$E[X \mid Y]$

$Var(X \mid Y)$

CC3039

Valor esperado condicional

Para dos variables aleatorias discretas, X y Y, definimos E[X | Y = y] como:

$$
\begin{aligned}
E[X|Y=y] &= \sum_x x P\{X=x|Y=y\} \\
&= \frac{\sum_x x P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}
\end{aligned}
$$

Para el caso contínuo:

$$
E[X|Y=y] = \frac{\int x f(x,y)dx}{\int f(x,y)dx}
$$

Valor esperado condicional

Definamos E[X | Y] como una función de la variable aleatoria Y cuyo valor es E[X | Y = y] cuando Y = y. Como E[X | Y] es una variable aleatoria, tiene sentido preguntarnos cuál es su valor esperado. Sorprendentemente, obtenemos que:

$$E\left[E\left[X|Y\right]\right] = E\left[X\right]$$

$$E\left[X\right] = \sum_{y} E\left[X|Y = y\right] P\{Y = y\}$$

$$E\left[X\right] = \int E\left[X|Y = y\right] g(y)dy$$

Varianza condicional

Definimos la varianza condicional como sigue:

$$\mathrm{Var}(X|Y) = E\left[(X - E[X|Y])^2|Y\right]$$

De lo cual se deriva:

$$E[\mathrm{Var}(X|Y)] = E\left[X^2\right] - E\left[(E[X|Y])^2\right]$$

Y también:

$$\mathrm{Var}(E[X|Y]) = E\left[(E[X|Y])^2\right] - (E[X])^2$$

La fórmula de varianza condicional

Al sumar las últimas dos identidades tenemos que:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[\mathrm{Var}(X|Y)\right] + \mathrm{Var}(E\left[X|Y\right])$$

Lo cual nos dice que podemos escribir la varianza de cualquier variable aleatoria a través de la varianza condicional de dicha variable sobre otra.