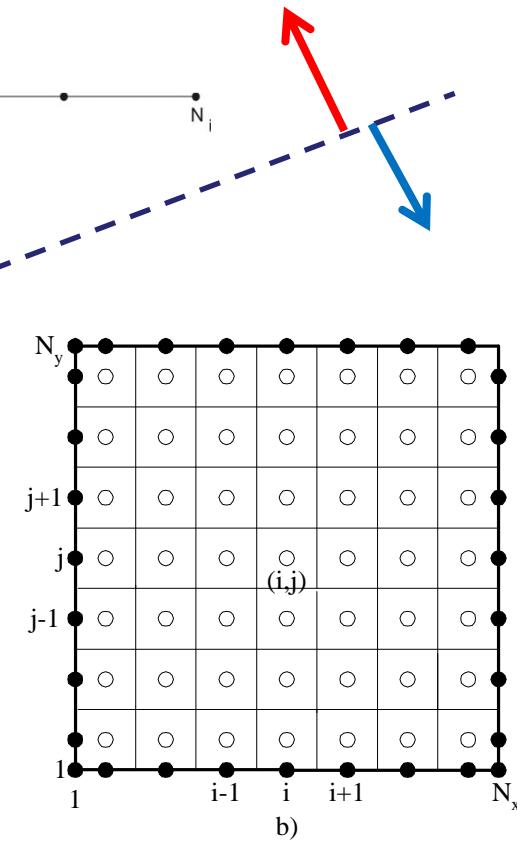
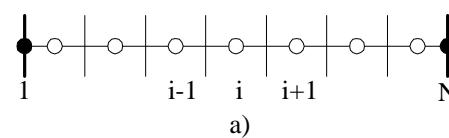
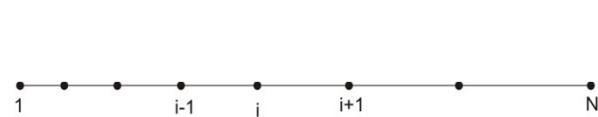
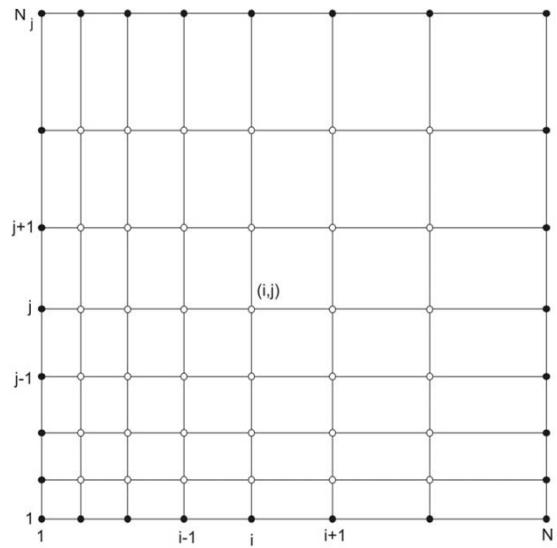
Interpolação

Solução exacta

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{\frac{\text{Pe} \cdot x}{L}} - 1}{e^{\text{Pe}} - 1}$$

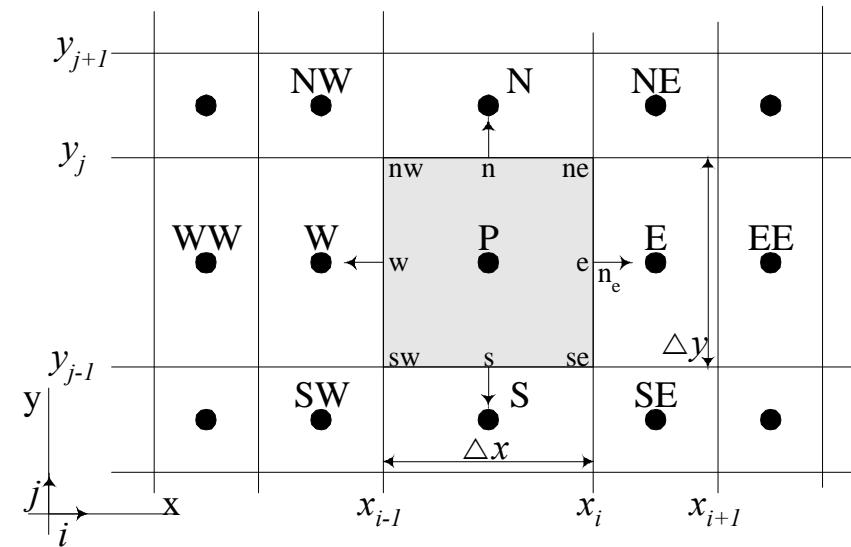


Malhas (*vertex centered* vs *cell centered*)



Malhas (estrutura)

Staggered/Colocated grid



Solução (forma)

$$\begin{aligned}
 & (\rho u)_e \Delta y \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \Delta y \frac{\phi_P + \phi_W}{2} + (\rho v)_n \Delta x \frac{\phi_N + \phi_P}{2} \\
 & - (\rho v)_s \Delta x \frac{\phi_P + \phi_S}{2} = \Gamma_e \Delta y \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w \Delta y \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w} + \\
 & \Gamma_n \Delta x \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta x_n} - \Gamma_s \Delta x \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta x_s} + Q_p \Delta \Omega
 \end{aligned}$$



$$A_p \phi_p + A_w \phi_w + A_e \phi_e + A_n \phi_n + A_s \phi_s = Q_p \Delta \Omega$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} A_W & A_S A_P A_N & A_E & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right] * \begin{pmatrix} \phi_w \\ \phi_s \\ \phi_p \\ \phi_n \\ \phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_p \\ & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Solução (procedimento): SIMPLE

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (uu) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla u \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} S_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (uv) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla v \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} S_y$$

* A pressão, (incógnita!) faz parte do termo de fonte. →

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{P_e - P_w}{\Delta x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{P_n - P_s}{\Delta y} \end{cases}$$

$$a_P u_P^* + \sum_l a_l u_l^* = S_x + A_x \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$a_P v_P^* + \sum_l a_l v_l^* = S_y + A_y \frac{\partial p}{\partial y}$$

A solução destas equações permite ter uma estimativa do campo de velocidades!

Solução (procedimento): SIMPLE

- * A solução satisfaz a conservação da massa?

$$\rho A_e u_e - \rho A_w u_w + \rho A_n u_n - \rho A_s u_s = 0$$

Necessidade de correcções para o campo de velocidades e pressão!

$$u^{**} = u^* + u'$$

$$v^{**} = v^* + v'$$

$$p^{**} = p + p'$$

$$A_e(u_e^* + u_e') - A_w(u_w^* + u_w') + A_n(u_n^* + u_n') - A_s(u_s^* + u_s') = 0$$

$$A_e u_e' - A_w u_w' + A_n u_n' - A_s u_s' = A_w u_w^* - A_e u_e^* + A_s u_s^* - A_n u_n^*$$

$$u_P' \approx \frac{A_x}{a_P} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$u_e' = \frac{A_{xe}}{a_{Pe}} \frac{P_E' - P_P'}{\delta x_e}$$

$$b_P P_P' + b_E P_E' + b_W P_W' + b_N P_N' + b_S P_S' = c$$

$$v_P' \approx \frac{A_y}{a_P} \frac{\partial p'}{\partial y}$$

$$v_n' = \frac{A_{yn}}{a_{Pn}} \frac{P_N' - P_P'}{\delta y_n}$$

Solução (Algoritmo): SIMPLE

- 1 Iniciar campo de pressão (arbitrado), p^*
- 2 Resolver as equações de *Momentum* e determinar, u^*, v^*
- 3 Resolver equação de correcção de pressão, p'
- 4 Corrigir pressão $p^{**}=p^*+p'$
- 5 Corrigir velocidades, $u^{**}=u^*+u'$
- 6 Calcular outras variáveis de interesse
- 7 Com a nova pressão repetir os passos 2 e seguintes até convergir

Solução (procedimento): SIMPLE

- * **Actualização de variáveis.** (factor de relaxação)

$$u = u^* + \alpha_u u'$$

$$v = v^* + \alpha_v v'$$

$$p = p^* + \alpha_p p'$$

- * **Convergência da solução resíduos**

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - u_{gi})^2}{N}}$$

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - u_{gi})^2}{N}} \left(\frac{N}{\sum_{i=1}^N u_i} \right) = \frac{\sqrt{N \sum_{i=1}^N (u_i - u_{gi})^2}}{\sum_{i=1}^N u_i}$$

- * **Solução no tempo ou estacionária**

FRONTEIRA (condições de)

* **Paredes**

Dirichlet

$$\phi = \phi_b$$

Neumann

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi_b'$$

* **Entradas/saídas**

fixar valor

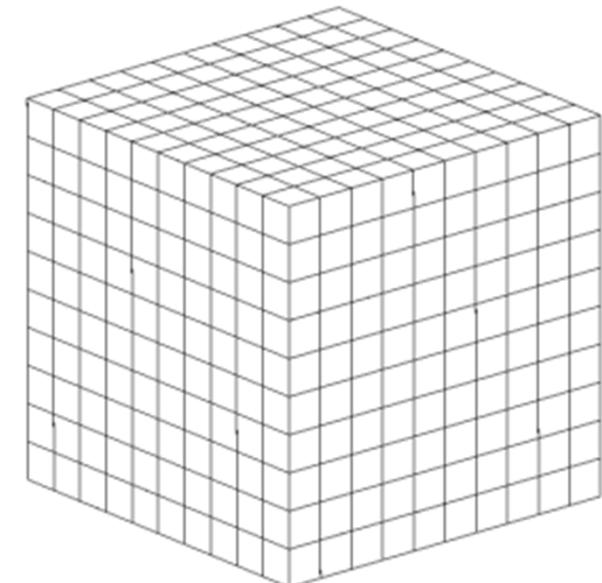
livre

* **Simetria**

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

MALHA

- * O CFD usa a subdivisão do domínio para efectuar a discretização em Volumes Finitos
- * Dá-se o nome de malha ao conjuntos de todas as células que constituem o domínio.
- * A resolução da malha está ligada à precisão do cálculo.
- * Esta deve ser tão pequena de forma a que, idealmente, seja possível dizer que não há variações de propriedades dentro de um volume



MALHA

- * **Estruturadas**

Fácil de referenciar

Difícil de aplicar a geometrias “reais”

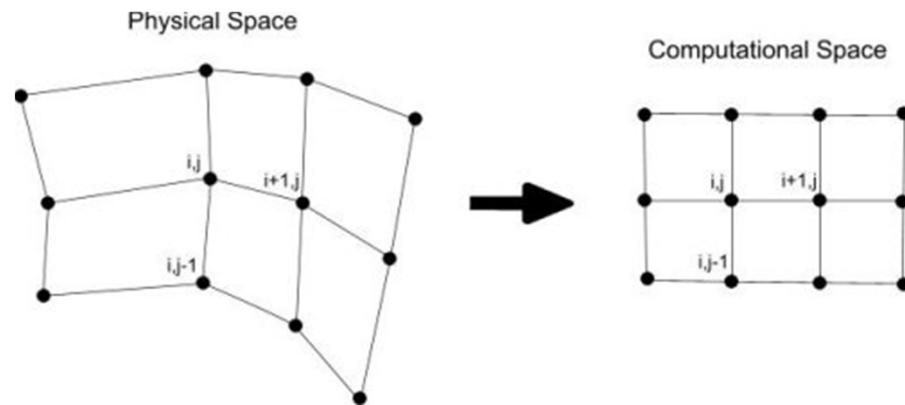
- * **Não estruturadas**

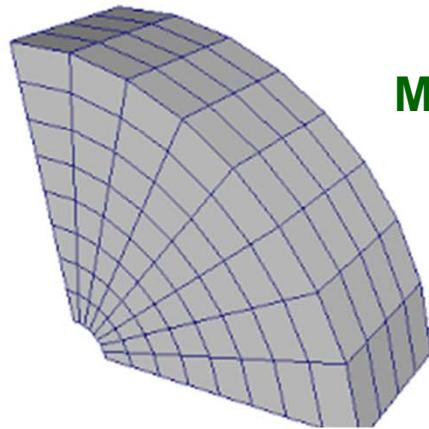
Muito flexíveis em função da geometria

Difícil de referenciar

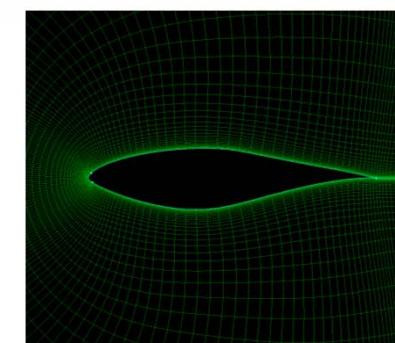
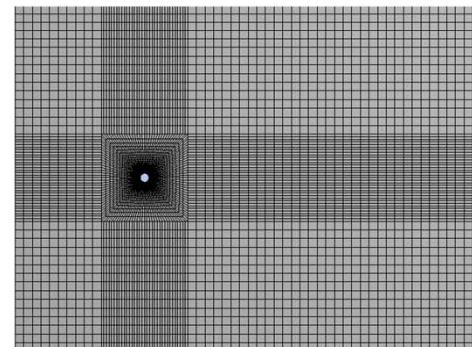
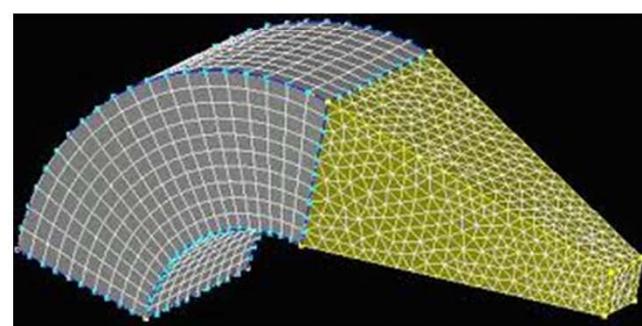
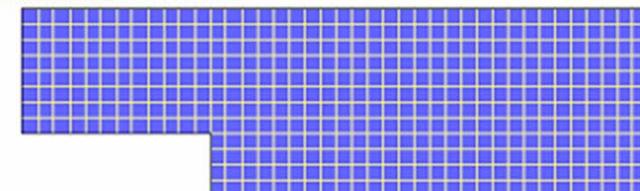
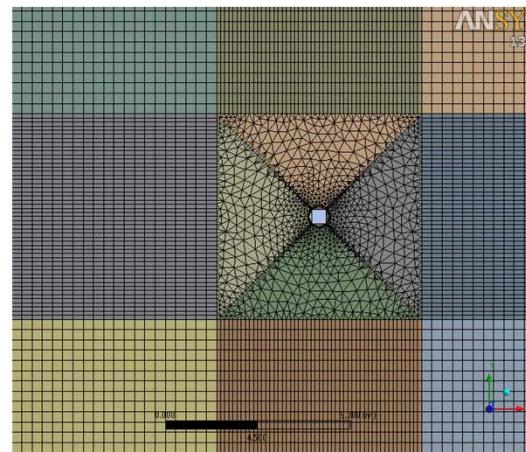
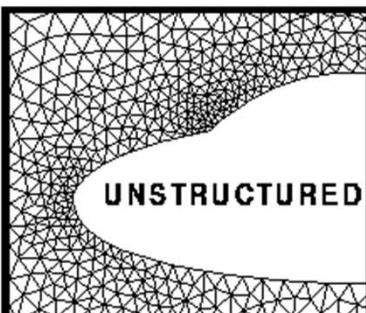
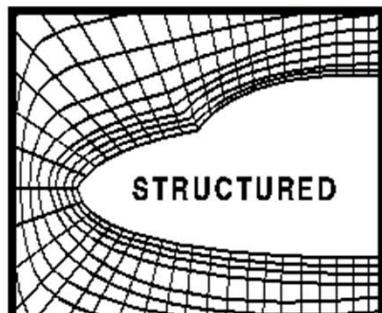
- * **Axi-simétricas**

- * **Compostas (por blocos)**





MALHA (exemplos)



MALHA

- * **Qualidade**

O que é?

Importância da malha

- * **Indicadores**

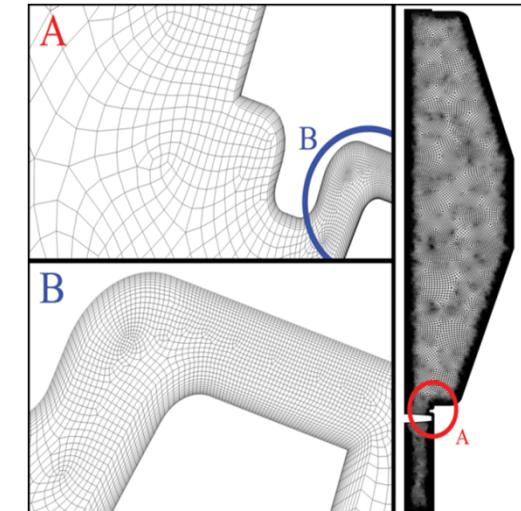
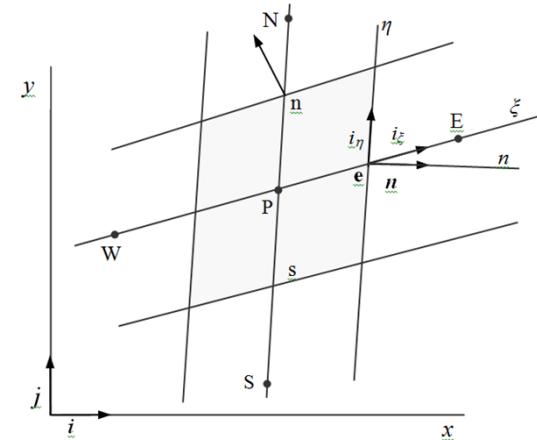
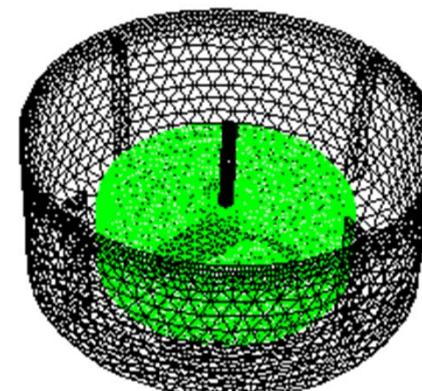
CGI Celik IB et al (2008), "Procedure for Estimation and Reporting of Uncertainty Due to Discretization in CFD Applications" Journal of Fluids Engineering, 130(7)

Ortogonalidade; *skewness* (índices)

- * **Refinamentos locais**

- * **Compostas (por blocos)**

- * ***Sliding meshes***



TURBULÊNCIA

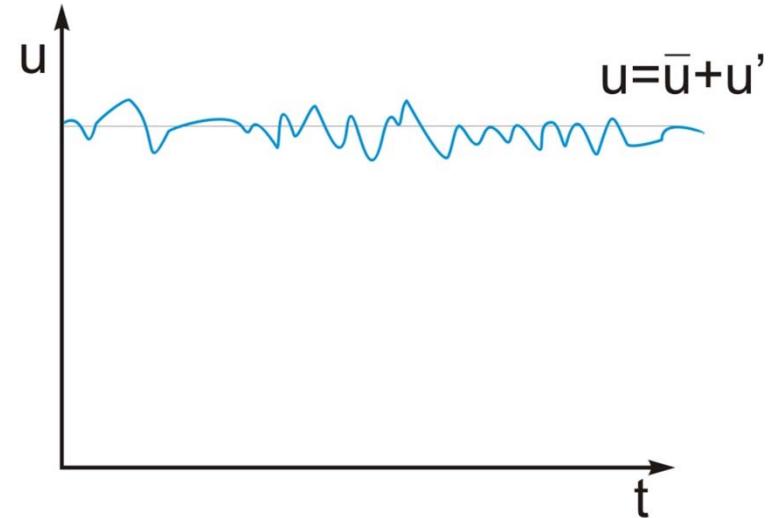
- * **Características**

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u'^2 dt$$



$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{u'w'} \right)$$

Termos adicionais! Modelos de Turbulência

TURBULÊNCIA

* **Conceitos**

Energia cinética turbulenta

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$$

Viscosidade turbulenta

$$\tau = \rho \nu_T \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\overline{u_i' u_j'} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

TURBULÊNCIA (zero equações)

* **Prandtl**

$$\nu_T = l^2 \left(\frac{du}{dy} \right); \quad l = ky$$

* **Smagorinsky**

$$\nu_T = l^2 \left(2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}} \right); \quad \overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

* **Baldwin-Lomaz**

$$\nu_T = l^2 \left(\overline{\omega_i} \overline{\omega_i} \right); \quad \overline{\omega_i} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

TURBULÊNCIA (uma equação)

- * Equação de transporte para k

k é uma escala de velocidade para os *eddies* de grande escala



- * Kolmogorov-Prandtl

$$\nu_T = C' \mu \sqrt{k} L$$

TURBULÊNCIA (duas equações)

- * Distinção entre *eddies* (conceito de dissipação de energia)

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$



- * Equações de transporte

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot (\nu + C_2 \nu_T) \nabla k - \tau_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \varepsilon$$

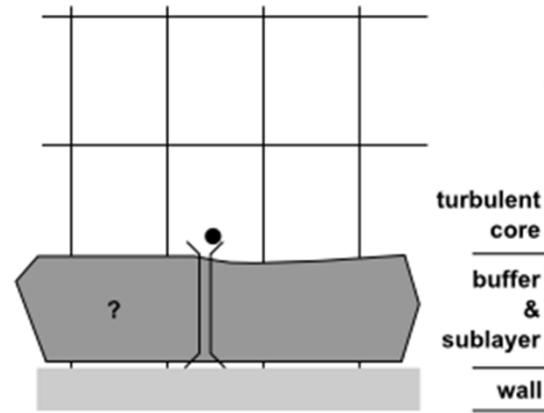
$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot (\nu + C_3 \nu_T) \nabla \varepsilon + C_4 \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - C_5 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

- * **k-ε; k-ω; lowRe k- ε.....**
- * **Outros**

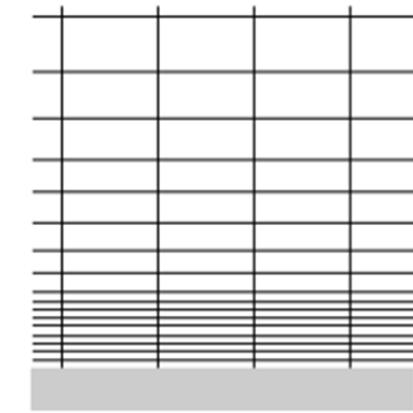
TURBULÊNCIA (parede)

* Wall function

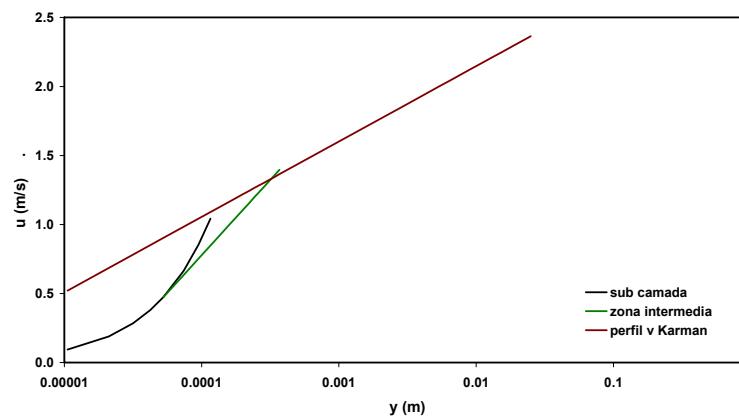
Wall Function Approach



Near-Wall Model Approach



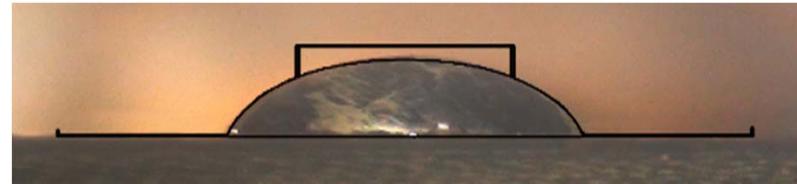
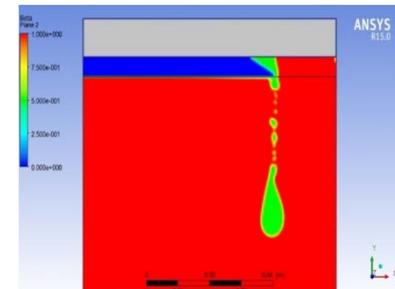
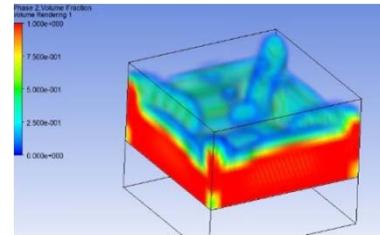
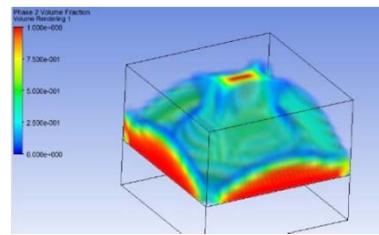
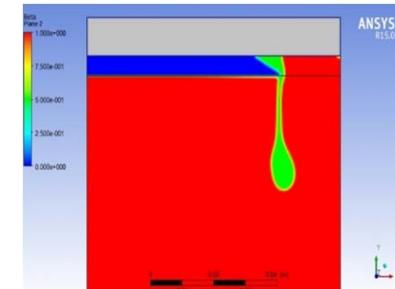
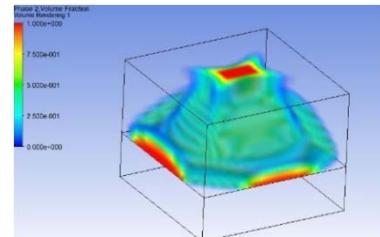
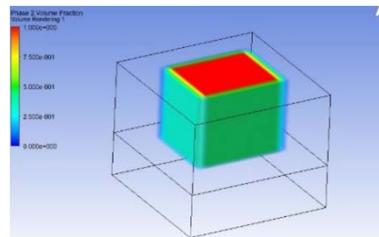
* Near wall treatment



2 FASES

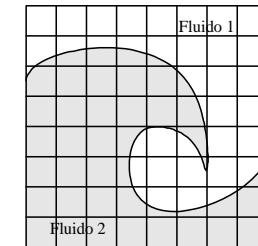
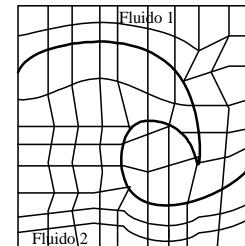
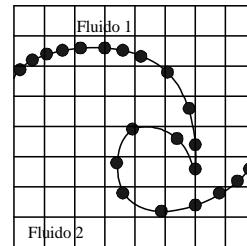
* Euleriano-Euleriano

duas fases densas; escoamentos com separação, estratificados



2 FASES

- * Euleriano-Euleriano
- Volume Of Fluid (VOF)

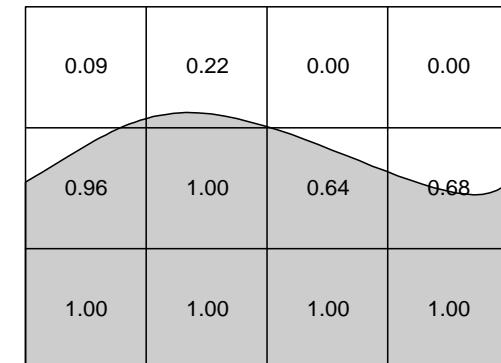


$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \cdot \nabla \alpha = 0$$

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2$$

$$\mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2$$

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{para um ponto } (x, t) \text{ na zona de fluido 1} \\ 0 & \text{para um ponto } (x, t) \text{ na zona de fluido 2} \\ 0 < \alpha_\delta < 1 & \text{para um ponto } (x, t) \text{ na zona de interface} \end{cases}$$



2 FASES

- * Euleriano-Lagrangeano

fase dispersa; sprays

- * eddy-particle interaction (Hewitt, 1980)

particle motion

$$\frac{du_D}{dt} = F_D(u - u_D) + g_x \frac{\rho_D - \rho}{\rho_D} + F_x$$

$$F_D = \frac{18\mu}{\rho_D d_D^2} \frac{C_D \text{Re}}{24}$$

$$C_D = a_1 + \frac{a_2}{\text{Re}} + \frac{a_3}{\text{Re}^2}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho d_D |u_D - u|}{\mu}$$

trajectória

$$\frac{du_D}{dt} = \alpha(u - u_D) \quad u_D(t + \Delta t) = u_D(t) + (u - u_D(t))(1 - e^{-\alpha(\Delta t)})$$

$$\frac{dx}{dt} = u_D$$

turbulência; tempo de cálculo

$$u' = \zeta \sqrt{u'^2}$$

$$\tau_e = 2T_L = 0.3 \frac{k}{\varepsilon}$$

VALIDAÇÃO

- * Soluções teóricas

- * Dados experimentais

Próprios

Laufer (1954) – pipe flow

Driven cavity

back step e forward step

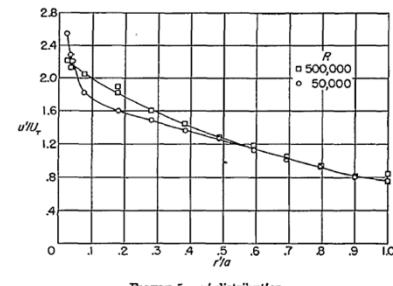


Figura 5.— u' distribution.

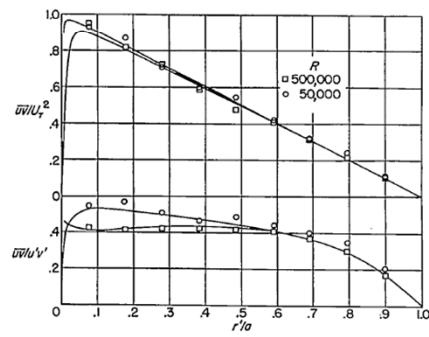
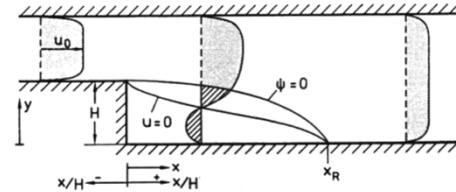


Figura 8.—Reynolds shearing stress and double-correlation-coefficient distributions. Curves calculated from measured dU/dr , u' , and v' .



u_0 : maximum velocity in profile before step
 x_R : reattachement
 H : step height

90° backward-facing step geometry; $\psi = 0$ dividing streamline; $u = 0$ zero velocity line.

