Variables aleatorias

CC3039

Recordatorios

Un experimento produce resultados observables

El conjunto de todos los posibles resultados se conoce como espacio de muestra (S)

Un evento es un subconjunto de S

Los resultados de un experimento no son necesariamente numéricos

$$X : S \rightarrow R$$

Variables aleatorias o estocásticas

Variables aleatorias (o estocásticas)

Algún dato numérico de interés en un resultado observable de un experimento

Aunque la variable aleatoria siempre posee un valor en cada observación, ese valor no es determinístico (varía por razones quizá incontrolables)

Conceptualmente, una variable aleatoria no posee un solo valor

Variables aleatorias (o estocásticas)

Uno de los propósitos de las variables aleatorias es simplificar el espacio de muestra

Analizando una variable aleatoria, podemos obtener información importante sobre el experimento

Variables aleatorias (o estocásticas)

Experimento:

Lanzar una moneda 25 veces (el orden importa)

$$| S | = 2^{25}$$

Variables aleatorias (o estocásticas)

Variable aleatoria:

X(s) = cantidad de caras en s, para s en S

| Xr | = 26

Variables aleatorias (o estocásticas)

La probabilidad se definió para un evento.

Ahora podemos definir la probabilidad en términos de una variable aleatoria:

$$\mathbf{P(X = x_i) = P(\{ st \mid st \text{ en } S , X(st) = x_i \})}$$

Noten: podemos entender una variable aleatoria como una herramienta que nos ayuda a definir **eventos**.

Variables aleatorias (o estocásticas)

Esta definición está muy bien, y tiene mucho sentido cuando hablamos de experimentos con un número finito de resultados, pero...

¿Qué le sucede a la $P(X = x)$ cuando hay infinito número de posibles resultados?

Tipos de variables aleatorias (1)

Si el rango de una variable aleatoria es

- Finito o
- Contable

Decimos que la variable aleatoria es **Discreta.**

De lo contrario es continua

Tipos de variables aleatorias (2)

Si podemos encontrar una función f(x) definida para todos los Reales, tal que para cualquier C subconjunto de R se cumple que:

$$P\{X \in C\} = \int_C f(x)dx$$

Decimos que X es una variable aleatoria continua.

¿Qué le sucede a la $P(X = x)$ cuando hay infinito número de posibles resultados?

Variables aleatorias continuas

a f(x) la conocemos como la **función de densidad probabilística**

f(a) nos da una idea de qué tan probable es que X esté cerca de a:

$$P\left\{a - \frac{\epsilon}{2} \leqslant X \leqslant a + \frac{\epsilon}{2}\right\} = \int_{a-\epsilon/2}^{a+\epsilon/2} f(x)dx \approx \epsilon f(a)$$

$$P(X = x) \to 0$$

Variables aleatorias (o estocásticas)

Introducimos una función de nuestro interés, la **función de distribución acumulativa (cdf)**

$$F(a) = P(X <= a)$$

a. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ and $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

b. $F(x)$ is a nondecreasing function of x.

c. $F(x)$ is right-continuous; that is, for every number x_0, $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0)$.

Tipos de variables aleatorias (3)

X es continua si F(x) es una función contínua.

X es discreta si F(x) es una función por pasos en x.

cdf para variables aleatorias continuas

$$F(a) = P\{X \in (-\infty, a)\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$

$$\frac{d}{da}F(a) = f(a).$$