## 1 Modos de convergencia

**Definición 1** *Dado $\{F_n\}$ una secuencia de funciones de distribución. Si existe una función de distribución F tal que $F_n(x) \to F(x)$ cuando $n \to \infty$ en cada punto x en el cual F es continua, se dice que $F_n$ converge en ley (o débilmente) a F.*
*Nota: $F_n \overset{w}{\to} F$.*
*Si $\{X_n\}$ es una secuencia de variables aleatorias y $\{F_n\}$ es la correspondiente secuencia de funciones distribución, se dice que $X_n$ converge en distribución (o ley) a X si existe una variable aleatoria X con función distribución F tal que $F_n \overset{w}{\to} F$.*
*Nota: $X_n \overset{L}{\to} X$.*

**Definición 2** *Dado $\{X_n\}$ una secuencia de variables aleatorias definidas sobre algún espacio de probabilidad (Ω,S,P). Se dice que la secuencia $\{X_n\}$ converge en probabilidad a la variable aleatoria X si $\forall \varepsilon > 0$, $P([|X_n - X| > \varepsilon]) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*
*Nota: $X_n \overset{P}{\to} X$.*

**Teorema 1** $X_n \overset{P}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{L}{\to} X$.

**Definición 3** *Dado $\{X_n\}$ una secuencia de variables aleatorias tales que $E(|X_n|^r) < \infty$ para algún r>0. Se dice que $X_n$ converge en la media r-ésima a una variable aleatoria X si $E(|X|^r) < \infty$ y $E(|X_n - X|^r) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*
*Nota: $X_n \overset{r}{\to} X$.*

**Teorema 2** $X_n \overset{r}{\to} X$ *para algún r>0. Entonces,* $X_n \overset{P}{\to} X$.

**Definición 4** *Dado $\{X_n\}$ una secuencia de variables aleatorias. Se dice que $X_n$ converge casi seguramente (a.s.) a una variable aleatoria X si y sólo si $P\Big(\lim_{n\to\infty}[X_n = X]\Big) = 1$ $\big(o\, P\left(\{w : X_n(w) \to X(w)\, cuando\, n \to \infty\}\right) = 1\big)$.*
*Nota: $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ o $X_n \to X$ con probabilidad 1.*

**Teorema 3** $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \overset{P}{\to} X$.

## 2 Leyes de los grandes números y teorema del límite central

**Teorema 4 (La ley débil de los grandes números)** *Sean $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita $\mu$. Entonces, para $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P\left([|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - \mu| > \epsilon]\right) = 0$.*
*Nota: Supóngase desviación estándar finita.*

**Teorema 5 (Lema de Borel-Cantelli)** *(a) Sea* $\{A_n\}$ *una secuencia de eventos tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. *Entonces P(A) = 0.*
*(b) Si* $\{A_n\}$ *es una secuencia independientes de eventos tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, *entonces P(A) = 1.*
*Nota: Dada una secuencia de eventos* $\{A_n\}$ *en S.*
$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ *donde* $A = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.
*A es un evento que infinitamente mucho de los* $A_n$ *ocurren. Se escribirá también como:*
$A = \{w \in \Omega : \forall n \in \mathbb{Z}^+, \exists n_o \geq n \, tal \, que \, w \in A_{n_o}\}$.
$P(A) = P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = P(A_n$ *i.o.) donde i.o. significa "infinitamente a menudo".*

**Teorema 6 (La ley fuerte de los grandes números)** *Si* $X_1, X_2, ...$ *son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con media finita* $\mu$. *Entonces* $P\Big(\lim_{n\to\infty} [\frac{X_1+...+X_n}{n} = \mu]\Big) = 1$.
*Nota: Supóngase cuarto momento finito.*

**Teorema 7 (El teorema central del límite)** *Sean* $X_1, X_2, ...$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita* $\mu$ *y varianza finita* $\sigma^2$. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} P(\Big[\frac{X_1+...+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\Big]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.
*Nota: Supóngase que la función generadora de momentos de* $X_n$ *existe.*