Rockafellar, R. Tyrrell. Convex analysis. Vol. 28. Princeton university press, 1970. 盛宝怀译

屈彬

2019 年 7 月 9 日

1 基本概念

1.1 仿射集（2019 年 7 月 2 日）

定义 1.1 (向量空间) $\boldsymbol{R}$ 表示实数系，其中 $\boldsymbol{R}^n$ 表示由实 n 元组 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ 所组成的向量空间。

定义 1.2 (向量的内积) 记两向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^*$ 在实数系 $\boldsymbol{R}^n$ 中的内积为

$$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^* >= \xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^* + ... + \xi_n\xi_n^*.$$

定义 1.3 (线性变换) 设向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 到向量空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的线性变换为 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为一 $m \times n$ 阶实矩阵，称 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换 $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 的**变换矩阵**。记 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{y}^*$ 为一实 m 元组，那么它们存在以下内积关系

$$< \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^* >=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}^* > .$$

定义 1.4 (直线) 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中两个不同的点，记通过 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的直线为 $l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，那么 $l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 上所有的点都可以表示为 $\boldsymbol{x}$ 坐标和 $\boldsymbol{y}$ 坐标系数和为 *1* 的线性叠加，即

$$l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv (1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}, \lambda \in \boldsymbol{R}.$$

定义 1.5 (仿射集) 令 M 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个子集，若 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M \& \forall\lambda \in \boldsymbol{R}$ 都有

$$(1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y} \in M$$

即经过子集 M 中任意两点的直线完全处于 M 内，则称 M 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的**仿射集**（*affine set*），又称作**仿射流形**（*affine manifold*）、**仿射变量**（*affine variety*）、**线形变量**（*linear variety*）或称 M 是**平坦的**（*flat*）。空集 $\emptyset$ 和全集 $\boldsymbol{R}^n$ 一定是空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的仿射集。

定义 1.6 (线性子空间) 若 M 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个线性子空间（简称子空间），那么以下条件必须同时成立

1. $\boldsymbol{0} \in M$。
2. $\forall \boldsymbol{x} \in M \& \lambda \in \boldsymbol{R}$ 满足 $\lambda \boldsymbol{x} \in M$（乘法封闭性）。
3. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ 满足 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$（加法封闭性）。

定理 1.1 $\boldsymbol{R}^n$ 中包含原点的仿射集是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间。

证明 1.1 若 M 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个包含原点的仿射集，则 $\boldsymbol{0} \in M$。
下面证明 M 满足乘法封闭性。因为 M 是一个包含原点的仿射集，那么对于原点 $\boldsymbol{0}$ 和 M 中任一点 $\boldsymbol{x}$，有

$$(1-\lambda)\boldsymbol{0} + \lambda \boldsymbol{x} \in M \Leftrightarrow \lambda \boldsymbol{x} \in M, \lambda \in \boldsymbol{R}$$

即 M 满足乘法封闭性。

下面证明 M 满足加法封闭性。设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 M 中的任意两点，因为 M 是一个仿射集，所以满足

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y} \in M \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \in M$$

又因为 M 满足乘法封闭性，所以

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$$

即 M 满足加法封闭性。

综上，M 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个子空间。

定义 1.7 (仿射集的平行) 仿射集 M 与 L 平行是指存在 $\boldsymbol{a}$ 使得 $M=L+\boldsymbol{a}$。易证平行具有传递性，若仿射集 L_1 和 L_2 皆平行于 M，那么 L_1 平行于 L_2。

定理 1.2 $\boldsymbol{R}^n$ 上的每个非空仿射集 M 一定平行于唯一的子空间 L，其中 L 由下式给出。

$$L=M-M=\{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in M\}$$

证明 1.2 首先证明 M 不能同时与两个不同的子空间平行。设 L_1 和 L_2 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的两个子空间，且 L_1 和 L_2 皆平行于 M，则 L_1 与 L_2 互相平行，那么存在 $\boldsymbol{a}$ 使得

$$L_2=L_1+\boldsymbol{a}$$

因为 L_1 是一个子空间，所以 $\boldsymbol{0}\in L_1$，则 $\boldsymbol{a}\in L_2$。设 $\boldsymbol{x}$ 是 L_1 中任意一点，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\in L_2$。根据加法封闭性，得 $\boldsymbol{x}\in L_2$，那么 $L_1\subseteq L_2$。同理可证 $L_2\subseteq L_1$。因为 $L_1\subseteq L_2$ 且 $L_2\subseteq L_1$，所以 $L_1=L_2$，子空间唯一性得证。

下面证明子空间 $L=M-M$。设 $\boldsymbol{x}$ 是 M 中任意一点，那么仿射集 $M-\boldsymbol{x}$ 平行于 M 且 $M-\boldsymbol{x}$ 包含 $\boldsymbol{0}$。那么根据定理*1.1*，$M-\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个子空间，记作 L，则 $L=M-\boldsymbol{x}$。因为 $\boldsymbol{x}$ 是 M 中的任意一点，无论选择什么样的 $\boldsymbol{x}$，都会有 $L=M-\boldsymbol{x}$，所以 $L=M-M$ 成立。

综上，定理*1.2*得证。

定义 1.8 (仿射集的维数) 非空仿射集的维数等于与其平行的子空间的维数。特别地，定义空集 $\emptyset$ 的维数为 *-1*。维数为 *0*、*1*、*2* 的仿射集分别被称为点、线和平面。空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 $n-1$ 维仿射集被称为**超平面**（比空间少一维）。

定义 1.9 (正交) 若向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{y}$ 的内积为 *0*，即 $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>=0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交，记作 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$。

定义 1.10 (正交补（orthogonal complement）) 给定 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间 L，若对于一切 $\boldsymbol{y}\in L$，都有 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$，这些由 $\boldsymbol{x}$ 构成的集合称为 L 的正交补，记作 $L^{\perp}$。易证，空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中子空间 L 的维数与其正交补 $L^{\perp}$ 的维数之和等于空间的维数，即

$$dim(L)+dim(L^{\perp})=n.$$

另外，子空间的正交补的正交补是其本身，即

$$L = (L^{\perp})^{\perp}$$

借助正交补，可通过一维子空间刻画超平面。设 $\boldsymbol{b}$ 是一个非零向量, 那么集合 $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}\}$ 表示一个 $n-1$ 维的子空间（也表示一个经过原点的超平面），该子空间经过平移变换可表示任何与之平行的超平面，形式如下：

$$\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\}+\boldsymbol{a}=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}<\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}>\}.$$

定理 1.3 (超平面的表示) 给定 $\beta \in \boldsymbol{R}$ 以及非零 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$，集合

$$H = \{\boldsymbol{x}| <\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}>= \beta\}$$

可表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个超平面。其中，向量 $\boldsymbol{b}$ 正交于超平面 H，其余每个与 H 正交的向量为 $\boldsymbol{b}$ 的整倍数。

证明 1.3 略。

定理 1.4 (仿射集的表示) 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的仿射集可通过一个 n 元线性方程组表示。给定 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ 及 $m \times n$ 阶 $(m \le n)$ 实矩阵 $\boldsymbol{B}$，集合

$$M = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个仿射集。

证明 1.4 略。书中的证明不够严谨，应该仔细考虑 $m > n$，即方程组为超定方程组的情形。

定理 1.5 (子空间的表示) 设 L 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个子空间，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_m$ 为 $L^{\perp}$ 的一组基，那么

$$L = (L^{\perp})^{\perp} = \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}_m\} = \{\boldsymbol{x}| <\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}>= 0, i = 1, ..., m\} = \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = 0\}$$

其中，$\boldsymbol{B}$ 为一个 $m \times n$ 实矩阵，它的行向量为 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_m$。

联系定理1.4，仿射集 M 可通过子空间 L 表示，存在 $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$ 使得

$$M=L+\boldsymbol{a}=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$$

其中，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}$。

推论 1.1 $\boldsymbol{R}_n$ 中的每个仿射集都是有限个超平面的交集。

定理1.4中仿射集的表示也可以写成

$$M=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}=\{\boldsymbol{x}|<\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_1>=\beta_1,<\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_2>=\beta_2,...,<\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_m>=\beta_m\}$$

其中，$\boldsymbol{b}_i$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 个行（向量），β_i 为 $\boldsymbol{b}$ 的第 i 个分量，而根据定理1.3

$$H_i=\{\boldsymbol{x}|<\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}_i>=\beta_i\}$$

表示第 i 个超平面，则

$$M=\bigcap_{i=1}^{m}H_i$$

因为任意一个 m 维的仿射集也是 $m+1$ 维空间的超平面，所以仿射集与仿射集的交集依然是仿射集。

定义 1.11 (仿射包) 给定 $S\subset\boldsymbol{R}^n$（S 是一个集合），存在唯一一个包含 S 的最小的仿射集（例如，满足 $S\subseteq M$ 的所有仿射集的交集）。这个仿射集被称为 S 的仿射包（*afine hull*），记作 *affS*。*affS* 可以由所有形式为 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+...+\lambda_m\boldsymbol{x}_m$ 向量组成，其中 $\boldsymbol{x}_i\in S$ 且 $\lambda_1+...+\lambda_m=1$。

定义 1.12 (仿射无关) m+1 个向量 $\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m$ 的集合若使得 $\mathit{aff}\{\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m\}$ 的维数为 m，则称它们是仿射无关（*affinely independent*）的。反之，若 $\mathit{aff}\{\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m\}$ 的维数小于 m，则称它们是仿射相关的。

其中，以 $\boldsymbol{b}_0$ 的模作为 $\mathit{aff}\{\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m\}$ 到原点的距离，那么 $\boldsymbol{b}_0$ 满足

$$aff\{\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m\}=L+\boldsymbol{b}_0$$

其中

$$L=aff\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_0,...,\boldsymbol{b}_m-\boldsymbol{b}_0\}$$

是唯一平行于 $aff\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_m\}$ 的子空间。L 的维数为 m 当且仅当向量 $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0, ..., \boldsymbol{b}_m - \boldsymbol{b}_0$ 是线性无关的。

结合定理*1.4*和定理*1.5*，若仿射集 M 中的向量 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_m$ 是仿射无关的，则 M 中的任一向量 $\boldsymbol{x}$ 具有以下表达形式

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_0) + ... + \lambda_m(\boldsymbol{b}_m - \boldsymbol{b}_0) + \boldsymbol{b}_0 = \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + ... + \lambda_m\boldsymbol{b}_m + \boldsymbol{b}_0 - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{b}_0$$

即

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\boldsymbol{b}_i, \lambda_0 = -\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m}\lambda_i = 0$$

其中，称 $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ 为 M 中的**重心坐标系统**（*barycentric coordinate system*）。

定义 1.13 (仿射变换) 给定一个从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的变换 $T: \boldsymbol{x} \to T(\boldsymbol{x})$，若变换前后的满足系数保持，即对于每个 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任意两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 及 $\lambda \in \boldsymbol{R}$，都有

$$T((1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) = (1-\lambda)T(\boldsymbol{x}) + \lambda T(\boldsymbol{y})$$

则称 T 为仿射变换。

仿射变换的形式形如 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换，$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^m$ 且 $\boldsymbol{a} = T(\boldsymbol{0})$。

定理 1.6 如果一个从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的映射 T 为仿射变换，则对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的每个仿射集 M，像集 $T(M) = \{T(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x} \in M\}$ 也为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的仿射集。特别地，仿射变换保持仿射包不变：

$$aff(T(S)) = T(affS)$$

证明 1.5 首先证明像集 $T(M)$ 也为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的仿射集。设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为 $\boldsymbol{R}^n$ 中仿射集 M 上的任意两点，根据定义*1.5*，对于任意 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ 有

$$(1-\lambda)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$$

根据定义1.13，经过仿射变换后，满足

$$(1-\lambda)T(\boldsymbol{x})+\lambda T(\boldsymbol{y})=T((1-\lambda)\boldsymbol{x}+\lambda \boldsymbol{y})\in T(M)$$

因此像集 $T(M)$ 也为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的仿射集。

下面证明仿射包保持不变。设 S 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个集合，$affS$ 为 S 的仿射包，根据定义1.11，$affS$ 可以由所有形式为 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+...+\lambda_m\boldsymbol{x}_m$ 的向量组成，其中 $\boldsymbol{x}_i\in S$ 且 $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$。$T(S)$ 的仿射包 $aff(T(S))$ 可以表示为 $\lambda_1T(\boldsymbol{x}_1)+...+\lambda_mT(\boldsymbol{x}_m)$ 的形式。根据定义1.13，有

$$\lambda_1T(\boldsymbol{x}_1)+...+\lambda_mT(\boldsymbol{x}_m)=T(\lambda_1\boldsymbol{x}_1+...+\lambda_m\boldsymbol{x}_m)$$

即

$$aff(T(S))=T(aff(S))$$

综上所述，定理1.6得证

定理 1.7 设 $\{\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m\}$ 和 $\{\boldsymbol{b}_0^{'},\boldsymbol{b}_1^{'},...,\boldsymbol{b}_m^{'}\}$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中是仿射无关的，则存在将 $\boldsymbol{R}^n$ 映射到自身的一一对应的仿射变换 T 使得对于 $i=0,...,m$ 有 $T(\boldsymbol{b}_i)=\boldsymbol{b}_i^{'}$。如果 $m=n$，那么 T 是唯一的。

证明 1.6 由于时间有限，若定理与多面体编译关系不大，则不再给出证明过程。

进一步推广定理1.7，还可得到以下推论

推论 1.2 设 M_1 和 M_2 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中两个维数相同的仿射集，则存在 $\boldsymbol{R}^n$ 自身到自身的一一对应的仿射变换 T，使得 $T(M_1)=M_2$

定义 1.14 (仿射变换的图) 设 $T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ 是由空间 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个仿射变换，则 T 的图由向量 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^m$ 组成。易证，$\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^{n+m}$。

设 B 为由 $\boldsymbol{R}$