Procesos de Poisson y Variables Gamma

CC3039

Procesos de Poisson

Eventos suceden en el tiempo. N(t) determina la cantidad de eventos que suceden en el intervalo [0, t], si para algún **lambda** tenemos que:

1. N(0) = 0
2. La cantidad de ocurrencias en intervalos que no se intersectan, es independiente.
3. La cantidad de ocurrencias en un intervalo depende únicamente de la longitud del intervalo, y no de su lugar, ni de resultados en otros intervalos.
4. Para un intervalo muy pequeño **h**, la probabilidad que un solo evento ocurra es **lambda*h.**
5. Para un intervalo muy pequeño, la probabilidad de que ocurran 2 o más eventos es casi nula.

Procesos de Poisson

Si las condiciones anteriores se cumplen, decimos que tenemos un **Proceso de Poisson.**

Se llama proceso de Poisson porque la variable aleatoria que define la cantidad de eventos en un intervalo t, es una variable aleatoria de Poisson, con media **lambda*t**.

Procesos de Poisson

Analicemos el intervalo $[0, t]$, y dividamos en m subintervalos de longitud t/m.

Si m tiende a infinito, ¿cuál es la probabilidad de obtener un evento en $[0, t/m]$?

Procesos de Poisson

Definamos "éxito" como un intervalo en el que sucede al menos un evento. **Noten como** por la **condición 5**, este número es igual a la cantidad de eventos en t.
Por la **condición 4**, sabemos que **p = lambda*t/m**, y si sabemos que la cantidad de intentos es **n = m**, podemos modelar la variable aleatoria "cantidad de eventos en un proceso de Poisson" como una variable aleatoria binomial (n, p).

Por el argumento que cuando **n tiende a infinito** y **p tiende a 0**, podemos modelar esta variable binomial como una de Poisson, decimos que la cantidad de eventos en un intervalo t (de un proceso de Poisson) es una variable aleatoria de Poisson con **$lambda_2$ = lambda*t**

Procesos de Poisson

Consideren la variable aleatoria X_n, que denota el tiempo entre el n-ésimo -1 y el n-ésimo evento en un proceso de Poisson. Notemos que:

$P(X1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-lambda*t}(lambda*t)^0 / 0! = e^{-lambda*t}$

Esto es, la probabilidad de que el primer evento ocurra luego de t, es igual a la probabilidad que antes de t no ocurra ningún evento. De lo anterior obtenemos:

$P(X1 <= t)$ $= 1 - e^{-lambda*t}$

Por tanto, X1 es una variable aleatoria exponencial.

Procesos de Poisson

Para calcular la distribución de la llegada del segundo evento, tenemos:

$P(X2 > t \mid X1 = s) = P(0 \text{ eventos en } (s, s + t) \mid X1 = s)$

$= P(0 \text{ eventos en } (s, s + t))$ **(cond3)**

$= e^{-lambda*t}$

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$$

¿Son independientes?

Procesos de Poisson

Como X2 no depende de X1:

$P(X2 > t) = 1 - P(X2 <= t) = 1 - e^{-lambda*t}$, por tanto X2 es exponencial con parámetro **lambda**.

De forma similar podemos generalizar para Xn.

Variable aleatoria Gamma

Parámetros: lambda (de Proceso de Poisson), n: número del evento de interés.

Distribución:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0$$

Explicación: esta variable modela el tiempo en el que el n-ésimo evento ocurre en un proceso de Poisson.