1 Probabilidades

Definición 1 *Un experimento aleatorio o estadístico es un experimento en el cual:*
(a) Todos los resultados del experimento son conocidos por anticipado.
(b) Cualquier ejecución del experimento provee un resultado que no es conocido de antemano.
(c) El experimento puede ser repetido bajo idénticas condiciones.

Definición 2 *Un σ-algebra S es una clase no vacía de subconjuntos de Ω que cumple con:*
(1) $\emptyset \in S$.
(2) Si $E \in S \Longrightarrow E^c = \Omega \setminus E \in S$.
(3) Si $\{E_n\}, E_n \in S, n = 1, 2, ...$(una secuencia de subconjuntos de Ω) $\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$.
Nota: S es cerrado bajo complemento y cerrado bajo uniones contable.
De (1) y (2) se tiene: $\Omega \in S$.
De (3) se tiene: Si $A,B \in S$ Entonces $A \cup B \in S$.
De (2) y (3) se tiene: Si $A,B \in S$ Entonces $A \cap B \in S$.

Definición 3 *El espacio muestral de un experimento estadístico es una pareja (Ω,S), donde:*
(a) Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
(b) S es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.
Nota: El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento es llamado el espacio muestral.
Si el conjunto Ω contiene sólo un numero finito de puntos, se dice que (Ω,S) es un espacio muestral finito.
Si el conjunto Ω contiene a lo más un número contable de puntos, se dice que (Ω,S) es un espacio muestral discreto.
Si el conjunto Ω contiene un número no contable puntos, se dice que (Ω,S) es un espacio muestral no contable.
En particular, si $\Omega = R_k$ o algún rectángulo en R_k, (Ω,S) es llamado un espacio muestral continuo.

Definición 4 *Un elemento de Ω es llamado un punto muestral.*

Definición 5 *Un conjunto unitario en S es llamado evento simple.*

Definición 6 *Cualquier conjunto $A \in S$ es conocido como un evento.*
Nota: Un evento ocurre si el resultado del experimento corresponde a los puntos en A.
Ω es el evento seguro o cierto, y $\emptyset$ es el evento imposible.

Definición 7 *Sea (Ω,S) un espacio muestral. Un función P definida sobre S es llamada una medida de probabilidad (o probabilidad) si satisface las siguientes condiciones:*
(i) P(A) $\geq 0, \forall A \in S$.
(ii) P(Ω)=1.
(iii) Sea $\{A_n\}, A_n \in S$, n=1,2,..., una secuencia disjunta de conjuntos; es decir, $A_j \cap A_k = \emptyset$ para $j \neq k \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$. Entonces
$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
Nota: Formas de calcular la probabilidad:
1) Modelo de la frecuencia relativa (o a posteriori): Utiliza datos que se han observado empíricamente, registra la frecuencia con que ha ocurrido algún evento en el el pasado y estima la probabilidad de que el evento ocurra nuevamente con base en estos datos históricos.
$P(evento) = \frac{\#\, de\, veces\, que\, ha\, ocurrido\, el\, evento\, en\, el\, pasado}{\#\, total\, de\, observaciones}$
2) Modelo subjetivo: Se utiliza cuando se desea asignar probabilidad a un evento que nunca ha ocurrido. Este modelo requiere establecer la probabilidad de algún evento con base en el mejor criterio disponible. En muchos casos esto puede ser apenas una conjetura hecha sobre cierta base.
3) Modelo clásico (o a priori): Es el que relaciona con mayor frecuencia con las apuestas y juegos de azar.
$P(evento) = \frac{\#\, de\, formas\, en\, la\, que\, puede\, ocurrir\, un\, evento}{\#\, total\, de\, posibles\, resultados}$

Definición 8 *La tripleta (Ω,S,P) es llamada un espacio probabilístico.*

Teorema 1 *P($\emptyset$)=0.*

Teorema 2 *Sean $n > 1$ eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, ..., A_n \in S$. Entonces $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.*

Corolario 3 *Si $A \in S$, entonces $P(A^c)$ = 1 - P(A).*

Teorema 4 *Sea A,B $\in$ S, entonces P(A)=P(A$\cap$B)+P(A$\cap B^c$) y P(A$\setminus$B)=P(A$\cap B^c$)=P(A)-P(A$\cap$B).*

Teorema 5 *Sea A,B $\in$ S y A $\subseteq$ B, entonces P(A) $\leq$ P(B).*

Corolario 6 $\forall$ *A $\in$ S, 0 $\leq$ P(A) $\leq$ 1.*

Teorema 7 *Si A,B $\in$ S, entonces P(A$\cup$B) = P(A) + P(B) - P(A$\cap$B).*

Corolario 8 *Si A,B $\in$ S, entonces P(A$\cup$B) $\leq$ P(A)+P(B).*

Teorema 9 (Principio de Inclusión-Exclusión) *Sean $A_1, A_2, ..., A_n \in$ S. Entonces P($\bigcup_{k=1}^n A_k$) = $\sum_{k=1}^n P(A_k)$ - $\sum_{k_1<k_2}^n P(A_{k_1} \cap A_{k_2})$ + $\sum_{k_1<k_2<k_3}^n P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3})$ + . . . +(-1)$^{n+1}$P($\bigcap_{k=1}^n A_k$) .*

Teorema 10 (Desigualdad de Bonferroni) *Sean n > 1 eventos $A_1, A_2, ..., A_n \in$ S. Entonces $\sum_{i=1}^n P(A_i)$ - $\sum_{i<j}^n P(A_i \cap A_j)$ $\leq$ P($\bigcup_{i=1}^n A_i$) $\leq$ $\sum_{i=1}^n P(A_i)$.*

Teorema 11 (Desigualdad de Boole) *Para cualesquiera dos eventos A y B, P(A $\cap$ B) $\geq$ 1 - P(A^c) - P(B^c) .*

Corolario 12 *Sea $\{A_j\}$, j=1,2,..., una secuencia contable de eventos; entonces P($\bigcap_{j=1}^\infty A_i$) $\geq$ 1 - $\sum_{i=1}^\infty P(A_i^c)$.*

Definición 9 *Sea (Ω,S,P) un espacio probabilístico, y sea H $\in$ S con P(H) > 0. Para cualquier A $\in$ S. La probabilidad condicional de un evento A dado que ocurrió un evento H es igual a P(A | H) = $\frac{P(A \cap H)}{P(H)}$. Probabilidades condicionales permanecerán indefinidas cuando P(H)=0.*

Teorema 13 *Sea (Ω,S,P) un espacio probabilístico , y sea H $\in$ S con P(H) > 0. Entonces, (Ω ,S,P_H), donde P_H(A) = P(A | H) , $\forall$ A $\in$ S, es un espacio probabilístico. Nota: P_H es una medida de probabilidad.*

Teorema 14 *Sea (Ω,S,P) un espacio probabilístico , sea H $\in$ S con P(H) > 0. Entonces $P_H(\emptyset)$ = 0.*

Teorema 15 *Sea (Ω,S,P) un espacio probabilístico y sea H $\in$ S con P(H) > 0. Si n > 1 eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, ..., A_n \in$ S, entonces $P_H(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ = $\sum_{i=1}^n P_H(A_i)$.*

Teorema 16 *Sea (Ω,S,P) un espacio probabilístico y sea H $\in$ S con P(H) > 0. Si A es un evento en S, entonces $P_H(A^c)$ = 1 - P_H(A).*

Teorema 17 *Sea* (Ω,S,P) *un espacio probabilístico y sea* $H \in S$ *con* $P(H) > 0$. *Si* $A,B \in S$, *entonces* $P_H(A) = P_H(A \cap B) + P_H(A \cap B^c)$.

Teorema 18 *Sea* (Ω,S,P) *un espacio probabilístico y sea* $H \in S$ *con* $P(H) > 0$. *Si* $A,B \in S$, *entonces* $P_H(A \cup B) = P_H(A) + P_H(B) - P_H(A \cap B)$.

Teorema 19 *Sea* (Ω,S,P) *un espacio probabilístico y sea* $H \in S$ *con* $P(H) > 0$. *Si* $A,B \in S$ *y* $A \subseteq B$, *entonces* $P_H(A) \leq P_H(B)$.

Teorema 20 *Sea* (Ω,S,P) *un espacio probabilístico y sea* $H \in S$ *con* $P(H) > 0$. *Si* $\{A_j\}$, $j=1,2,\ldots,n$ *una secuencia finita de eventos; entonces* $P_H(\bigcup_{j=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P_H(A_i)$.

Teorema 21 (Regla de la multiplicación) *Sea* (Ω,S,P) *un espacio probabilístico y* $A_1, A_2, \ldots, A_k \in S$, *con* $P(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j) > 0$. *Entonces* $P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\Big) = P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P\Big(A_k \mid \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\Big)$.

Teorema 22 *Sea* $\{H_n\}$ *una secuencia disjunta de eventos tales que* $P(H_n) > 0$, $n = 1,2,\ldots$, *y* $\cup_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega$. *Dado* $B \in S$, *entonces* $P(B)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B \mid H_i)P(H_i)$.

Teorema 23 (Regla de Bayes) *Sea* $\{H_n\}$ *una secuencia disjunta de eventos tales que* $P(H_n) > 0$, $n = 1,2,\ldots$, *y* $\cup_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega$. *Dado* $B \in S$ *con* $P(B) > 0$. *Entonces* $P(H_j \mid B) = \frac{P(H_j)P(B|H_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(B|H_i)}$, $j = 1,2,\ldots$.

Definición 10 *Dos eventos, A y B, se dicen ser independiente si y sólo si* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Nota: Si $P(A) = 0$, *entonces A es independiente de cualquier* $E \in S$. *También, cualquier evento* $A \in S$ *es independiente de* $\emptyset$ *y* Ω.

Teorema 24 *Si A y B son eventos independientes, entonces* $P(A \mid B) = P(A)$ *si* $P(B) > 0$ *y* $P(B \mid A) = P(B)$ *si* $P(A) > 0$.

Teorema 25 *Si A y B son eventos independientes, entonces también son independientes los eventos A y* B^c, *los eventos* A^c *y B y los eventos* A^c *y* B^c.

Definición 11 *Dos eventos, A y B, son mutuamente excluyentes si* $A \cap B = \emptyset$.
Nota: Dos eventos son mutuamente excluyentes si ellos no pueden ocurrir al mismo tiempo.
Si 2 eventos, cada uno con probabilidad no cero, son mutuamente excluyentes, ellos son dependientes desde que la ocurrencia de uno automaticamente descartará la ocurrencia del otro.
Similarmente, Si A y B son eventos independientes y P(A) > 0, P(B) > 0, entonces A y B no pueden ser mutuamente excluyentes.

Definición 12 *Dado U una familia de eventos de S. Se dice que los eventos de U son independientes por pares si y sólo si para cada pareja de eventos distintos A, B* $\in$ *U, P(A* $\cap$ *B) = P(A).P(B) .*

Definición 13 *Una familia de eventos U se dice ser mutuamente o completamente independiente si y sólo si para cualquier subcolección finita* A_{i_1},A_{i_2},...,A_{i_k} *de U la siguiente relación se cumple* $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$
Nota: Mutuamente o completamente independientes implica independencia por pares.

Ejemplo: Independencia por pares no implica mutuamente independencia. Dados A_1 denota el evento de una cara impar en el primer dado, A_2 el evento de una cara impar en el segundo dado y A_3 el evento de total impar en el experimento aleatorio que consiste de lanzar 2 dados. P(A_1).P(A_2)=$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{2}$=P($A_1 \cap A_2$)
P(A_1).P(A_3)=$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{2}$=P($A_3 \mid A_1$).P(A_1)=P($A_1 \cap A_3$)
P(A_2).P(A_3)=$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{2}$=P($A_3 \mid A_2$).P(A_2)=P($A_2 \cap A_3$)
Por lo tanto, A_1, A_2 y A_3 son independientes por pares.
Sin embargo, P($A_1 \cap A_2 \cap A_3$)=0$\neq\frac{1}{8}$=P(A_1).P(A_2).P(A_3)

2 Bibliografía

- Rohatgi, V. y Saleh, A. (2001), An Introduction to Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Inc.