1 Análisis combinatorio

Definición 1 (Experimento) *Un experimento es un proceso físico que posee un número de resultados observables.*

Regla del producto: Si un experimento tiene m resultados posibles y otro experimento tiene n resultados posibles, entonces existen mxn resultados posibles cuando ambos experimentos tienen lugar.

Regla de la suma: Si un experimento tiene m resultados posibles y otro experimento tiene n resultados posibles, entonces existen m+n resultados posibles cuando exactamente uno de estos tiene lugar.

Regla 1 Dada una colección de n_1 elementos a_{11},a_{12},...,a_{1n_1}, n_2 elementos a_{21},a_{22},...,a_{2n_2}, y así sucesivamente, hasta n_k elementos a_{k1},a_{k2},...,a_{kn_k}, es posible formar n_1.n_2.....n_k k tuplas ordenadas (a_{1j_1},a_{2j_2},...,a_{kj_k}) conteniendo un elemento de cada tipo, $1 \leq j_i, \leq n_i$, i=1,2,...,k.

Definición 2 *Considere un conjunto de n elementos a_1,a_2,...,a_n. Cualquier arreglo ordenado (a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_r}) de r de aquellos n símbolos es llamado una muestra ordenada de tamaño r.*

Definición 3 (Muestreo con remplazo) *Los elementos para formar la muestra se seleccionan uno por uno, las repeticiones de los elementos son permitidas y se pueden tomar muestras de un tamaño arbitrario.*

Definición 4 (Muestreo sin remplazo) *Los elementos para formar la muestra se seleccionan uno por uno, una vez seleccionado un elemento éste no se coloca otra vez, así que no pueden haber repeticiones. El tamaño de la muestra no puede exceder a n, el tamaño de la población.*

Regla 2 Si las muestras ordenadas de tamaño r son tomadas de una población de n elementos, hay n^r diferentes muestras con remplazo y P_r^n muestras sin remplazo.

Modelo I: Supóngase que se colocan r pelotas de distinto color en n cajas numeradas y diferentes con $r \leq n$, con la condición de que cada caja puede contener una pelota. El número total de maneras distintas de colocar las pelotas es: n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = $\frac{n!}{(n-r)!}$

Notación: P_r^n = n(n-1)(n-2)...(n-r+1).

Definición 5 *Por permutar r de n objetos distintos, entendemos acomodar r de estos n objetos en algún orden.*

<u>Modelo II</u>: Supongase que se permutan r objetos de un total de n objetos diferentes. El número total de maneras distintas de permutar r objetos de un total de n (r$\leq$n) es: n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = P_r^n.

<u>Modelo III</u>: Igual que el modelo I. Pero, una caja puede contener tantas pelotas como queramos. Entonces, hay n^r maneras de colocar r pelotas de color dentro de n cajas numeradas.

<u>Modelo IV</u>: Igual que el modelo II. Sólo que hay n tipos diferentes de objetos con una fuente infinita de cada tipo, entonces hay n^r maneras de acomodar r de estos n tipos de objetos.

<u>Modelo V</u>: El número de maneras de colocar r pelotas de color en n cajas numeradas con r $\leq$ n, con la condición de que cada caja puede contener una pelota, donde q_1 de estas pelotas son de un color, q_2 de ellas de un segundo color, ... , q_t de ellas son de un t-ésimo color es $\frac{P_r^n}{q_1!q_2!...q_t!}$ donde $q_1 + q_2 + ... + q_t$ = r.

<u>Modelo VI</u>: El número permutaciones diferentes de n objetos de los cuales n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, ... , n_k de un k-ésimo tipo es: $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ donde $n_1 + n_2 + ... + n_t$ = n.

<u>Modelo VII</u>: El número de maneras de distribuir o seleccionar r pelotas del mismo color en n cajas numeradas, si cada caja puede contener una pelota es: $\frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.
<u>Notación</u>: $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

<u>Modelo VIII</u> Seleccionar r de n objetos distintos. El número de maneras de seleccionar r objetos de n objetos distintos es C_r^n.

<u>Regla 3</u> Hay C_r^n diferentes subpoblaciones de tamaño r $\leq$n de una población de n elementos.
<u>Nota</u>: Un conjunto con n elementos tiene: C_r^n subconjuntos de r elementos.

<u>Modelo IX</u> El número de formas de partir un conjunto de n objetos en r celdas con n_1 elementos en la primera celda, n_2 elementos en la segunda y así sucesivamente, es:
$$\begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, ..., n_r \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!} = \begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} n-n_1-n_2-...-n_{r-1} \\ n_r \end{pmatrix}$$
donde $n_1 + n_2 + ... + n_r$ = n.

<u>Regla 4</u> Considere una población de n elementos. El número de maneras en las cuales la población puede ser particionada en k subpoblaciones de tamaño r_1,r_2,...,r_k, respecti-

vamente, $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$, $0 \leq r_i \leq n$, es dado por $\binom{n}{r_1, r_2, ...r_k}$.

Modelo X Supóngase que se distribuyen r pelotas del mismo color en n cajas numeradas, y se puede colocar tantas pelotas como se quiera en una caja. El número de maneras de distribuir las pelotas es C_r^{n+r-1}.

Modelo XI El número de maneras de seleccionar r objetos apartir de n objetos distintos, con selecciones repetidas es C_r^{n+r-1}.

Modelo XII El número de permutaciones de n objetos distintos agregados en un círculo es (n-1)!.

Teorema 1 (Principio de inclusión y exclusión) *Considérese un conjunto S con $\mid S \mid = N$ y condiciones c_i, $1 \leq i \leq t$, que cumplen algunos elementos de S. El número de elementos de S que no satisfacen ninguna de las condiciones c_i, $1 \leq i \leq t$, se expresa por $\overline{N} = N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}...\overline{c_t})$ donde:*
$\overline{N} = N - [N(c_1) + N(c_2) + ... + N(c_t)] + [N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + ... + N(c_1c_t) + N(c_2c_3) + ... + N(c_{t-1}c_t)] - [N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + ... + N(c_1c_2c_t) + N(c_1c_3c_4) + ... + N(c_1c_3c_t) + ... + N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)] + ... + (-1)^t N(c_1c_2...c_t)$.
o
$\overline{N} = N - \sum_{1\leq i\leq t} N(c_i) + \sum_{1\leq i<j\leq t} N(c_ic_j) - \sum_{1\leq i<j<k\leq t} N(c_ic_jc_k) + ... + (-1)^t N(c_1c_2...c_t)$.
Nota:
$N(c_i)$ *es el # de elementos en S que cumplen la condición* c_i, $1 \leq i \leq t$.
$N(c_ic_j)$ *es el # de elementos en S que cumplen ambas condiciones* c_i *y* c_j *con* $i \neq j$.
$N(c_ic_jc_k)$ *es el # de elementos en S que cumplen las condiciones* c_i, c_j *y* c_k.
Para $1 \leq i \leq t$, $N(\overline{c_i}) = N - N(c_i)$ *denota el número de elementos de S que no cumplen la condición* c_i.
Para $1 \leq i, j \leq t$, $i \neq j$, $N(\overline{c_i}\,\overline{c_j})$ = # *de elementos en S que no cumplen ninguna de las condiciones* c_i *o* c_j.

2 Bibliografía

- Grimaldi, R. (1998), Matemáticas Discretas y Combinatoria. Addison Wesley Longman. México.
- Liu, C. (1995), Elementos de Matemáticas Discretas. McGraw-Hill. México.
- Rohatgi, V. y Saleh, A. (2001), An Introduction to Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Inc.