Fundamentos de probabilidad

CC3039

Experimentos

Es un procedimiento, que nos permite hacer una observación

Estamos interesados en los **Experimentos aleatorios**, que son experimentos en los que el resultado varía con el tiempo.

Espacio de muestra (S)

Es un conjunto, intrínsecamente relacionado con un experimento aleatorio.

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

¿Cuál es el espacio de muestra del experimento de lanzar una moneda?

... de lanzarla 3 veces e importa el orden?

... de lanzarla 3 veces y no importa el orden?

Evento (A)

Cualquier subconjunto de S

Evento: Obtener una sola cara en los 3 tiros de la moneda

Evento: Obtener al menos 1 cara en los 3 tiros de la moneda

Composición de eventos

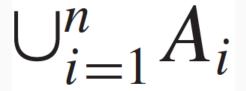
¿Cómo podemos operar dos conjuntos para obtener otro conjunto?

Unión (A U B) U C # Ocurre el evento A, o el B o el C

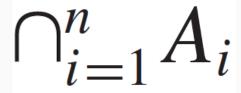
Intersección (AB)C # Ocurre el evento A, el B y el C

entre otros

Más sobre eventos



Evento con los resultados de cualquier Ai



Evento con los resultados que están en todos los Ai



Evento con los resultados de S que no están en A

Algunas propiedades de eventos

$$S^c = \emptyset$$

$$AB = \emptyset$$

Eventos mutuamente excluyentes

¿Qué es la probabilidad?

Axiomas de Kolgomorov

Axiom 1
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

Axiom 2
$$P(S) = 1$$

Axiom 3 For any sequence of mutually exclusive events $A_1, A_2, ...$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i), \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

Probabilidad de un evento

P(A) intuitivamente representa qué tan "correctos" estaríamos al enunciar:

A sucederá

Haciendo claro que "A sucederá" significa que cualquier resultado en A sea el resultado del experimento observado.

Es un índice de "factibilidad"

Probabilidad de un evento

Definimos P(evento) como sigue:

P(si) = <u>Cantidad de resultados que cumplen si</u> Cantidad de resultados posibles

Ejercicio: demuestre que P(si) cumple con los axiomas de Kolgomorov

Se toman en cuenta dos eventos

P(A | B) = Probabilidad del evento A, sabiendo que B ya ocurrió.

Considere el caso de lanzamiento doble de una moneda. Si el orden importa, ¿cuál es el espacio de muestra para este experimento?

$$S = \{(C, C), (C, E), (E, C), (E, E)\}$$

¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

P(obtener(C, C)) = 1 / 4

¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras ya que sabemos que el primer lanzamiento fue cara? **P(CC|C1)**

Como sabemos que el primer lanzamiento fue cara, tenemos:

$$S' = \{(C, X)\} = \{(C, C), (C, E)\}$$

Por tanto, $P(CC \mid C1) = 1 / 2$

Como A | B es un evento, entonces P(A | B) se enuncia como:

P(A | B) = Cantidad de veces que sucede A y B

Cantidad de eventos en los cuales B sucede

Si multiplicamos la fracción por

$$1 = (1 / |S|) / (1 / |S|)$$

Mantenemos la proporción y podemos decir:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{# veces A y B / | S |}}{\text{# veces B / | S |}} = P(AB) / P(B)$$

P(A | B), sabemos que B ocurrió, entonces, nuestro nuevo espacio de muestra se reduce a:

$$S' = SB = B$$

Si A sucede, entonces sabemos que AB sucede (por la premisa B).

Por tanto $P(A \mid B) = P(AB) / P(B)$

Ejercicio

Demuestre que:

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | B')P(B')$$

Demuestre que:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)P(A) / P(B)$$

Probabilidad total

Suponga que B es una partición de S. Entonces, los eventos Bi son mutuamente excluyentes. En este contexto, podemos escribir el evento A de la siguiente manera:

P(A) = sumatoria(P(A | Bi) * P(Bi))

Eventos independientes

$$Si P(A \mid B) = P(A)$$

Decimos que A no depende de la ocurrencia de B, por tanto, A y B son independientes.

Demuestre que:

Si
$$P(A \mid B) = P(A)$$
 entonces $P(B \mid A) = P(B)$

Ejercicio

En la clase de modelación y simulación (UVG) hay 100 alumnos distribuidos de la siguiente manera:

- 40 son mujeres
- 30 personas usan lentes
- 15 varones usan lentes

Si seleccionamos al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad que sea mujer y use gafas? Si seleccionamos a alguien que no usa lentes, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?