Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών Πάτρας
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

PROJECT ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ 2016-2017

ΜΕΛΗ ΟΜΑΔΑΣ

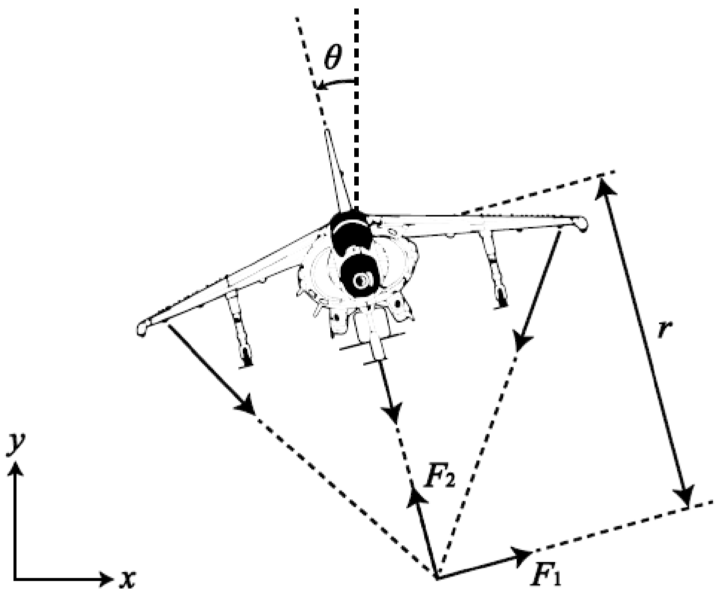
1. **ΚΑΡΑΚΛΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ (8350)**
2. **ΠΑΠΑΚΩΣΤΑΣ ΛΑΜΠΗΣ (8467)**

«ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ ΜΕ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΚΑΘΕΤΗΣ ΑΠΟΓΕΙΩΣΗΣ/ΠΡΟΣΓΕΙΩΣΗΣ»

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το πρόβλημα που επιλέξαμε να μελετήσουμε βασίζεται στον έλεγχο αεροσκάφους που υποστηρίζει τη λειτουργία Vertical Take-Off and Landing (VTOL), δηλαδή διαθέτει τη δυνατότητα να απογειωθεί, να προσγειωθεί και να αιωρηθεί σε μικρή απόσταση από το έδαφος, ακολουθώντας πορεία κάθετη προς αυτό.



Γραφική αναπαράσταση και απλοποιημένη γεωμετρική ανάλυση του αεροσκάφους *Harrier Jump Jet*, του πιό γνωστού μονοκινητήριου αεροσκάφους με την ικανότητα κάθετης προσγείωσης/απογείωσης.

Το συγκεκριμένο αεροσκάφος έχει τη δυνατότητα να ρυθμίζει την κατεύθυνση της κινητήριας ώθησης του, ώστε σε συνδιασμό με αέρα που εκτρέπεται από τον κινητήρα προς τα ακροπτερύγια να επιτυγχάνεται η αιώρηση καθώς και ο χειρισμός της πορείας του αεροσκάφους στο κατακόρυφο επίπεδο.
Κάνοντας μία απλοποιημένη ανάλυση των δυνάμεων που ασκούνται από και προς το αεροσκάφος κατά την κίνηση του στο κατακόρυφο επίπεδο, αναπτύσσυμε τις αντιδράσεις των δυνάμεων που αναπτύσσονται από τον κύριο προωθητήρα και τα ακροπτερύγια ως το ζεύγος δυνάμεων $F1$ και $F2$ [N] που ασκούνται σε μία απόσταση r [m] από το κέντρο μάζας του αεροσκάφους.
Με x, y και θ θα συμβολίσουμε τη θέση και τον προσανατολισμό του κέντρου μάζας του αεροσκάφους, σε σχέση με το κατακόρυφο επίπεδο και το κατακόρυφο άξονα αντίστοιχα. Έστω m η μάζα του αεροσκάφους [kg], J η ροπή αδράνειας [kg m2], g η σταθερά επιτάχυνσης της βαρύτητας [m/s2] και c η σταθερά απόσβεσης [N s/m].

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κατακόρυφη κίνηση του αεροσκάφους δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_1\cos\theta - F_2\sin\theta - c\dot{x} \\
m\ddot{y} &= F_1\sin\theta + F_2\cos\theta - mg - c\dot{y} \\
J\ddot{\theta} &= rF_1
\end{aligned}
$$

Για να μεταφερθούμε σε κατάσταση ισορροπίας με μηδενικό διάνυσμα εισόδου μετασχηματίζουμε τις εισόδους θέτοντας *u*1=*F*1 και *u*2=*F*2-*mg*. Τελικά οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -mg\sin\theta - c\dot{x} + u_1\cos\theta - u_2\sin\theta \\
m\ddot{y} &= mg(\cos\theta - 1) - c\dot{y} + u_1\sin\theta + u_2\cos\theta \\
J\ddot{\theta} &= ru_1
\end{aligned}
$$

Επιλύοντας ως προς τις μεταβλητές με τον μεγαλύτερο βαθμό παραγώγου έχουμε,

$$\ddot{x} = \frac{u_1 \cdot \cos\vartheta}{m} - \frac{u_2 \cdot \sin\vartheta}{m} - y \cdot \sin\theta - \frac{c}{m} \cdot \dot{x}$$

$$\ddot{y} = \frac{u_1 \cdot \sin\vartheta}{m} + \frac{u_2 \cdot \cos\vartheta}{m} - g \cdot (\cos\theta - 1) - \frac{c}{m} \cdot \dot{y}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u_1 \cdot r}{J}$$

Επιλέγουμε ως διάνυσμα κατάστασης το $\mathbf{z}=[x,y,\theta,x',y',\theta']^T$ και και ορίζουμε ως διάνυσμα εισόδου το $\mathbf{u}=[u_1,u_2]^T$. Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει το σύστημα προς έλεγχο είναι :

$$\dot{\mathbf{z}}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\\ \ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\\ -g\sin\theta-\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{1}{m}u_1\cos\theta-\frac{1}{m}u_2\sin\theta\\ g(\cos\theta-1)-\frac{c}{m}\dot{y}+\frac{1}{m}u_1\sin\theta+\frac{1}{m}u_2\cos\theta\\ \frac{r}{J}u_1\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σύστημα περιέχει και μη γραμμικούς όρους για αυτό θα γραμμικοποιήσουμε το σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας xe=[0 0 0 0 0 0] και ue=[0 0]. Τα διανύσματα των καταστάσεων γίνονται **z+Δz** και το διάνυσμα εισόδων **u+Δu**, όπου το **Δ** συμβολίζει μικρές μεταβολές γύρω από το σημείο ισορροπίας.

Σύμφωνα με την θεωρία για την γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας αναπτύσσουμε τους μη γραμμικούς όρους κατά σειρά Taylor κρατώντας μόνο το γραμμικό κομμάτι και απαλείφοντας τα γινόμενα επιμέρους μικρών μεταβολών θεωρώντας τα αμελιτέα.

Συνεπώς, sin(Δθ)=Δθ και cos(Δθ)=1.

Το διάνυσμα καταστάσεων είναι το εξής:

$$z=\begin{bmatrix}xe+\Delta x\\ ye+\Delta y\\ \theta e+\Delta\theta\\ \dot{x}e+\Delta\dot{x}\\ \dot{y}e+\Delta\dot{y}\\ \dot{\theta}e+\Delta\dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta\theta\\ \Delta\dot{x}\\ \Delta\dot{y}\\ \Delta\dot{\theta}\end{bmatrix}\qquad u=\begin{bmatrix}ue_1+\Delta u_1\\ ue_2+\Delta u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta u_1\\ \Delta u_2\end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τις καταστάσεις στις εξισώσεις καταλήγουμε,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\ddot{x} \\ \Delta\ddot{y} \\ \Delta\ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \frac{\Delta u_1}{m} - \frac{\Delta u_2 \cdot \Delta\theta}{m} - g \cdot \Delta\theta - \frac{c}{m} \cdot \Delta\dot{x} \\ \frac{\Delta u_1 \cdot \Delta\theta}{m} + \frac{\Delta u_2 \cdot 1}{m} - g \cdot (1-1) - \frac{c}{m} \cdot \Delta\dot{y} \\ \Delta u_1 \cdot \frac{r}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \frac{\Delta u_1}{m} - g \cdot \Delta\theta - \frac{c}{m} \cdot \Delta\dot{x} \\ \frac{\Delta u_2}{m} - \frac{c}{m} \cdot \Delta\dot{y} \\ \Delta u_1 \cdot \frac{r}{J} \end{bmatrix}$$

Όσον αφορά τις μεταβλητές της εξόδου, μας ενδιαφέρει μόνο η οριζόντια και η κατακόρυφη θέση του αεροσκάφους, διότι όπως αναφέραμε και παραπάνω , η κίνηση που θέλουμε να κάνουμε είναι κάθετη με το έδαφος.

Επομένως

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο χώρος κατάστασης θα είναι:

$$\Delta\dot{z} = \mathbf{A} \cdot \Delta z + \mathbf{B} \cdot \Delta u$$
$$\Delta q = \mathbf{C} \cdot \Delta z + \mathbf{D} \cdot \Delta u$$

Άρα εξάγουμε τους πίνακες του χώρου κατάστασης του γραμμικοποιημένου συστήματος ως εξής:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -g & -\frac{c}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Για τυπικές τιμές των παραμέτρων m=4 Kg , J=0.05 Kg m^2 , r=0.3 m , g= 9.81 m/s^2 και c=0.07 Ns/m , το συνεχές σύστημα στον χώρο κατάστασης είναι :

```
sys =

  a =
            x1       x2       x3       x4       x5       x6
   x1        0        0        0        1        0        0
   x2        0        0        0        0        1        0
   x3        0        0        0        0        0        1
   x4        0        0    -9.81  -0.0175        0        0
   x5        0        0        0        0  -0.0175        0
   x6        0        0        0        0        0        0

  b =
         u1    u2
   x1     0     0
   x2     0     0
   x3     0     0
   x4  0.25     0
   x5     0  0.25
   x6     6     0

  c =
       x1  x2  x3  x4  x5  x6
   y1   1   0   0   0   0   0
   y2   0   1   0   0   0   0

  d =
       u1  u2
   y1   0   0
   y2   0   0

Continuous-time state-space model.
```

ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

Θα εξετάσουμε το σύστημα ως προς την ελεγξιμότητα και την παρατηρησιμότητα του.

Ένα σύστημα καλείται *πλήρως ελέγξιμό* εάν δεδομένης μιας αρχικής κατάστασης x0 μπορούμε να βρούμε κατάλληλες και πεπερασμένες τιμές ελέγχου u(t) ώστε το σύστημα να φτάσει στην επιθυμητή κατάσταση x* σε πεπερασμένο χρόνο.

Το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο εάν η τάξη του πίνακα ελεγξιμότητας

$$CM = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \Lambda & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

είναι ίση με τον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης (A,B οι πίνακες του συστήματος χώρου κατάστασης και n η διάσταση του πίνακα A).

Ένα σύστημα καλείται *πλήρως παρατηρήσιμο* εάν γνωρίζοντας τις εισόδους u(t) και τις εξόδους y(t) για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα , μπορούμε να ανακτήσουμε τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο εάν η τάξη του πίνακα παρατηρισημότητας

$$OM = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \mathrm{M} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

είναι ίση με τον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης (όπου A,C οι πίνακες του συστήματος χώρου κατάστασης και n η διάσταση του πίνακα A).

Με τις εντολές ctrb() και obsv() , υπολογίζουμε τους πίνακες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας του συστήματος και παρατηρούμε ότι η τάξη τους είναι ίση με τον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης.

```
>> rank(ctrb(sys))
ans =
     6
```

```
>> rank(obsv(sys))
ans =
     6
```

Οπότε, το σύστημα μας είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στην συνέχεια, θα μελετήσουμε το συνεχές σύστημα ως προς την ευστάθειά του.

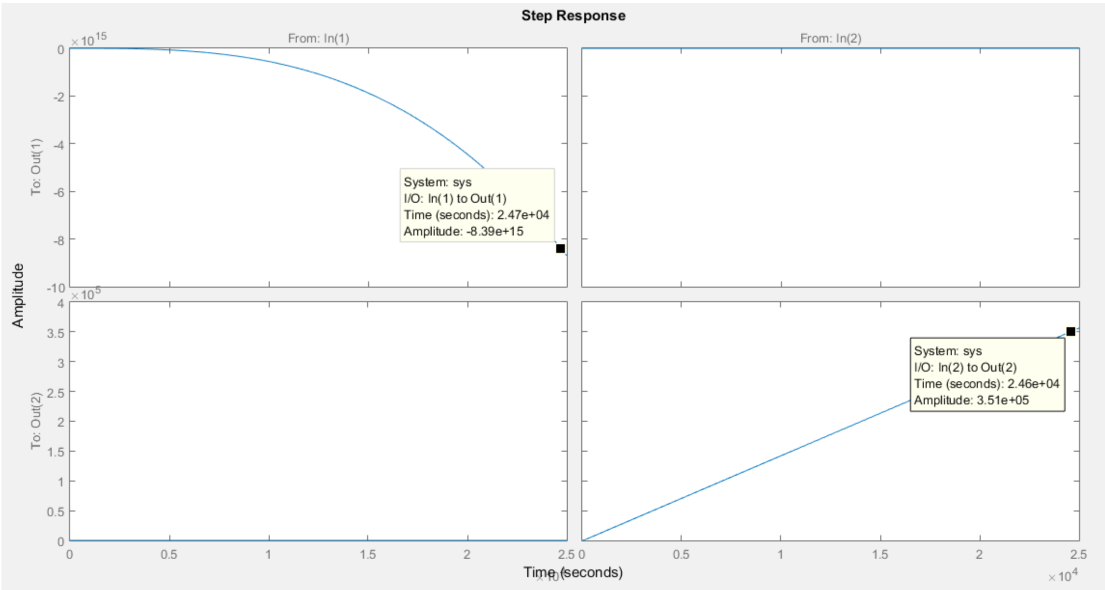
Σύμφωνα με την 1η μέθοδος του Lyapunov, προσεγγίζουμε το μη γραμμικό σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$ με το αντίστοιχο γραμμικό $\dot{x} = Ax$. Εάν το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του πίνακα A είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός , με την προϋπόθεση ότι η ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος είναι μονής πολλαπλότητας, το σύστημα είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Εάν η ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος είναι μεγαλύτερης πολλαπλότητας δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια του συστήματος από την παραπάνω μέθοδο.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A του συστήματος μας είναι:

```
>>  eig(sys)
ans =
          0
          0
    -0.0175
          0
    -0.0175
          0
```

οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω δεν μπορούμε να αποφανθούμε ευστάθεια με αυτήν την μέθοδο. Θα μελετήσουμε την βηματική απόκριση για να εξετάσουμε το σύστημα ως προς την ευστάθεια.

Η βηματική απόκριση του συστήματος είναι η παρακάτω:



Εφόσον η απόκριση του συστήματος δεν συγκλίνει σε μια πεπερασμένη τιμή αλλά απειρίζεται, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ασταθές.

<u>ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ</u>

Για να μετατρέψουμε το συνεχές σύστημα σε διακριτό ισοδύναμο πρέπει να επιλέξουμε την κατάλληλη περίοδο δειγματοληψίας.

Σύμφωνα με το θεώρημα Nyquist-Shannon , για να είναι δυνατή η αναπαραγωγή ενός συστήματος x(t) από ένα σύστημα x(kT) θα πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας Fs να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας, δηλαδή

$$f_s \geq 2f_1 \Rightarrow 0.5 \cdot T_1 \geq T_s$$

όπου f_1 η μέγιστη συχνότητα του συστήματος.

Επειδή η απόκριση του συστήματός μας είναι άπειρη, μπορούμε να προσεγγίσουμε την μέγιστη περίοδο δειγματοληψίας από την σχέση,

$$T = \frac{2\pi}{10\omega_{bw}}$$

όπου ω_{bw} είναι το εύρος ζώνης (bandwidth) του συστήματος και είναι η συχνότητα στην οποία το πλάτος $|A(j\omega)|$ έχει μέτρο -3dB.

Επειδή δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα διαγράμματα Bode για συστήματα MIMO (Multiple Input-Multiple Output) όπως το σύστημα μας που είναι εκφρασμένο στον χώρο κατάστασης, θα πρέπει να το μετατρέψουμε σε συναρτήσεις μεταφοράς.

Οι συναρτήσεις μεταφοράς που προκύπτουν είναι:

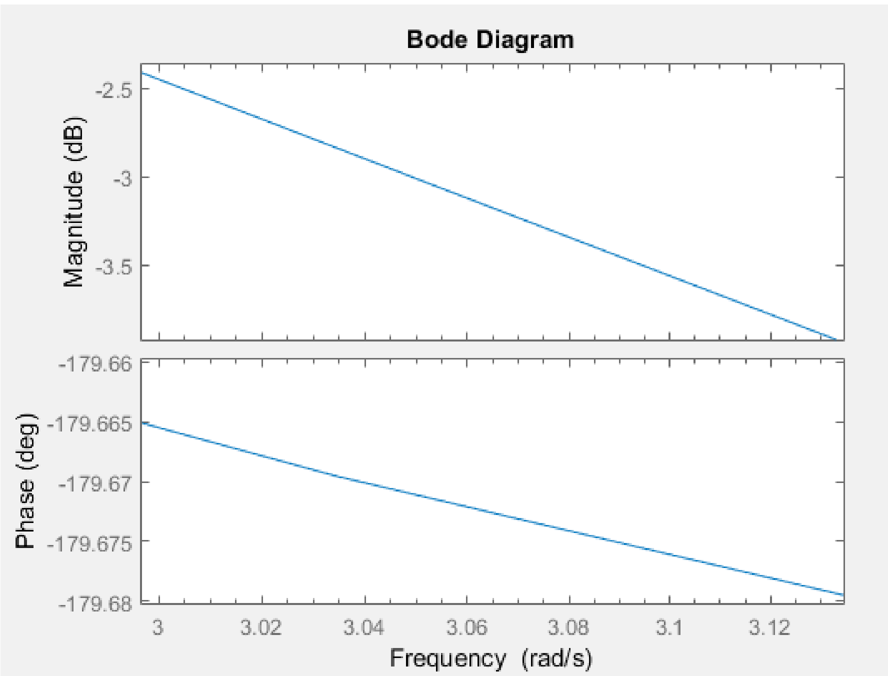
$$\frac{Y1}{U1}(s) = \frac{0.25s^4 + 0.004375s^3 - 58.86s^2 - 1.03s}{s^6 + 0.035s^5 + 0.0003063s^4}$$

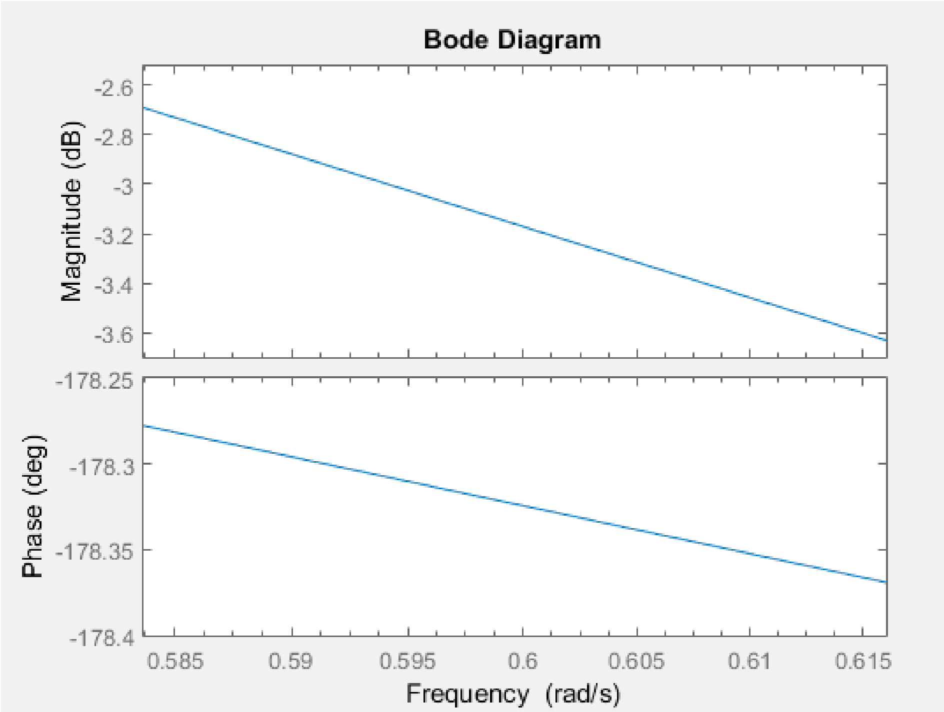
$$\frac{Y2}{U1}(s) = 0 \qquad \frac{Y1}{U2}(s) = 0$$

$$\frac{Y2}{U2}(s) = \frac{0.25s^4 + 0.004375s^3}{s^6 + 0.035s^5 + 0.0003063s^4}$$

όπου U1,U2 οι είσοδοι του συστήματος και Y1,Y2 οι έξοδοι .

Κάνοντας τα διαγράμματα Bode των μη μηδενικών συναρτήσεων μεταφοράς





Βλέπουμε ότι οι συχνότητες εύρους ζώνης είναι κατά προσέγγιση 3.05 rad/s και 0.6 rad/s.

Οι μέγιστες περίοδοι δειγματοληψίας ,σύμφωνα με τον τύπο που αναφέραμε παραπάνω, προκύπτουν $T_1 = 0.206$ s και $T_2 = 1.0472$ s. Επιλέγουμε την ελάχιστη από αυτές, άρα προκύπτει η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας ώστε να μην έχουμε απώλειες πληροφορίας και είναι η $T_1 = 0.206$ s.

Οποιαδήποτε περίοδος δειγματοληψίας μικρότερη από την παραπάνω τιμή ικανοποιεί το θεώρημα Nyquist-Shannon, συνεπώς επιλέξαμε Ts=0.1 s.

Οι πίνακες του χώρου κατάστασης μετασχηματίζονται στον διακριτό χρόνο με την μέθοδο Zero Order Hold , δηλαδή κρατώντας σταθερό το διάνυσμα διέγερσης m(t)=u(kT) για χρονική περίοδο kT<t<(k+1)T, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$A_d = e^{AT} \qquad B_d = \int_0^T e^{A\lambda} B d\lambda$$

Το διακριτό σύστημα είναι :

```
sysd =

  a =
             x1          x2          x3          x4          x5          x6
   x1         1           0    -0.04902     0.09991           0   -0.001634
   x2         0           1           0           0     0.09991           0
   x3         0           0           1           0           0         0.1
   x4         0           0     -0.9801      0.9983           0    -0.04902
   x5         0           0           0           0      0.9983           0
   x6         0           0           0           0           0           1

  b =
             u1         u2
   x1  0.001004          0
   x2         0   0.001249
   x3      0.03          0
   x4   0.01517          0
   x5         0    0.02498
   x6       0.6          0

  c =
       x1  x2  x3  x4  x5  x6
   y1   1   0   0   0   0   0
   y2   0   1   0   0   0   0

  d =
       u1  u2
   y1   0   0
   y2   0   0

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time state-space model.
```

Παρατηρούμε ότι η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα του διακριτού συστήματος για την συγκεκριμένη περίοδο δειγματοληψίας είναι ίδια με αυτή του συνεχούς.

```
>> rank(ctrb(sysd))
ans =
     6
```

```
>> rank(obsv(sysd))
ans =
     6
```

Όσον αφορά την ευστάθεια του συστήματος, στο διακριτό χρόνο πρέπει οι ιδιοτιμές του πίνακα Ad να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου ή πάνω σε αυτόν με μονή πολλαπλότητα. Σε περίπτωση όμως που η ιδιοτίμη πάνω στον μοναδιαίο κύκλο είναι μεγαλύτερης πολλαπλότητας δεν μπορούμε να αποφανθούμε με αυτήν τη μέθοδο.

Οι ιδιοτιμές του διακριτού συστήματος είναι :

```
>> eig(sysd)
ans =
    1.0000
    1.0000
    0.9983
    1.0000
    0.9983
    1.0000
```

Επειδή οι ιδιότητες του συστήματος παραμένουν κατά την διακριτοποίηση, συμπεραίνουμε ότι το διακριτό σύστημα είναι ασταθές.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΚΤΗ

Για τον υπολογισμό του κέρδους κάναμε χρήση του Γραμμικού Τετραγωνικού Ρυθμιστή (Linear Quadratic Regulator – LQR), μία μορφή ελέγχου ανάδρασης η οποία ανήκει στη γενικότερη θεωρία του Βέλτιστου Ελέγχου. Ο Γραμμικός Τετραγωνικός Ρυθμιστής αναλαμβάνει να υπολογίσει το βέλτιστο κέρδος K ώστε για ένα διακριτό σύστημα εκφρασμένο στο χώρο κατάστασης $z[n+1]=Az[n]+Bu[n]$ ο νόμος ελέγχου ανατροφοδότησης κατάστασης $u[n]=-Kz[n]$ να ελαχιστοποιεί την παρακάτω συνάρτηση κόστους:

$$J=\sum_{k=0}^{N}\left(z_k^T Q z_k + u_k^T R u_k\right)$$

Με αυτόν τον ελεγκτή ελαχιστοποίησης επιθυμούμε να περιορίσουμε τις καταστάσεις κοντά στο μηδέν με ελάχιστη κατανάλωση και η εξισορρόπηση αυτών των ιδιοτήτων επιτυγχάνετε με τους πίνακες Q και R.

Η εύρεση του πίνακα K υπολογίζεται από την παρακάτω εξίσωση :

$$\mathbf{K}=-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}$$

Και ο πίνακας P βρίσκεται επιλύοντας την μητρική αλγεβρική Riccati :

$$\mathbf{A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0}$$

Για να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο ,πρέπει να πληρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις :

1) Το ζευγάρι πινάκων (A,B) να είναι σταθεροποιήσιμο, δηλαδή όλοι οι ασταθείς πόλοι να είναι ελέγξιμοι.

2) Ο πίνακας R να είναι θετικώς ορισμένος (όλες οι ιδιοτιμές του να είναι θετικές).

3) Ο πίνακας Q να είναι θετικώς ημιορισμένος (όλες οι ιδιοτιμές του να είναι μεγαλύτερες ή ίσες με το μηδέν).

Επιλέγοντας

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και αποδεικνύοντας παραπάνω ότι και το ζεύγος πινάκων (A,B) είναι σταθεροποιήσιμο, εφαρμόζουμε την παραπάνω μέθοδο μέσω της εντολής dlqr().

Ο πίνακας K που λαμβάνουμε είναι :

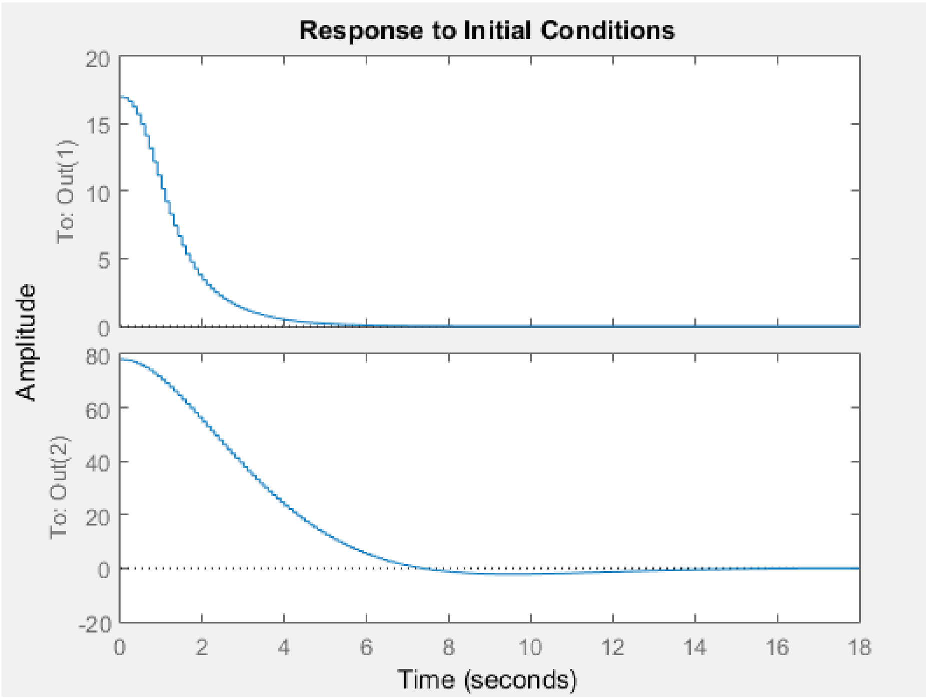
```
K =
   -0.5725    0.0000    4.8874   -0.9405    0.0000    1.3877
    0.0000    0.9640    0.0000   -0.0000    2.8716    0.0000
```

Έχοντας υπολογίσει πλέον το βέλτιστο κέρδος K, υλοποιούμε τον ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης. Ο πίνακας A του κλειστού συστήματος θα είναι Acl=A-B*K, ο πίνακας B θα είναι μηδενικός ενώ οι υπόλοιποι πίνακες του χώρου κατάστασης θα παραμείνουν αμετάβλητοι. Οι ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος είναι :

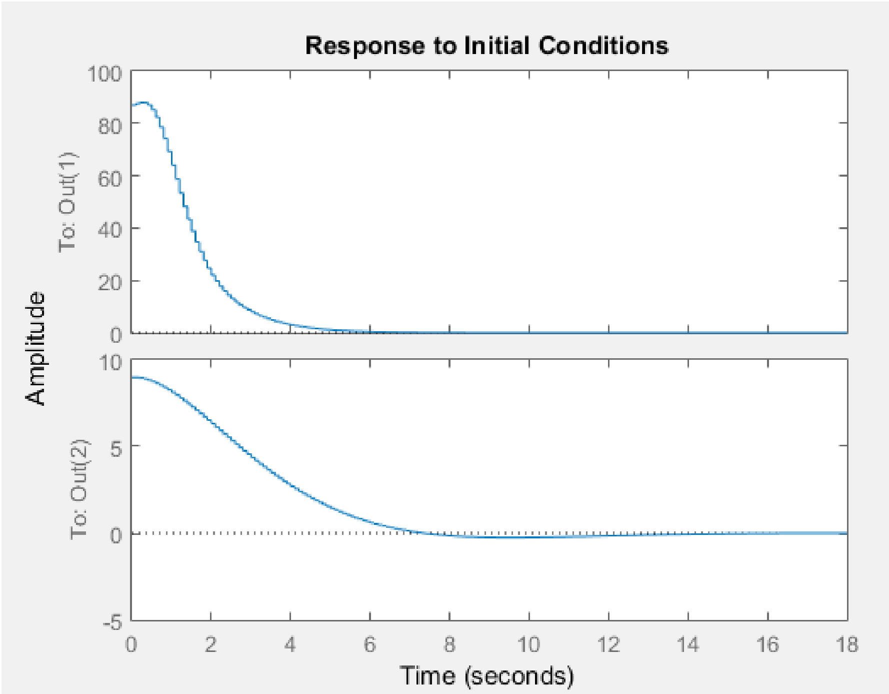
```
0.5494 + 0.0000i
0.7898 + 0.1853i
0.7898 - 0.1853i
0.9048 + 0.0000i
0.9627 + 0.0318i
0.9627 - 0.0318i
```

Το σύστημα μας είναι ευσταθές και για κάθε αρχική συνθήκη το σύστημα πάει στην κατάσταση ισορροπίας. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό στα παρακάτω διαγράμματα.

Για x=[17 78 π/2 0 0 0] :



Για x=[87 9 0 5 0 1] :



ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΟ MATLAB

Αφού υλοποιήσαμε το ευσταθές σύστημα, θέλουμε το αεροσκάφος να μπορεί να κινηθεί σε διάφορες τροχιές, παραμένοντας κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο.

Θα ακολουθήσουμε μια κυκλική τροχιά με την παρακάτω εξίσωση :

$$x(t) = 2\sin(2\pi f t) + 3$$
$$y(t) = 2\sin(2\pi f t + \pi/2) + 3$$

και μια τροχιά σε σχήμα απείρου με αυτήν την εξίσωση :

$$x(t) = 5\cos(2\pi f t) + 7$$
$$y(t) = 2.5\sin(4\pi f t) + 7$$

με συχνότητα f = 0.01 Hz για χρονικό διάστημα από 0 μέχρι 180 δευτερόλεπτα.

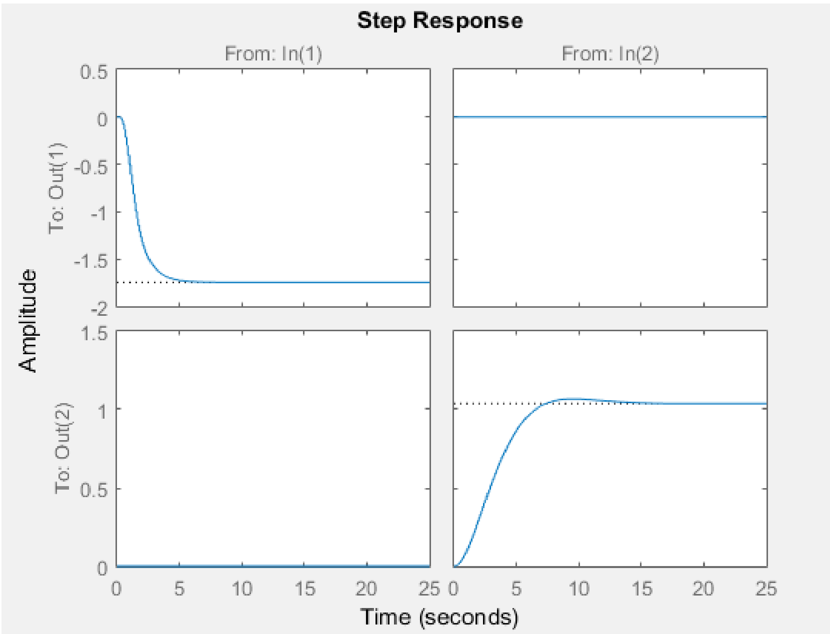
Επειδή το σύστημα είναι διακριτό, θα πρέπει η περίοδος που θα λαμβάνουμε τις τιμές των εισόδων να είναι ίδια με την περίοδο δειγματοληψίας του συστήματος, δηλαδή 0.1 δευτερόλεπτα.

Το σύστημα μας με την προσθήκη των εισόδων θα γίνει :

$$x[n+1] = (A - B \cdot K)x[n] + Br[n]$$
$$y[n] = Cx[n]$$

όπου r[n] οι επιθυμητές τροχιές.

Από την βηματική απόκριση του ευσταθούς συστήματος,

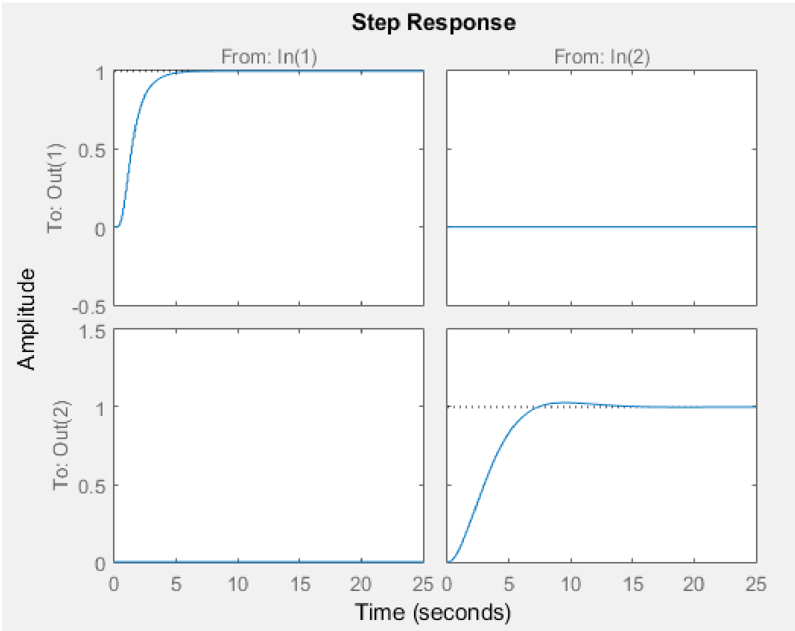


παρατηρούμε ότι το κέρδος του συστήματος είναι χαμηλό οπότε θα χρειαστεί μια προαντιστάθμιση ώστε να πετύχουμε μοναδιαίο κέρδος ανατροφοδότησης .

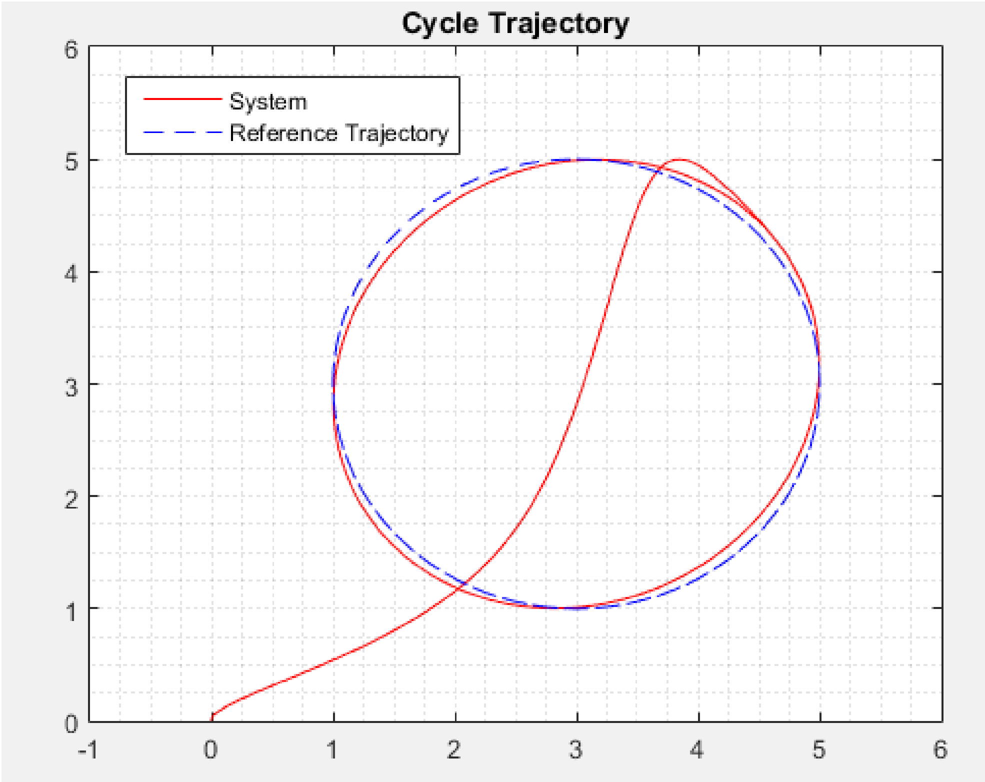
Ο πίνακας προαντιστάθμισης θα περιέχει 4 στοιχεία για να συμβαδίζουν οι διαστάσεις του , με τα στοιχεία της δευτερεύουσας διαγωνίου να είναι μηδενικά λόγω της μηδενικής βηματικής απόκρισης.

Για να βρούμε τα κέρδη προαντιστάθμησης, υπολογίζουμε το DC Gain των συναρτήσεων μεταφοράς Y1/U1 και Y2/U2 και θεωρούμε ως κέρδος το αντίστροφό τους. Τα δύο DC Gain προκύπτουν -1.7467 για την πρώτη και 1.0373 για την δεύτερη. Οπότε, τα κέρδη προαντιστάθμισης είναι N11 = 0.5725 και N22 = 0.964.

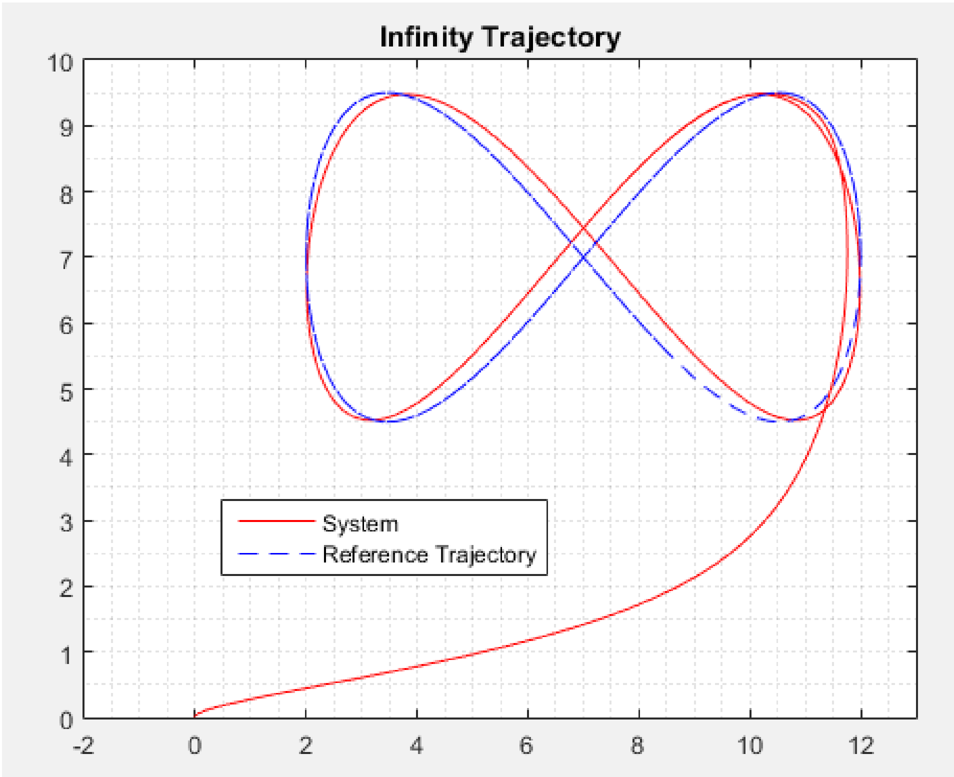
Για προαντισταθμιστή N=[-0.5725 0; 0 0.9640]^T , η βηματική απόκριση γίνεται :



Εφαρμόζοντας τις 2 τροχιές στο σύστημα έχουμε:



Εκτέλεση κυκλικής τροχιάς



Εκτέλεση τροχιάς σχήματος απείρου

Ο κώδικας που υλοιποιήσαμε στην matlab είναι ο παρακάτω:

```
clc; clear all;
% Δημιουργώ το γραμμικοποιημένο αρχικό σύστημα στον χώρο κατάστασης
m=4; J=0.05; r=0.3; g=9.81; c=0.07;
A=[ 0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 1 0
    0 0 0 0 0 1
    0 0 -g -c/m 0 0
    0 0 0 0 -c/m 0
    0 0 0 0 0 0];
B=[ 0 0; 0 0; 0 0 ;1/m 0; 0 1/m; r/J 0];
C=[ 1 0 0 0 0 0
    0 1 0 0 0 0];
D=[0 0 ; 0 0];
sys=ss(A,B,C,D);
%Οι πίνακες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας στο σύνεχες
e=rank(ctrb(sys));
if e==size(sys.A,1), fprintf('Continuous System is Controllable \n'), end
o=rank(obsv(sys));
if o==size(sys.A,1), fprintf('Continuous System is Observable \n'), end

eig(sys); %Βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές του συστήματος δεν ικανοποιούν το κριτήριο ευστάθειας
step(sys); % Βημαρική απόκριση του συνεχούς συστήματος

%Υπολογισμός συναρτήσεων μεταφοράς
[nc1,dc1]=ss2tf(A,B,C,D,1);
[nc2,dc2]=ss2tf(A,B,C,D,2);
tfc11=tf(nc1(1,:),dc1);
tfc22=tf(nc2(2,:),dc2);
%Διαγράμματα Bode για την εύρεση συχνότητας εύρους ζώνης
bode(tfc11); bode(tfc22);
```

```
%Μετασχηματίζουμε το συνεχές σύστημα σε διακριτό
Ts=0.1;
sysd=c2d(sys,Ts,'zoh');
eig(sysd); % Οι ιδιοτιμές του διακριτού
%Οι πίνακες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας του διακριτού
ed=rank(ctrb(sysd));
if ed==size(sysd.A,1), fprintf('Discrete System is Controllable \n'), end
od=rank(obsv(sysd));
if od==size(sysd.A,1), fprintf('Discrete System is Observable \n'), end

%Υλοποίηση του ελεγκτή Linear Quadratic Regulator
Q=eye(6);R=eye(2); %Επιλογή των πινάκων Q,R ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέραμε
[K,~,E]=dlqr(sysd.A,sysd.B,Q,R);% Linear Quadratic Regulator για διακριτό σύστημα
%Δημιουργία ευσταθούς συστήματος
sysnew=ss(sysd.A-sysd.B*K,zeros(6,2),sysd.C-sysd.D*K,zeros(2,2),Ts);
eig(sysnew); % Ιδιοτιμές sysnew
% Διαγράμματα που δείχνουν ότι το σύστημα συγκλίνει στην κατάσταση ισορροπίας
x01=[17 78 pi/2 0 0 0];
x02=[87 9 0 5 0 1];
initial(sysnew,x01);
initial(sysnew,x02);
%Το σύστημα μετά την τοποθέτηση της reference εισόδου
sysn=ss(sysd.A-sysd.B*K,sysd.B,sysd.C,zeros(2,2),Ts);
%Υπολογιμός συναρτήσεων μεταφοράς για τα Dc Gain
[n1,d1]=ss2tf(sysn.A,sysn.B,sysn.C,sysn.D,1);
[n2,d2]=ss2tf(sysn.A,sysn.B,sysn.C,sysn.D,2);
tf11=tf(n1(1,:),d1,Ts);
tf22=tf(n2(2,:),d2,Ts);
%Κερδη προαντιστάθμισης
K1=1/dcgain(tf11);
```

```
K2=1/dcgain(tf22);
Pro=[K1 0 ; 0 K2]; % Προαντισταθμιτής
%Τελικό σύστημα
sysnn=ss(sysd.A-sysd.B*K,sysd.B*Pro,sysd.C,zeros(2,2),Ts);

f=0.01; t=0:Ts:180;%Χρόνος και συχνότητα του σήματος reference
%Κυκλική τροχιά
xideal=2*sin(2*pi*f*t)+3;
yideal=2*sin(2*pi*f*t+pi/2)+3;
U=[xideal;yideal];
yr=lsim(sysnn,U,t);
plot(yr(:,1),yr(:,2),'r',xideal,yideal,'b--')
grid minor;
axis([-1 6 0 6]);
title('Cycle Trajectory');
legend('System','Reference Trajectory');

pause();
%Υλοποίηση τροχίας σε σχήμα απείρου
xinf=5*cos(2*pi*f*t)+7;
yinf=2.5*sin(4*pi*f*t)+7;
Uinf=[xinf; yinf];
yrr=lsim(sysnn,Uinf,t);
plot(yrr(:,1),yrr(:,2),'r',xinf,yinf,'b--')
grid minor;
axis([-2 13 0 10]);
title('Infinity Trajectory');
legend('System','Reference Trajectory');
```

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Με την χρήση του ψηφιακού ελέγχου σε περίπλοκα συστήματα, όπως αυτό που μελετήσαμε μειώνεται σε σημαντικό βαθμό ο χρόνος διεκπεραίωσης λόγω της εισαγωγής των τιμών στον Η/Υ, ο οποίος προσφέρη μεγάλη ταχύτητα υπολογισμών, σε σύγκριση με τα ολοκληρωμένα κυκλώματα που χρησιμοποιούνται στα συνεχή συστήματα. Όμως στις μέρες μας, υπάρχουν ειδικά προγράμμα επεξεργασίας συστημάτων (π.χ. MATLAB) που μπορούν να μελετήσουν εξίσου καλά και συνεχή συστήματα.

Επίσης, τα συστήματα διακριτού παρουσιάζουν μεγαλύτερη ανοχή στον θόρυβο.

Η υλοποίηση ενός ελεγκτή μέσω της θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου έγινε με σκοπό την ελαχιστοποίηση της ενέργειας, άρα και της ελαχιστοποίησης του κόστους για το συγκεκριμένο σύστημα.

Θα μπορούσαμε να υλοποιήσουμε ελεγκτή παρακολούθησης για την κάθε τροχιά, αλλά επιλέξαμε ελεγκτή ρύθμισης ώστε να κάνουμε το σύστημα πιο ευέλικτο και να μειώσουμε τον χρόνο υπολογισμού κάθε πιθανής ζητούμενης τροχιάς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Πέτρος Γρουμπός - Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα Ψηφιακός Ελεγχος [ΕΕ83]

2. Γεώργιος Π. Σύρκος – Ψηφιακός Ελεγχος Συστημάτων

3. Π. Ν. Παρασκευόπουλος – Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου: Θεωρία και Εφαρμογές , Τόμος Β : Σ.Α.Ε Διακριτού Χρόνου

4. M. Sami Fadali , Antonio Visioli – Digital Control Engineering Analysis And Design (2nd Edition)

5. Robert H. Bishop , Richard C. Dorf – Σύγχρονα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου (11η Έκδοση).

6. Karl Johan Astrom , Richard M. Murray – Feedback Systems