

Rockafellar, R. Tyrrell. Convex analysis. Vol. 28.
Princeton university press, 1970. 盛宝怀译

屈彬

2019 年 7 月 2 日

1 基本概念

1.1 仿射集 (2019 年 7 月 2 日)

定义 1.1 (向量空间) R 表示实数系, 其中 R^n 表示由实 n 元组 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 所组成的向量空间。

定义 1.2 (向量的内积) 记两向量 x 与 x^* 在实数系 R^n 中的内积为

$$\langle x, x^* \rangle = \xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^* + \dots + \xi_n \xi_n^*.$$

定义 1.3 (线性变换) 设向量空间 R^n 到向量空间 R^m 的线性变换为 $x \rightarrow Ax$, 其中 A 为一 $m \times n$ 阶实矩阵, 称 A 为线性变换 $R^n \rightarrow R^m$ 的变换矩阵。记 A^* 为 A 的转置矩阵, y^* 为一实 m 元组, 那么它们存在以下内积关系

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle.$$

定义 1.4 (直线) 设 x 和 y 为空间 R^n 中两个不同的点, 记通过 x 和 y 的直线为 $l(x, y)$, 那么 $l(x, y)$ 上所有的点都可以表示为 x 坐标和 y 坐标系数和为 1 的线性叠加, 即

$$l(x, y) \equiv (1 - \lambda)x + \lambda y, \lambda \in R.$$

定义 1.5 (仿射集) 令 M 为 R^n 中的一个子集, 若 $\forall x, y \in M \& \forall \lambda \in R$ 都有

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in M$$

即经过子集 M 中任意两点的直线完全处于 M 内, 则称 M 为 \mathbf{R}^n 中的仿射集 (affine set), 又称作仿射流形 (affine manifold)、仿射变量 (affine variety)、线形变量 (linear variety) 或称 M 是平坦的 (flat)。空集 \emptyset 和全集 \mathbf{R}^n 一定是空间 \mathbf{R}^n 中的仿射集。

定义 1.6 (线性子空间) 若 M 是 \mathbf{R}^n 的一个线性子空间 (简称子空间), 那么以下条件必须同时成立

1. $\mathbf{0} \in M$ 。
2. $\forall \mathbf{x} \in M, \lambda \in \mathbf{R}$ 满足 $\lambda \mathbf{x} \in M$ (乘法封闭性)。
3. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ 满足 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$ (加法封闭性)。

定理 1.1 \mathbf{R}^n 中包含原点的仿射集是 \mathbf{R}^n 的子空间。

证明 1.1 若 M 为 \mathbf{R}^n 的一个包含原点的仿射集, 则 $\mathbf{0} \in M$ 。

下面证明 M 满足乘法封闭性。因为 M 是一个包含原点的仿射集, 那么对于原点 $\mathbf{0}$ 和 M 中任一点 \mathbf{x} , 有

$$(1 - \lambda)\mathbf{0} + \lambda\mathbf{x} \in M \Leftrightarrow \lambda\mathbf{x} \in M, \lambda \in \mathbf{R}$$

即 M 满足乘法封闭性。

下面证明 M 满足加法封闭性。设 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 是 M 中的任意两点, 因为 M 是一个仿射集, 所以满足

$$\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} \in M \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in M$$

又因为 M 满足乘法封闭性, 所以

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$$

即 M 满足加法封闭性。

综上, M 是 \mathbf{R}^n 的一个子空间。

定义 1.7 (仿射集的平行) 仿射集 M 与 L 平行是指存在 \mathbf{a} 使得 $M = L + \mathbf{a}$ 。易证平行具有传递性，若仿射集 L_1 和 L_2 皆平行于 M ，那么 L_1 平行于 L_2 。

定理 1.2 \mathbf{R}^n 上的每个非空仿射集 M 一定平行于唯一的子空间 L ，其中 L 由下式给出。

$$L = M - M = \{\mathbf{x} - \mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}$$

证明 1.2 首先证明 M 不能同时与两个不同的子空间平行。设 L_1 和 L_2 为 \mathbf{R}^n 的两个子空间，且 L_1 和 L_2 皆平行于 M ，则 L_1 与 L_2 互相平行，那么存在 \mathbf{a} 使得

$$L_2 = L_1 + \mathbf{a}$$

因为 L_1 是一个子空间，所以 $\mathbf{0} \in L_1$ ，则 $\mathbf{a} \in L_2$ 。设 \mathbf{x} 是 L_1 中任意一点，则 $\mathbf{x} + \mathbf{a} \in L_2$ 。根据加法封闭性，得 $\mathbf{x} \in L_2$ ，那么 $L_1 \subseteq L_2$ 。同理可证 $L_2 \subseteq L_1$ 。因为 $L_1 \subseteq L_2$ 且 $L_2 \subseteq L_1$ ，所以 $L_1 = L_2$ ，子空间唯一性得证。

下面证明子空间 $L = M - M$ 。设 \mathbf{x} 是 M 中任意一点，那么仿射集 $M - \mathbf{x}$ 平行于 M 且 $M - \mathbf{x}$ 包含 $\mathbf{0}$ 。那么根据定理 1.1， $M - \mathbf{x}$ 是 \mathbf{R}^n 中的一个子空间，记作 L ，则 $L = M - \mathbf{x}$ 。因为 \mathbf{x} 是 M 中的任意一点，无论选择什么样的 \mathbf{x} ，都会有 $L = M - \mathbf{x}$ ，所以 $L = M - M$ 成立。

综上，定理 1.2 得证。