# Fundamentos de probabilidad

CC3039

# Experimentos

Es un procedimiento, que nos permite hacer una observación

Estamos interesados en los **Experimentos aleatorios**, que son experimentos en los que el resultado varía con el tiempo.

# Espacio de muestra (S)

Es un conjunto, intrínsecamente relacionado con un experimento aleatorio.

Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

**¿Cuál es el espacio de muestra del experimento de lanzar una moneda?**

**... de lanzarla 3 veces e importa el orden?**

**… de lanzarla 3 veces y no importa el orden?**

# Evento (A)

Cualquier subconjunto de S

Evento: **Obtener una sola cara en los 3 tiros de la moneda**

Evento: **Obtener al menos 1 cara en los 3 tiros de la moneda**

# Composición de eventos

¿Cómo podemos operar dos conjuntos para obtener otro conjunto?

**Unión** (A **U** B) **U** C # Ocurre el evento A, o el B o el C

**Intersección** (AB)C # Ocurre el evento A, el B y el C

**entre otros**

# Más sobre eventos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Evento con los resultados de cualquier Ai

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Evento con los resultados que están en todos los Ai

$$A^c$$

Evento con los resultados de S que no están en A

# Algunas propiedades de eventos

$$S^c = \emptyset$$

$$AB = \emptyset$$

Eventos mutuamente excluyentes

# ¿Qué es la **probabilidad**?

# Axiomas de Kolgomorov

**Axiom 1** $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

**Axiom 2** $P(S) = 1$

**Axiom 3** *For any sequence of mutually exclusive events* $A_1, A_2, \ldots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

# Probabilidad de un evento

P(A) intuitivamente representa qué tan "correctos" estaríamos al enunciar:

**A sucederá**

Haciendo claro que "A sucederá" significa que cualquier resultado en A sea el resultado del experimento observado.

Es un índice de "factibilidad"

# Probabilidad de un evento

Definimos P(evento) como sigue:

$$P(s_i) = \frac{\text{Cantidad de resultados que cumplen si}}{\text{Cantidad de resultados posibles}}$$

**P(si) = | si | / | S |**

**Ejercicio:** demuestre que P(si) cumple con los axiomas de Kolgomorov

# Probabilidad condicional

Se toman en cuenta dos eventos

P(A | B) = Probabilidad del evento A, sabiendo que B ya ocurrió.

**Considere** el caso de lanzamiento doble de una moneda. Si el orden importa, ¿cuál es el espacio de muestra para este experimento?

# Probabilidad condicional

S = {(C, C), (C, E), (E, C), (E, E)}

¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

P(obtener (C, C)) = 1 / 4

¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras ya que sabemos que el primer lanzamiento fue cara? **P(CC|C1)**

# Probabilidad condicional

Como sabemos que el primer lanzamiento fue cara, tenemos:

$S' = \{(C, X)\} = \{(C, C), (C, E)\}$

Por tanto, $P(CC \mid C1) = 1 / 2$

# Probabilidad condicional

Como A | B es un evento, entonces P(A | B) se enuncia como:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{Cantidad de veces que sucede A y B}}{\text{Cantidad de eventos en los cuales B sucede}}$$

# Probabilidad condicional

Si multiplicamos la fracción por

$1 = (1 / | S | ) / (1 / | S |)$

Mantenemos la proporción y podemos decir:

$$P(A \mid B) = \frac{\#\text{ veces A y B} / | S |}{\#\text{ veces B} / | S |} = \mathbf{P(AB) / P(B)}$$

# Probabilidad condicional

$P(A \mid B)$, sabemos que B ocurrió, entonces, nuestro nuevo espacio de muestra se reduce a:

$S' = SB = B$

Si A sucede, entonces sabemos que AB sucede (por la premisa B).

Por tanto $\mathbf{P(A \mid B) = P(AB) / P(B)}$

# Ejercicio

Demuestre que:

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B')P(B')$$

Demuestre que:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)P(A) / P(B)$$

# Probabilidad total

Suponga que B es una partición de S. Entonces, los eventos  Bi son mutuamente excluyentes. En este contexto, podemos escribir el evento A de la siguiente manera:

P(A) = sumatoria(P(A | Bi) * P(Bi))

# Eventos independientes

Si $P(A \mid B) = P(A)$

Decimos que A no depende de la ocurrencia de B, por tanto, A y B son independientes.

Demuestre que:

Si $P(A \mid B) = P(A)$ entonces $P(B \mid A) = P(B)$

# Ejercicio

En la clase de modelación y simulación (UVG) hay 100 alumnos distribuidos de la siguiente manera:

- 40 son mujeres
- 30 personas usan lentes
- 15 varones usan lentes

Si seleccionamos al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad que sea mujer y use gafas? Si seleccionamos a alguien que no usa lentes, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?