论文详细过程

郑智润

湘潭大学数学与计算科学学院，湘潭，411100

1 线性有限元方法的误差估计

1.1 模型问题及其变分形式

令Ω是有Lipschitz边界$\partial\Omega$的有界域,考虑模型问题为椭圆型偏微分方程:

$$\begin{cases} -\bigtriangledown\cdot(a\bigtriangledown u)=f & \text{in }\Omega, \\ u=0 & \text{on }\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$f\in L^2(\Omega)$, $a\in C^1(\Omega)$ 且 $a(x)\geq\tilde{a}>0$.

引入soblve空间:

$$H_0^1(G)=\left\{u|u\in L^2(G),u'\in L^2(G),v|_{\partial n=0}\right\},$$

$$L^2(G)=\left\{u|\int_\Omega u^2dX<c\right\}.$$

取$v\in H_0^1$,对方程(1.1)式使用虚功原理可得:

$$\int_\Omega -\nabla\cdot(a\nabla u)vdX=\int_\Omega fvdX,$$

由Green公式可以得出:

$$\int_\Omega -\nabla\cdot(a\nabla u)vdX=\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla vdX-\int_{\partial\Omega}(a(x)\nabla u)\vec{n}vdX,$$

由$v\in H_0^1$则知

$$\int_{\partial\Omega}(a(x)\bigtriangledown u)\vec{n}vdX=0,$$

代入到上式得出:

$$\int_\Omega -\nabla\cdot(a\nabla u)vdX=\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla vdX,$$

即有:

$$\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla vdX=\int_\Omega fvdX.$$

得出问题(1.1)的弱形式为: 找到 $u\in H_0^1$使得:

$$B(u,v)=L(v)\qquad\forall v\in H_0^1, \tag{1.2}$$

其中

$$B(u,v)=\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla vdX,L(v)=\int_\Omega fvdX.$$

有限元离散格式: 求$u_h\in V_h$使得:

$$B(u_h,v_h)=L(v_h)\qquad\forall v_h\in V_h. \tag{1.3}$$

相关作者:

E-mail:jiangxizhengzhirun@163.com (郑智润)

1.2 显式H^1型的误差估计子

符号说明:

T : 三角单元,

$\mathscr{T}$: 对区域Ω三角剖分得到的集合,

$$
\begin{aligned}
&B(e_h,v) = B(u-u_h,v) = \int_\Omega a\nabla(u-u_h)\cdot\nabla v dX \\
&= \int_\Omega a\nabla u\cdot\nabla v dX - \int_\Omega a\nabla u_h\cdot\nabla v dX \\
&= \int_\Omega f v dX - \int_\Omega (a\nabla u_h)\cdot\nabla v dX \\
&= \sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\left\{\int_\mathrm{T} f v dX - \int_\mathrm{T}(a\nabla u_h)\cdot\nabla v\right\} dX \\
&= \sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\left\{\int_\mathrm{T} f v dX + \int_\mathrm{T}\nabla\cdot(a\nabla u_h) v dX - \int_{\partial T}(a\nabla u_h)v\cdot\vec{n_\mathrm{T}} dX\right\} \\
&= \sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\left\{\int_\mathrm{T}(f+\nabla\cdot(a\nabla u_h)) v dX - \int_{\partial \mathrm{T}}(a\nabla u_h)v\cdot\vec{n_\mathrm{T}} dX\right\},
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

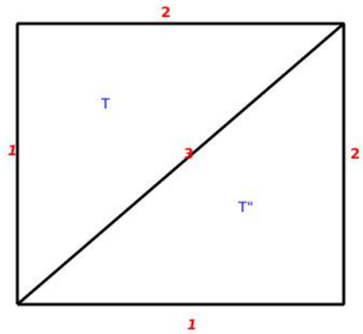

Figure 1: 剖分为两个单元

我们以上图的剖分为例来对(1.4)式进行化简:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\int_{\partial\mathrm{T}}(a\nabla u_h)v\cdot\vec{n_\mathrm{T}} dX \\
&= -\int_{\partial\mathrm{T}}(a\nabla u_h)v\cdot\vec{n_\mathrm{T}} dX - \int_{\partial\mathrm{T}''}(a\nabla u_h)v\cdot\vec{n_{\mathrm{T}''}} dX \\
&= -\int_{e_1^\mathrm{T}}(a\nabla u)v\cdot\vec{n_{\mathrm{T},1}} dX - \int_{e_2^\mathrm{T}}(a\nabla u)v\cdot\vec{n_{\mathrm{T},2}} dX \\
&= -\int_{e_3^\mathrm{T}}(a\nabla u)v\cdot\vec{n_{\mathrm{T},3}} dX - \int_{e_1^{\mathrm{T}''}}(a\nabla u)v\cdot\vec{n_{\mathrm{T}'',1}} dX \\
&= -\int_{e_2^{\mathrm{T}''}}(a\nabla u)v\cdot\vec{n_{\mathrm{T}'',2}} dX - \int_{e_3^{\mathrm{T}''}}(a\nabla u)v\cdot\vec{n_{\mathrm{T}'',3}} dX \\
&= -\int_\gamma\left\{(a\nabla u_h)|_\mathrm{T}\cdot\vec{n_{\mathrm{T},3}} + (a\nabla u_h)|_{\mathrm{T}''}\cdot\vec{n_{\mathrm{T}'',3}}\right\} v dX \\
&= -\int_\gamma\left[(a\nabla u_h)\cdot\vec{n_\gamma}\right] v dX,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

其中记:

$$\left[(a\nabla u_h)\cdot\vec{n_\gamma}\right]=(a\nabla u_h)|_{\mathrm{T}}\cdot n\vec{_{\mathrm{T},3}}+(a\nabla u_h)|_{\mathrm{T}''}\cdot n\vec{_{\mathrm{T}'',3}},$$

把(1.5)式推广到多单元的情况下然后代入到(1.4)式则有:

$$\begin{aligned}B(e_h,v)&=\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\left\{\int_{\mathrm{T}}(f+\nabla\cdot(a\nabla u_h))vdX-\int_{\partial\mathrm{T}}(a\nabla u_h)v\cdot\vec{n_{\mathrm{T}}}dX\right\}\\&=\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\int_{\mathrm{T}}(f+\nabla\cdot(a\nabla u_h))vdX-\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}\int_\gamma\left[(a\nabla u_h)\cdot\vec{n_\gamma}\right]vdX\\&=\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\int_{\mathrm{T}}rvdX+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}\int_\gamma RvdX,\end{aligned}\tag{1.6}$$

其中:ε_I为内部边的集合,

$$r=f+\nabla\cdot(a\nabla u_h),R=-\left[(a\nabla u_h)\cdot\vec{n_\gamma}\right].$$

对于给定的 $v\in H_0^1$,令I_hv是v在V_h上的插值,由正交性$B(e_h,I_hv)=0$则知:

$$\begin{aligned}B(e_h,v)&=B(e_h,v-I_hv)\\&=\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\int_{\mathrm{T}}r(v-I_hv)dX+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}\int_\gamma R(v-I_hv)dX,\end{aligned}\tag{1.7}$$

令$v=e_h$则有:

$$\begin{aligned}B(e_h,e_h)&=B(e_h,v-I_he_h)\\&=\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\int_{\mathrm{T}}r(e_h-I_he_h)dX+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}\int_\gamma R(e_h-I_he_h)dX\\&\le\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||_{L^2(\mathrm{T})}\cdot||e_h-I_he_h||_{L^2(\mathrm{T})}+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||_{L^2(\gamma)}\cdot||e_h-I_he_h||_{L^2(\gamma)}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Theorem 1.1. *若剖分是拟一致的,函数$u\in W^{m+1,p}(\Omega),1\le p\le\infty$则$u$的$m$次插值$I_mu$在单元$e$上有误差估计:*

$$||u-I_mu||_{l,p,\Omega}\le ch^{m+1-l}||u||_{m+1,p,\Omega},l=0,1,1\le p\le\infty.$$

利用定理1.1则可以得出:

$$||e_h-I_he_h||_{L^2(\mathrm{T})}\le ch_T||e_h||_{H^1(\mathrm{T})},\tag{1.9}$$

由

$$||e_h-I_he_h||_{L^2(\gamma)}\le c||e_h-I_he_h||_{H^{1/2}(\mathrm{T})},$$

因:

$$||e_h-I_he_h||_{H^{1/2}(\mathrm{T})}\le c\sqrt{h}||e_h||_{H^1(\mathrm{T})},$$

则:

$$||e_h-I_he_h||_{L^2(\gamma)}\le c\sqrt{h}||e_h||_{H^1(\mathrm{T})}.\tag{1.10}$$

把(1.9)(1.10)式代入到(1.8)式则有:

$$
\begin{aligned}
&B(e_h,e_h)\\
&\le \sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}} ||r||_{L^2(\mathrm{T})}\cdot||e_h-I_he_h||_{L^2(\mathrm{T})}+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||_{L^2(\gamma)}\cdot||e_h-I_he_h||_{L^2(\gamma)}\\
&\le \sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}} ||r||_{L^2(\mathrm{T})}\cdot ch_T||e_h||_{H^1(\mathrm{T})}+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||_{L^2(\gamma)}\cdot c\sqrt{h_{\mathrm{T}}}||e_h||_{H^1(\mathrm{T})}\\
&\le c\left[\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^2_{\mathrm{T}}\right)\cdot\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||e_h||^2_{H^1(\mathrm{T})}\right)\right]^{1/2}\\
&\quad +c\left[\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\mathrm{T})}h_{\mathrm{T}}\right)\cdot\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||e_h||^2_{H^1(\mathrm{T})}\right)\right]^{1/2}\\
&\le c\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||e_h||^2_{H^1(\mathrm{T})}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^2_{\mathrm{T}}\right)^{1/2}+\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\mathrm{T})}h_{\mathrm{T}}\right)^{1/2}\right]\\
&= c\left(||e_h||^2_{H^1(\Omega)}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^2_{\mathrm{T}}\right)^{1/2}+\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\mathrm{T})}h_{\mathrm{T}}\right)^{1/2}\right]\\
&\le c||e_h||_{H^1(\Omega)}\left[\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^2_{\mathrm{T}}\right)+\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\mathrm{T})}h_{\mathrm{T}}\right)\right]^{1/2},
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

由

$$||e_h||_{H^1(\Omega)}\le c||e_h||_E,$$

则知:

$$
\begin{aligned}
||e_h||^2_E &\le c\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^2_{\mathrm{T}}+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\gamma)}h_{\mathrm{T}}\right)\\
&=\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\left(h^2_{\mathrm{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}+\frac{1}{2}h_{\mathrm{T}}||R||^2_{L^2(\partial\mathrm{T})}\right).
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

式(1.12)中除了常数c都可以由数值解u_h直接解出.

则H^1型的局部误差估计子为:

$$\eta^2_{\mathrm{T,H^1}}=h^2_{\mathrm{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}+\frac{1}{2}h_{\mathrm{T}}||R||^2_{L^2(\partial\mathrm{T})}. \tag{1.13}$$

误差估计子的可靠性:当$\eta_{\mathrm{T,H^1}}$小时,真实误差e_h也小.

误差估计子的有效性:真实误差e_h也从局部误差估计子从下界确定.

1.3 显式L^2型误差估计子

考虑模型(1.2)式的对偶问题,找$\Phi_g\in V$使得:

$$B(v,\Phi_g)=(g,v)\quad \forall v\in V. \tag{1.14}$$

根据$||u||_{H^2}\le C||v||_{L^2}$从而得出:

$$||\Phi_g||_{H^2}\le ||g||_{L^2}. \tag{1.15}$$

选$g=e_h$代入到(1.14)式则有:

$$||e_h||^2_{L^2(\Omega)}=B(e_h,\Phi_{e_h}),$$

带入到(1.8)式则有:

$$||e_h||^2_{L^2(\Omega)}\leq\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||_{L^2(\mathrm{T})}\cdot||e_h-I_he_h||_{L^2(\mathrm{T})}+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||_{L^2(\gamma)}\cdot||e_h-I_he_h||_{L^2(\gamma)}\tag{1.16}$$

由定理1.1则知:

$$||e_h-I_he_h||_{L^2(\mathrm{T})}\leq ch^2_{\mathrm{T}}||e_h||_{H^2(\mathrm{T})}$$

$$||e_h-I_he_h||_{L^2(\gamma)}\leq ch^{3/2}_{\mathrm{T}}||e_h||_{H^2(\gamma)}$$

代入到(1.16)式则知:

$$\begin{aligned}
||e_h||^2_{L^2(\gamma)}&\leq\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||_{L^2(\mathrm{T})}\cdot ch^2_{\mathrm{T}}||e_h||_{H^2(\mathrm{T})}+\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||_{L^2(\gamma)}\cdot ch^{3/2}_{\mathrm{T}}||e_h||_{H^2(\gamma)}\\
&\leq c\left\{\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^4_{\mathrm{T}}\right)\cdot\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||e_h||^2_{H^2(\mathrm{T})}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+c\left\{\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\gamma)}h^3_{\mathrm{T}}\right)\cdot\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||e_h||^2_{H^2(\gamma)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||e_h||^2_{H^2(\mathrm{T})}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^4_{\mathrm{T}}\right)+\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\gamma)}h^3_{\mathrm{T}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&=c\left(||e_h||^2_{H^2_\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^4_{\mathrm{T}}\right)+\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\gamma)}h^3_{\mathrm{T}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c||e_h||_{H^2_\Omega}\cdot\left\{\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^4_{\mathrm{T}}\right)+\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\gamma)}h^3_{\mathrm{T}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq c\left\{\left(\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}||r||^2_{L^2(\mathrm{T})}h^4_{\mathrm{T}}\right)+\left(\sum_{\gamma\in\varepsilon_I}||R||^2_{L^2(\gamma)}h^3_{\mathrm{T}}\right)\right\}\\
&\leq c\sum_{\mathrm{T}\in\mathscr{T}}\left\{||R||^2_{L^2}h^3_{\mathrm{T}}+||r||^2_{L^2(\partial\mathrm{T})}h^4_{\mathrm{T}}\right\}
\end{aligned}\tag{1.17}$$

则L^2型的误差估计子为:

$$\eta^2_{\mathrm{T,H^1}}=||R||^2_{L^2}h^3_{\mathrm{T}}+||r||^2_{L^2(\partial\mathrm{T})}h^4_{\mathrm{T}}.$$

2 网格生成和网格优化

2.1 协调的CVDT网格

考虑求解区域$\Omega\in\mathbb{R}^d$是一个凸的多边形区域,$\{X_i\}_{i=1}^n\subset\Omega$表示特定点的集合,相对应的泰森多边形区域为$V_i$, $i=1,...,n$, V_i的定义为:

$$V_i=\left\{X\in\Omega|||X-X_i||<||X-X_j||\ for\ j=1,...,n\ and\ j\neq1\right\},$$

显而我们有: $X_i \in V_i,\ V_i \cap V_j = \emptyset\ for\ i \neq j,\ \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} = \overline{\Omega}$, 即:$\{V_i\}_i^n$是区域$\Omega$的曲面细分.

结合点集$\{X_i\}_{i=1}^n$的$\{V_i\}_{i=1}^n$是区域Ω的泰森多边形细分.

点$\{X_i\}$称为一个生成器,子域$V_i \subset \Omega$称为对应于生成器的泰森多边形区域.

总所周知:对泰森多边形域对偶细分就是德劳奈三角形.

易证:泰森多边形域V_i的顶点就是德劳奈三角单元的外接圆心.

给定一个在区域Ω上的密度函数$\rho(x)$,对$\forall V \subset \Omega$定义质心X^*:

$$X^* = \frac{\int_v y\rho(y)dy}{\int_v \rho(y)dy}.$$

定义1 CVT(Centroidal Voronoi Tessellation):当且仅当,作为泰森多边形区域V_i相对应的生成器X_i同时也是这个区域的质心,即:

$$\{(X_i, V_i)\}_{i=1}^n \quad if\ and\ only\ if\ \ X_i = X_i^* \ \ for\ \ i = 1, ..., n,$$

相应的德劳奈三角剖分就是CVDT(Centroidal Voronoi-Delaunay triangualtion)

注意:CVT/CVDT剖分是唯一的.

能量的定义:给定Ω上的点$\left\{\widetilde{X}_i\right\}_{i=1}^n$和$\Omega$上面的一些曲面细分$\left\{\widetilde{V}_i\right\}_{i=1}^n$我们给定能量的定义:

$$\mathscr{K}\left(\left\{\left(\widetilde{X}, \widetilde{V}\right)\right\}_{i=1}^n\right) = \sum_{i=1}^n \int_{\widetilde{V}_i} \rho(y)||y - \widetilde{X}_i||^2 dy.$$

可以证明:$\left\{\left(\widetilde{X}_i, \widetilde{V}_i\right)\right\}_{i=1}^n$是CVT时,能量$\mathscr{K}$是最小的.

CVT的重要性质:能量$\mathscr{K}$以渐进的方式在泰森多边形区域V_i上均匀分布.

在一维的情况下:

$$\mathscr{K}_{V_i} \approx \mathscr{K}/n\ for\ i = 1, 2..., n,$$

其中 $\mathscr{K}_{V_i} = \int_{V_i} \rho(x)||X - X_i||^2 dx$和$\mathscr{K} = \sum_{i=1}^n \mathscr{K}_{V_i}$.

这种性质在高维的情况下目前仅仅只是一个假设,但有效性已经通过大量的数值研究得到了验证.

CVT重要的几何性质:

对于一个常值密度函数,生成器$\{X_i\}_{i=1}^n$是均匀分布的;泰森多边形区域$\{V_i\}_{i=1}^n$几乎是等尺寸的.在二维的情况下,其中大部分(几乎)是全等的凸六面体.

对于一个非常值密度函数,生成器$\{X_i\}_{i=1}^n$ 是渐进局部均匀分布的,对于一些常数c

$$\mathscr{K}_{V_i} = c\rho(X_i)h_{V_i}^{d+2},\ \ \frac{h_{V_i}}{h_{V_j}} = \left(\frac{\rho(X_j)}{\rho(X_i)}\right)^{\frac{1}{d+2}},$$

其中,h_{V_i}:V_i的直径; d:Ω的直径. 注: $\{(X_i, V_i)\}_{i=1}^n$的能量$\mathscr{K}$随着每次迭代减少.

Algorithm 1 (Lloyd's method for CVT)给定一个区域Ω,定义在Ω上的密度函数$\rho(x)$,一个正整数n

0.在Ω中选定n个初始点$\{X_i\}_{i=1}^n$.

1.结合$\{X_i\}_{i=1}^n$产生区域Ω上的泰森多边形区域$\{V_i\}_{i=1}^n$.

2.确定泰森多边形域$\{V_i\}_{i=1}^n$上的质心,这些质心产生新的点集$\{X_i\}_{i=1}^n$.

3.如果这些点满足一些收敛标准,返回$\{(X_i, V_i)\}_{i=1}^n$并且终止,否则转step1.

记号:

- $P_S = \{Z_i\}_{i=1}^k$:求解区域的角顶点

- $P_I = \left\{X_i | \overline{V_i} \cap \partial\Omega = \emptyset\right\}$:内部点的集合
- $P_B = \left\{X_i | \overline{V_i} \cap \partial\Omega \neq \emptyset\right\}$:边界点的集合
- $Proj(X)$:表示将点X投影到离X最近边界上的点.

定义2 一个Ω上的泰森多边形区域细分$\{(X_i, V_i)\}_{i=1}^n$被称为一致重心的泰森多边形细分(CfCVT)当且仅当下面的性质被满足:

- $P_S \subset \{X_i\}_{i=1}^n$,
- $X_i = X_i^* \; for \; X_i \in P_I$,
- $X_i = Proj(X_i^*) \; for \; X_i \in P_B - P_S$,

相应的对偶剖分为(CfCVDT).

Algorithm 2 constructing a CfCVT/CfCVDT

0.在Ω中选定n个初始点$\{X_i\}_{i=1}^n$.
1.结合$\{X_i\}_{i=1}^n$产生区域Ω上的泰森多边形区域$\{V_i\}_{i=1}^n$.
2.确定泰森多边形域$\{V_i\}_{i=1}^n$上的质心,这些质心产生新的点集$\{X_i\}_{i=1}^n$.
3.除非边界泰森多边形区域包含P_B中的一点,否则就把边界泰森多边形区域的质心投影到边界上,这个一点就是新的生成器.
4.如果这些点满足一些收敛标准,返回$\{(X_i, V_i)\}_{i=1}^n$并且终止,否则转step1.

2.2 近似CfCVD构造

- CDTs:受限的德劳奈三角剖分
- CDT过程产生初始的三角剖分 $\mathscr{T}_0 = \{\mathrm{T_i}\}_{i=1}^m$
- $P_S = \{Z\}_{i=1}^k$:区域角顶点
- $P = \{X_i\}_{i=1}^n$:$\mathscr{T}$的顶点的集合
- P_B:边界点的集合
- P_I:内部点的集合
- $\overline{X}_i$:在泰森多边形区域U_i上符合密度函数$\rho(x)$的质心

CDT过程保证:$P_S \subset P_B$.

定义3 对于每一个三角单元$\mathrm{T_i} = (\mathrm{X_{i1}}, \mathrm{X_{i2}}, \mathrm{X_{i3}}) \in \mathscr{T}_0$定义:

$$X_{\mathrm{T_i}} = \begin{cases} circumcenter\; of\; \mathrm{T_i} & \text{if } \mathrm{T_i} \text{ is an acute triangle} \\ the\; middle\; point\; of\; the\; longest\; edge\; of\; \mathrm{T_i} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.18}$$

很明显有$X_{\mathrm{T_i}} \in \overline{\mathrm{T}}_i$

内部点. 当X_i是内部点的时候定义U_i(泰森多边形区域):

$$U_i = the\; polygon\; formed\; by\; \left\{X_{\mathrm{T_{i_k}}}\right\}_{k=1}^m;$$

- $\{\alpha_{i_k}\}_{k=1}^{m_i}$:围绕点$X_i$相应$\left\{\mathrm{T_{i_k}}\right\}_{k=1}^{m_i}$的角度;

- $$\alpha = \begin{cases} max\left\{\alpha_{i_k} | \overline{\mathrm{T}}_{i_k} \cap \partial\Omega \neq 0\right\} & \text{if } \overline{\mathrm{T}}_{i_k} \cap \partial\Omega \neq 0 \text{ for some } i_k \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases} \tag{2.19}$$

- 令e_i表示与角度α_{i_k}相对应的边界边缘,使得:$\alpha_{i_k} = \alpha$;

选择参数$\theta_{max}(\pi) > \theta_{max} > \pi/2$,定义:

$$y_i = \begin{cases} \overline{X_i} & \text{if } \alpha < \theta_{max} \\ Proj_{e_i} X_i & \text{otherwise;} \end{cases} \tag{2.20}$$

其中$Proj_{e_i}X_i$表示将X_i投影到边界边e_i上,显而可知当$\alpha < \theta_{max}$时y_i都是内部点.

边界点. 当X_i是边界点的时候,

- 令e_1和e_2表示具有X_i作为公共端点的两个边界边缘;
- 泰森多边形区域U_i定义为:

$$U_i = the\ polygon\ formed\ by\ Z_1, \left\{X_{\mathrm{T}_{\mathrm{i_k}}}\right\}_{k=1}^{m_i}, Z_2;$$

- 如果$X_i \in P_B - P_S$,定义β_1和β_2分别是对应边e_1和e_2的角度;
- $\beta = max(\beta_1, \beta_2)$;
- 当参数$\theta_{min}(\pi/3 > \theta_{min} > 0)$,定义:

$$y_i = \begin{cases} X_i & \text{if } X_i \in P_S \\ Proj_{\overline{Z_1 Z_2}} X_i & \text{if } X_i \in P_B - P_S \text{ and } \beta > \theta_{min} \\ \overline{X_i} & \text{if } X_i \in P_B - P_S \text{ and } \beta \leq \theta_{min}, \end{cases} \tag{2.21}$$

  其中$Proj_{\overline{Z_1Z_2}}X_i$表示将$X_i$投影到$\overline{Z_1Z_2}$上;

Algorithm 3 modified Lloyd method for approximate CfCVDT

给定一个求解域Ω,在Ω上定义密度函数$\rho(x)$,以及使用CDT在求解域Ω上生成具有顶点$\{X_i\}_{i=1}^n$的初始三角剖分$\mathscr{T}_0$.
1.根据(2.16)和(2.17)从$\{X_i\}_{i=1}^n$确定$\{y_i\}_{i=1}^n$.
2.集合$\{X_i\}_{i=1}^n = \{y_i\}_{i=1}^n$,从新的$\{X_i\}_{i=1}^n$重建边界段$\varepsilon_B$.
3.把$\{X_i\}_{i=1}^n$作为顶点和ε_B作为边界边,使用CDT对区域Ω重新进行三角剖分.
4.如果三角剖分$\mathscr{T}$满足一些收敛标准,返回$\mathscr{T}$并且终止,否则转step1.

注:

- 为了防止一些顶点频繁的在边界和内部之间跳动,需要更复杂的控制,为了简单起见省略了上述算法的一些细节.
- 取$\theta_{max} = 5\pi/9$和$\theta_{min} = \pi/6$.