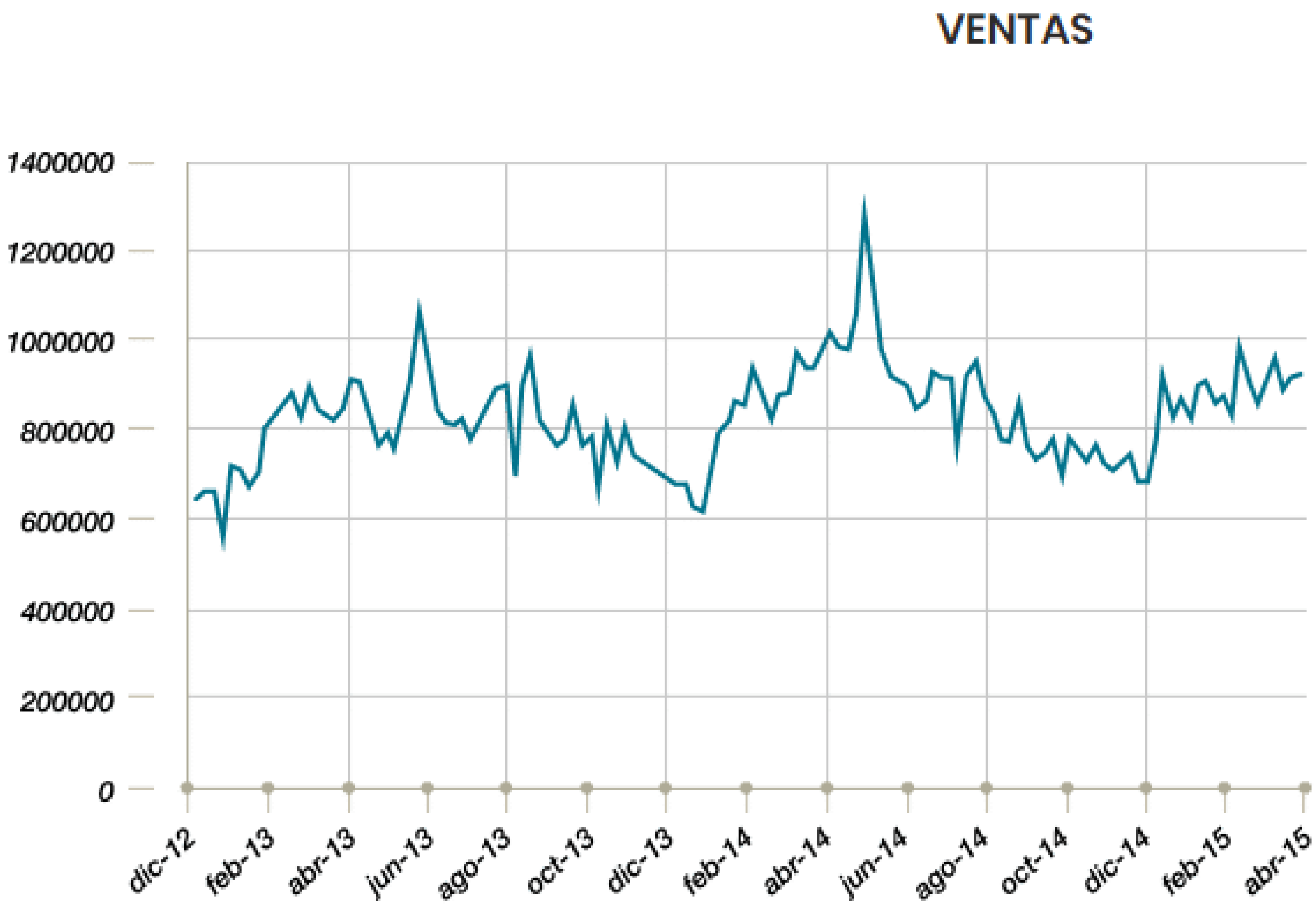
CADENAS DE MARKOV

Conceptos fundamentales

Proceso estocástico

- Una familia de variables aleatorias $\{X_t\}$, donde t es un punto en un espacio T, llamado espacio parametral, y donde para cada t, X_t es un punto S, llamado espacio de estados, es un **proceso estocástico**.

Ejemplo



https://www.pricing.cl/conocimiento/series-de-tiempo/

Ejemplo

- Una tienda de celulares tiene un modelo especial que se ordena cada semana. Sean Di las demandas respectiva de este celular durante la semana i para i=1,2,… Además, D_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tiene una **distribución de Poisson** con media 1.
- Sea X_0 el número de celulares en el momento inicial del proceso, X_i el número de celulares que se tiene al final de la semana i para i=1,2,…
- Suponiendo que $X_0=3$. El sábado en la noche la tienda hace un pedido que se entrega en el momento de abrir la tienda el lunes.
- Se supone que la venta se pierde cuando la demanda excede el inventario.
- Entonces, $\{X_t\}$ para t=0,1,… es un proceso estocástico de la forma anterior. Los estados posibles del proceso son los enteros 0,1,2,3 que representan el número posible de celulares en el inventario al final de la semana.
- Las variables X_t se evalúan de forma iterativa:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \text{máx}\{3 - D_{t+1}, 0\} & \text{si } X_t = 0 \\ \text{máx}\{X_t - D_{t+1}, 0\} & \text{si } X_t \geq 1 \end{cases} \text{ para t=0,1,2,…}$$

Proceso de Markov

- Es un proceso estocástico donde, dado el valor de X_t, los valores de X_s para $t<s$ no dependen de los valores de X_u para $u<t$.
- Un **proceso de Markov** cumple con:

$$P([a<X_t\leq b] \mid [X_{t1}=x_1, X_{t2}=x_2, \ldots, X_{tn}=x_n]) =$$

$$P([a<X_t\leq b] \mid [X_{tn}=x_n]) \text{ para cualquier } t_1<t_2<\ldots<t_n<t$$

Cadena de Markov

- Un proceso de Markov que tiene un espacio de estados finito o contable es llamado una **cadena de Markov**.
- Se denota por $p_{ij}^{n\ n+1}=P([X_{n+1}=j]\,|\,[X_n=i])$ (probabilidad de transición de un paso).
- En el caso que $p_{ij}^{n\ n+1}=p_{ij}$ es independiente de n, se dice que el proceso de Markov tiene **probabilidades de transición estacionaria**.

Matriz de transición del proceso

- Es el arreglo de los números p_{ij} en una matriz, denotado por P, donde su (i+1)-ésima fila es la distribución de probabilidad de los valores de X_{n+1} bajo la condición $X_n=i$.
- Además, P satisface las condiciones, $p_{ij} \geq 0$ para i,j=0,1,2,… y $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}=1$ para i=0,1,2,…

Matriz de transición

$$P = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccccc} p_{00} & , & p_{01} & , & p_{02} & , & p_{03} & , & \cdots \\ p_{10} & , & p_{11} & , & p_{12} & , & p_{13} & , & \cdots \\ p_{20} & , & p_{21} & , & p_{22} & , & p_{23} & , & \cdots \\ p_{30} & , & p_{31} & , & p_{32} & , & p_{33} & , & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & \\ p_{i0} & , & p_{i1} & , & p_{i2} & , & p_{i3} & , & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{cuarta fila} \\ \\ \text{(i+1)- ésima fila} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

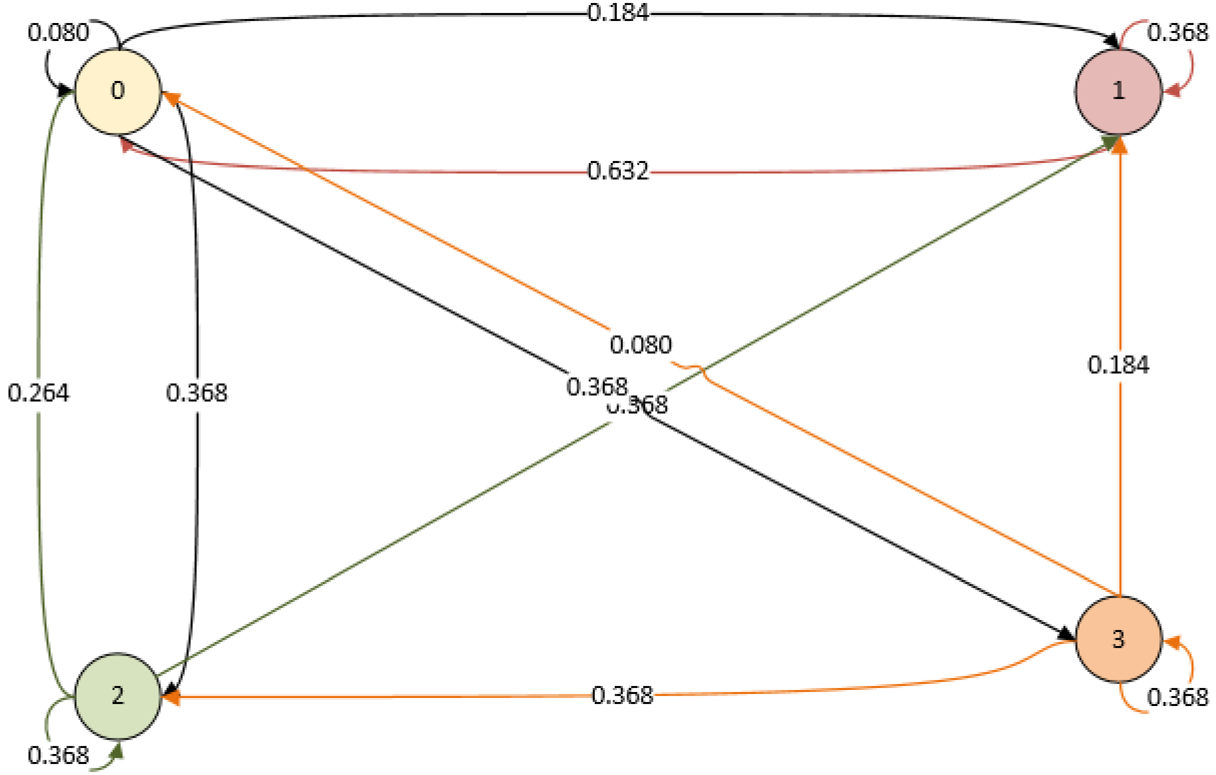
Ejemplo

- Regresando al ejemplo anterior.
- La expresión de X_{t+1} depende sólo de D_{t+1} y X_t.
- D_t son variables aleatorias independientes.
- Como X_{t+1} es independiente de la historia del sistema de inventarios, el proceso $\{X_t\}$ $(t=0,1,\ldots)$ tiene la **propiedad markoviana** y por lo tanto es una **cadena de Markov**.

Ejemplo

- Matriz de transición del ejemplo anterior:
- $$P = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}$$

Ejemplo



0.080
0.184
0.368
0
1
0.632
0.080
0.264
0.368
0.368
0.368
0.184
3
2
0.368
0.368
0.368

Matriz de transición del proceso

- La matriz P^n es el arreglo de los números P_{ij}^n, donde P_{ij}^n=P([X_{m+n}=j]|[X_m=i]) para m=0,1,...

Ejemplo

- Calcular P^2 y P^4 del ejemplo anterior.
- $P^2 =$

$$\begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix}$$

- ¿cuál es p_{10}^{2} y p_{23}^{2}?

Ejemplo

- $\mathrm{P}^4 =$

$$\begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \\ 0.282 & 0.285 & 0.268 & 0.166 \\ 0.284 & 0.283 & 0.263 & 0.171 \\ 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \end{bmatrix}$$

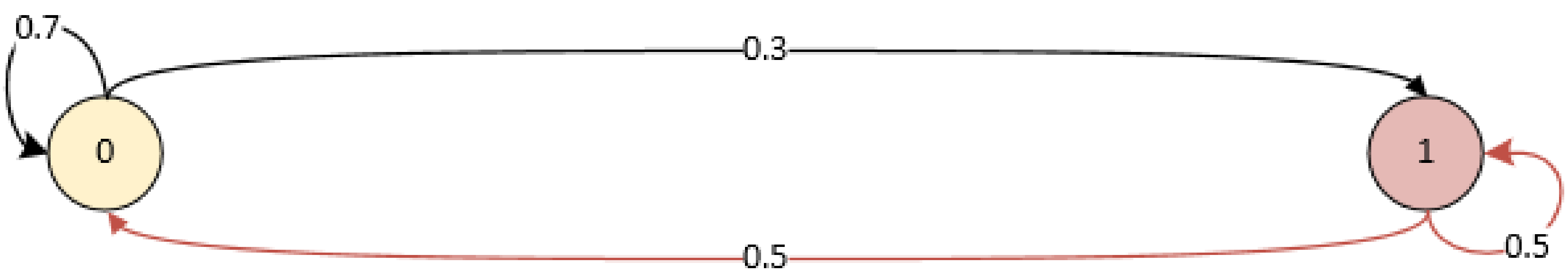
- ¿cuál es p_{10}^4 y p_{23}^4?

Ejemplo

- Al final de un día, se registra el precio de una acción. Si la acción subió, la probabilidad de que suba mañana es 0.7. Si la acción bajó, la probabilidad de que suba mañana es 0.5. Asimismo, el estado 0 representa que el precio de la acción sube y estado 1 representa lo contrario.
- Encuentre la matriz de transición de la cadena de Markov.

Ejemplo

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{Estado} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\
P = & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

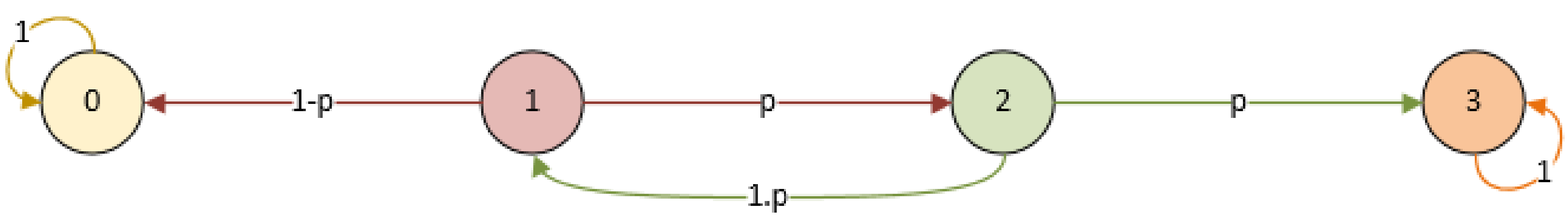


Ejemplo

- Un jugador tiene un \$1. Por cada jugada gana \$1 con probabilidad $p>0$ o pierde \$1 con probabilidad $1-p$. El juego termina cuando el jugador acumula \$3 o bien cuando quiebra.
- Encuentre la matriz de transición de la cadena de Markov.

Ejemplo

$$P = \begin{array}{c|cccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



Ejemplo

- Caminata aleatoria con reflejantes absorbentes:
- Un borracho conductor es parado por la policía. Tiene que caminar en una línea recta. Se colocará el eje x en la línea que tiene que caminar, empezará en el origen y cada paso representa una unidad. Toma un paso a la derecha con probabilidad p o a la izquierda con probabilidad 1-p, a menos que se encuentre en el origen toma un paso a la derecha a la posición 1 y si se encuentra en la posición 5 toma un paso hacia la izquierda a la posición 4.
- Encuentra la matriz de transición de la cadena de Markov.

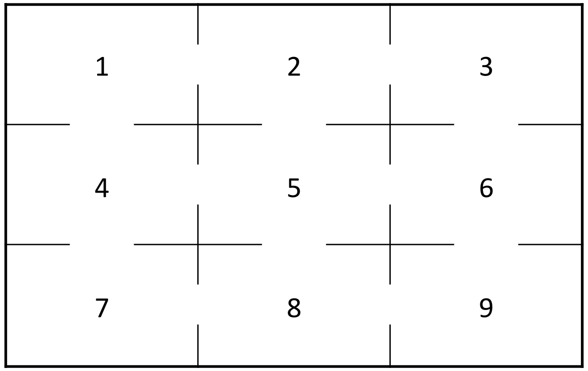
Ejemplo

X_n denota su posición después de n pasos.

$$P = \begin{array}{c} \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejemplo

- Una rata blanca es puesta en un laberinto. La rata se mueve a través de los compartimientos de forma aleatoria, haciendo un cambio de compartimiento en cada instante de tiempo.
- El estado del sistema es el número del compartimiento en donde se encuentra la rata.
- Calcular la matriz de transición de probabilidad.



Ejemplo

$$
P = \begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Teorema

- Si la matriz de transición de probabilidad de un paso de una cadena de Markov es P, entonces $\mathrm{p}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{p}_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{r}} \mathrm{p}_{\mathrm{kj}}^{\mathrm{s}}$ para cualquier enteros no negativos r y s, satisfaciendo r+s=n, donde se define $\mathrm{p}_{\mathrm{ij}}^{0} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.
- La ecuación anterior es conocida como ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.
- De este teorema se tiene: $P^{r+s}=P^rP^s$.

Distribución de probabilidad inicial

- Si la probabilidad del proceso inicial en el estado j es p_j, es decir, la distribución de X_0 es $P([X_0=j])=p_j$, entonces la probabilidad de que el proceso esté en el estado k en el tiempo n es:

$$p_k^n = \sum_{j=0}^{\infty} p_j p_{jk}^n = P([X_n=k])$$

- <u>Notación</u>: $p^0=(p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ y $\sum_{j=0}^{\infty} p_j=1$.
- Asimismo, $p^n= p^0 P^n$.

Ejemplo

- Un hombre maneja carro o toma tren para ir al trabajo. Él nunca toma el tren dos días seguidos; pero si maneja al trabajo, entonces el próximo día es tan probable que maneje de nuevo como que tome tren.
- Supóngase que el primer día, él lanzó un dado no cargado y si apareció un 6, entonces él manejó.
- ¿Cuál es la distribución de probabilidad del día o paso cero?
- ¿Cuál es la probabilidad que el sistema cambie de un estado de tomar tren a un estado de manejar en exactamente 4 pasos o 4 días?
- ¿Cuál es la distribución de probabilidad exactamente en el paso 4 o 4 días?

Clasificación de estados

- Un **estado** j se dice **accesible** del estado i, si $\exists n \in Z^{+} \cup \{0\}$ tal que $p_{ij}^{n} > 0$, es decir, el estado j es accesible del estado i, si hay una probabilidad positiva que en un número finito de transiciones se alcance el estado j, dado que se empezó en el estado i.
- Dos **estados** i y j se dicen **comunicados**, si uno es accesible al otro y viceversa.
- Una cadena de Markov es **irreducible** si cualquier estado j es accesible de cualquier estado i.

Ejemplo

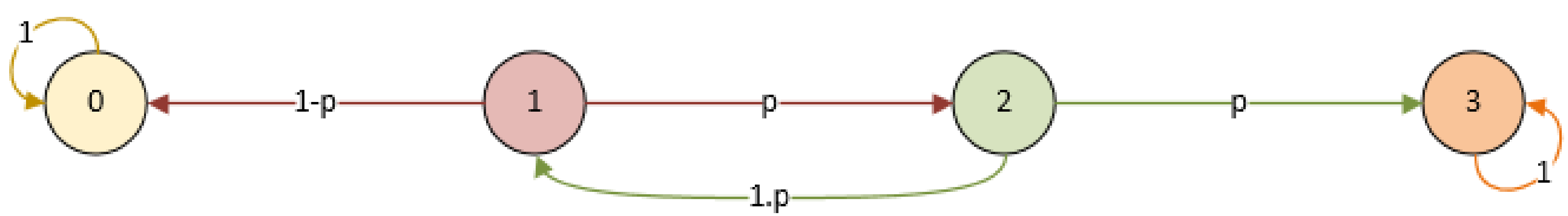
- En el ejemplo de los inventarios, la cadena de Markov es irreducible.
- En el ejemplo de las acciones, la cadena de Markov es irreducible.
- En el ejemplo del juego contiene 3 clases: la clase del estado 0, la clase del estado 3 y la clase de los estados 1 y 2.

Periocidad

- Se define el **período** de un estado i, denotado por d(i), como el máximo común divisor de todos los n≥1 para los cuales $p_{ii}^{n}>0$.
- Si $p_{ii}^{n}=0, \forall n \geq 1$. Se define d(i)=0.
- Una cadena de Markov en la cual cada estado tiene período 1 es llamada **aperiódica**.

Ejemplo

- En el ejemplo del juego, el período del estado 1 y 2 es 2.



Cerradura y conjuntos cerrados

- Un **conjunto** C de **estados** es **cerrado** si no se puede llegar a ningún estado que no esté en C, desde cualquier estado j en C.
- Para un conjunto arbitrario C de estados, el menor conjunto cerrado que contiene a C se le llamada **cerradura** de C.
- Un estado se llama **absorbente** si, después de haber entrado ahí el proceso nunca saldrá de ese estado. Por lo tanto, un estado i es **absorbente** si y sólo si $p_{ii}=1$.

Recurrencia

- Un estado se llaman **estado transitorio** si, después de haber entrado a este estado, el proceso nunca regresa a él. Es decir, el estado i es transitorio si y sólo si existe un estado j ($i \neq j$) que es accesible desde el estado i, pero no viceversa, esto es, el estado i no es accesible desde el estado j.
- Un estado es **recurrente** si, después de haber entrado a este estado, el proceso definitivamente regresará a ese estado. Es decir, un estado es recurrente si y sólo si no es transitorio.

Ejemplo

- Todos los estados del ejemplo de inventario son recurrentes.
- De igual forma, el ejemplo de las acciones sólo tiene estados recurrentes.

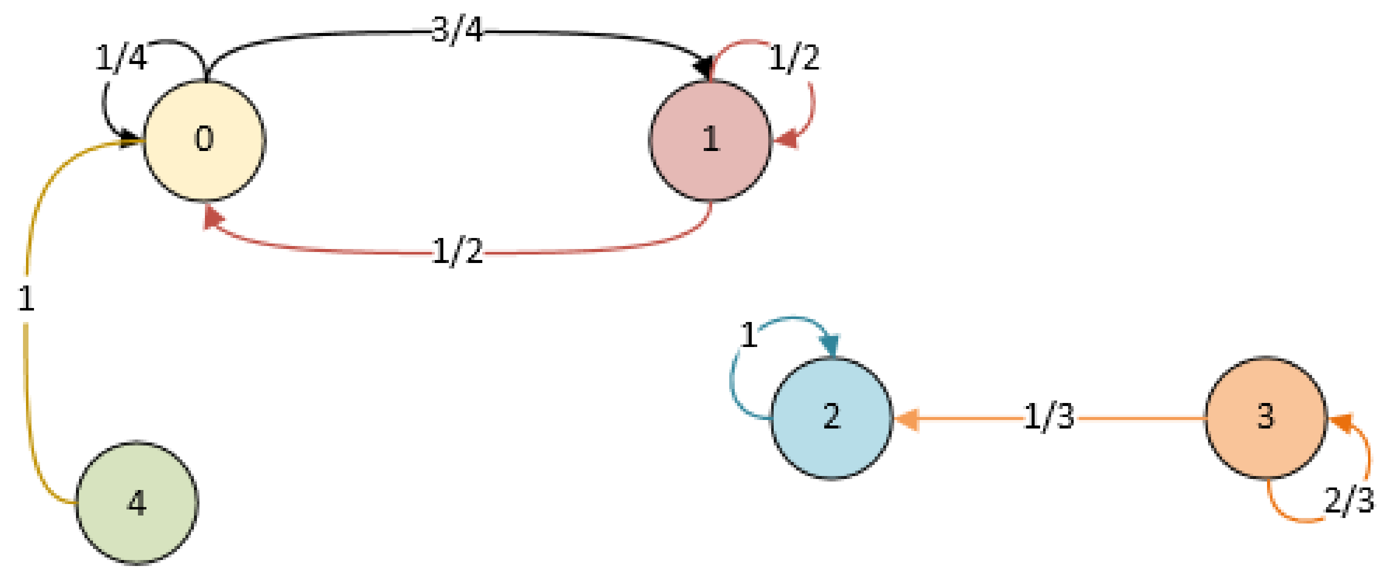
Ejemplo

- Matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿El estado 2 es absorbente o es recurrente?
- ¿El estado 0 y 1 es recurrente?
- ¿El estado 4 es transitorio o recurrente?
- ¿El estado 3 es transitorio o recurrente?

Ejemplo



Recurrencia

- Para un estado i, sea v_n la probabilidad del primer retorno en la etapa n.
- Además, $u_n = p_{ii}^n$ y $u_0 = p_{ii}^0 = 1$. Entonces, $u_n = \sum_{j=0}^{n-1} v_{n-j} u_j$
- Denote el evento B_k de retorno después de k etapas por primera vez. Luego, $P(B_k) = v_k$.
- Considérese el evento A: el sistema se encuentra en el estado i después de n etapas.
- $P(A) = u_n = \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j) = \sum_{j=1}^{n} u_{n-j} v_j$

Recurrencia

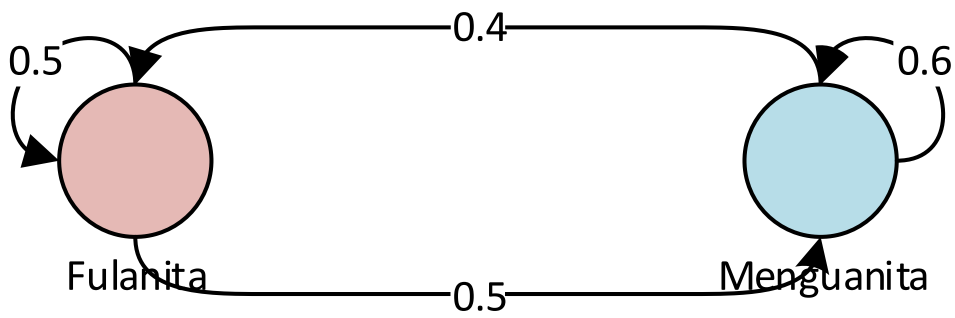
- ¿Cuál es la probabilidad recurrente de al menos un retorno en cualquier paso? $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$
- Si $v = 1$ (hay certeza de regresar alguna vez) $\Leftrightarrow$ el estado i es recurrente.
- Si $v < 1$ $\Leftrightarrow$ el estado i es transitorio.
- <u>Teorema</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty \Leftrightarrow v = 1.$

Estados ergódicos

- En una cadena de Markov de estado finito, los estados recurrentes aperiódicos se llaman **ergódicos**.
- Una cadena de Markov es **ergódica** si todos sus estados son ergódicos.

Ejemplo

- Pepito tiene dos novias: Fulanita y Menganita.



- Si la distribución inicial es $p^0=(1,0)$, calcular p^1, p^2 y p^3.
- Calcular p^* cuando el proceso se estabiliza.

Ejemplo

- En el ejemplo de inventarios,
- $P^8=P^4P^4=\begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \end{bmatrix}$
- ¿Cómo se interpreta que cada uno de las filas de la matriz P^8 tenga elementos idénticos?

Probabilidad de estado estable

- Para una cadena de Markov de estado finito irreducible ergódica, el $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n}$ existe y es independiente de i.
- Además, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n}=\pi_j>0$, donde las π_j satisfacen las siguientes **ecuaciones de estado estable**:
  - $\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}$, para j=0,1,…,M.
  - $\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$.
- Las π_j se llaman **probabilidades de estado estable**.

Ejemplo

- En el ejemplo del inventario, se tiene:
  - $\pi_0 = 0.080\pi_0 + 0.632\pi_1 + 0.264\pi_2 + 0.080\pi_3$
  - $\pi_1 = 0.184\pi_0 + 0.368\pi_1 + 0.368\pi_2 + 0.184\pi_3$
  - $\pi_2 = 0.368\pi_0 + \quad + 0.368\pi_2 + 0.368\pi_3$
  - $\pi_3 = 0.368\pi_0 + \quad + 0.368\pi_3$
  - $1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$
- Los valores son:
  - $\pi_0=0.286$, $\pi_1=0.285$, $\pi_2=0.263$ y $\pi_3=0.166$.

Ejemplo de relajamiento de condición

- Se tiene la matriz de transición con estados 0 y 1:
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Calcular el $\lim_{n \to \infty} p_{00}^{n}$.

Costo promedio esperado por unidad de tiempo

- Como el límite existe para una cadena de Markov finita irreducible con estados recurrentes positivos, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{k} = \pi_j$.
- Supóngase que se incurre en un costo $C(X_t)$ cuando el proceso se encuentra en el estado X_t en el tiempo para $t=0,1,2,\ldots$
- El costo promedio esperado en el que incurre a largo plazo de los primeros n periodos está dado por $E[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} C(X_t)]$.
- Luego, $\lim_{n \to \infty} E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} C(X_t)\right] = \sum_{j=0}^{M} \pi_j C(j)$

Problema del inventario

- Supóngase que la tienda de celulares encuentra que se debe asignar un cargo por almacenamiento por cada celular que permanece en la tienda al final de la semana.
- El costo de carga es:
- $C(X_t) = \begin{cases} 0 & ,\text{si } Xt = 0 \\ 2 & ,\text{si } Xt = 1 \\ 8 & ,\text{si } Xt = 2 \\ 18 & ,\text{si } Xt = 3 \end{cases}$
- Calcular el costo promedio esperado por semana.

Ejemplo

- Se tiene una unidad de proceso (UP) y llegan dos tipos de tareas, las cuales se atienden por prioridad. La probabilidad de ocurrencia de la tarea T_1 es p_1 y la probabilidad de ocurrencia de la tarea T_2 es p_2. Supóngase que T_1 necesita dos unidades de tiempo y T_2 tiene mayor prioridad.
- Determinar una matriz de transición con los siguientes estados:
  - E_0 = no hace nada (unidad no trabaja)
  - E_1 = Ejecuta primera unidad de tiempo de T_1
  - E_2 = Ejecuta segunda unidad de tiempo de T_1 (Prioridad a T_2)
  - E_3 = Ejecuta T_2

Ejemplo

$$
P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
(1-p1)(1-p2) & p1(1-p2) & 0 & p2 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
(1-p1)(1-p2) & p1(1-p2) & 0 & p2 \\
(1-p1)(1-p2) & p1(1-p2) & 0 & p2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ejemplo

- La urna A tiene 2 canicas blancas y la urna B tiene 3 canicas rojas. En cada paso del proceso una canica es seleccionada de cada urna y se intercambian.
- Dado el estado del sistema a_i el número de canicas rojas en la urna A en el paso i.
- ¿Cuántos estados hay?
- Encuentre la matriz de transición.
- ¿Cuál es la probabilidad que hay 2 canicas rojas en la urna A en el paso 3?
- En un recorrido largo, ¿cuál es la probabilidad que hay 2 canicas rojas en la urna A?

Bibliografía

- Hillier y Lieberman. Investigación de operaciones. McGraw-Hill. México. 2001. Séptima Edición.
- Karlin, S. y Taylor, H., A first course in Stochastic Processes. Academic Press. New York. 1975. Segunda Edición.