# DISTRIBUCIÓN DISCRETA Y CONTINUAS

Conceptos fundamentales

# Distribución binomial

- Experimento:
  - Se tiene las siguientes propiedades:

1. El experimento consiste en n intentos repetidos.
2. Los resultados de cada uno de los intentos pueden clasificarse como un éxito o como un fracaso.
3. La probabilidad de éxito, representada por p, permanece constante para todos los intentos.
4. Los intentos repetidos son independientes.

# Distribución binomial

- Se define la variable aleatoria X como el número de éxitos en n intentos.
- Nótese que la función de masa de probabilidad es:

$$P([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

para k=0,1,2,…,n y 0<p<1.

# Distribución Binomial

- Calcular E(X) y VAR(X). Se define las siguientes variables aleatoria $I_i$ que representa el resultado del j-ésimo intento, el cual asume los valores entre 0 y 1 con probabilidades de 1-p y p respectivamente.
- Entonces, $X=I_1+I_2+\ldots+I_n$ .
- Luego, $E(X)=E(I_1) + E(I_2) + \ldots + E(I_n) = np$ con $E(I_i)=0(1-p)+1p=p$ $VAR(I_i) = p-p^2=p(1-p)$ para $i=1,\ldots,n$
- Entonces, $VAR(X)= VAR(I_1) + VAR(I_2) + \ldots + VAR(I_n) = np(1-p)$

# Ejemplo

- Un examen de Kahoot consta de 10 preguntas a las que hay que contestar una respuesta correcta de 4 opciones por cada pregunta. Suponiendo que a la persona se le aplica el examen y no sabe contestar ninguna pregunta. Por lo tanto, contesta al azar.
- Encuentre:
  - a) la probabilidad de tener 5 respuestas correctas.
  - b) la probabilidad de obtener alguna respuesta correcta.
  - c) la probabilidad de tener al menos 5 respuesta correctas.

# Distribución geométrica

- Experimento:

1. Considérese una secuencia repetida de eventos independientes con probabilidad p de éxito y con probabilidad 1-p de fracaso en cada intento.

- Dado X una variable aleatoria que representa el número de intentos hasta del primer éxito.
- Nótese que la función de masa de probabilidad es:

$$P([X=x]) = \begin{cases} q^{x-1}p, & x = 1,2,3,\ldots \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

para $0<p<1$ y $p+q=1$.

# Distribución geométrica

- Para calcular E(X) y VAR(X), se utilizará la función generadora de momentos:

$$M_X(s) = \frac{pe^s}{1-qe^s}, \text{ donde } qe^s<1$$

- Con lo cual, E(X)=1/p y VAR(X)=q/$p^2$.

# Ejemplo

- Un disparador experto tiene una probabilidad de 0.95 de darle al blanco.
- Calcular la probabilidad de que falle por primera vez en su decimoquinto disparo.

# Distribución binomial negativa

- Experimento:

1. Considérese una secuencia repetida de eventos independientes con probabilidad p de éxito y con probabilidad 1-p de fracaso en cada intento.

- Dado X una variable aleatoria que representa el número de fallos antes de r éxitos.
- Nótese que la función de masa de probabilidad es:

$$P([X = x]) = \begin{cases} \binom{r + x - 1}{x} p^r q^x, & x = 0,1,2,3,\dots \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

para r=1,2,... ; 0<p<1 y p+q=1.

# Distribución binomial negativa

- Para calcular $E(X)$ y $VAR(X)$, se define las siguientes variables aleatoria $I_i$ que representa el número de fallos necesario después del (i-1)-ésimo éxito para obtener el i-ésimo éxito.
- Éstas son variables aleatorias geométricas independientes con parámetro común p para $i=1,\ldots,r$.
- Entonces, $X=I_1+I_2+\ldots+I_r$ .
- Luego, $E(X)=E(I_1) + E(I_2) + \ldots + E(I_r) = r/p$ con $E(I_i)=1/p$ y $VAR(I_i) = q/p^2$ para $i=1,\ldots,r$ .
- Entonces, $VAR(X)= VAR(I_1) + VAR(I_2) + \ldots + VAR(I_r) = rq/p^2$ .

# Ejemplo

- Se sabe que la probabilidad de que un niño expuesto a una enfermedad contagiosa la contraiga es de 0.4 .
- Calcular la probabilidad de que el décimo niño estudiado sea el tercero en contraer la enfermedad.

# Ejemplo

- Como parte de un entrenamiento diario, cada delantero debe anotar 20 penaltis. Un exjugador del Real Madrid tiene una tasa de aciertos en lanzamientos desde el punto de penalti del 90%.
- ¿Quién es el jugador?
- Encontrar la función de probabilidad del número de lanzamientos que tiene que realizar este jugador hasta terminar esta parte del entrenamiento.
- Determinar la función de probabilidad del número de lanzamientos hasta que marca el primer penalti para este jugador.
- Si cada lanzamiento toma 30 segundos. ¿Cuál es la función de probabilidad del tiempo que tarda en terminar esta parte del entrenamiento para este jugador?

# Distribución de Poisson

- <u>Experimento</u>:
- Se tienen las siguientes propiedades:
    1. El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o región específico es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo disjunto de tiempo o región del espacio disjunto (el proceso de Poisson no tiene memoria).
    2. La probabilidad de que un resultado sencillo ocurra en un intervalo de tiempo muy corto o en una región muy pequeña es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo o al tamaño de la región y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo o región.

# Distribución de Poisson

3. La probabilidad de que más de un resultado ocurra en ese intervalo de tiempo tan corto o en esa región tan pequeña es despreciable.

- Se define la variable aleatoria $X_t$ como el número de resultados que ocurre en un intervalo de tiempo dado o región específico. Además, $\lambda$ es el número promedio de resultados por unidad de tiempo o región.

# Distribución de Poisson

- La función de masa de probabilidad es:

$$P([X_t = x]) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

para $x=0,1,2,\ldots$

- Además, $E(X_t)= \lambda t$ y $VAR(X_t)= \lambda t$ .

# Ejemplo

- Un servidor web recibe un número de peticiones por segundo que sigue una distribución de Poisson con parámetro 0.2.
- Encontrar:
- a) la probabilidad que reciba dos peticiones en un segundo.
- b) la probabilidad que se reciba un máximo de 3 peticiones en un segundo.
- c) la probabilidad de que el servidor colapse si no puede atender más de 4 peticiones por segundo.
- d) la probabilidad de que se reciba 20 peticiones en un minuto.

# Distribución hipergeométrica

- Experimento:
  - Se tienen las siguientes propiedades:

1. Una muestra aleatoria de tamaño n se selecciona sin reemplazo de un total de N resultados.
2. K resultados o artículos del total N pueden clasificarse como éxitos y N-K como fracaso.

# Distribución hipergeométrica

- Se define la variable aleatoria X como el número de éxitos en una muestra de tamaño n seleccionada de N resultados posibles, de los cuales K son considerados como éxitos y N-K como fracaso.
- Nótese que la función de masa de probabilidad es:

$$P([X = x]) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

para x=0,1,2,…,K si n>K

o para x=0,1,…,n si n≤K.

# Distribución hipergeométrica

- Para calcular E(X) y VAR(X). Se definen las siguientes variables aleatorias $I_j$ ($j \leq n$) que representa que el j-ésimo objeto sea un éxito, la cual asume los valores entre 0 y 1 con probabilidaes de (N-K)/N y K/N respectivamente.
- Como $X=I_1+I_2+\ldots+I_n$,
- Entonces $E(X)=E(I_1) + E(I_2) + \ldots + E(I_n) = nK/N$ ya que $E(I_i)=K/N$ y $VAR(I_i) =K/N-(K/N)^2$ para $i=1,\ldots,n$
- Nótese que: $E(I_iI_j)=1.(K/N)((K-1)/(N-1))+0=(K/N)((K-1)/(N-1))$ y $COV(I_i,I_j)=K(K-1)/(N(N-1)) –(K/N)^2= -(K/N)(1/(N-1))(1-K/N)$ para $i\neq j$.
- Entonces, $VAR(X)= VAR(I_1) + VAR(I_2) + \ldots + VAR(I_n) + 2\sum_{i<j} COV(I_i, I_j) =n(K/N)(1-K/N)+2(n(n-1)/2)(-K/N)(1-K/N)(1/(N-1))=n(1-K/N)(K/N)((N-n)/(N-1))$ .

# Ejemplo

- Un lote de 100 productos industriales contiene 40 productos defectuosos.
- Sea Y el número de artículos defectuosos en una muestra aleatoria de tamaño 20.
- Encuentre $P([Y=10])$.
- a) Y es una variable aleatoria hipergeométrica (muestreo sin remplazo)
- b) Y es una variable aleatoria binomial (muestreo con remplazo)

# Ejemplo

- En el debate presidencial, los candidatos deben estudiar 35 temas. El día del debate, se seleccionan 3 temas, de los cuales los candidatos deben desarrollar el que ellos seleccionen. Asimismo, es práctica habitual no estudiar todos los temas, esperando que sea poco probable que de 3 temas al azar no salga ninguno de los que han decidido estudiar.
- Encontrar cuál es la probabilidad de que no se haya estudiado ningún tema de los 3 que proponen si se ha dejado de estudiar 20 de los 35 temas.

# Distribución uniforme

- Una variable aleatoria continua X tiene una distribución uniforme con parámetro a<b si su función densidad es:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Además, E(X)= (b+a)/2 y VAR(X)=$(b\text{-}a)^2/12$

# Ejemplo

- Un reloj de manecillas se detuvo en algún punto (no se conoce).
- Determine la probabilidad de que se haya detenido en los primeros 25 minutos, luego de señalar la hora en punto.

# Ejemplo

- Una llamada telefónica llega a un conmutador en un tiempo, al azar, dentro de un período de un minuto. El conmutador estuvo ocupado durante 15 segundos en ese minuto.
- Determine la probabilidad de que la llamada haya llegado mientras el conmutador no estuvo ocupado.

# Ejemplo

- Pepito y Mafalda deben encontrarse en una parada de bus entre las 9:00am y las 10:00am. Cada uno espera un máximo de 10 minutos.
- Determine la probabilidad de que no se encuentren, si Mafalda llegará a las 9:30 en punto.

# Distribución normal

- Dada una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}, -\infty < x < \infty$$

- Además, E(X)=$\mu$ y VAR(X)=$\sigma^2$.

# Ejemplo

- En un proceso industrial el diámetro de una tuerca es un importante componente. El comprador establece en sus especificaciones que el diámetro debe ser $3.0 \pm 0.01$cm. La implicación es que no se acepta ninguna tuerca que se salga de esa especificación. Se conoce que en el proceso, el diámetro de la tuerca tiene una distribución normal con media 3.0 cm y desviación estándar 0.005 cm.
- En promedio, ¿Cuántas tuercas fabricadas se descartan?

# Ejemplo

- El 20% de los chips fabricados en una planta son defectuosos.
- ¿Cuáles es  la probabilidad de que en un lote de 100 chips aleatoriamente seleccionados más de 15 sean defectuosos?
- ¿Cuáles es  la probabilidad de que en un lote de 100 chips aleatoriamente seleccionados entre 10 y 15 sean defectuosos?

# Distribución exponencial

- La variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial con parámetro β, si su función densidad es:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0 \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Además, $E(X)=\beta$ y $VAR(X)=\beta^2$.
- $F(x)=1-e^{-x/\beta}$.

# Ejemplo

- La vida media de una plancha es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con vida media de 18 meses.
- Encuentre la probabilidad de que la plancha falle antes de un año.
- Calcule la probabilidad de que la plancha falle después de 2 años.
- Determine la probabilidad de que la plancha falle entre los 16 y 19 meses.

# Ejemplo

- Supóngase que un sistema contiene cierto tipo de componente, cuyo tiempo de falla en años está dado por la variable aleatoria T, distribuida exponencialmente con tiempo promedio de falla $\beta=5$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas.
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

# Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

- La distribución de Poisson se utiliza para calcular la probabilidad de un número específico de resultados durante un período de tiempo o de espacio particular. Esta distribución tiene un solo parámetro λ (número promedio de eventos o resultados por unidad de tiempo).
- Considérese la variable aleatoria T descrita por el tiempo que se requiere para que ocurra el primer resultado. Mediante la distribución de Poisson, se encuentra que la probabilidad que no ocurran eventos en el intervalo de (0,t) es $e^{-\lambda t}$.

# Relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson

- Nótese que la probabilidad de que el período hasta que ocurre el primer evento que exceda t es la misma probabilidad de que no ocurra un evento de Poisson de (0,t). Es decir, $P([T>t])=e^{-\lambda t}$ . Entonces, $P([0\leq T\leq t])=1\text{-}e^{-\lambda t}$ .
- Asimismo, nótese que esta es una función distribución exponencial, cuya función densidad es $f(t)= \lambda e^{-\lambda t}$ con $\lambda=1/\beta$.

# Ejemplo

- Supóngase que llegan llamadas telefónicas a un conmutador en particular y que siguen el proceso de Poisson con un promedio de 5 llamadas por minuto.
- ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 10 minutos desde que llegó la última llamada?
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de una llamada en un minuto?

# Distribución Gama

- Encuente la función generadora de momentos para la variable aleatoria X con función densidad de probabilidad con α>0 y β>0:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \textit{cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Calcular M(s), E(X) y VAR(X).

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \alpha > 0$$

# Ejemplo

- En alguna ciudad, el consumo diario de agua (en millones de litros) sigue aproximadamente una distribución gamma con $\alpha=2$ y $\beta=3$.
- Si la capacidad diaria de dicha ciudad es de 9 millones de litros de agua, determine la probabilidad de que en cualquier día dado el suministro de agua sea inadecuado.

# Distribución Beta

- Una variable aleatoria X con una función densidad

$$f(x,a,b) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \ cualquier\ otra\ caso \end{cases}$$

donde a>0 y b>0 tiene una distribución Beta.

<u>Nota</u>: B(a,b)=$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

- Calcular E(X) y VAR(X).

# Ejemplo

- La proporción de una marca de televisores que requiere servicio durante el primer año de operación es una variable aleatoria que tiene una distribución beta con $a=3$ y $b=2$.
- Calcule la probabilidad de que al menos 80% de los nuevos modelos de esta marca que se vendieron este año requieran servicio durante su primer año de operación.