Rockafellar, R. Tyrrell. Convex analysis. Vol. 28. Princeton university press, 1970. 盛宝怀译

屈彬

2019 年 7 月 3 日

1 基本概念

1.1 仿射集（2019 年 7 月 2 日）

定义 1.1 (向量空间) $\boldsymbol{R}$ 表示实数系，其中 $\boldsymbol{R}^n$ 表示由实 n 元组 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ 所组成的向量空间。

定义 1.2 (向量的内积) 记两向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^*$ 在实数系 $\boldsymbol{R}^n$ 中的内积为

$$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^* >= \xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^* + ... + \xi_n\xi_n^*.$$

定义 1.3 (线性变换) 设向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 到向量空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的线性变换为 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为一 $m \times n$ 阶实矩阵，称 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换 $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 的**变换矩阵**。记 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{y}^*$ 为一实 m 元组，那么它们存在以下内积关系

$$< \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^* >=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}^* > .$$

定义 1.4 (直线) 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中两个不同的点，记通过 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的直线为 $l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，那么 $l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 上所有的点都可以表示为 $\boldsymbol{x}$ 坐标和 $\boldsymbol{y}$ 坐标系数和为 *1* 的线性叠加，即

$$l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv (1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}, \lambda \in \boldsymbol{R}.$$

定义 1.5 (仿射集) 令 M 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个子集，若 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M \& \forall \lambda \in \boldsymbol{R}$ 都有

$$(1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} \in M$$

即经过子集 M 中任意两点的直线完全处于 M 内，则称 M 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的**仿射集**（*affine set*），又称作**仿射流形**（*affine manifold*）、**仿射变量**（*affine variety*）、**线形变量**（*linear variety*）或称 M 是**平坦的**（*flat*）。空集 $\emptyset$ 和全集 $\boldsymbol{R}^n$ 一定是空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的仿射集。

定义 1.6 (线性子空间) 若 M 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个线性子空间（简称子空间），那么以下条件必须同时成立

1. $\boldsymbol{0} \in M$。
2. $\forall \boldsymbol{x} \in M \& \lambda \in \boldsymbol{R}$ 满足 $\lambda \boldsymbol{x} \in M$（乘法封闭性）。
3. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ 满足 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$（加法封闭性）。

定理 1.1 $\boldsymbol{R}^n$ 中包含原点的仿射集是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间。

证明 1.1 若 M 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个包含原点的仿射集，则 $\boldsymbol{0} \in M$。
下面证明 M 满足乘法封闭性。因为 M 是一个包含原点的仿射集，那么对于原点 $\boldsymbol{0}$ 和 M 中任一点 $\boldsymbol{x}$，有

$$(1-\lambda)\boldsymbol{0} + \lambda \boldsymbol{x} \in M \Leftrightarrow \lambda \boldsymbol{x} \in M, \lambda \in \boldsymbol{R}$$

即 M 满足乘法封闭性。

下面证明 M 满足加法封闭性。设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 M 中的任意两点，因为 M 是一个仿射集，所以满足

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y} \in M \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \in M$$

又因为 M 满足乘法封闭性，所以

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$$

即 M 满足加法封闭性。

综上，M 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个子空间。

定义 1.7 (仿射集的平行) 仿射集 M 与 L 平行是指存在 $\boldsymbol{a}$ 使得 $M = L + \boldsymbol{a}$。易证平行具有传递性，若仿射集 L_1 和 L_2 皆平行于 M，那么 L_1 平行于 L_2。

定理 1.2 $\boldsymbol{R}^n$ 上的每个非空仿射集 M 一定平行于唯一的子空间 L，其中 L 由下式给出。

$$L = M - M = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\}$$

证明 1.2 首先证明 M 不能同时与两个不同的子空间平行。设 L_1 和 L_2 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的两个子空间，且 L_1 和 L_2 皆平行于 M，则 L_1 与 L_2 互相平行，那么存在 $\boldsymbol{a}$ 使得

$$L_2 = L_1 + \boldsymbol{a}$$

因为 L_1 是一个子空间，所以 $\boldsymbol{0} \in L_1$，则 $\boldsymbol{a} \in L_2$。设 $\boldsymbol{x}$ 是 L_1 中任意一点，则 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in L_2$。根据加法封闭性，得 $\boldsymbol{x} \in L_2$，那么 $L_1 \subseteq L_2$。同理可证 $L_2 \subseteq L_1$。因为 $L_1 \subseteq L_2$ 且 $L_2 \subseteq L_1$，所以 $L_1 = L_2$，子空间唯一性得证。

下面证明子空间 $L = M - M$。设 $\boldsymbol{x}$ 是 M 中任意一点，那么仿射集 $M - \boldsymbol{x}$ 平行于 M 且 $M - \boldsymbol{x}$ 包含 $\boldsymbol{0}$。那么根据定理*1.1*，$M - \boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个子空间，记作 L，则 $L = M - \boldsymbol{x}$。因为 $\boldsymbol{x}$ 是 M 中的任意一点，无论选择什么样的 $\boldsymbol{x}$，都会有 $L = M - \boldsymbol{x}$，所以 $L = M - M$ 成立。

综上，定理*1.2*得证。