Indicadores

CC3039

Valor esperado (E)

El valor esperado de una variable aleatoria X (E[X]) es un número real, que representa **(ojo que no digo "es")** el número que mejor representa a todos los resultados del experimento.

En el caso de X discreto, E[X] es un promedio ponderado:

$$E[X] = \sum_i x_i P\{X = x_i\}$$

<u>Ejercicio</u>: calcule el valor esperado de un dado justo

Valor esperado (E)

¿Cuál es el valor esperado del lanzamiento de un dado justo?

E[X] = 1*P(X = 1) ... 6*P(X = 6)
E[X] = 1/6 + 2/6 + .. + 6/6
E[X] = 3.5

Noten que es posible que:

para todo s en S, X(s) != E[X]

Valor esperado (E)

Si X es continuo, definimos el valor esperado como sigue:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Propiedades de E[X]

Si nosotros queremos operar valores esperados, podemos pensar en calcular el valor esperado de una función sobre una variable aleatoria. En general:

$$E\left[g(X)\right] = \sum_{x} g(x)p(x)$$

$$E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Corolarios

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Ejercicio: demuestre que

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Varianza (Var)

E[X] nos empieza a dar información importante sobre X, pero no es suficiente. No nos dice nada sobre qué tan dispersos son los posibles resultados. Para ello introducimos el siguiente indicador:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Ejercicio: demuestre que:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Covarianza (Cov)

Para dos variables aleatorias X y Y definimos la covarianza como sigue:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right]$$

Propiedades:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[XY\right] - E\left[X\right]E\left[Y\right]$$

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Ejercicio: demuestre que si X y Y son independientes:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Correlación (Corr)

Es una medida de la dependencia entre dos variables aleatorias X y Y. La definimos como sigue:

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

Si X y Y son directamente proporcionales, Corr(X, Y) = 1, si X y Y son inversamente proporcionales Corr(X, Y) = -1