

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Τομέας: Τηλεπικοινωνιών και Τεχνολογίας Πληροφορίας
Εργαστήριο: Εργαστήριο Ενσύρματης Τηλεπικοινωνίας

Διπλωματική Εργασία

του φοιτητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών

Παπακώστα Λάμπη του Νικολάκη

Αριθμός μητρώου: 228467

Θέμα

**Σχεδίαση, Υλοποίηση και Αξιολόγηση Αυτόματων
Μεθόδων Διαχωρισμού Βιοσημάτων**

Επιβλέπων

Αναπληρωτής Καθηγητής Ευάγγελος Δερματάς, Πανεπιστήμιο Πατρών

Αριθμός Διπλωματικής Εργασίας: 228467/2019
Πάτρα, Μάρτιος, 2019

ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Πιστοποιείται ότι η διπλωματική εργασία με θέμα

**Σχεδίαση, Υλοποίηση και Αξιολόγηση Αυτόματων
Μεθόδων Διαχωρισμού Βιοσημάτων**

του φοιτητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Λάμπη Παπακώστα του Νικολάκη

(Α.Μ.: 228467)

παρουσιάστηκε δημόσια και εξετάστηκε στο τμήμα Ηλεκτρολόγων
Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών στις

08/03/2019

Ο Επιβλέπων

Ο Διευθυντής του Τομέα

Ευάγγελος Δερματάς
Αναπληρωτής Καθηγητής

Θεόδωρος Αντωνακόπουλος
Καθηγητής

Στοιχεία διπλωματικής εργασίας

Θέμα: Σχεδίαση, Υλοποίηση και Αξιολόγηση Αυτόματων
Μεθόδων Διαχωρισμού Βιοσημάτων

Φοιτητής: Λάμπης Παπακώστας του Νικολάκη

Επιβλέπων

Αναπληρωτής Καθηγητής Ευάγγελος Δερματάς,
Πανεπιστήμιο Πατρών

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο την εξέταση και την σύγκριση μεθόδων για την εξαγωγή συνιστωσών από γραμμικούς συνδυασμούς σημάτων, βασισμένο στο BSS μοντέλο, που αφορούν το δυναμικό που παράγει η καρδιά. Παρουσιάζονται και υλοποιούνται με χρήση της Python οι αλγόριθμοι FastICA με κριτήριο την αρνητική εντροπία και πCA με κριτήριο την περιοδικότητα των επιμέρους σημάτων.

Τέλος, οι παραπάνω αλγόριθμοι εφαρμόζονται και συγκρίνονται σε τεχνητά περιοδικά σήματα αλλά στις βάσεις δεδομένων abdfecgdb του Physionet και DaISy που περιέχουν ηλεκτροκαρδιογραφήματα από κυοφορούσες γυναίκες, χρησιμοποιώντας αντίστοιχα κριτήρια ως προς την εγγύτητα.

Abstract

The present diploma thesis examines and compares methods about extraction of components of linear mixed signals, based on BSS model, that refer to the voltage that heart produces.

The algorithms that presented and implemented in Python are FastICA with negentropy criterion and π CA with periodicity of each component as criterion.

Finally, the above methods are applied in synthesized periodic signals as well as abdfecgd database from Physionet and DaISy database, and compared with the use of proper criteria for their correctness.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Ευάγγελο Δερματά, για την άριστη συνεργασία μας, καθώς ήταν πάντοτε διαδέσιμος για βοήθεια.

Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου για την καθημερινή οικονομική και ψυχολογική στήριξη που μου παρείχαν κατά την διάρκεια της ακαδημαϊκής μου πορείας, καθώς χωρίς αυτούς δεν θα τα κατάφερνα.

Περιεχόμενα

1 Βασικές Έννοιες	10
1.1 Γραμμική Άλγεβρα	10
1.2 Πιθανότητες και Τυχαία Σήματα	12
1.3 Principal Component Analysis - PCA	14
1.4 Data Whitening	15
2 Βιοσήματα	17
2.1 Ανατομία της Καρδιάς	17
2.2 Ηλεκτρική Φυσιολογία Καρδιάς	19
2.3 Ηλεκτροκαρδιογράφημα	21
3 Άναλυση Ανεξάρτητων Συνιστωσών (ICA)	23
3.1 Ορισμός	23
3.2 Βοηθητικές Έννοιες	24
3.2.1 Μη Γκαουσιανότητα	24
3.2.2 Αρνητική Εντροπία	25
3.3 Αλγόριθμος FastICA	26
3.4 Μεθοδολογία	28
4 Άναλυση Περιοδικών Συνιστωσών(πCA)	30
4.1 Ορισμός	30
4.2 Προτάσεις	34
4.3 Μεθοδολογία	42
4.4 Αλγόριθμος AMUSE	43
4.5 Κυκλική πCA	44
4.6 Υλοποίηση	45
5 Εφαρμογή και Σύγκριση Μεθόδων	47
5.1 Τεχνητά Σήματα	47
5.1.1 Περιοδικά Σήματα	48
5.1.2 Ψευδό-Περιοδικά Σήματα	51
5.2 Βιοσήματα	55
5.2.1 Τεχνητά Βιοσήματα	55
5.2.2 Πραγματικά Βιοσήματα - Παράδειγμα 1	58
5.2.3 Πραγματικά Βιοσήματα - Περίπτωση 2	62
5.2.4 Αξιολόγηση στην εξαγωγή βιοσημάτων	67

6 Συμπεράσματα και Μελλοντική Έρευνα	69
A' Κώδικες	71
A.1 fastica.py	71
A.2 deflational method.py	73
A.3 symmetric method.py	74
A.4 piCA.py	75
A.5 preproc.py	78
A.6 is def.py	79
A.7 C0/Ct.py	80
A.8 Ce.py	81
A.9 Rayleigh Minimum.py	82
A.10 min/max.py	83
A.11 period check correlation.py	84

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Εσωτερική όψη καρδιάς	18
2.2	Κύρια μέρη της καρδιάς	19
2.3	Το ερεθισματαγωγό σύστημα της καρδιάς	20
2.4	Χαρακτηριστικά μεγέθη ηλεκτροκαρδιογραφήματος	22
5.1	Περιοδικές Πηγές και Μιξαρισμένα Σήματα	48
5.2	Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'logcosh'}$	49
5.3	Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'exp'}$	49
5.4	Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'cube'}$	50
5.5	Εξαγωγή Περιοδικών Συνιστωσών για $T_1 = 0.11$ s, $T_2 = 0.25$ s και $T_3 = 0.47$ s	50
5.6	Τα ελάχιστα σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως 1.2 δευτερόλεπτα	51
5.7	Ψευδο-περιοδικές Πηγές και Μιξαρισμένα Σήματα	52
5.8	Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'logcosh'}$	52
5.9	Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'exp'}$	53
5.10	Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'cube'}$	53
5.11	Εξαγωγή Περιοδικών Συνιστωσών για $T_1 = 0.48$ s και $T_2 = 0.644$ s	54
5.12	Τα ελάχιστα σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως 4.2 δευτερόλεπτα	54
5.13	AAMI Dataset	55
5.14	Αποτελέσματα για $g = \text{'logcosh'}$	56
5.15	Αποτελέσματα για $g = \text{'exp'}$	56
5.16	Αποτελέσματα για $g = \text{'cube'}$	57
5.17	Οι περιοδικές συνιστώσες του AAMI Dataset για $T_1 = 0.75$ s, $T_2 = 1.496$ s και $T_3 = 3.994$ s	57
5.18	Τα ελάχιστα περιοδικά σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως 5.2 δευτερόλεπτα	58
5.19	Σήματα Ηλεκτροδίων της r01	59
5.20	Τα RR intervals του εμβρυακού ECG	59
5.21	Αποτελέσματα για $g = \text{'logcosh'}$	60
5.22	Αποτελέσματα για $g = \text{'exp'}$	60
5.23	Αποτελέσματα για $g = \text{'cube'}$	61
5.24	Περιοδικές συνιστώσες για πCA με περιόδους $T_1 = 0.467s$ και $T_2 = 0.696s$	61
5.25	Περιοδικές συνιστώσες για AMUSE με περιόδους $T_1 = 0.467s$ και $T_2 = 0.696s$	62

5.26 Τα ελάχιστα περιοδικά σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως	
1.6 δευτερόλεπτα	62
5.27 Βάση δεδομένων DaISy	63
5.28 Τα RR intervals του μητρικού ECG που λαμβάνονται από τον θώρακα .	63
5.29 Συχνοτικό φάσμα των παρατηρήσεων	64
5.30 Αποτελέσματα για $g = \text{'logcosh'}$	64
5.31 Αποτελέσματα για $g = \text{'exp'}$	65
5.32 Αποτελέσματα για $g = \text{'cube'}$	65
5.33 Περιοδικές συνιστώσες για πCA με περιόδους $T_1 = 0.448s$ και $T_2 =$ $0.74s$	66
5.34 Περιοδικές συνιστώσες για AMUSE με περιόδους $T_1 = 0.448s$ και $T_2 = 0.74s$	66
5.35 Τα ελάχιστα περιοδικά σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως	
1.2 δευτερόλεπτα	67

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες

1.1 Γραμμική Άλγεβρα

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μερικούς ορισμούς και θεωρήματα [1],[2] από την Γραμμική Άλγεβρα, που θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση και την ανάλυση των μεθόδων που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Ορισμός 1.1 Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται συμμετρικός όταν $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Θεώρημα 1.1 Ένας συμμετρικός πίνακας έχει πάντα πραγματικές ιδιοτιμές.

Θεώρημα 1.2 Ένας συμμετρικός πίνακας έχει πάντα n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ára μπορεί να διαγωνοποιηθεί.

Θεώρημα 1.3 Τα ιδιοδιανύσματα ενός συμμετρικού πίνακα είναι δυνατόν να επιλεγούν κάθετα μεταξύ τους.

Ορισμός 1.2 Ένας συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται ορθογώνιος όταν $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbb{I}$ και $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Ορισμός 1.3 Τα διανύσματα q_1, \dots, q_k είναι ορθοχανονικά όταν:

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & \text{όταν } i \neq j, \text{ που δίνει την ορθογωνιότητα} \\ 1 & \text{όταν } i = j, \text{ που δίνει την κανονικότητα} \end{cases}$$

Θεώρημα 1.4 Εστω ένας πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και v_1, v_2, \dots, v_n τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Έαν \mathbf{V} ο πίνακας που περιέχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα \mathbf{A} και $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών κατα αντιστοιχία, τότε ο πίνακας \mathbf{A} μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$$

Πρόταση 1.1 Εάν ο πίνακας \mathbf{A} είναι συμμετρικός, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3, τότε ο πίνακας \mathbf{V} είναι ορθογώνιος. Άρα ο πίνακας \mathbf{A} μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$$

Ορισμός 1.4 Ένας συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται θετικά ορισμένος όταν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Ορισμός 1.5 Ένας συμμετρικός πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται θετικά ημι-ορισμένος όταν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές.

Θεώρημα 1.5 [Κριτήριο Sylvester] Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ένας τετραγωνικός πίνακας \mathbf{A} θετικά ορισμένος εάν για τις ακόλουθες διαδοχικές ορίζουσες ισχύει ότι:

$$D_1 = \alpha_{11} > 0, D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0, D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, D_n = |\mathbf{A}| > 0$$

Αντίστοιχα, για να είναι θετικά ημι-ορισμένος θα πρέπει οι ακόλουθες διαδοχικές ορίζουσες να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

Ορισμός 1.6 Μια τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ και ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ονομάζεται γενικευμένη ιδιοτιμή και γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα ενός ζεύγους τετραγωνικών πινάκων (\mathbf{A}, \mathbf{B}) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, όπου ικανοποιούν την σχέση $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Bx}$. Το αντίστοιχο πρόβλημα εύρεσης των παραπάνω ποσοτήτων ονομάζεται Πρόβλημα Γενικευμένων Ιδιοτιμών (General Eigenvalue Problem).

Ορισμός 1.7 Το γενικευμένο κλάσμα Rayleigh ενός ζεύγους τετραγωνικών πινάκων (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ορίζεται:

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, w) = \frac{x^T \mathbf{Ax}}{x^T \mathbf{Bx}}$$

Θεώρημα 1.6 [Αρχή Rayleigh-Ritz] Εστω $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ οι γενικευμένες ιδιοτιμές του ζεύγους (\mathbf{A}, \mathbf{B}) και v_1, v_2, \dots, v_n τα αντίστοιχα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Τότε ισχύει:

$$\min_x \{\mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, x)\} = \mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, v_1) = \lambda_1$$

$$\max_x \{\mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, x)\} = \mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, v_n) = \lambda_n$$

Πρόταση 1.2 Εστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας και $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε:

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T \mathbf{B} \mathbf{Q}, x) = \mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}x)$$

Πρόταση 1.3 Όταν πολλαπλασιάζουμε το ζεύγος πινάκων με τους αριθμούς $a, b \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε το κλάσμα Rayleigh γίνεται:

$$\mathbf{R}(a\mathbf{A}, b\mathbf{B}, x) = \frac{a}{b} \mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, x)$$

1.2 Πιθανότητες και Τυχαία Σήματα

Παραθέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς [3] ώστε να κάνουμε καλύτερη την κατανόηση των μεθόδων. Για τους ορισμούς, υποθέτουμε τυχαία μεταβλητή x με συνάρτηση κατανομής $F_x(x_i) = P\{x \leq x_i\}$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_x(x) = \frac{dF_x}{dx}$.

Ορισμός 1.8 Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή μιας οποιαδήποτε συνάρτησης $g(x)$ της τυχαίας μεταβλητής x είναι:

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx$$

Πρόταση 1.4 Εάν $a, b \in \mathbf{R}$, τότε: $E\{ax + b\} = aE\{x\} + b$

Στην πράξη όμως, επειδή δεν γνωρίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της x , υπολογίζουμε τον αντίστοιχο δειγματικό μέσο όρο:

$$E\{g(x)\} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(x_i)$$

όπου m οι παρατηρήσεις της μεταβλητής x .

Ορισμός 1.9 Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής x ορίζεται ως:

$$var(x) = E\{(x - \mu)^2\} = E\{x^2\} - \mu^2$$

όπου μ η μέση τιμή της μεταβλητής x .

Πρόταση 1.5 Εάν $a, b \in \mathbf{R}$, τότε: $var(ax + b) = a^2 var(x)$.

Η διασπορά αποτελεί ένα μέτρο της μεταβλητότητας μιας τυχαίας μεταβλητής ή του άπλωματος' της κατανομής της. Με άλλα λόγια, μια κατανομή με μεγάλη διασπορά είναι άπλωμένη, ενώ μια κατανομή με μικρή διασπορά είναι 'συγκεντρωμένη' γύρω από την μέση τιμή.

Ορισμός 1.10 Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς ονομάζεται τυπική απόκλιση. Δηλαδή:

$$\sigma_x = \sqrt{var(x)}$$

Ορισμός 1.11 Μια τυχαία μεταβλητή x ονομάζεται γκαουσιανή όταν ακολουθεί την κατανομή:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

και συμβολίζεται ως $\mathcal{N}(\mu, \sigma_x)$. Μια γκαουσιανή κατονομή ονομάζεται τυπική όταν $\mu = 0$ και $\sigma_x = 1$.

Επιπλέον, υποθέτουμε για τυχαία μεταβλητή που έχει από κοινού συνάρτηση κατανομής $F_{xy}(x_i, y_i) = P(x \leq x_i, y \leq y_i)$ και από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{xy} = \frac{\partial^2 F_{xy}}{\partial x \partial y}$.

Ορισμός 1.12 Η μέση ή αναμενόμενη τιμή μιας οποιαδήποτε συνάρτησης $g(x, y)$ των τυχαίων μεταβλητών x, y ορίζεται ως:

$$E\{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{xy}(x, y) dx dy$$

Ορισμός 1.13 Η συσχέτιση δύο τυχαίων μεταβλητών ορίζεται ως:

$$\text{corr}(x, y) = E\{x, y\}$$

Ορισμός 1.14 Η συνδιασπορά δύο τυχαίων μεταβλητών x, y ορίζεται ως:

$$\text{cov}(x, y) = E\{(x - \mu_x)(y - \mu_y)\} = \text{corr}(x, y) - \mu_x \mu_y$$

Ορισμός 1.15 Οι τυχαίες μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n ονομάζονται στατιστικά ανεξάρτητες όταν ισχύει:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1)P(x_2) \dots P(x_n)$$

Οι παραπάνω ορισμοί μπορούν να επεκταθούν και για τυχαία σήματα [4]. Όπως γνωρίζουμε, τα τυχαία σήματα απαρτίζονται από ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών. Στους ακόλουθους ορισμούς θα χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες που περιέχουν τυχαία σήματα $\mathbf{X}(t)$ και $\mathbf{Y}(t)$.

Ορισμός 1.16 Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης \mathbf{R}_{XX} ορίζεται ως:

$$\mathbf{R}_{XX}(\tau) = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t + \tau)\}$$

ενώ ο πίνακας ετεροσυσχέτισης \mathbf{R}_{XY} ως:

$$\mathbf{R}_{XY}(\tau) = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}^T(t + \tau)\}$$

όπου τ η χρονική μετατόπιση κάθε σήματος.

Πρόταση 1.6 Για χρονική καθυστέρηση $\tau = 0$, ο πίνακας αυτοσυσχέτισης αναπαριστά την μέση τετραγωνική ισχύ του τυχαίου σήματος. Δηλαδή:

$$\mathbf{R}_{XX}(0) = E\{X^2(t)\}$$

Ορισμός 1.17 Ο πίνακας συνδιασποράς \mathbf{C}_X ορίζεται ως:

$$\mathbf{C}_X = E\{(\mathbf{X} - \mu_X)(\mathbf{X} - \mu_X)^T\}$$

όπου μ_X ο μέσος όρος του πίνακα \mathbf{X} .

1.3 Principal Component Analysis - PCA

Η κεντρική ιδέα της ανάλυσης κυρίων συνιστώσων (PCA)^[5] είναι να μειώσει τις διαστάσεις ενός συνόλου δεδομένων, το οποίο περιέχει ένα μεγάλο αριθμό από συσχετισμένες μεταβλητές, διατηρώντας όσο το δυνατό την ίδια πληροφορία με το αρχικό σύνολο δεδομένων. Το παραπάνω αποτέλεσμα επιτυγχάνεται με τον μετασχηματισμό των αρχικών δεδομένων σε ένα νέο σύνολο μεταβλητών, τις κύριες συνιστώσες (PC). Οι κύριες συνιστώσες είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες και είναι διατεταγμένες με τέτοιο τρόπο ώστε οι πρώτες κατά σειρά από αυτές να περιέχουν την περισσότερη πληροφορία που υπάρχει στο αρχικό σετ δεδομένων.

Τυποθέτουμε τυχαίες μεταβλητές $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, των οποίων μας ενδιαφέρουν οι διασπορές και οι συνδιασπορές τους και θέλουμε να εξάγουμε έναν αριθμό τυχαίων μεταβλητών $p << n$ που να περιέχουν την μέγιστη δυνατή πληροφορία όσο αφορά τις διασπορές και συνδιασπορές τους.

Ψάχνουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των n τυχαίων μεταβλητών $y = w^T x$, $w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ τέτοιων ώστε να μεγιστοποιείται η διασπορά του, $Var(y) = Var(w^T x) = w^T \mathbf{C}_x w$ όπου $\mathbf{C}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας συνδιασπορών του διανύσματος x .

Περιορίζοντας το μέτρο του w να είναι ίσο με την μονάδα, το πρόβλημά μπορεί να γραφτεί ως:

$$\max_{w^T w = 1} (w^T \mathbf{C}_x w)$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των Λαγκρανζιανών πολλαπλασιαστών [6], η σχέση προς μεγιστοποίηση είναι:

$$w^T \mathbf{C}_x w - \lambda (w^T w - 1) = 0 \quad (1.3.1)$$

όπου λ ο πολλαπλασιαστής Langrange.

Παραγωγίζοντας ως προς w_1 την σχέση (1.3.1), έχουμε:

$$\mathbf{C}_x w - \lambda w = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{C}_x - \lambda \mathbb{I}_n) w = 0 \quad (1.3.2)$$

Η εξίσωση (1.3.2) αποτελεί λύση του προβλήματος ιδιοτυπών. Οπότε, το λ αποτελεί μια ιδιοτυπή του πίνακα \mathbf{C}_x και w το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Έστω w_1 ένα ιδιοδιάνυσμα που μεγιστοποιεί την διασπορά της $y_1 = w_1^T x$. Για να βρούμε ποια από τις n ιδιοτυπές μεγιστοποιεί την y_1 , η ποσότητα προς μεγιστοποίηση είναι:

$$w_1^T \mathbf{C}_x w_1 = w_1^T \lambda w_1 = \lambda w_1^T w_1 = \lambda$$

με την τιμή του λ να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Άρα, το ιδιοδιάνυσμα w_1 αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτυπή του πίνακα \mathbf{C}_x με λ_1 την μεγαλύτερη ιδιοτυπή.

Αφού βρήκαμε το μέγιστο, θέλουμε στην συνέχεια να βρούμε εκείνο το συνδυασμό που μεγιστοποιεί την διασπορά της $y_2 = w_2^T x$ και ταυτόχρονα να είναι ασυσχέτιστο με το προηγούμενο, δηλαδή $Cov(y_1, y_2) = 0$. Κατά τον ίδιο τρόπο, ψάχνουμε έναν 3ο συνδυασμό που να μεγιστοποιεί την διασπορά και να είναι ασυσχέτιστο με τα 2 προηγούμενα κ.λ.π.

Αποδεικνύεται ότι τα ιδιοδιανύσματα που φάχνουμε είναι w_1, w_2, \dots, w_n αντίστοιχα. Γενικά, η κ-οστή κύρια συνιστώσα των αρχικών τυχαίων μεταβλητών είναι η $y_\kappa = w_\kappa^T x$ με διασπορά $Var(w_\kappa^T x) = \lambda_\kappa$, όπου λ_κ η κ μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα \mathbf{C}_x και w_κ το αντίστοιχο ιδιοδιανύσμα.

Μια μέθοδος για να βρούμε τις κύριες συνιστώσες είναι η παρακάτω:

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4 και την Πρόταση 1.1, ο πίνακας \mathbf{C}_x μπορεί να γραφεί στην μορφή $\mathbf{C}_x = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$, όπου ο πίνακας \mathbf{D} πρέπει να έχει ως στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{C}_x κατά φθίνουσα σειρά, δηλαδή $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ και ο πίνακας \mathbf{V} με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα να είναι ορθοκανονικός.

Εάν $y = \mathbf{W}^T x$, τότε ο πίνακας συνδιασπορών θα είναι $\mathbf{C}_y = \mathbf{W}^T \mathbf{C}_x \mathbf{W}$ και αν επιλέξουμε $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_y &= \mathbf{W}^T \mathbf{C}_x \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \mathbf{W} = (\mathbf{V}^T \mathbf{V}) \mathbf{D} (\mathbf{V}^T \mathbf{V}) = \mathbb{I}_n \mathbf{D} \mathbb{I}_n \Leftrightarrow \\ \mathbf{C}_y &= \mathbf{D} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Αφού επιλέξαμε τις ιδιοτιμές κατά φθίνουσα σειρά, η y_1 έχει την μεγαλύτερη διασπορά και η y_n την μικρότερη. Μπορούμε να επιλέξουμε τις κύριες συνιστώσες που μας ενδιαφέρουν είτε κρατώντας τις $p < n$ πρώτες ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, είτε τοποθετώντας ένα κατώφλι ως προς την διασπορά, απορίπτωντας συνιστώσες μικρότερες από το συγκεκριμένο κατώφλι.

1.4 Data Whitening

To *whitening* ή *data whitening*[7] αποτελεί έναν γραμμικό μετασχηματισμό που μετατρέπει ένα διάνυσμα $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ με μέση τιμή $E x = m_x = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n]^T$ και θετικά ορισμένο πίνακα διασποράς \mathbf{C}_x σε ένα νέο διάνυσμα με ίδιες διαστάσεις:

$$z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T = \mathbf{W} z$$

όπου ο πίνακας \mathbf{W} ονομάζεται πίνακας λεύκανσης. Το νέο διάνυσμα θα έχει πίνακα διασπορών $\mathbf{C}_z = \mathbb{I}_n$ και τα δεδομένα που περιέχονται στο z θα είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστα, άρα το διάνυσμα z θα είναι διάνυσμα λευκού θορύβου. Συνήθως, στον μετασχηματισμό αυτό, προηγείται μία αφαίρεση της μέσης τιμής από το διάνυσμα x ώστε το διάνυσμα z να έχει μηδενική μέση τιμή.

Στην συγκεκριμένη εργασία, θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό PCA whitening, καθώς συνδέεται με τον αλγόριθμο PCA που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1.3.

Όπως γνωρίζουμε από την Πρόταση 1.1, ο πίνακας \mathbf{C}_x μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{C}_x = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$, όπου ο πίνακας \mathbf{D} περιέχει τις ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{C}_x κατά φθίνουσα σειρά και ο πίνακας \mathbf{V} τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Ο πίνακας λεύκανσης θα είναι:

$$\mathbf{W} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T \quad (1.4.1)$$

Από την σχέση (1.4.1), βλέπουμε ότι ο πίνακας \mathbf{C}_z είναι ίσος με τον μοναδιαίο:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_z &= \mathbf{W}\mathbf{C}_x\mathbf{W}^T = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \left(\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T\right)^T = \\ &= \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{V}^T\mathbf{V}) \mathbf{D} (\mathbf{V}^T\mathbf{V}) (\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}})^T \\ &= \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{I}_n \mathbf{D} \mathbb{I}_n \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\right) \left(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathbb{I}_n \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n\end{aligned}$$

και ότι ο πίνακας \mathbf{W} είναι ορθογανονικός:

$$\mathbf{C}_z = \mathbf{W}\mathbf{C}_x\mathbf{W}^T \Leftrightarrow \mathbb{I}_n = \mathbf{W}\mathbb{I}_n\mathbf{W}^T \Leftrightarrow \mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbb{I}_n$$

Τέλος, ο μετασχηματισμός whitening, όπως και ο PCA, αποτελούν αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς.

Κεφάλαιο 2

Βιοσήματα

Στην παρούσα εργασία, τα σήματα που θα διαχωριστούν θα αναφέρονται σε βιολογικές εφαρμογές και αποκαλούνται βιοσήματα. Συγκεκριμένα, θα γίνει ανάλυση σημάτων με βάση το δυναμικό δράσης στην κυτταρική μεμβράνη, χρησιμοποιώντας για την μέτρηση του διακυτταρικά ηλεκτρόδια. Τέλος, τα σήματα αφορούν την λειτουργία της καρδιάς και για την αναπαράστασή τους γίνεται χρήση ηλεκτροκαρδιογραφημάτων.

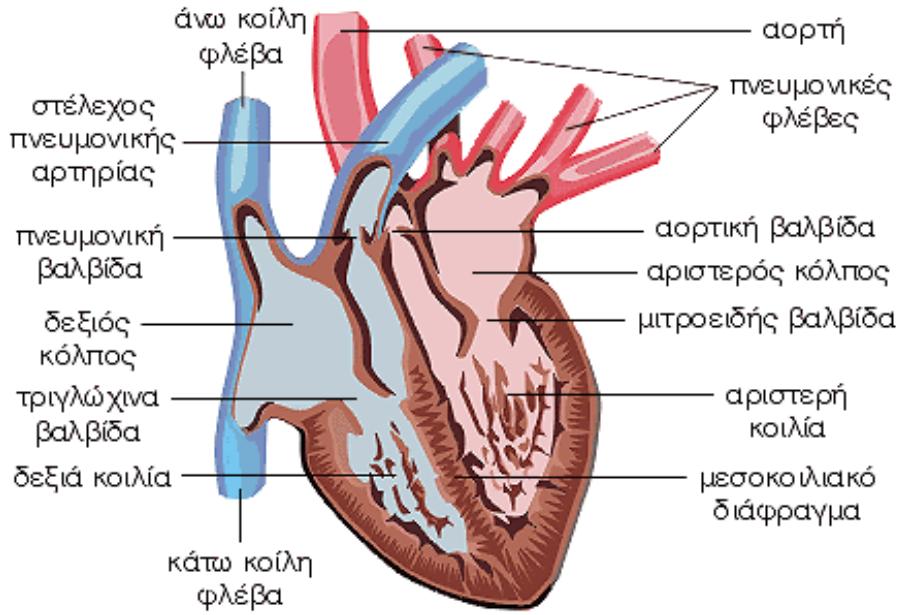
2.1 Ανατομία της Καρδιάς

Η καρδιά [8] [9] είναι ένα κοίλο μυώδες όργανο σε μέγεθος περίπου όσο μια γροθιά. Για τους άνδρες έχει βάρος 250-350 γραμμάρια, ενώ στις γυναίκες είναι 240-280 γραμμάρια. Βρίσκεται ανάμεσα στους δυο πνεύμονες πίσω από το στέρνο. Η θέση της εξωτερικά αντιστοιχεί από τον 3ο έως τον 6ο πλευρικό χόνδρο. Τέλος, επικάθεται στο διάφραγμα και όταν συστέλλεται, κινείται προς τα εμπρός και αφιστερά.

Η καρδιά βρίσκεται μέσα σε ένα λεπτό σάκο ινώδους ιστού που ονομάζεται περικάρδιο και έχει 3 στρώματα ιστού: το επικάρδιο, το μυοκάρδιο και το ενδοκάρδιο. Το επικάρδιο είναι μια λεπτή μεμβράνη που καλύπτει την επιφάνεια της καρδιάς. Κάτω από το επικάρδιο, βρίσκεται ένα παχύ στρώμα μυός που ονομάζεται μυοκάρδιο. Τέλος, το εσωτερικό μέλος της καρδιάς καλύπτεται από μια μεμβράνη που ονομάζεται ενδοκάρδιο και καλύπτει το εσωτερικό των κοιλοτήτων της καρδιάς, τις βαλβίδες και τους μυς στις κοιλότητες που συνδέονται με τις βαλβίδες.

Η καρδιά αποτελείται από 4 κοιλότητες (Σχήμα 2.1). Οι δύο είναι πιο μεγάλες και με παχιά τοιχώματα που ονομάζονται κοιλίες και οι άλλες δύο είναι μικρότερες και με λεπτότερα τοιχώματα που ονομάζονται κόλποι. Οι κόλποι χωρίζονται με το μεσοκολπικό διάφραγμα ενώ οι κοιλίες με το μεσοκοιλιακό διάφραγμα. Το μεσοκοιλιακό διάφραγμα εμποδίζει το αίμα να περάσει από την μία πλευρά της καρδιάς στην άλλη, καθώς η δεξιά πλευρά γεμίζει πάντοτε από φλεβικό αίμα ενώ η αριστερή από αρτηριακό.

Όσο αφορά την λειτουργία της καρδιάς, ο δεξιός κόλπος δέχεται το αίμα από όλα τα μέρη του σώματος μέσω των μεγάλων φλεβών, τα προωθεί στην δεξιά κοιλία και από εκεί στους πνεύμονες με στόχο την οξυγόνωση τους. Στην συνέχεια, το αίμα προωθείται από τους πνεύμονες στον αριστερό κόλπο και στην αριστερή κοιλία. Τέλος, με την συστολή της καρδιάς, το οξυγωνομένο αίμα προωθείται από την αριστερή κοιλία στο υπόλοιπο σώμα, μέσω της αορτής και των μεγάλων αρτηριών.



Σχήμα 2.1: Εσωτερική όψη καρδιάς

Η καρδιά συντονίζεται από εσωτερικούς φυσικούς βηματοδότες, οι οποίοι είναι ο φλεβόκομβος, που βρίσκεται στο τοίχωμα του δεξιού κόλπου και ο κολποκοιλιακός κόμβος που βρίσκεται στο σημείο επαφής του μεσοκολπικού με το μεσοκοιλιακό διάφραγμα.

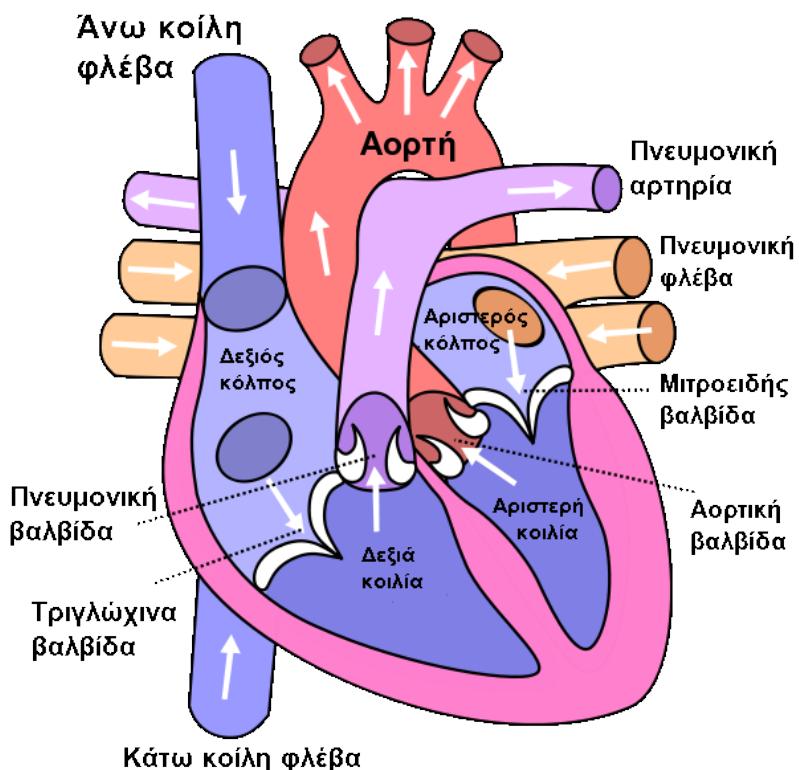
Η καρδιά, επιπλέον, διαθέτει 4 βαλβίδες που χρησιμεύουν στο να επιτρέπουν την δίοδο του αίματος προς μία μόνο κατεύθυνση και να εμποδίζουν την παλινδρόμηση του κατά τη διάρκεια της καρδιακής συστολής. Οι βαλβίδες αποτελούνται από μικρά αλλά ισχυρά μέρη, τις γλωχίνες, και είναι υπεύθυνες για υποχρεωτική κυκλοφορία του αίματος προς μία μοναδική κατεύθυνση.

Αυτές οι βαλβίδες είναι:

- η τριγλώχινη μεταξύ δεξιού κόλπου και δεξιάς κοιλίας.
- η πνευμονική μεταξύ δεξιάς κοιλίας και πνευμονικής αρτηρίας.
- η μιτροειδής μεταξύ αριστερού κόλπου και αριστερής κοιλίας
- η αορτική μεταξύ αριστερής κοιλίας και αορτής.

όπως φαίνονται στο σχήμα 2.2.

Το περικάρδιο εμποδίζει την σύμπτωση των βαλβίδων, καθώς αποτελεί σημείο πρόσφυσης μεταξύ του μυοκαρδίου και των γλωχίνων των βαλβίδων, ενώ ταυτόχρονα βοηθά στον διαχωρισμό της σύσπασης κόλπων και κοιλιών, δρώντας ως μονωτής του σήματος σύσπασης.



Σχήμα 2.2: Κύρια μέρη της καρδιάς

Τέλος, για την αιμάτωση της, η καρδιά έχει δύο αγγεία, την αριστερή και την δεξιά στεφανιαία αρτηρία που βρίσκονται στο αρχικό μέρος της αορτής. Ο βασικός τους ρόλος είναι να παρέχουν οξυγόνο και γενικότερα υρεπτικές ουσίες στα κύτταρα του μυοκάρδιου.

2.2 Ηλεκτρική Φυσιολογία Καρδιάς

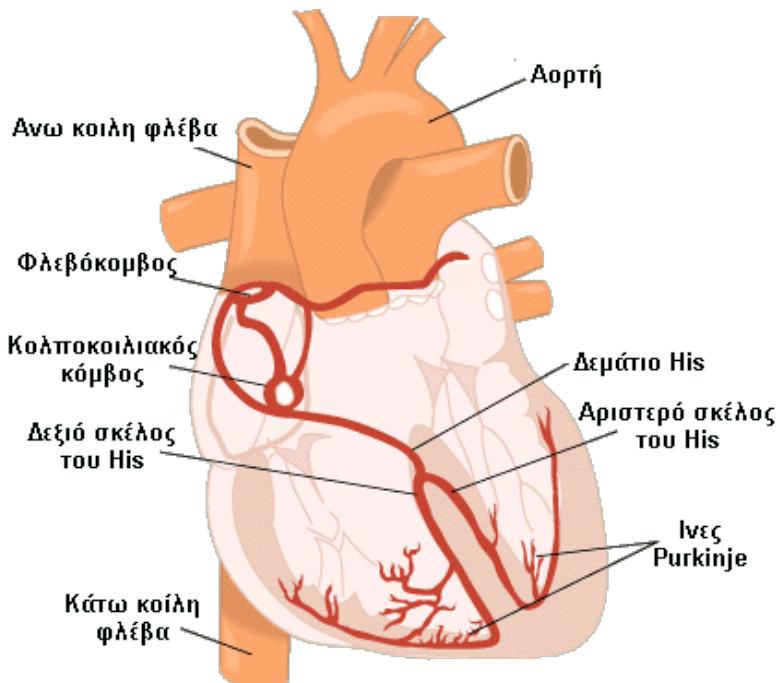
Ο καρδιακός μυς αποτελείται από κύτταρα που ονομάζονται καρδιακές μυϊκές ίνες. Οι μεμβράνες των γειτονικών κυττάρων συνδέονται μεταξύ τους σε σειρά αλλά και πλάγια, δημιουργώντας ένα ενιαίο μόρφωμα. επιτρέποντας έτσι την ελεύθερη διάχυση των ιόντων. Έτσι, ο ερεθισμός και μίας μόνο μυοκαρδιακής ίνας οδηγεί σε εξάπλωση του δυναμικού δράσης σε ολόκληρη την μυϊκή μάζα.

Όπως όλα τα κύτταρα του σώματος, έτσι και τα καρδιακά κύτταρα, έχουν ένα ηλεκτρικό δυναμικό στην κυτταρική τους μεμβράνη. Τόσο στον εξωκυττάριο όσο και στον ενδοκυττάριο χώρο υπάρχουν αρνητικά και θετικά φορτία (ιόντα) ίσα μεταξύ τους. Όμως, μέσα από την κυτταρική μεμβράνη υπάρχει περίσσεια αρνητικά φορτισμένων ιόντων, ενώ έξω από αυτή συγκεντρώνονται σε ίση ποσότητα θετικά φορτισμένα ιόντα. Το αποτέλεσμα είναι η πόλωση, δηλαδή η διαφορά δυναμικού μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού της κυτταρικής μεμβράνης. Το δυναμικό αυτό ονομάζεται δυναμικό ηρεμίας και έχει τιμή ίση με -90 mV.

Επιπλέον, τα καρδιακά κύτταρα είναι ικανά να μεταβάλλουν το δυναμικό της κυτταρικής τους μεμβράνης, έτσι ώστε να αναπτύξουν ένα ηλεκτρικό δυναμικό που διαδίδεται κατά μήκος της μυϊκής ίνας όταν διεγείρεται επαρκώς. Το δυναμικό αυτό είναι γνωστό ως δυναμικό δράσης.

Η καρδιά περιλαμβάνει δύο δυναμικά δράσης, ένα στο κολπικό μυοκάρδιο και ένα στο κοιλιακό μυοκάρδιο. Στο κοιλιακό μυοκάρδιο, το δυναμικό παράγεται από τα ρεύματα εκπόλωσης των γειτονικών κυττάρων και υπολογίζεται στα 105 mV, αυξάνοντας το δυναμικό από τα -90 mV στα περίπου 20 mV. Μετά από το αρχικό έπαρμα, η μεμβράνη μένει σε κατάσταση εκπόλωσης για 0.15 δευτερόλεπτα στο κολπικό μυοκάρδιο έως και 0.3 δευτερόλεπτα στο κοιλιακό μυοκάρδιο, εμφανίζοντας ένα χαρακτηριστικό "plateau", στο τέλος του οποίου ακολουθεί απότομη επαναπόλωση.

Σε φυσιολογικές συνθήκες, η μυϊκή ίνα βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας ή πόλωσης. Εάν διεγερθεί το ένα άκρο της με κάποιο ερεύνισμα τότε ξεκινά αυτόματα η διαδικασία της εκπόλωσης και το ερεύνισμα μεταφέρεται από το ένα άκρο της στο άλλο. Επειτα ξεκινά απότομα το κύμα επαναπόλωσης που είναι ακριβώς αντίθετο με το κύμα εκπόλωσης.



Σχήμα 2.3: Το ερεύνισματαγωγό σύστημα της καρδιάς

Το ερεύνισματωγό σύστημα της καρδιάς (Σχήμα 2.3) αποτελείται από τα εξής μέρη:

- τον φλεβοκολπικό και κολποκοιλιακό κόμβο
- το κολποκοιλιακό δεμάτιο *Hiss* που χωρίζεται σε δεξί και αριστερό σκέλος
- τις ίνες *Purkinje*
- τον φλεβόκομβο

Ο φλεβόκομβος παράγει το πρώτο ηλεκτρικό δυναμικό, το οποίο ξεκινά αλυσιδωτή ηλεκτρική αντίδραση για την μετάδοση του ερεθίσματος σε όλο το τοίχωμα των κόλπων με αποτέλεσμα την σύσπαση τους. Η μετάδοση του ερεθίσματος στους κόλπους εξαπλώνεται σε 0.1 δευτερόλεπτα. Κατόπιν, περνά τον κολποκοιλιακό κόμβο και διαχέεται με μικρή καθυστέρηση στο δεμάτιο του Hiss και ύστερα στις κοιλίες μέσω του δεξιού και αριστερού σκέλους του δεματίου, δημιουργώντας τους συστολή. Οι τελικές απολήξεις των στελεχών είναι οι ίνες του Purkinje, οι οποίες προχωρούν κάθετα από το ενδοκάρδιο στο επικάρδιο.

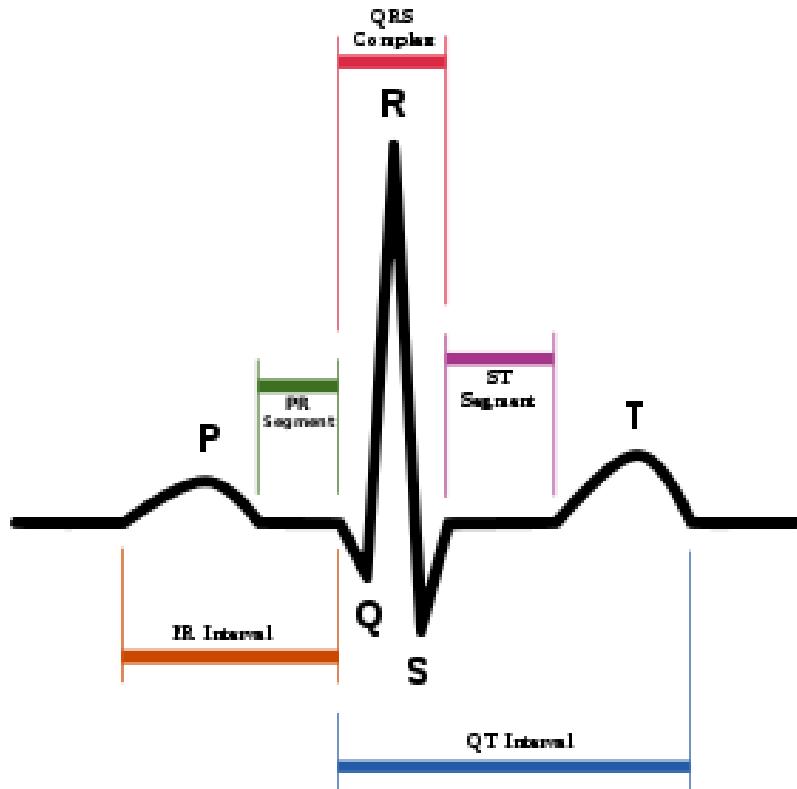
Η περίοδος από το τέλος μιας καρδιακής συστολής έως το τέλος της επόμενης ονομάζεται καρδιακός κύκλος. Κάθε κύκλος ξεκινά με την αυτόματη παραγωγή ενός δυναμικού δράσης στον φλεβόκομβο και ολοκληρώνεται μετά το πέρας των 5 ακόλουθων φάσεων:

1. την παθητική πλήρωση της καρδιάς από αίμα
2. την συστολή των κόλπων
3. την διέγερση και ισομετρική συστολή
4. την εξώθηση του αίματος από την καρδιά
5. την ισομετρική χάλαση

2.3 Ηλεκτροκαρδιογράφημα

Το ηλεκτροκαρδιογράφημα ή *ECG* [9] είναι μία γραφική αναπαράσταση της εκπόλωσης και της επαναπόλωσης της καρδιάς, που χαταγράφεται ως το δυναμικό που προκαλούν οι παραπάνω λειτουργίες και το οποίο διαδίδεται στην επιφάνεια του δέρματος.

Ένα φυσιολογικό ηλεκτροκαρδιογράφημα φαίνεται στο σχήμα 2.4 και αποτελείτε από τα ακόλουθα διαστήματα και επάρματα:



Σχήμα 2.4: Χαρακτηριστικά μεγέθη ηλεκτροκαρδιογραφήματος

- το **έπαρμα P** που αντιστοιχεί στην κολπική εκπόλωση και έχει διάρκεια μικρότερη των 0.12 δευτερολέπτων. Ενίοτε εμφανίζεται θετικό ενώ άλλες φορές αρνητικό.
- το **διάστημα PR** που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από την εκπόλωση των κόλπων έως την εκπόλωση των κοιλιών και για φυσιολογικά άτομα έχει διάρκεια από 0.12 έως 0.2 δευτερόλεπτα.
- το **σύμπλεγμα QRS** το οποίο αντιστοιχεί στον ερεθισμό και στην εκπόλωση των κοιλιών και για φυσιολογικά άτομα έχει διάρκεια μικρότερη ή ίση των 0.10 δευτερόλεπτων.
- το **διάστημα ST** και το **έπαρμα T** που αντιστοιχούν στην επαναπόλωση των κοιλιών.

Κεφάλαιο 3

Άναλυση Ανεξάρτητων Συνιστωσών (ICA)

3.1 Ορισμός

Έστω ότι έχουμε ένα BSS μοντέλο $\mathbf{X} = \mathbf{AS}$ όπου $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, $\mathbf{S} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n]^T$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και θέλουμε να βρούμε εκείνο τον γραμμικό συνδυασμό, $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{WX}$, ώστε οι παρατηρήσεις $\hat{\mathbf{S}}$ να είναι στατιστικώς ανεξάρτητες. Αυτό είναι το πρόβλημα που επιλύει η ανάλυση ανεξαρτήτων συνιστωσών (Independent Component Analysis) [10], [11].

Για να είμαστε σίγουροι ότι το μοντέλο ICA μπορεί να εκτιμήσει τα σήματα πηγών κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Τα σήματα πηγών του πίνακα \mathbf{S} είναι στατιστικώς ανεξάρτητα.
- Οι ανεξάρτητες συνιστώσες να ακολουθούν μη Γκαουσιανές κατανομές, καθώς στην περίπτωση Γκαουσιανών κατανομών οι ροπές ανώτερης τάξης είναι μηδενικές και κατά συνέπεια η εφαρμογή του αλγορίθμου ICA είναι αδύνατη.
- Ο πίνακας μίξης \mathbf{A} είναι τετραγωνικός καθώς κατά την εκτίμηση του πίνακα \mathbf{A} , μπορούμε να υπολογίσουμε τις ανεξάρτητες συνιστώσες από την αντιστροφή του, δηλαδή:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}$$

Επίσης, για να μειώσουμε την πολυπλοκότητα του ICA, θα κάνουμε κάποιες επιπλέον υποθέσεις:

- Οι πηγές να έχουν μηδενικό μέσο όρο. Σε περίπτωση που είναι διάφορος του μηδενός, αφαιρούμε το μέσο όρο από τις παρατηρούμενες μεταβλητές \mathbf{X} καθώς και οι ανεξάρτητες συνιστώσες $\hat{\mathbf{S}}$ θα έχουν και αυτές μηδενική μέση τιμή.
- Οι πηγές να έχουν πίνακα συσχέτισης ίσο με τον μοναδιαίο καθώς περιορίζει την εύρεση του πίνακα μίξης σε εύρεση ορθογώνιου πίνακα. Αν δεν είναι μοναδιαίος, μπορούμε να κάνουμε λεύκανση δεδομένων.

Από τις πολλές μεθόδους που αναφέρονται στο [10], θα ασχοληθούμε με τον αλγόριθμο FastICA που έχει ως κριτήριο την μεγιστοποίηση της μη-γκαουσιανότητας, και συγκεκριμένα με την χρήση της αρνητικής εντροπίας.

3.2 Βοηθητικές Έννοιες

3.2.1 Μη Γκαουσιανότητα

Για να αποφανθούμε για την μη γκαουσιανότητα, θα πρέπει να παραθέσουμε το ακόλουθο θεώρημα [12].

Θεώρημα 3.1 [Κεντρικό Οριακό Θεώρημα] Έστω η ακολουθία n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots, X_n που ακολουθούν την ίδια κατανομή, με μέση τιμή $E\{X_i\} = \mu$ και διασπορά $Var\{X_i\} = \sigma^2 < \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε, καθώς $n \rightarrow \infty$, η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

θα ακολουθεί ασυμπτωτικά την τυπική κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$.

Με άλλα λόγια, το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών έχει συνήθως κατανομή πιο κοντά στην κανονική από οποιαδήποτε κατανομή των δύο αρχικών τυχαίων μεταβλητών.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το διάνυσμα $x = \mathbf{A}s$ είναι ένας συνδυασμός ανεξάρτητων συνιστωσών και για λόγους ευκολίας, υποθέτουμε ότι οι ανεξάρτητες συνιστώσες έχουν πανομοιότυπες κατανομές. Για να υπολογίσουμε μια από τις ανεξάρτητες συνιστώσες, θεωρούμε

$$y = w^T x = q^T s, \quad q = \mathbf{A}^T w$$

έναν γραμμικό συνδυασμό των x_i με w το διάνυσμα που πρέπει να προσδιορίσουμε. Αν το w ήταν μια γραμμή του πίνακα \mathbf{A}^{-1} , τότε ο γραμμικός συνδυασμός y θα ήταν ίσος με μια ανεξάρτητη συνιστώσα. Στην πράξη όμως, επειδή δεν γνωρίζουμε τον πίνακα \mathbf{A} , μπορούμε να βρούμε μια εκτίμηση αυτού.

Σύμφωνα με την σχέση $y = q^T s$, το y αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των s_i , με βάρη που δίνονται από τα q_i . Σύμφωνα λοιπόν με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, αφού το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών είναι περισσότερο γκαουσιανό από τις αρχικές τυχαίες μεταβλητές, το $q^T s$ θα είναι περισσότερο γκαουσιανό από οποιοδήποτε s_i και λιγότερο γκαουσιανό όταν στην πραγματικότητα γίνεται ίσο με ένα από τα s_i . Σε αυτή την περίπτωση, μόνο ένα από τα q_i είναι μη μηδενικό.

Επομένως, μπορούμε να υπερβούμε το w ώστε το διάνυσμα που μεγιστοποιεί την μη-γκαουσιανότητα του $w^T x$. Ένα τέτοιο διάνυσμα θα ανταποχρινόταν αναγκαστικά σε ένα διάνυσμα $q = \mathbf{A}^T w$ το οποίο θα έχει μόνο μια μη μηδενική συνιστώσα. Αυτό σημαίνει ότι το $w^T x = q^T s$ αποτελεί μια ανεξάρτητη συνιστώσα.

3.2.2 Αρνητική Εντροπία

Ένα μέτρο της μη προσαρμογής μιας κατανομής σε γκαουσιανή δίνεται από την αρνητική εντροπία (Negentropy). Η αρνητική εντροπία βασίζεται στην ποσότητα της εντροπίας που προέρχεται από την θεωρία πληροφοριών [13].

Ορισμός 3.1 Η εντροπία \mathbf{H} μίας τυχαίας διακριτής μεταβλητής \mathbf{X} ορίζεται ως :

$$\mathbf{H}(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log p(x)$$

όπου τα x αποτελούν πιθανές τιμές της X .

Ορισμός 3.2 Η διαφορική εντροπία \mathbf{H} μίας τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ είναι:

$$\mathbf{H}(X) = - \int f(x) \log f(x) dx$$

Η εντροπία μίας τυχαίας μεταβλητής είναι συνυφασμένη με την πληροφορία που δίνει μια παρατήρηση μίας μεταβλητής. Όσο πιο απρόβλεπτη είναι μια μεταβλητή, τόσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία της.

Ένα θεμελιώδες συμπέρασμα στην θεωρία πληροφορίας είναι ότι μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή έχει την μεγαλύτερη εντροπία ανάμεσα σε όλες τις τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ίδια διασπορά. Αυτό σημαίνει ότι η εντροπία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο της μη γκαουσιανότητας. Στην πραγματικότητα, αυτό δείχνει ότι η γκαουσιανή κατανομή είναι πιο 'τυχαία' ή λιγότερο δομημένη από τις υπόλοιπες τυχαίες μεταβλητές.

Για να αποκτήσουμε ένα μέτρο της μη γκαουσιανότητας που να είναι ίσο με το μηδέν για γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή και πάντα μη αρνητικό, με βάση την διαφορική εντροπία, ορίζουμε την αρνητική εντροπία

Ορισμός 3.3 Η αρνητική εντροπία \mathbf{J} ορίζεται ως:

$$\mathbf{J}(X) = \mathbf{H}(X_{gauss}) - \mathbf{H}(X)$$

όπου X_{gauss} είναι μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με διασπορά ίση με την μεταβλητή X .

Με βάση τον Ορισμό 3.3, η αρνητική εντροπία είναι μηδενική όταν η τυχαία μεταβλητή X είναι γκαουσιανή και θετική στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Επιπλέον, η αρνητική εντροπία παραμένει αμετάβλητη σε γραμμικούς αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς, όπως ο PCA και ο μετασχηματισμός λεύκανσης. Τέλος, το πλεονέκτημα της χρήσης της αρνητικής εντροπίας ως κριτήριο της μη γκαουσιανότητας είναι ότι η αρνητική εντροπία είναι καλά τεχμηριωμένη από την στατιστική θεωρία καθώς όσον αφορά τις στατιστικές ιδιότητες, αποτελεί τον βέλτιστο εκτιμητή της μη προσαρμογής σε γκαουσιανή.

Το μειονέκτημα όσον αφορά την αρνητική εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής είναι ότι για τον ακριβή υπολογισμό της χρειάζεται την εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της. Για την αποφυγή της παραπάνω διαδικασίας χρησιμοποιείται η ακόλουθη προσέγγιση [10]:

$$\mathbf{J}(X) \approx [E\{G(X)\} - E\{G(V)\}]^2 \quad (3.2.1)$$

όπου V είναι μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία διασπορά και $G(\cdot)$ μια μη τετραγωνική συνάρτηση. Επίσης, υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει και αυτή μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία διασπορά και επιπλέον η κατανομή της X πρέπει να είναι συμμετρική.

Το μόνο ζήτημα που προκύπτει με την (3.2.1) είναι ότι με την κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης G προκύπτουν καλύτερες προσεγγίσεις της J . Συγκεκριμένα επιλέγονται συναρτήσεις οι οποίες δεν μεταβάλλονται πολύ γρήγορα, όπως:

$$G(x) = \frac{1}{a} \log(\cosh(ax)) \quad 1 \leq a \leq 2 \quad (3.2.2a)$$

$$G(x) = -\exp(-\frac{x^2}{2}) \quad (3.2.2b)$$

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 \quad (3.2.2c)$$

3.3 Αλγόριθμος FastICA

Ο αλγόριθμος FastICA [14] αποτελεί έναν fixed-point αλγόριθμο, ο οποίος βρίσκει μια διεύθυνση, με άλλα λόγια ένα διάνυσμα w , έτσι ώστε η προβολή του $w^T x$ να μεγιστοποιεί την μη γκαουσιανότητα.

Με τον όρο fixed-point, ένας αλγόριθμος υλοποιεί ένα μεγάλο μέρος των υπολογισμών σε ένα μόνο βήμα του. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι τέτοιοι αλγόριθμοι, όπως και ο FastICA, μπορούν να υλοποιηθούν παράλληλα, είναι υπολογιστικά απλοί και χρησιμοποιούν λίγη μνήμη.

Η μη γκαουσιανότητα μετριέται μέσω της προσέγγισης της αρνητικής εντροπίας (3.2.1). Επιπλέον, υπάρχει ο περιορισμός ότι η διασπορά του $w^T x$ πρέπει να είναι μοναδιαία. Για λευκά δεδομένα, αυτό ισοδυναμεί με τον περιορισμό ότι το μέτρο του διανύσματος w να είναι ίσο με την μονάδα.

Ο υπολογισμός μιας ανεξάρτητης συνιστώσας μέσω του αλγορίθμου FastICA είναι ο ακόλουθος, με την απόδειξη του να αναφέρετε στο [14]:

1. Επιλογή ενός τυχαίου διανύσματος w με μοναδιαίο μέτρο.
2. Θέτουμε $w \leftarrow E\{xg(w^T x)\} - E\{g'(w^T x)\} w$
3. Κανονικοποιούμε $w \leftarrow \frac{w}{\|w\|}$
4. Αν ο αλγόριθμος δεν συγχλίνει, τότε επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Οι συναρτήσεις g και g' αποτελούν την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο αντίστοιχα των συναρτήσεων G που ορίσαμε στις σχέσεις (3.2.2a) - (3.2.2c), δηλαδή:

$$g_1(x) = \tanh(ax), \quad g'_1(x) = a [1 - \tanh^2(x)] \quad 1 \leq a \leq 2 \quad (3.3.1a)$$

$$g_2(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad g'_2 = \left(1 - x^2\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (3.3.1b)$$

$$g_3(x) = x^3, \quad g'_3 = 3x^2 \quad (3.3.1c)$$

Η σύγκλιση, σε αυτήν την περίπτωση, σημαίνει ότι οι παλιές και νέες τιμές του w δείχνουν προς την ίδια κατεύθυνση, δηλαδή το εσωτερικό τους γινόμενο είναι περίπου ίσο με την μονάδα. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν είναι ανάγκη το διάνυσμα w να συγκλίνει σε ένα μόνο σημείο, αφού το w και το $-w$ έχουν την ίδια διεύθυνση.

Η παραπάνω διαδικασία δεν αποτελεί μια αξιόπιστη μέθοδο ως προς την εύρεση ανεξάρτητων συνιστώσων καθώς χρησιμοποιούμε πάρα πολλές αρχικές συνθήκες για κάθε μια συνιστώσα και υπάρχει περίπτωση δύο διαφορετικά διανύσματα να συγκλίνουν στο ίδιο μέγιστο.

Κάνοντας ένα μετασχηματισμό λεύκανσης στα δεδομένα, παρατηρούμε ότι τα διανύσματα w_i είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Με άλλα λόγια, η ανεξαρτησία των συνιστώσων προϋποθέτει ότι τα δεδομένα μας είναι ασυσχέτιστα που μεταφράζεται σε ορθογωνιότητα, κάνοντας data whitening. Άρα, για να υπολογίσουμε κάποιες ανεξάρτητες συνιστώσες, πρέπει να τρέξουμε τον αλγόριθμο FastICA αρκετές φορές και σε κάθε επανάληψη να κάνουμε τα διανύσματα w_i ορθογώνια μεταξύ τους.

Με τις παρακάτω μεθόδους, επιτυγχάνετε η αποσυσχέτιση των ανεξαρτήτων συνιστώσων:

- **Deflation μέθοδος**

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt [15] που σημαίνει ότι υπολογίζουμε τις ανεξάρτητες συνιστώσες μία προς μία. Όταν έχουμε υπολογίσει p ανεξάρτητες συνιστώσες ή p διανύσματα w_1, w_2, \dots, w_p , εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο FastICA για τον υπολογισμό του w_{p+1} και μετά από κάθε επανάληψη, αφαιρούμε από το w_{p+1} τις προβολές των προηγούμενων p διανυσμάτων $(w_{p+1}^T w_j) w_j, j = 1, 2, \dots, p$ και το κανονικοποιούμε. Δηλαδή:

$$w_{p+1} \leftarrow w_{p+1} - \sum_{j=1}^p (w_{p+1}^T w_j) w_j \quad (3.3.2)$$

και

$$w_{p+1} \leftarrow \frac{w_{p+1}}{\|w_{p+1}\|} \quad (3.3.3)$$

- **Συμμετρική προσέγγιση**

Τα διανύσματα w_i υπολογίζονται παράλληλα, σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο, κάνοντας παράλληλη εύρεση ανεξαρτήτων συνιστώσων. Η ορθογωνοποίηση του πίνακα των διανυσμάτων $\mathbf{W} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]^T$ γίνεται με τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας πινάκων:

$$\mathbf{W} \leftarrow (\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W} \quad (3.3.4)$$

όπου ο πίνακας $(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-\frac{1}{2}}$ λαμβάνεται, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4, ως $\mathbf{V}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T$, με \mathbf{D} τον διαγώνιο πίνακα των ιδιοτιμών και \mathbf{V} τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων.

Μια πιο απλή εναλλακτική μέθοδος είναι επίσης η εξής διαδικασία:

1. Θέτουμε $\mathbf{W} \leftarrow \frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|}$
2. Θέτουμε $\mathbf{W} \leftarrow \frac{3}{2}\mathbf{W} - \frac{1}{2}\mathbf{W}\mathbf{W}^T\mathbf{W}$
3. Εάν ο πίνακας $\mathbf{W}\mathbf{W}^T$ δεν είναι κοντά στον μοναδιαίο, τότε επιστροφή στο βήμα 2.

3.4 Μεθοδολογία

Σε αυτήν την εργασία, θα υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο FastICA και με τις δύο προσεγγίσεις που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3.3.

Για την Deflation προσέγγιση, ο αλγόριθμος που θα υλοποιήσουμε είναι ο εξής:

1. Αφαιρούμε τον μέσο όρο από τα δεδομένα μας: $x \leftarrow x - m_x$
2. Κάνουμε λεύκανση στα δεδομένα: $z = \left(\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T\right)x$
3. Επιλέγουμε m ανεξάρτητες συνιστώσες για να εκτιμήσουμε.
4. Θέτουμε τον μετρητή $p \leftarrow 1$
5. Επιλέγουμε τυχαία ένα αρχικό διάνυσμα w_p με μοναδιαίο μέτρο.
6. Θέτουμε $w_p \leftarrow E\{zg(w_p^T z)\} - E\{g'(w_p^T z)\} w_p$, όπου οι συναρτήσεις g, g' ορίζονται από τις σχέσεις (3.3.1a) - (3.3.1c).
7. Κάνουμε την παρακάτω ορθογωνοποίηση:

$$w_p \leftarrow w_p - \sum_{j=1}^{p-1} (w_p^T w_j) w_j$$

8. Κανονικοποιούμε $w_p \leftarrow \frac{w_p}{\|w_p\|}$
9. Εάν το διάνυσμα w_p δεν έχει συγκλίνει, επιστρέφουμε στο βήμα 6.
10. Αυξάνουμε το μετρητή $p \leftarrow p + 1$. Εάν $p \leq m$, επιστρέφουμε στο βήμα 5.

ενώ για στην Συμμετρική προσέγγιση:

1. Αφαιρούμε τον μέσο όρο από τα δεδομένα μας: $x \leftarrow x - m_x$
2. Κάνουμε λεύκανση στα δεδομένα: $z = \left(\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^T \right) x$
3. Επιλέγουμε m ανεξάρτητες συνιστώσες για να εκτιμήσουμε.
4. Επιλέγουμε αρχικές συνθήκες για τα διανύσματα $w_i, i = 1, 2, \dots, m$ με μόνη συνθήκη να έχουν όλα μοναδιαίο μέτρο.
5. Κάνουμε συμμετρική ορθογωνοποίηση του πίνακα $\mathbf{W} = [w_1 \ \dots \ w_m]^T$:

$$\mathbf{W} \leftarrow (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W}$$

6. Για κάθε $i = 1, \dots, m$, θέτουμε $w_i \leftarrow E \{ z g(w_i^T z) \} - E \{ g'(w_i^T z) \} w_i$, όπου οι συναρτήσεις g, g' ορίζονται από τις σχέσεις (3.3.1a) - (3.3.1c).
7. Κάνουμε ορθογωνοποίηση όπως το βήμα 4.
8. Εάν ο πίνακας δεν συγκλίνει, επιστρέφουμε στο βήμα 6.

Οι παραπάνω διαδικασίες υλοποιήθηκαν στους κώδικες `fastica.py`, `deflational_method.py` και `symmetric_mehod.py` που βρίσκονται στο παράρτημα.

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση Περιοδικών Συνιστωσών(πCA)

4.1 Ορισμός

Την ποθέτουμε ένα BSS (Blind Source Separation) σύστημα το οποίο περιέχει σήματα από n διαφορετικούς αισθητήρες με m δείγματα από τον κάθε αισθητήρα. Επίσης, υποθέτουμε ότι ο αριθμός των δειγμάτων m είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αριθμό των αισθητήρων n , δηλαδή ότι $m \gg n$.

Συμβολίζουμε με $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ το διάνυσμα των σημάτων που λαμβάνουμε από τους αισθητήρες την χρονική στιγμή t , τα οποία και δειγματοληπτούμε με περίσσο δειγματοληψίας T_s . Ο πίνακας των σημάτων θα είναι ο $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, με στήλες που αντιστοιχούν στα σήματα του κάθε αισθητήρα και γραμμές που αντιστοιχούν στα δείγματα. Παραδείγματος χάρη, το στοιχείο x_{ij} περιέχει την μέτρηση του i δείγματος για το σήμα που λαμβάνουμε από τον j αισθητήρα. Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ το διάνυσμα με όλα τα δείγματα που αντιστοιχούν στον k αισθητήρα και με $x_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ το διάνυσμα που περιέχει τα δείγματα από όλους τους αισθητήρες την kT_s χρονική στιγμή.

Άρα ο πίνακας \mathbf{X} μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_n] = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m]^T \quad (4.1.1)$$

Βάσει του μοντέλου BSS, τα σήματα $x(t)$ αποτελούν γραμμικούς συνδυασμούς κάποιων πηγαίων σημάτων $s(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad \dots \quad s_n(t)]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ που αντιστοιχούν σε πίνακα δεδομένων $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Με άλλα λόγια:

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{B} \quad (4.1.2)$$

όπου $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας που ονομάζεται πίνακας μίξης.

Βασική υπόθεση για την ανάλυση περιοδικών συνιστωσών είναι πως τα πηγαία σήματα $s(t)$ έχουν κάποια περιοδική δομή. Ο σκοπός μας, μέσω της παραπάνω μεθόδου, είναι η εύρεση ενός διανύσματος συντελεστών βαρύτητας $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]^T$ που θα δίνει μια προσέγγιση των πηγαίων σημάτων ως γραμμικό συνδυασμό των σημάτων $x(t)$

$$\hat{s}(t) = \mathbf{w}^T x(t)$$

που στην περίπτωση που έχουμε διακριτά σήματα γράφεται ως:

$$\hat{s} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \vdots \\ \hat{s}_n \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{w}, \hat{s} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (4.1.3)$$

$$\hat{s}_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$$

τέτοιον ώστε να ελαχιστοποιείται η παρακάτω συνάρτηση κόστους:

$$e(\tau) = \frac{E(|\hat{s}(t + \tau) - \hat{s}(t)|^2)}{E(|\hat{s}(t)|^2)} \quad (4.1.4)$$

δηλαδή την μέση τετραγωνική διαφορά του σήματος που θέλουμε να εξάγουμε από το μετατοπισμένο στο χρόνο κατά τ σήμα, κανονικοποιημένο ως προς την ισχύ του.

Το $e(\tau)$ ονομάζεται **σφάλμα περιοδικότητας** και εκφράζει κατά πόσο ένα σήμα είναι μη περιοδικό, ενώ η μεταβλητή τ ονομάζεται **χρονική/δειγματική καθυστέρηση** ή αλλιώς **lag**.

Με βάση τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη τιμή για την μεταβλητή τ επιλέξουμε, τόσο λιγότερα δείγματα από τα διαθέσιμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ώστε να εκτιμήσουμε την έκφραση του αριθμητή της (4.1.4). Για $\tau = kT_s$, άρα $\hat{s}_k = \hat{s}(kT_s)$ και με βάση τον ορισμό της αναμενώμενης τιμής ενός διακριτού σήματος (σχέση), κατά προσέγγιση λαμβάνουμε ότι:

$$E(|\hat{s}(t + \tau) - \hat{s}(t)|^2) = \sum_{i=1}^{m-k} |\hat{s}_{i+k} - \hat{s}_i|^2$$

$$E(|\hat{s}(t)|^2) = \sum_{i=1}^m |\hat{s}_i|^2$$

Με βάση τα παραπάνω, ή (4.1.4) γίνεται [16]:

$$e[k] = \frac{\sum_{i=1}^{m-k} |\hat{s}_{i+k} - \hat{s}_i|^2}{\sum_{i=1}^m |\hat{s}_i|^2} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (4.1.5)$$

Όταν η παράμετρος χρονικής καθυστέρησης k λαμβάνει τιμή ίση με την περίοδο του σήματος, η τιμή στον αριθμητή στην (4.1.5) μηδενίζεται. Επομένως, για να μεγιστοποιήσουμε την περιοδική δομή του σήματος, πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα περιοδικότητας.

Ορίζουμε τους παρακάτω βοηθητικούς πίνακες:

$$\hat{s}_0[k] = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \vdots \\ \hat{s}_{m-k} \end{bmatrix}, \hat{s}_t[k] = \begin{bmatrix} \hat{s}_{k+1} \\ \hat{s}_{k+2} \\ \vdots \\ \hat{s}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_0[k] = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m-k,1} & x_{m-k,2} & \dots & x_{m-k,n} \end{bmatrix} = [\mathbf{X}_{01}[k] \quad \mathbf{X}_{02}[k] \quad \dots \quad \mathbf{X}_{0n}[k]] = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_{m-k}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_t[k] = \begin{bmatrix} x_{k+1,1} & x_{K+1,2} & \dots & x_{K+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,n} \end{bmatrix} = [\mathbf{X}_{t1}[k] \quad \mathbf{X}_{t2}[k] \quad \dots \quad \mathbf{X}_{tn}[k]] = \begin{bmatrix} x_{k+1}^T \\ x_{k+2}^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{s}_0[k] \in \mathbb{R}^{(m-k) \times 1} \quad \hat{s}_t[k] \in \mathbb{R}^{(m-k) \times 1}$$

$$\mathbf{X}_0[k] \in \mathbb{R}^{(m-k) \times n} \quad \mathbf{X}_t[k] \in \mathbb{R}^{(m-k) \times n}$$

Για τους παραπάνω πίνακες και διανύσματα, για μείωση της πολυπλοκότητας των εξισώσεων, θα παραλείπεται η μεταβλητή k , θεωρώντας ότι πάντοτε έχει μια συγκεκριμένη τιμή.

Βάσει της (4.1.2) και κάνοντας χρήση των βοηθητικών πινάκων, έχουμε:

$$\hat{s}_0 = \mathbf{X}_0 w \quad \hat{s}_t = \mathbf{X}_t w \quad (4.1.6)$$

και, όπως γνωρίζουμε από την γραμμική άλγεβρα, για οποιοδήποτε διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ με στοιχεία y_i ισχύει:

$$y^T y = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \quad (4.1.7)$$

Ξαναγράφουμε την (4.1.5) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.1.6) και (4.1.7):

$$e[k] = \frac{(\hat{s}_t - \hat{s}_0)^T (\hat{s}_t - \hat{s}_0)}{\hat{s}^T \hat{s}} = \frac{\hat{s}_t^T \hat{s}_t - \hat{s}_t^T \hat{s}_0 - \hat{s}_0^T \hat{s}_t + \hat{s}_0^T \hat{s}_0}{\hat{s}^T \hat{s}}$$

$$= \frac{w^T \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t w - w^T \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_0 w - w^T \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_t w + w^T \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 w}{w^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} w} \Rightarrow$$

$$e(\mathbf{X}, w, k) = \frac{w^T (\mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_t + \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0) w}{w^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} w} \quad (4.1.8)$$

Ορίζουμε τους παρακάτω πίνακες μαζί με τους παράγοντες χανονικοποίησης τους:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{m} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.1.9a)$$

$$\mathbf{C}_0[k] = \frac{1}{m-k} \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 \quad \mathbf{C}_0[k] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.1.9b)$$

$$\mathbf{C}_t[k] = \frac{1}{m-k} \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t \quad \mathbf{C}_t[k] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.1.9c)$$

$$\mathbf{C}_{t0}[k] = \frac{1}{m-k} \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_0 \quad \mathbf{C}_{t0}[k] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.1.9d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[k] &= \frac{1}{m-k} (\mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_t + \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0) \\ &= \mathbf{C}_0[k] + \mathbf{C}_t[k] - (\mathbf{C}_{t0}[k] + \mathbf{C}_{t0}^T[k]), \quad \mathbf{A}[k] \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned} \quad (4.1.9e)$$

Βάσει των εξισώσεων (4.1.9b) - (4.1.9), η (4.1.8) γίνεται:

$$e(\mathbf{X}, w, k) = R(\mathbf{A}[k], \mathbf{C}, w) = \frac{w^T \mathbf{A}[k] w}{w^T \mathbf{C} w} \quad (4.1.10)$$

Η εξίσωση (4.1.10) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (4.1.8) και αποτελεί ένα γενικευμένο κλάσμα Rayleigh. Για σταθερό k , συμμετρικό πίνακα \mathbf{A} και θετικά ορισμένο πίνακα \mathbf{C} , τότε, όπως αποδείξαμε στο Θεώρημα 1.5, η ελαχιστοποίηση του είναι ισοδύναμη με την εύρεση της μικρότερης γενικευμένης ιδιοτιμής του ζεύγους $(\mathbf{A}[k], \mathbf{C})$, που υπολογίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{A}[k]w = \lambda \mathbf{C}w \quad (4.1.11)$$

Η σχέση (4.1.11) αποκτά την ελάχιστη τιμή της όταν το w είναι το αντίστοιχο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Αν $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ είναι οι γενικευμένες ιδιοτιμές, τότε η συνιστώσα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 είναι αυτή για την οποία μεγιστοποιείται η περιοδική δομή, ενώ η n -οστή ιδιοτιμή θα αντιστοιχεί στην λιγότερο αμιγώς περιοδική συνιστώσα, για μια συγκεκριμένη τιμή του k . Οι συνιστώσες δίνονται από τον μετασχηματισμό $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{XW}$, όπου \mathbf{W} ο πίνακας με στήλες τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, ταξινομημένα από αυτό που αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή στα αριστερά, μέχρι αυτό που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη στα δεξιά.

Είναι δυνατόν να έχουμε σημαντικά αποτελέσματα ακόμη και για συνιστώσες πέραν αυτής που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή, ειδικά για πραγματικά σήματα στα οποία η περιοδικότητα του σήματος δεν είναι σταθερή. Εν γένει, τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα για όλες τις συνιστώσες δίνονται εκεί που η (4.1.10), για τη μικρότερη ιδιοτιμή, έχει τοπικά ελάχιστα ως προς το k .

4.2 Προτάσεις

Σε αυτήν την υποενότητα, ακολουθούν κάποιες προτάσεις όσον αφορά τον αλγόριθμο πCA.

Πρόταση 4.1

Οι πίνακες \mathbf{C} , $\mathbf{C}_0[k]$, $\mathbf{C}_t[k]$ και $\mathbf{A}[k]$ είναι συμμετρικοί.

Απόδειξη

Από τις σχέσεις (4.1.9b) - (4.1.9):

$$\mathbf{C}^T = \left(\frac{1}{m} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \right)^T = \frac{1}{m} \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{C}$$

Αν αντί για \mathbf{X} , έχουμε αντίστοιχα \mathbf{X}_0 , \mathbf{X}_t και $\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0$ και αντί για $\frac{1}{m}$ έχουμε $\frac{1}{m-k}$, αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο ότι οι πίνακες $\mathbf{C}_0[k]$, $\mathbf{C}_t[k]$ και $\mathbf{A}[k]$ είναι συμμετρικοί.

Παρατήρηση: Ο πίνακας $\mathbf{C}_{t0}[k]$ δεν είναι οπωσδήποτε συμμετρικός.

Πρόταση 4.2

Οι πίνακες \mathbf{C} , $\mathbf{C}_0[k]$, $\mathbf{C}_t[k]$ και $\mathbf{A}[k]$ είναι τουλάχιστον θετικώς ημιορισμένοι.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

$$w^T \mathbf{C} w = w^T \left(\frac{1}{m} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \right) w = \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{X} w \right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{X} w \right) = \left\| \frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{X} w \right\|^2 \geq 0$$

Αν αντί για \mathbf{X} , έχουμε αντίστοιχα \mathbf{X}_0 , \mathbf{X}_t και $\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0$ και αντί για $\frac{1}{m}$ έχουμε $\frac{1}{m-k}$, αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο ότι οι πίνακες $\mathbf{C}_0[k]$, $\mathbf{C}_t[k]$ και $\mathbf{A}[k]$ είναι θετικώς ημιορισμένοι.

Παρατήρηση: Θεωρώ ότι οι στήλες του \mathbf{X} , δηλαδή τα παρατηρούμενα σήματα, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι να έχουμε δείγματα του λάχιστον όσα και τα σήματα, δηλαδή $m \geq n$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι έχουμε πολύ περισσότερα δείγματα από αριθμό καναλιών, είναι στην πράξη αδύνατον να αντιμετωπίσουμε πρόβλημα.

Εφόσον είμαστε σίγουροι ότι οι στήλες του πίνακα \mathbf{X} είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε $\mathbf{X}w \neq 0$, $\forall w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, άρα:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}w \neq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{m}}\mathbf{X}w \neq 0 \Leftrightarrow \left\| \frac{1}{\sqrt{m}}\mathbf{X}w \right\|^2 \neq 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\mathbf{X}w \right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\mathbf{X}w \right) &\neq 0 \Leftrightarrow \\ w^T \left(\frac{1}{m}\mathbf{X}^T\mathbf{X} \right) w &\neq 0 \Leftrightarrow w^T\mathbf{C}w \neq 0, \forall w \neq 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1} \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας \mathbf{C} είναι θετικά ορισμένος.

Πρόταση 4.3

Έστω ότι πολλαπλασιάζεται ο πίνακας δειγμάτων \mathbf{X} από τα δεξιά με έναν οποιονδήποτε αντιστρέψιμο πίνακα $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε οι περιοδικές συνιστώσες που εξάγουμε από τον \mathbf{X} , για συγκεκριμένο k , είναι ίσες με αυτές που εξάγουμε από τον $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}\mathbf{Q}$, πολλαπλασιασμένες με κάποιον διαγώνιο πίνακα μη μηδενικών διαγωνίων στοιχείων (ίδια διεύθυνση, αλλαγή σε μέτρο ή/και πρόσημο), ενώ η συνάρτηση (4.1.8) παραμένει αμετάβλητη ως προς την παράμετρο k .

Απόδειξη

Έχουμε $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}\mathbf{Q}$. Άρα, σύμφωνα με την (4.1.6) ισχύουν οι σχέσεις $\tilde{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}_0\mathbf{Q}$ και $\tilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t\mathbf{Q}$. Οπότε, βάσει των (4.1.9b) και (4.1.9), έχουμε:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1}{m}\tilde{\mathbf{X}}^T\tilde{\mathbf{X}} = \frac{1}{m}(\mathbf{X}\mathbf{Q})^T(\mathbf{X}\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T\left(\frac{1}{m}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{C}\mathbf{Q}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}[k] &= \frac{1}{m-k}\left(\tilde{\mathbf{X}}_t - \tilde{\mathbf{X}}_0\right)^T\left(\tilde{\mathbf{X}}_t - \tilde{\mathbf{X}}_0\right) \\ &= \frac{1}{m-k}(\mathbf{X}_t\mathbf{Q} - \mathbf{X}_0\mathbf{Q})^T(\mathbf{X}_t\mathbf{Q} - \mathbf{X}_0\mathbf{Q}) \\ &= \frac{1}{m-k}[(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0)\mathbf{Q}]^T[(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0)\mathbf{Q}] \\ &= \mathbf{Q}^T\left[\frac{1}{m-k}(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0)^T(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0)\right]\mathbf{Q} \\ &= \mathbf{Q}^T\mathbf{A}[k]\mathbf{Q} \end{aligned}$$

Η εξίσωση για την εύρεση των γενικευμένων ιδιοτιμών του ζεύγους $(\tilde{\mathbf{A}}[k], \tilde{\mathbf{C}})$ ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το αντίστοιχο κλάσμα Rayleigh είναι:

$$\tilde{\mathbf{A}}[k]\tilde{w} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{w} \Leftrightarrow \mathbf{Q}^T \mathbf{A}[k] \mathbf{Q} \tilde{w} = \tilde{\lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \tilde{w}$$

Εφόσον ο πίνακας \mathbf{Q} είναι αντιστρέψιμος, πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με τον ανάστροφο πίνακα του \mathbf{Q}^{-1} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}^{-1})^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \tilde{w} &= (\mathbf{Q}^{-1})^T \tilde{\lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \tilde{w} \Leftrightarrow \\ (\mathbf{Q}^{-1})^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \tilde{w} &= \tilde{\lambda} (\mathbf{Q}^{-1})^T \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \tilde{w} \Leftrightarrow \\ \mathbb{I}_n \mathbf{A} \mathbf{Q} \tilde{w} &= \tilde{\lambda} \mathbb{I}_n \mathbf{C} \mathbf{Q} \tilde{w} \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{Q}\tilde{w}) = \tilde{\lambda} \mathbf{C}(\mathbf{Q}\tilde{w}) \end{aligned}$$

Συγχρίνοντας την παραπάνω σχέση με την $\mathbf{A}w = \lambda \mathbf{C}w$, βλέπουμε πως ο μετασχηματισμός των δεδομένων μεταφράζεται σε μετασχηματισμό των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του ζεύγους (\mathbf{A}, \mathbf{C}) για μια συγκεκριμένη τιμή k . Επίσης, παρατηρούμε ότι η τιμή των γενικευμένων ιδιοτιμών διατηρείται όπως και η σειρά των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, αν τα ταξινομήσουμε βάσει των ιδιοτιμών τους, όχι όμως και η τιμή τους καθώς υπάρχει κάποια απροσδιοριστία ως προς το μέτρο των ιδιοδιανυσμάτων. Τότε, ισχυεί η σχέση:

$$\mathbf{W}\mathbf{P} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{W}}$$

όπου $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας με στήλες τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του ζεύγους $(\mathbf{A}[k], \mathbf{C})$, $\tilde{\mathbf{W}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του ζεύγους $(\tilde{\mathbf{A}}[k], \tilde{\mathbf{C}})$ και $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας διαγώνιος πίνακας με πραγματικά και μη μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο του. Επειδή ο πίνακας \mathbf{Q} είναι αντιστρέψιμος, ισχύει $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1}$, οι συνιστώσες που λαμβάνουμε από τα δεδομένα $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}\mathbf{Q}$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}} &= \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{W}} = (\mathbf{X}\mathbf{Q})(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{X}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1})\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{X}\mathbb{I}_n\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{X}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1} = \hat{\mathbf{S}}\mathbf{P}^{-1} \end{aligned}$$

Τέλος, βλέπουμε πως η εξίσωση (4.1.10) παραμένει αμετάβλητη ως προς την μεταβλητή k :

$$\begin{aligned} e(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{w}, k) &= e(\mathbf{X}\mathbf{Q}, \tilde{w}, k) = R(\tilde{\mathbf{A}}[k], \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{w}) = R(\mathbf{Q}^T \mathbf{A}[k] \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}, \tilde{w}) \\ &= R(\mathbf{A}[k], \mathbf{C}, \mathbf{Q}\tilde{w}) = e(\mathbf{X}, \mathbf{Q}\tilde{w}, k) \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τα παραπάνω, πολλαπλασιάζοντας τα δεδομένα με μια μη μηδενική πραγματική σταθερά, τότε δεν μεταβάλλεται το τελικό αποτέλεσμα, παρά μόνο πολλαπλασιάζονται τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα με το αντίστροφό αυτής της τιμής. Ομοίως και αν πολλαπλασιάσουμε τους πίνακες $\mathbf{C}_0[k]$, $\mathbf{C}_t[k]$ και $\mathbf{C}_{t0}[k]$ με οποιαδήποτε πραγματική, θετική σταθερά. Η μόνη διαφορά παραμένει το μέτρο του γενικευμένου ιδιοδιανύσματος και όχι η διεύθυνσή του.

Πρόταση 4.4

Έστω $\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{B}$, όπου οι στήλες του πίνακα \mathbf{S} είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ο πίνακας \mathbf{B} αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $s_{j+k_l,l} = s_{j,l}$, δηλαδή η l-οστή στήλη του πίνακα \mathbf{S} είναι περιοδικό σήμα με περίοδο $k_l \leq m - k$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι είναι το μοναδικό με περίοδο k_l , ενώ τα υπόλοιπα έχουν διαφορετική περίοδο, γραμμικά ανεξάρτητη της περιόδου k_l ή είναι απεριοδικά, δηλαδή ισχύει ότι $s_{j+(k_l/n_l),i} \neq s_{i,j}, i \neq l, n_l \in \mathbb{N}^*$. Τότε, για $k = k_l$, το διάνυσμα που ελαχιστοποιεί την (4.1.10) είναι μοναδικό και η περιοδική συνιστώσα που δίνει η l-οστή στήλη του πίνακα \mathbf{S} πολλαπλασιασμένη με μια αυθαίρετη μη μηδενική πραγματική σταθερά, δηλαδή $\hat{s} = \mathbf{X}w = p\mathbf{S}_l, p \in \mathbb{R}^*$.

Απόδειξη

Επειδή ο πίνακας \mathbf{B} είναι αντιστρέψιμος, ισχύει ότι $\mathbf{S} = \mathbf{XB}^{-1}$. Οπότε έχουμε $\hat{s} = \mathbf{X}w = \mathbf{S}\tilde{w}$, όπου $w = \mathbf{B}^{-1}\tilde{w}$. Έστω $s_{i,j}$ το στοιχείο του πίνακα \mathbf{S} στην i γραμμή και στην j στήλη και ορίζουμε τον πίνακα $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{S}_t[k_l] - \mathbf{S}_0[k_l]$:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{S} &= \mathbf{S}_t[k_l] - \mathbf{S}_0[k_l] \\ &= \begin{bmatrix} s_{k_l+1,1} & \dots & s_{k_l+1,l} & \dots & s_{k_l+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{m,1} & \dots & s_{m,l} & \dots & s_{m,n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,l} & \dots & s_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{m-k_l,1} & \dots & s_{m-k_l,l} & \dots & s_{m-k_l,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_{k_l+1,1} - s_{1,1} & \dots & s_{k_l+1,l} - s_{1,l} & \dots & s_{k_l+1,n} - s_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{m,1} - s_{m-k_l,1} & \dots & s_{m,l} - s_{m-k_l,l} & \dots & s_{m,n} - s_{m-k_l,n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει $s_{j+k_l,l} = s_{j,l}$, αντικαθιστούμε την στήλη l με μηδενικά. Άρα:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{S} &= \begin{bmatrix} s_{k_l+1,1} - s_{1,1} & s_{k_l+1,2} - s_{1,2} & \dots & 0 & \dots & s_{k_l+1,n} - s_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m,1} - s_{m-k_l,1} & s_{m,2} - s_{m-k_l,2} & \dots & 0 & \dots & s_{m,n} - s_{m-k_l,n} \end{bmatrix} \\ &= [\Delta\mathbf{S}_1 \quad \Delta\mathbf{S}_2 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \Delta\mathbf{S}_n] \\ \Delta\mathbf{S}_j &= \begin{bmatrix} s_{k_l+1,j} - s_{1,j} \\ \vdots \\ s_{m,j} - s_{m-k_l,j} \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, n, j \neq l, \Delta\mathbf{S}_j \in \mathbb{R}^{(m-k_l) \times n} \end{aligned}$$

με $\Delta\mathbf{S}_l = 0$.

Ο πίνακας $A_s[k_l]$ γίνεται:

$$\begin{aligned} A_s[k_l] &= \frac{1}{m-k} [\Delta\mathbf{S}_1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \Delta\mathbf{S}_n]^T [\Delta\mathbf{S}_1 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \Delta\mathbf{S}_n] \\ &= \frac{1}{m-k} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{S}_1^T \Delta\mathbf{S}_1 & \dots & \Delta\mathbf{S}_1^T \Delta\mathbf{S}_{l-1} & 0 & \Delta\mathbf{S}_1^T \Delta\mathbf{S}_{l+1} & \dots & \Delta\mathbf{S}_1^T \Delta\mathbf{S}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Delta\mathbf{S}_{l-1}^T \Delta\mathbf{S}_1 & \dots & \Delta\mathbf{S}_{l-1}^T \Delta\mathbf{S}_{l-1} & 0 & \Delta\mathbf{S}_{l-1}^T \Delta\mathbf{S}_{l+1} & \dots & \Delta\mathbf{S}_{l-1}^T \Delta\mathbf{S}_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta\mathbf{S}_{l+1}^T \Delta\mathbf{S}_1 & \dots & \Delta\mathbf{S}_{l+1}^T \Delta\mathbf{S}_{l-1} & 0 & \Delta\mathbf{S}_{l+1}^T \Delta\mathbf{S}_{l+1} & \dots & \Delta\mathbf{S}_{l+1}^T \Delta\mathbf{S}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Delta\mathbf{S}_n^T \Delta\mathbf{S}_1 & \dots & \Delta\mathbf{S}_n^T \Delta\mathbf{S}_{l-1} & 0 & \Delta\mathbf{S}_n^T \Delta\mathbf{S}_{l+1} & \dots & \Delta\mathbf{S}_n^T \Delta\mathbf{S}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Θέλουμε να βρούμε μια γενικευμένη ιδιοτιμή $\tilde{\lambda}$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ του ζεύγους $(A_s[k_l], C_k)$ από την σχέση:

$$A_s[k_l]\tilde{w} = \tilde{\lambda}\mathbf{C}_s\tilde{w}$$

Έστω ότι $\tilde{w} = w^* = [0 \ \dots \ p \ \dots \ 0]^T$, $p \in \mathbb{R}^*$, όπου p είναι το l-οστό στοιχείο του διανύσματος \tilde{w} . Επειδή η l-οστή στήλη του πίνακα $A_s[k_l]$ είναι μηδενική, τότε:

$$A_s[k_l]w^* = 0 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}\mathbf{C}_s w^* = 0$$

Επειδή $\mathbf{C}_s = \mathbf{C}_s[k_l] = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ και βάσει των αρχικών μας υποθέσεων ότι ο πίνακας \mathbf{S} είναι ανεξάρτητες, καταλήγουμε ότι ο πίνακας $\mathbf{C}_s[k_l]$ είναι θετικά ορισμένος. Με άλλα λόγια, ο πίνακας $\mathbf{C}_s[k_l]$ είναι αντιστρέψιμος, άρα συμπεραίνουμε ότι οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει ότι $\mathbf{C}_s x \neq 0, \forall x \neq 0$ και επιπλέον $w^* \neq 0$, αφού $p \neq 0$. Άρα έχουμε $\mathbf{C}_s w^* \neq 0$ και σύμφωνα με την σχέση $\tilde{\lambda}\mathbf{C}_s w^* \neq 0$, καταλήγουμε ότι πρέπει $\tilde{\lambda} = 0$. Εν ολίγοις, μια γενικευμένη ιδιοτιμή του ζεύγους $(\mathbf{A}_s[k_l], C_s)$ είναι η $\lambda = 0$ με αντίστοιχο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα το $w = w^*$. Εάν η συγκεκριμένη ιδιοτιμή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με την μονάδα, τότε το w^* είναι το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\tilde{\lambda}$. Οπότε:

$$\tilde{s} = \mathbf{X}w = \mathbf{S}w^* = [\mathbf{S}_1 \ \dots \ \mathbf{S}_l \ \dots \ \mathbf{S}_n] [0 \ \dots \ p \ \dots \ 0] = p\mathbf{S}_l$$

Ταυτόχρονα, από την σχέση (4.1.5) έχουμε ότι $e(S, \tilde{w}, k) \geq 0$. Επειδή, η ελάχιστη ιδιοτιμή ισούται με την ελάχιστη τιμή του κλάσματος Rayleigh, σύμφωνα με τα παραπάνω, για $k = k_l$ και για $w = w^*$, η σχέση $e(S, \tilde{w}, k)$ έχει ολικό ελάχιστο το 0. Τέλος, λόγω της Πρότασης 4.3, έχουμε $e(\mathbf{S}, w^*, k_l) = e(\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1}, w^*, k_l) = e(\mathbf{X}, \mathbf{B}^{-1}w^*, k_l)$, οπότε η τελευταία σχέση έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $k = k_l$ και $w = \mathbf{B}^{-1}w^*$.

Παρατήρηση: Η ίδια συνιστώσα μπορεί να εξαχθεί και για κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου, αρκεί αυτό να είναι μικρότερο από τον αριθμό των δειγμάτων. Επιπλέον, αν υπάρχει 2o σήμα με την ίδια περίοδο ή κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο αυτής, $\pi \chi s_{j+k_l, l'} = s+j, l', l' \neq l$, τότε η αντίστοιχη γραμμή και στήλη του πίνακα \mathbf{A}_s θα είναι και αυτή μηδενική και μπορούμε να βρούμε ένα δεύτερο ιδιοδιάνυσμα για το οποίο η γενικευμένη ιδιοτιμή θα είναι 0 για το ίδιο ή για πολλαπλάσιο του k . Με άλλα λόγια, η γενικευμένη ιδιοτιμή θα έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 2 και σαν ιδιοδιάνυσμα τον γραμμικό συνδυασμό δύο γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, κάτι που ισχύει εάν ο πίνακας \mathbf{A} είναι συμμετρικός και ο πίνακας \mathbf{C} θετικά ορισμένος. Δηλαδή, μετά την αύξουσα ταξινόμηση των ιδιοδιανυσμάτων βάσει των ιδιοτιμών τους, θα έχουμε σαν πρώτες 2 περιοδικές συνιστώσες δύο γραμμικώς ανεξάρτητους γραμμικούς συνδυασμούς των s_l και $s_{l'}$.

Μια ακόμα περίπτωση είναι όταν έχουμε δύο περιοδικές πηγές με περιόδους $k_{l_1}, k_{l_2} \in \mathbf{K}$ τέτοιες ώστε να μην είναι η μια ακέραιο πολλαπλάσιο της άλλης, αλλά να υπάρχει $k = n_1 k_{l_1} = n_2 k_{l_2}, k \in \mathbf{K}, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^*$. Παρατηρούμε ότι συμβαίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την παραπάνω περίπτωση, δηλαδή η μέθοδος δεν θα μας δώσει οπωσδήποτε το αποτέλεσμα που θέλουμε και δεν θα μπορέσουν να μας εξαχθούν όλες οι πηγές με αυτήν.

Γενικότερα, αν έχουμε n^* περιοδικές πηγές, όπου $n^* \leq n$, τότε θέλουμε οι περίοδοι τους να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή $n_{l_1}T_{l_1} + n_{l_2}T_{l_2} + \dots + n_{l_n^*}T_{l_n^*} = 0$, αν και μόνο αν $n_{l_1} = n_{l_2} = \dots = n_{l_n^*} = 0$

Πρόταση 4.5

Έστω $c_m = \frac{\mathbf{X}^T \mathbb{I}_m}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$, $x_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ο μέσος όρος των στηλών του \mathbf{X} , καθώς επίσης και $\bar{\mathbf{X}}$, $\bar{\mathbf{X}}_0$ και $\bar{\mathbf{X}}_t$ οι αντίστοιχοι πίνακες έχοντας αφαιρέσει από αυτούς τον μέσο όρο c_m από τα δείγματα. Τότε:

$$\bar{\mathbf{A}}[k] = \mathbf{A}[k] \quad (4.2.1)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - c_m c_m^T \quad (4.2.2)$$

Απόδειξη

Αφαιρώντας τον μέσο όρο από τους αντίστοιχους πίνακες έχουμε:

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \mathbb{I}_m c_m^T$$

$$\bar{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbb{I}_{m-k} c_m^T$$

$$\bar{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t - \mathbb{I}_{m-k} c_m^T$$

Όποτε ο πίνακας $\bar{\mathbf{C}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \frac{1}{m} \bar{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{m} (\mathbf{X} - \mathbb{I}_m c_m^T)^T (\mathbf{X} - \mathbb{I}_m c_m^T) = \frac{1}{m} (\mathbf{X}^T - c_m \mathbb{I}_m^T) (\mathbf{X} - \mathbb{I}_m c_m^T) \\ &= \frac{1}{m} (\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbb{I}_m c_m^T - c_m \mathbb{I}_m^T \mathbf{X} + c_m \mathbb{I}_m^T \mathbb{I}_m c_m^T) \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{X}^T \mathbf{X} - \left(\frac{\mathbf{X}^T \mathbb{I}_m}{m} \right) c_m^T - c_m \left(\frac{\mathbf{X}^T \mathbb{I}_m}{m} \right)^T + \frac{1}{m} c_m (\mathbb{I}_m^T \mathbb{I}_m) c_m^T \\ &= \mathbf{C} - c_m c_m^T - c_m c_m^T - \frac{1}{m} m (c_m c_m^T) = \mathbf{C} - c_m c_m^T \end{aligned}$$

Όσον αφορά τον πίνακα $\mathbf{A}[k]$, παρατηρούμε ότι:

$$\bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathbf{X}}_0 = (\mathbf{X}_t - \mathbb{I}_{m-k} c_m^T) - (\mathbf{X}_0 - \mathbb{I}_{m-k} c_m^T) = \mathbf{X}_t - \mathbb{I}_{m-k} c_m^T - \mathbf{X}_0 + \mathbb{I}_{m-k} c_m^T = \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0$$

άρα:

$$\bar{\mathbf{A}}[k] = \frac{1}{m-k} (\bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathbf{X}}_0)^T (\bar{\mathbf{X}}_t - \bar{\mathbf{X}}_0) = \frac{1}{m-k} (\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0)^T (\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0) = \mathbf{A}[k]$$

Παρατήρηση: Από την παραπάνω πρόταση βλέπουμε ότι για κάθε ένα k όπου η (4.1.10) δεν μηδενίζεται, υπάρχει περίπτωση να έχουμε διαφορετικές περιοδικές συνιστώσες αν αφαιρέσουμε τον μέσο όρο από τα δεδομένα μας, από όταν τα αφήσουμε ως έχουν, παρότι διατηρείται η περιοδικότητα ενός σήματος, ακόμα και αν αφαιρέσουμε μια σταθερά από αυτόν. Γενικά, είναι καλό να αφαιρείται, καθώς στην περίπτωση που ο μέσος όρος είναι πολύ μεγάλος, τότε υπάρχει η περίπτωση ορισμένες περιοδικές συνιστώσες να μην γίνονται φανερές ή να χρειαζόμαστε πολύ μεγάλη ακρίβεια για την τιμή του k ώστε να εξάγουμε μια ικανοποιητική περιοδική συνιστώσα.

Πρόταση 4.6

Για τους μη-κανονικοποιημένους πίνακες \mathbf{C}_0 και \mathbf{C}_t ισχύει ότι:

$$\mathbf{C}_0[k-1] = \mathbf{C}_0[k] + x_{m-k+1}x_{m-k+1}^T \quad (4.2.3)$$

$$\mathbf{C}_t[k-1] = \mathbf{C}_t[k] + x_kx_k^T \quad (4.2.4)$$

Απόδειξη

Ισχύει ότι :

$$\mathbf{C}_0[k] = \mathbf{X}_0^T[k]\mathbf{X}_0[k] = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-k}] [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m-k}]^T = \sum_{i=1}^{m-k} x_i x_i^T$$

$$\mathbf{C}_t[k] = \mathbf{X}_t^T[k]\mathbf{X}_t[k] = [x_{k+1} \ x_{k+2} \ \dots \ x_m] [x_{k+1} \ x_{k+2} \ \dots \ x_m]^T = \sum_{i=k+1}^m x_i x_i^T$$

οπότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0[k-1] &= \sum_{i=1}^{m-(k-1)} x_i x_i^T = \sum_{i=1}^{m-k+1} x_i x_i^T = \sum_{i=1}^{m-k} x_i x_i^T + x_{m-k+1} x_{m-k+1}^T \\ &= \mathbf{C}_0[k] + x_{m-k+1} x_{m-k+1}^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_t[k-1] = \sum_{i=(k-1)+1}^m x_i x_i^T = \sum_{i=k}^m x_i x_i^T = \sum_{i=k+1}^m x_i x_i^T + x_k x_k^T = \mathbf{C}_t[k] + x_k x_k^T$$

Πρόταση 4.7

Αν ορίσουμε την αλληλοσυσχέτιση δύο σημάτων $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, όπως υπολογίζεται από τα δείγματα τους, ως εξής:

$$\hat{c}_{XY} = \sum_{n=1}^{m-k} x_{n+k} y_n$$

για συγκεκριμένη δειγματική καθυστέρηση k , τότε ο μη-κανονικοποιημένος πίνακας $\mathbf{C}_{t0}[k]$ έχει για στοιχεία του τις αλληλοσυσχετίσεις μεταξύ των στηλών του πίνακα \mathbf{Q} για το συγκεκριμένο k και μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathbf{C}_{t0}[k] = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11}[k] & \hat{c}_{12}[k] & \dots & \hat{c}_{1n}[k] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{c}_{n1}[k] & \hat{c}_{n2}[k] & \dots & \hat{c}_{nn}[k] \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{c}_{ij} = \hat{c}_{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j}$.

Aπόδειξη

Για $\mathbf{X} = \mathbf{X}_i$ και $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_j$, η αλληλοσυσχέτιση είναι:

$$\hat{c}_{ij}[k] = \hat{c}_{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j} = \sum_{n=1}^{m-k} x_{n+k,i} x_{n,j}$$

Βάσει των εξισώσεων (4.1.9e) και των βοηθητικών πινάκων \mathbf{X}_0 και \mathbf{X}_k που ορίσαμε παραπάνω, ο πίνακας $\mathbf{C}_{t0}[k]$ γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{t0}[k] &= \mathbf{X}_t^T \mathbf{X}_0 = [\mathbf{X}_{t1} \quad \mathbf{X}_{t2} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{tn}]^T [\mathbf{X}_{01} \quad \mathbf{X}_{02} \quad \dots \quad \mathbf{X}_{0n}] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{t1}^T \mathbf{X}_{01} & \mathbf{X}_{t1}^T \mathbf{X}_{02} & \dots & \mathbf{X}_{t1}^T \mathbf{X}_{0n} \\ \mathbf{X}_{t2}^T \mathbf{X}_{01} & \mathbf{X}_{t2}^T \mathbf{X}_{02} & \dots & \mathbf{X}_{t2}^T \mathbf{X}_{0n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{X}_{tn}^T \mathbf{X}_{01} & \mathbf{X}_{tn}^T \mathbf{X}_{02} & \dots & \mathbf{X}_{tn}^T \mathbf{X}_{0n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

To (i,j) στοιχείο του πίνακα \mathbf{C}_{t0} θα είναι:

$$\begin{aligned} C_{t0}(i, j) &= \mathbf{X}_{ti}^T \mathbf{X}_{0j} = [x_{k+1,i} \quad x_{k+2,i} \quad \dots \quad x_{m,i}] \begin{bmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{m-k,j} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{m-k} x_{n+k,i} x_{n,j} \\ \Leftrightarrow C_{t0}(i, j) &= \hat{c}_{ij}[k] \end{aligned}$$

Προφανώς, τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα \mathbf{C}_{t0} αποτελούν τις αυτοσυσχετίσεις των στηλών του πίνακα \mathbf{X} .

Πρόταση 4.8

Αν τα μικτά σήματα έχουν μηδενική μέση τιμή και εφαρμόσουμε σε αυτά data whitening, τότε το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών για το ζεύγος πινάκων $(\mathbf{A}[k], \mathbf{C})$ μετατρέπεται σε πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{A}[k]$.

Aπόδειξη

Ο δειγματικός μέσος όρος του πίνακα συνδιασποράς του $x(t)$ είναι:

$$\mathbf{C}_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i x_i^T = \frac{1}{m} \mathbf{X} \mathbf{X}^T = \mathbf{C}$$

Αν τον διαγωνοποιήσουμε, τότε $\mathbf{C} = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$ και τα 'λευκά' σήματα δίνονται ως $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \mathbf{Q}$, όπου $\mathbf{Q} = \mathbf{V} \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$. Τότε, ο πίνακας $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbb{I}_n$ και σύμφωνα με την Πρόταση 4.3, έχουμε:

$$e(\mathbf{X}, w, k) = e(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{w}, k) = R(\tilde{\mathbf{A}}[k], \mathbb{I}_n, \tilde{w}), w = \mathbf{Q} \tilde{w}$$

Η τελευταία ισότητα δίνει το κλάσμα Rayleigh του ζεύγους $(\mathbf{A}[k], \mathbb{I}_n)$, το οποίο ελαχιστοποιείται από το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μικρότερη γενικευμένη ιδιοτιμή του ζεύγους, που υπολογίζεται από την σχέση:

$$\tilde{\mathbf{A}}[k]\tilde{w} = \lambda\mathbb{I}_n\tilde{w} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{A}}[k]\tilde{w} = \lambda\tilde{w}$$

Είναι προφανές ότι οι παραπάνω προτάσεις ισχύουν και όταν οι πίνακες που χρησιμοποιούμε βρίσκονται στην ανάστροφη μορφή τους.

4.3 Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε για την υλοποίηση του αλγορίθμου πCA είναι η εξής:

- Επιλογή κάποιου διαστήματος τιμών k , προσέχοντας ότι θα περιέχει τις τιμές των περιόδων που καλούμαστε να βρούμε.
- Αφαίρεση της μέσης τιμής από τα δεδομένα καθώς, σύμφωνα με την Πρόταση 4.5, η αφαίρεση της μέσης τιμής δίνει καλύτερα αποτελέσματα.
- ”Λεύκανση” του πίνακα δεδομένων (Data Whitening) καθώς, σύμφωνα με την Πρόταση 4.8, το πρόβλημα εύρεσης γενικευμένων ιδιοτιμών μετατρέπεται σε πρόβλημα εύρεσης απλών ιδιοτιμών.
- Υπολογισμός του πίνακα $\mathbf{A}[k]$ μέσω υπολογισμού των αντίστοιχων πινάκων για κάθε k που ανήκει στο διάστημα τιμών που επιλέξαμε παραπάνω.
- Εύρεση σφάλματος περιοδικότητας, που αντιστοιχεί στις ταξινομημένες από την μικρότερη στην μεγαλύτερη ιδιοτιμές του ζεύγους $(\mathbf{A}[k], \mathbf{C})$, για κάθε k .
- Ελαχιστοποίηση του γενικευμένου κλάσματος Rayleigh για τις τιμές k που επιλέξαμε, που αντιστοιχεί στο ελάχιστο σφάλμα περιοδικότητας για αυτές άρα στην μικρότερη ιδιοτιμή.
- Αποθήκευση των παραπάνω ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων.
- Εύρεση των τιμών του k για τις οποίες το ελάχιστο σφάλμα περιοδικότητας έχει τοπικά ελάχιστα, καθώς όταν το k ισούται με την περίοδο ή πολλαπλάσιο κάποιας περιόδου μηδενίζεται.
- Εύρεση των τιμών του k που αντιστοιχούν τις περιόδους των επιμέρους σημάτων, διαγράφοντας τα πολλαπλάσια τους.
- Επισκόπηση των περιοδικών συνιστώσων για τις συγκεκριμένες τιμές του k .

4.4 Αλγόριθμος AMUSE

Ο αλγόριθμος AMUSE (Algorithm for Multiple Signal Extraction) [17] αναπτύχθηκε για να αντιμετωπίσει την αδυναμία διάφορων BSS μεθόδων που βασίζονται σε στατιστικά μεγέθη 4ης τάξης (κύρτωση) και δεν μπορούν να εξάγουν Γκαουσιανές πηγές. Ο αλγόριθμος αυτός θεωρεί, όπως και ο αλγόριθμος πCA, ότι τα BSS σήματα είναι σήματα που μεταβάλλονται στο χρόνο ή στον χώρο και μπορεί να εξάγει τις επιμέρους συνιστώσες χρησιμοποιώντας στατιστικές 2ης τάξης των σημάτων, συγκεκριμένα τον πίνακα αλληλοσυσχέτισης $\mathbf{C}_{t0}[k]$ [18]. Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

- Επιλογή κάποιου διαστήματος τιμών k , προσέχοντας ότι θα περιέχει τις τιμές των περιόδων που καλούμαστε να βρούμε.
- Αφαίρεση του μέσου όρου από τα δεδομένα: $\tilde{x}(t) = x(t) - \mathbf{m}_x$.
- Data Whitening στα δεδομένα με μηδενική μέση τιμή: $z(t) = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T\tilde{x}(t)$.
- Υπολογισμός του πίνακα $\mathbf{C}_e[k] = \frac{\mathbf{C}_{t0}[k] + \mathbf{C}_{t0}^T[k]}{2}$ για κάθε k .
- Διαγωνοποίηση του πίνακα \mathbf{C}_e : $\mathbf{C}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{D}_e \mathbf{V}_e^T$.
- Εύρεση ιδιοτιμών του ζεύγους $(\mathbf{C}_e[k], \mathbf{C})$ που μεγιστοποιούν το σφάλμα περιοδικότητας για τα k .
- Επισκόπηση των συνιστωσών για τα παραπάνω k : $\hat{s}(t) = \mathbf{V}_e^T z(t)$.

Σύμφωνα με την [18], εάν αναπτύξουμε την μέση τετραγωνική διάφορά πριν την εκτιμήσουμε έχουμε:

$$\begin{aligned}
E\{|\hat{s}(t+\tau) - \hat{s}(t)|^2\} &= E\{[\hat{s}(t+\tau) - \hat{s}(t)]^2\} = \\
&= E\left\{(w^T [x(t+\tau) - x(t)])^2\right\} = \\
&= E\left\{(w^T [x(t+\tau) - x(t)]) (w^T [x(t+\tau) - x(t)])^T\right\} = \\
&= E\left\{(w^T [x(t+\tau) - x(t)]) ([x(t+\tau) - x(t)]^T w)\right\} = \\
&= E\left\{w^T [x(t+\tau) - x(t)] [x(t+\tau) - x(t)]^T w\right\} = \\
&= w^T E\{[x(t+\tau) - x(t)] [x^T(t+\tau) - x^T(t)]\} w = \\
&= w^T E\{[x(t+\tau)x^T(t+\tau) - x(t+\tau)x^T(t) - x(t)x^T(t+\tau) + x(t)x^T(t)]\} w = \\
&= w^T [E\{x(t+\tau)x^T(t+\tau)\} - E\{x(t+\tau)x^T(t)\} - E\{x(t)x^T(t+\tau)\} + E\{x(t)x^T(t)\}] w
\end{aligned}$$

Αν εκτιμήσουμε τους πίνακες αυτοσυσχέτισης και ετεροσυσχέτισης που προκύπτουν, τότε:

$$\begin{aligned}
E\{x(t+\tau)x^T(t+\tau)\} &= E\{x(t)x^T(t)\} = \mathbf{C} \\
E\{x(t+\tau)x^T(t)\} &= E\left\{[x(t)x^T(t+\tau)]^T\right\} = \mathbf{C}_{t0}[k]
\end{aligned}$$

οπότε:

$$E\{|\hat{s}(t+\tau) - \hat{s}(t)|^2\} = w^T [2\mathbf{C} - (\mathbf{C}_{t0}[k] + \mathbf{C}_{t0}^T[k])] w$$

Ορίζοντας τον πίνακα:

$$\mathbf{C}_e[k] = \frac{\mathbf{C}_{t0}[k] + \mathbf{C}_{t0}^T[k]}{2} \quad (4.4.1)$$

η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$E \{ |\hat{s}(t + \tau) - \hat{s}(t)|^2 \} = 2w^T (\mathbf{C} - \mathbf{C}_e[k]) w$$

Άρα, η συνάρτηση χόστους που καλούμαστε να ελαχιστοποιήσουμε είναι:

$$\begin{aligned} e_{AMUSE}(\mathbf{X}, w, k) &= \frac{E \{ |\hat{s}(t + \tau) - \hat{s}(t)|^2 \}}{E \{ \hat{s}^2(t) \}} = 2 \frac{w^T (\mathbf{C} - \mathbf{C}_e[k]) w}{w^T \mathbf{C} w} \Leftrightarrow \\ e_{AMUSE}(\mathbf{X}, w, k) &= 2 \left(1 - \frac{w^T \mathbf{C}_e[k] w}{w^T \mathbf{C} w} \right) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Το πρόβλημα εύρεσης ελαχίστου της παραπάνω συνάρτησης για κάποιο k αντικαθίσταται από την εύρεση της μέγιστης γενικευμένης ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος για το ζεύγος πινάκων $(\mathbf{C}_e[k], \mathbf{C})$. Η μόνη απαίτηση του αλγορίθμου AMUSE είναι ότι οι όλες οι ιδιοτιμές πρέπει να έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με την μονάδα.

Ο συνδυασμός του αλγορίθμου AMUSE με τον αλγόριθμο πCA αποτελεί μια "βελτιστοποίηση" όσον αφορά την ταχύτητα εκτέλεσης του αλγορίθμου καθώς μπορούμε να εξάγουμε τις περιοδικές συνιστώσες χωρίς τον υπολογισμό των πινάκων $\mathbf{C}_0[k]$ και $\mathbf{C}_t[k]$ με αποτέλεσμα μικρότερο υπολογιστικό κόστος.

Ο αλγόριθμος AMUSE έχει ένα μειονέκτημα όσον αφορά την εύρεση περίπλοκων περιοδικών συνιστωσών καθώς δεν βασίζεται πάνω στην κύρια υπόθεση του αλγορίθμου πCA, ότι όλα τα επιμέρους σήματα είναι περιοδικά.

4.5 Κυκλική πCA

Ορίζοντας λίγο διαφορετικά την (4.1.5) έχουμε:

$$e_{circ}(\mathbf{X}, w, k) = \frac{\sum_{i=1}^m |\hat{s}_{(k+i)_m} - \hat{s}_i|^2}{\sum_{i=1}^m |\hat{s}_i|^2} \geq 0, k = 1, 2, \dots, m-1$$

όπου $(k+i)_m$ είναι το ακέραιο πολλαπλάσιο της διαίρεσης του $k+i$ με το m . Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |\hat{s}_{(k+i)_m} - \hat{s}_i|^2 &= |\hat{s}_{k+1} - \hat{s}_1|^2 + |\hat{s}_{k+2} - \hat{s}_2|^2 + \dots + |\hat{s}_{m-1} - \hat{s}_{m-k-1}|^2 \\ &\quad + |\hat{s}_m - \hat{s}_{m-k}|^2 + |\hat{s}_1 - \hat{s}_{m-k+1}|^2 + \dots \\ &\quad + |\hat{s}_{k-1} - \hat{s}_{m-1}|^2 + |\hat{s}_k - \hat{s}_m|^2 \end{aligned}$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση, βλέπουμε ότι οι διαφορές παφαμένουν ίδιες ως προς την μεταβλητή k , οπότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι πίνακες $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}$ και $\mathbf{X}_t = [x_{k+1} \dots x_{m-1} x_m x_1 \dots x_k]$, άρα οι πίνακες $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_t = \mathbf{C}$ θα είναι σταθεροί και ανεξάρτητοι της μεταβλητής k .

Η συγκεκριμένη απλοποίηση βελτιστοποιεί το υπολογιστικό κέρδος καθώς οι υπολογισμοί των πινάκων \mathbf{C}_0 και \mathbf{C}_t υπολογίζονται μόνο μια φορά άρα και την ταχύτητα εκτέλεσης του αλγορίθμου.

Η υπόθεση για την συγκεκριμένη μέθοδο είναι στο γεγονός ότι τα δεδομένα, εφόσον είναι περιοδικά, θα επαναληφθούν με τον ίδιο ωκριβώς τρόπο καθώς μεταβάλλουμε την τιμή της μεταβλητής k . Αυτό αποτελεί μειονέκτημα όσο αφορά την εύρεση περιοδικών συνιστωσών για σήματα που εμπεριέχουν θόρυβο και πολύπλοκα σήματα καθώς δεν επαναλαμβάνονται επωκριβώς μετά το πέρας της περιόδου, αλλά και σε σήματα με μεγάλη χρονική διάρκεια. Τέλος, για σήματα με λίγα δείγματα, η μέθοδος αυτή αποτελεί την τάχιστη λύση για ικανοποιητικά αποτελέσματα.

4.6 Υλοποίηση

Η συνάρτηση που υλοποιεί την παραπάνω μέθοδο είναι η `pica.py` [19]. Η συνάρτηση `pica.py` δέχεται ως ορίσματα τον πίνακα των δεδομένων \mathbf{X} , την ελάχιστη και την μέγιστη καθυστέρηση `minlag` και `maxlag` σε δευτερόλεπτα και την συχνότητα δειγματοληψίας f . Επιπλέον, έχει προκαθορισμένες τιμές για τις μεταβλητές `preproc` = `True` για την επιλογή της απαραίτητης προεπεξεργασίας των δεδομένων, `norm` = `True` για την κανονικοποίηση, δηλαδή την διαίρεση των επιμέρους αποτελεσμάτων με την τιμή ($samples - k$), $k = minlag, \dots, maxlag$, `amuse` = `False` για την υλοποίηση του αλγορίθμου AMUSE και `circ` = `False` για την υλοποίηση της κυκλικής πPCA. Σαν έξοδο επιστρέφει τον πίνακα \mathbf{W} ώστε $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{WX}$ οι εκτιμήσεις των πηγαίων σημάτων.

Αφού ελεγχθούν οι μεταβλητές ως προς την οριθότητα τους, αναλόγως με την τιμή της μεταβλητής `preproc`, τότε μέσω των συναρτήσεων `mean_remove.py`, `pca_eig.py` και `data_whitening.py` αφαιρείτε ο μέσος όρος από τα δεδομένα, υλοποιείται ο αλγόριθμος PCA και γίνεται λεύκανση των δεδομένων, όπως αναφέρονται στα προηγούμενα κεφάλαια.

Έπειτα από την δημιουργία του πίνακα διακριτών χρονικών καθυστερήσεων k , υπολογίζουμε τους πίνακες $\mathbf{C}, \mathbf{C}_0[k], \mathbf{C}_t[k], \mathbf{C}_{t0}[k]$ και $\mathbf{A}[k]$. Οι πίνακες $\mathbf{C}_0[k]$ και $\mathbf{C}_t[k]$ υπολογίζονται με την συνάρτηση `C0_Ct_compute.py` με την χρήση αναδρομικής σχέσης της Πρότασης 4.6, καθώς μειώνει τον χρόνο υλοποίησης της μεθόδου.

Αντί για τον υπολογισμό του πίνακα \mathbf{C}_{t0} , θα υπολογίσουμε τον πίνακα

$$C_e = \frac{\mathbf{C}_{t0} + \mathbf{C}_{t0}^T}{2} \quad (4.6.1)$$

δηλαδή το συμμετρικό μέρος του πίνακα \mathbf{C}_{t0} , με χρήση του μετασχηματισμού FFT.

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.7, ο πίνακας $\mathbf{C}_{t0}[k]$ περιέχει τις αλληλοσυσχετίσεις του πίνακα \mathbf{X} , και, όπως είναι γνωστό από την επεξεργασία σημάτων, η αλληλοσυσχέτιση υπολογίζεται με την συνέλιξη του \mathbf{X}_i με το καθρεφτισμένο ως προς τον άξονα $k = 0$ \mathbf{X}_j εάν προσθέθουν τόσα μηδενικά στο τέλος και των δύο σημάτων ώστε να έχουμε $2 * samples - 1$ δείγματα [20].

Στο πεδίο συχνοτήτων, είναι γνωστό ότι ο υπολογισμός της συνέλιξης μετατρέπεται σε απλό πολλαπλασιασμό. Οπότε αρκεί να υπολογιστούν τα πραγματικά μέρη των μετασχηματισμών Fourier μεταξύ των σημάτων \mathbf{X}_i και \mathbf{X}_j^* , να επιλεχθούν τα $k \in [minlag, maxlag]$ στοιχεία και τέλος, να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός τους. Με αυτόν τον τρόπο και κάνοντας χρήση της συμμετρίας του πίνακα \mathbf{C}_e , υπολογίζουμε $\frac{n(n+1)}{2}$ στοιχεία αντί για n^2 . Η παραπάνω διαδικασία υλοποιείται με την συνάρτηση *Ce_compute.py*.

Με την συνάρτηση *is_def.py* ελέγχουμε αν οι άνω πίνακες είναι θετικά ορισμένοι ή θετικά ημιορισμένοι, με βάση την Πρόταση 4.2, χρησιμοποιώντας το κριτήριο Sylvester.

Η εύρεση των ελάχιστων ιδιοτιμών του κλάσματος Rayleigh για κάθε ζεύγος πινάκων ($\mathbf{A}[k], \mathbf{C}$) γίνεται με την συνάρτηση *rayleigh_minimun.py* και για την εύρεση του ελάχιστου περιοδικού σφάλματος χρησιμοποιείται η *min_max.py* όπου με την χρήση των μεταβλητών *height*, *distance* και *width* υπολογίζονται τα τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα ανάλογα την μέθοδο. Προαιρετικά, γίνεται η απαλοιφή των πολλαπλασίων kT_s από τις βασικές περιόδους.

Τέλος, μέσω της συνάρτησης *period_check_correlation.py* ελέγχεται η περίοδος των εξαγώμενων περιοδικών συνιστωσών. Η διαδικασία γίνεται με την χρονική διαφορά ανάμεσα στα τοπικά μέγιστα της αυτοσυσχέτισης κάθε σήματος.

Όλοι οι κώδικες βρίσκονται στο Παράρτημα A.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή και Σύγκριση Μεθόδων

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα υλοποιηθούν οι αλγόριθμοι που αναφέρθηκαν προηγουμένως, δηλαδή ο FastICA, ο πCA και ο AMUSE. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τα πηγαία σήματα $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, όπου n ο αριθμός των σημάτων και m ο αριθμός των δειγμάτων, είτε αμιγώς περιοδικά (ημίτονα, τετραγωνικούς παλμούς, κλπ.) είτε περίπλοκα σήματα με μεταβλητή περιοδικότητα, δηλαδή αφού σχηματιστούν, επαναλαμβάνονται στο πεδίο του χρόνου ώστε να συμπληρώσουν την καθορισμένη διάρκεια, είτε πραγματικά βιοσήματα που έχουμε λάβει από αισθητήρες.

Την θεωρούμε ότι τα σήματα ως προς εκτίμηση $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{nm}$, σύμφωνα με το μοντέλο BSS, είναι:

$$\mathbf{X} = \mathbf{BS} + \mathbf{N} \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

όπου $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας μίξης και $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ο πίνακας προσθετικού θορύβου που ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{N} \sim (0, \sigma)$.

Ο σκοπός είναι να βρεθεί ένας πίνακας που θα μετασχηματίζει τα μιξαρισμένα σήματα σε έναν πίνακα $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{WX}$ που θα είναι όσο πιο κοντά γίνεται στα πηγαία σήματα \mathbf{S} .

5.1 Τεχνητά Σήματα

Για την αξιολόγηση των αλγορίθμων θα χρησιμοποιηθεί το παρακάτω κριτήριο[21]:

$$J(\mathbf{P}) = \frac{\| \mathbf{P} - diag(\mathbf{P}) \|^2}{\| \mathbf{P} \|^2} \tag{5.1.1}$$

όπου $\mathbf{P} = \mathbf{WA}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\| \cdot \|$ η ευκλείδια νόρμα. Το κριτήριο (5.1.1) είναι μη αρνητικό και ισούται με το μηδέν όταν $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}$, δηλαδή όταν ο πίνακας \mathbf{P} είναι πίνακας αντιμετάθεσης. Οι αλγόριθμοι λειτουργούν ικανοποιητικά όταν η (5.1.1) είναι κοντά στο μηδέν.

Το παραπάνω κριτήριο όμως τροποποιηθεί λίγο ώστε να αντιμετωπίσει την αδυναμίες της μεθόδου FastICA ως προς την λανθασμένη σειρά των ανεξάρτητων συνιστωσών. Για αυτό, όμως πρέπει να μετατραπεί ο πίνακας \mathbf{P} σε έναν πιο ‘διαγώνιο’, βρίσκοντας την θέση του μεγαλύτερου στοιχείου κάθε σειράς και με βάση αυτό να αλλαχθεί η σειρά των γραμμών του πίνακα \mathbf{P} . Με την παραπάνω μετατροπή αλλάζει μόνο η σειρά των ανεξάρτητων συνιστωσών και όχι οι ίδιες συνιστώσες.

5.1.1 Περιοδικά Σήματα

Θεωρούμε ως σήματα πηγών:

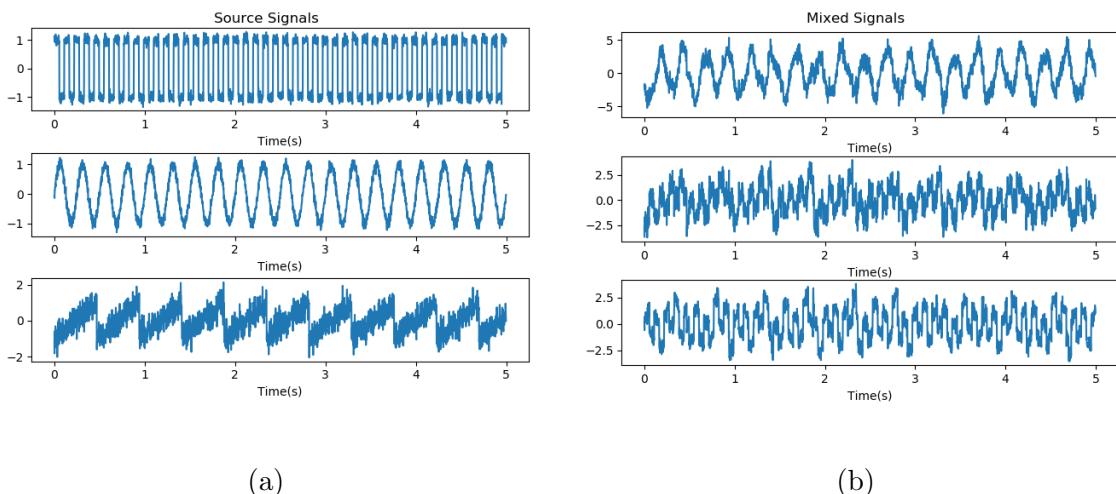
$$\begin{aligned}s_1 &= \text{square}\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) \\ s_2 &= \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right) \\ s_3 &= \text{sawtooth}\left(\frac{2\pi}{T_3}t\right)\end{aligned}$$

μαζί με προσθήκη λευκού θορύβου.

Ο πίνακας πίνακα μίξης:

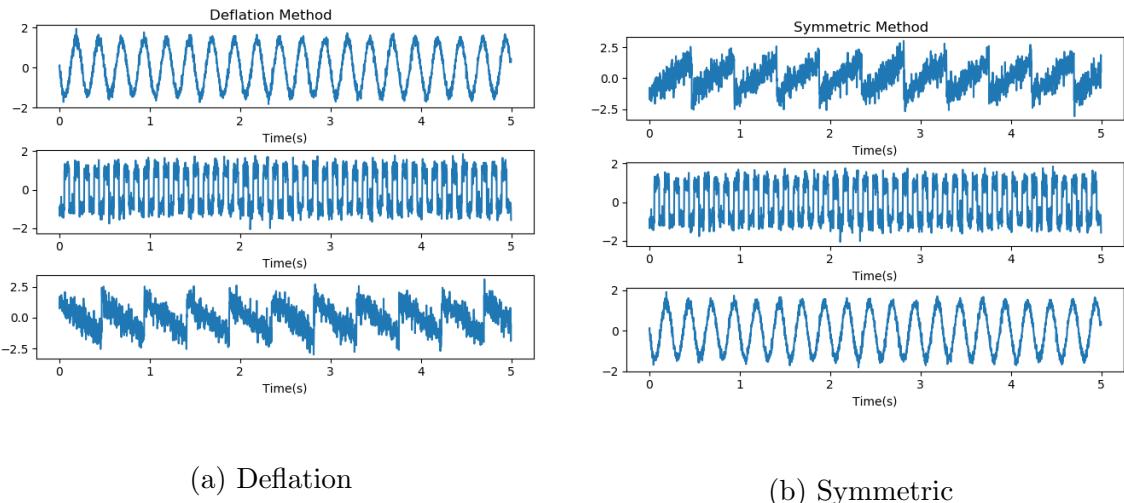
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.581432 & -2.96086 & 1.23499 \\ -0.878361 & 0.25808 & 1.52502 \\ 1.20338 & 0.891327 & 0.918677 \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{A}) = -8.52$$

Οι περίοδοι των σημάτων των πηγών είναι $T_1 = 0.11s$, $T_2 = 0.25s$ και $T_3 = 0.47s$. Η διάρκεια των σημάτων είναι 5 δευτερόλεπτα ενώ η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 500Hz$. Τα σήματα πηγών με την προσθήκη θορύβου και τα πεπλεγμένα σήματα φαίνονται στις εικόνες 5.1α και 5.1β.

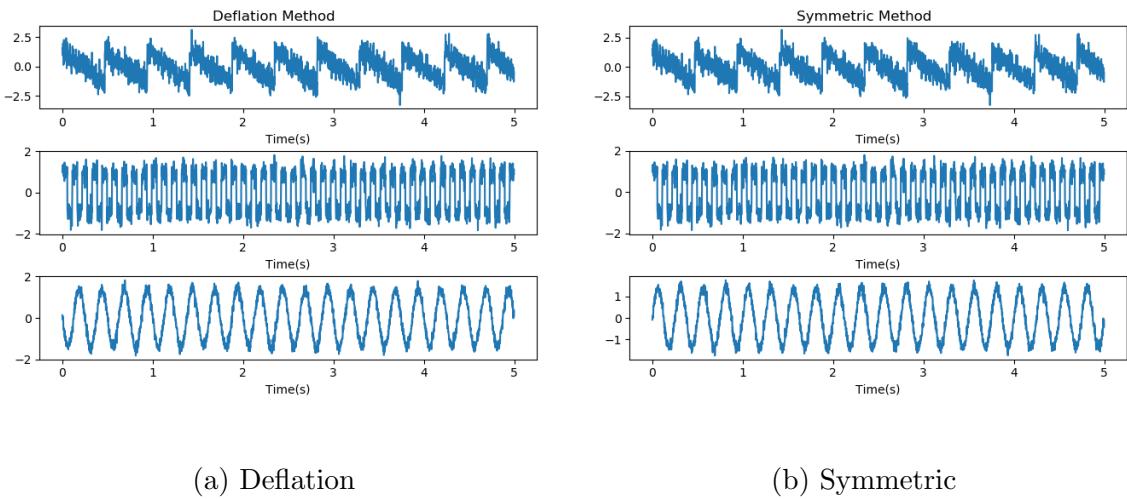


Σχήμα 5.1: Περιοδικές Πηγές και Μιξαρισμένα Σήματα

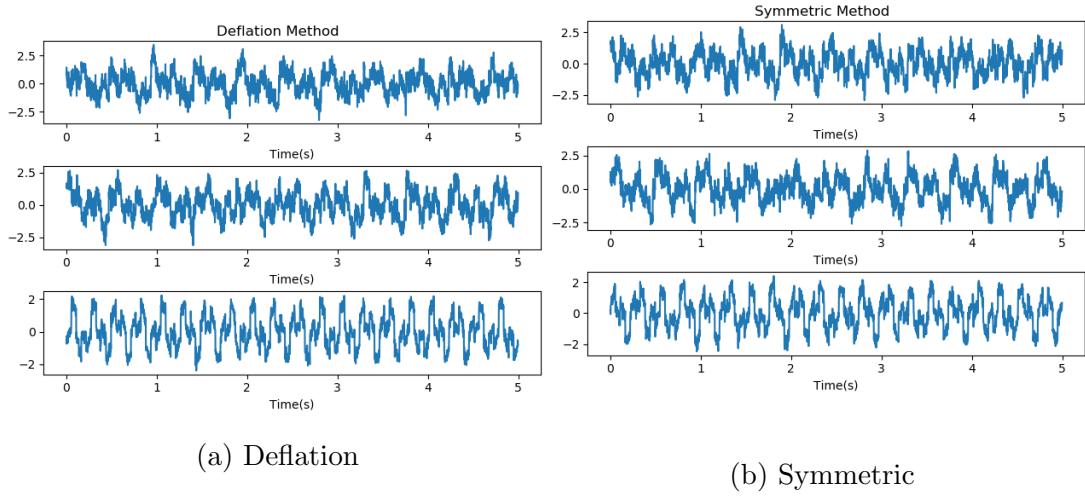
Τα σχήματα 5.2a και 5.2b είναι οι ανεξάρτητες συνιστώσες που εξάγει ο αλγόριθμος FastICA για ‘logcosh’, τα σχήματα 5.3a και 5.3b για ‘exp’ και τα σχήματα 5.4a και 5.4b για ‘cube’.



$\Sigma\chi\rho\mu\alpha$ 5.2: Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'logcosh'}$

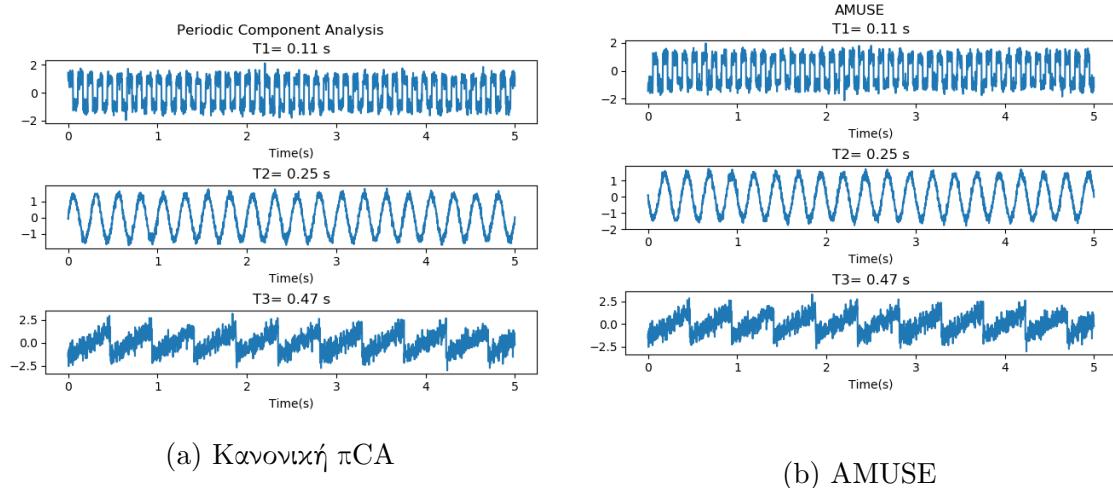


$\Sigma\chi\rho\mu\alpha$ 5.3: Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'exp'}$

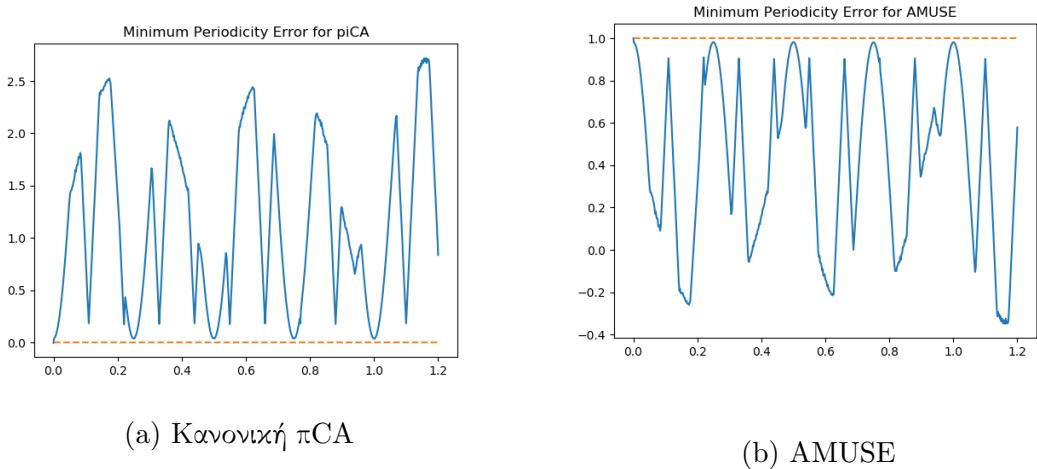


Σχήμα 5.4: Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'cube'}$

Στα σχήματα 5.5a και 5.5b φαίνονται οι περιοδικές συνιστώσες που εξάγουν οι αλγόριθμοι πCA και AMUSE, ενώ στα σχήματα 5.6a και 5.6b τα αντίστοιχα περιοδικά σφάλματα.



Σχήμα 5.5: Εξαγωγή Περιοδικών Συνιστωσών για $T_1 = 0.11$ s, $T_2 = 0.25$ s και $T_3 = 0.47$ s



Σχήμα 5.6: Τα ελάχιστα σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως 1.2 δευτερόλεπτα

Τέλος, οι συντελεστές απόδοσης που υπολογίζονται από την (5.1.1) φαίνονται παρακάτω:

	Deflational	Symmetric
'logcosh'	0.000847636	0.000818582
'exp'	0.000951913	0.000261241
'cube'	0.630938755	0.663469048
πCA	6.16798765e-05	
AMUSE	6.16798765e-05	

Πίνακας 5.1: Κριτήριο απόδοσης για κάθε υλοποιήσιμη μέθοδο

Όπως βλέπουμε από τις γραφικές παραστάσεις, παρατηρούμε ότι, παρόλο της παρουσίας προσθετικού θορύβου, και η μέθοδος FastICA αλλά και η πCA αναγνωρίζουν πλήρως τα σήματα, εκτός της περίπτωσης 'cube' της FastICA. Από τον πίνακα απόδοσης 5.1, παρατηρούμε ότι σχεδόν όλοι οι αλγόριθμοι έχουν τιμή περίπου ίση με το 0, άρα προσεγγίζουν έναν πίνακα αντιμετάθεσης και επίσης, οι αλγόριθμοι που υποθέτουν περιοδικότητα έχουν αμυδρά καλύτερα αποτελέσματα κάτι που είναι προφανές εφόσον τα σήματα πηγών που χρησιμοποιήσαμε είναι περιοδικά.

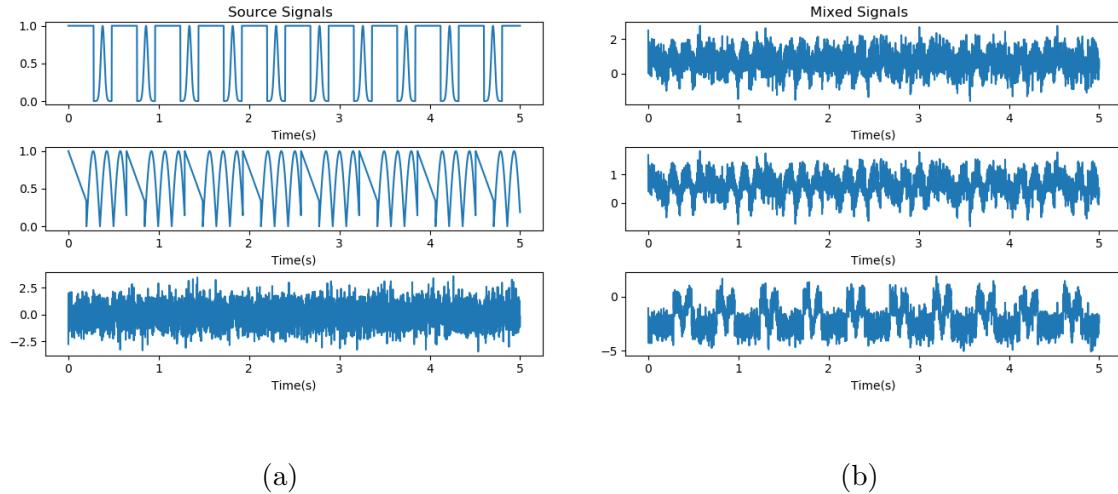
5.1.2 Ψευδό-Περιοδικά Σήματα

Θεωρούμε ως σήματα πηγών τα σήματα που φαίνονται στο σχήμα 5.7a. Βλέπουμε ότι τα δύο πρώτα σήματα αποτελούν συνδυασμούς σημάτων τα οποία έχουν επαναληφθεί στο πεδίο του χρόνου, κάνοντας τα ψευδό-περιοδικά ενώ το τελευταίο σήμα αποτελείται από λευκό θόρυβο. Επιπλέον, για τα περιοδικά σήματα, οι περίοδοι επιλέχθηκαν αρχικά ως $T_1 = 0.5$ s και $T_2 = 0.754$ s και μεταβάλλονται των αριθμού δειγμάτων τους κατά $a, b \in [-100, 100]$ αντίστοιχα, οπότε δεν γνωρίζουμε την εκάστοτε περίοδο ακριβώς. Η διάρκεια των σημάτων είναι 5 δευτερόλεπτα ενώ η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 1 KHz$.

Ο πίνακας μίξης είναι:

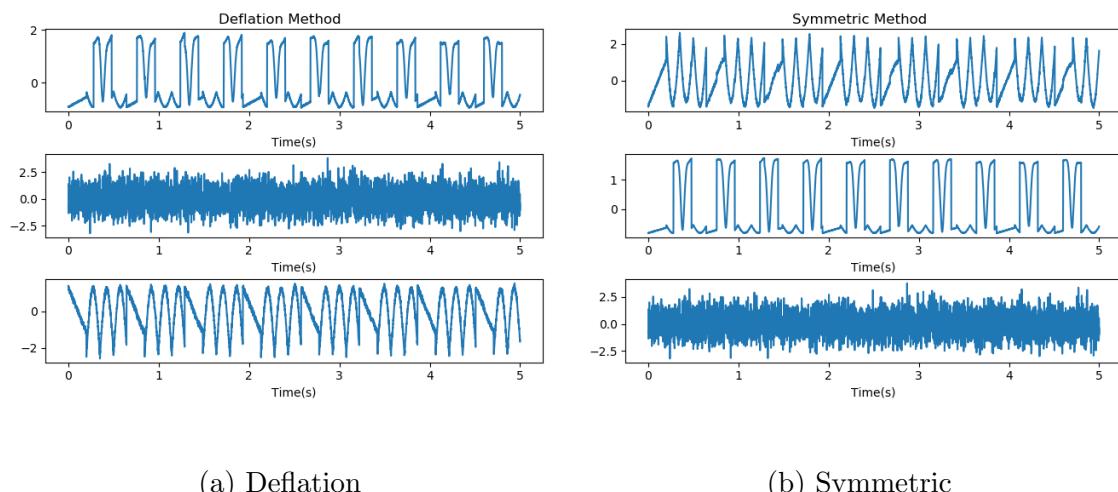
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.00740553 & 1.05634461 & -0.52022631 \\ -0.00531442 & 0.95287344 & -0.26333002 \\ -2.39713001 & -0.52477855 & -0.67513928 \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{A}) = -0.5325$$

Τα σήματα πηγών και τα πεπλεγμένα σήματα φαίνονται στις εικόνες 5.7a και 5.7b.

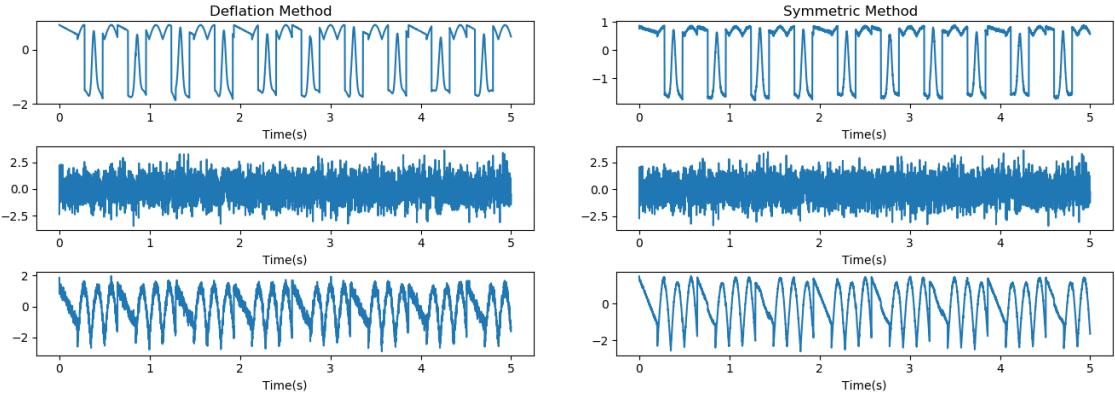


Σχήμα 5.7: Ψευδο-περιοδικές Πηγές και Μιξαρισμένα Σήματα

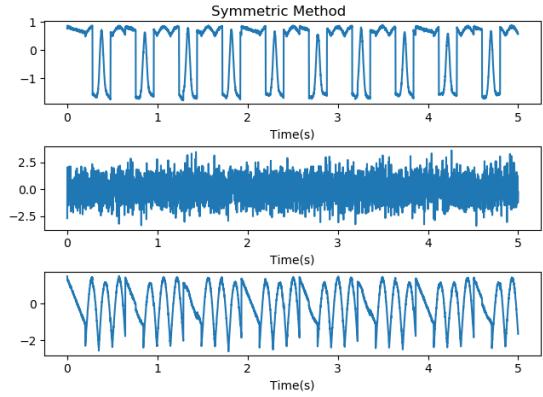
Τα σχήματα 5.8a και 5.8b είναι οι ανεξάρτητες συνιστώσες που εξάγει ο αλγόριθμος FastICA για 'logcosh', τα σχήματα 5.9a και 5.9b για 'exp' και τα σχήματα 5.10a και 5.10b για 'cube'.



Σχήμα 5.8: Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'logcosh'}$

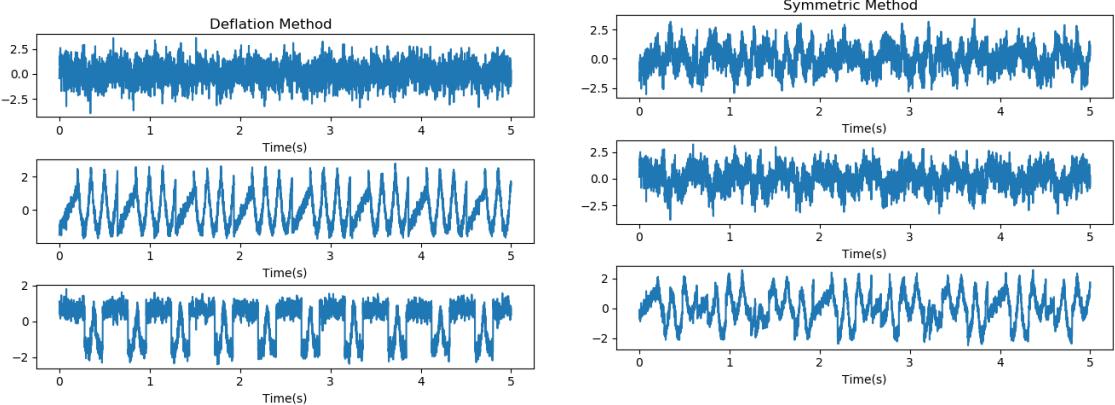


(a) Deflation



(b) Symmetric

Σ χήμα 5.9: Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'exp'}$

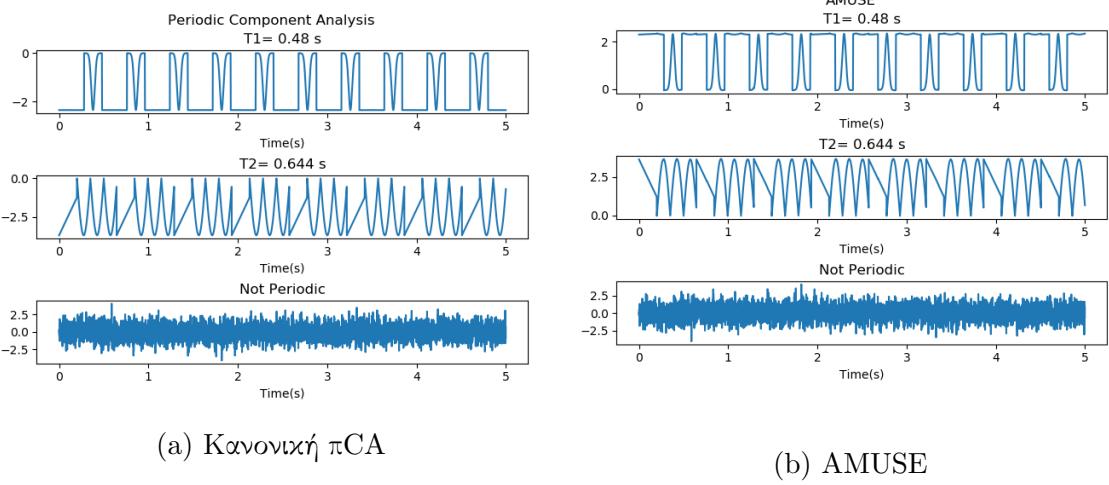


(a) Deflation

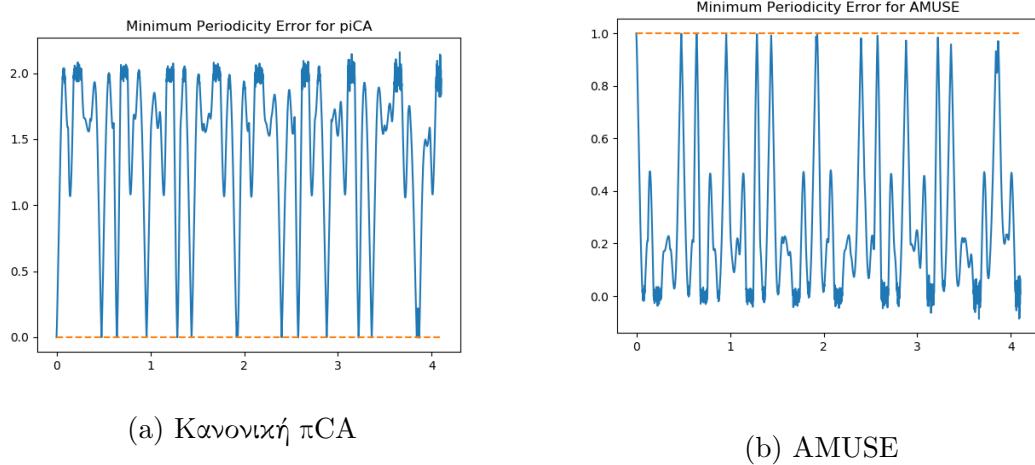
(b) Symmetric

Σ χήμα 5.10: Ανεξάρτητες Συνιστώσες περιοδικών σημάτων για $g = \text{'cube'}$

Στα σχήματα 5.11a και 5.11b φαίνονται οι περιοδικές συνιστώσες που εξάγουν οι αλγόριθμοι πCA και AMUSE, ενώ στα σχήματα 5.12a και 5.12b τα αντίστοιχα περιοδικά σφάλματα.



Σχήμα 5.11: Εξαγωγή Περιοδικών Συνιστωσών για $T_1 = 0.48$ s και $T_2 = 0.644$ s



Σχήμα 5.12: Τα ελάχιστα σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως 4.2 δευτερόλεπτα

Τέλος, οι συντελεστές απόδοσης που υπολογίζονται από την (5.1.1) φαίνονται παρακάτω:

	Deflational	Symmetric
'logcosh'	0.021798705	0.009850027
'exp'	0.048388267	0.009237661
'cube'	0.703621639	0.575454093
πCA	0.0005443894	
AMUSE	0.0005443894	

Πίνακας 5.2: Κριτήριο απόδοσης για κάθε υλοποιήσιμη μέθοδο

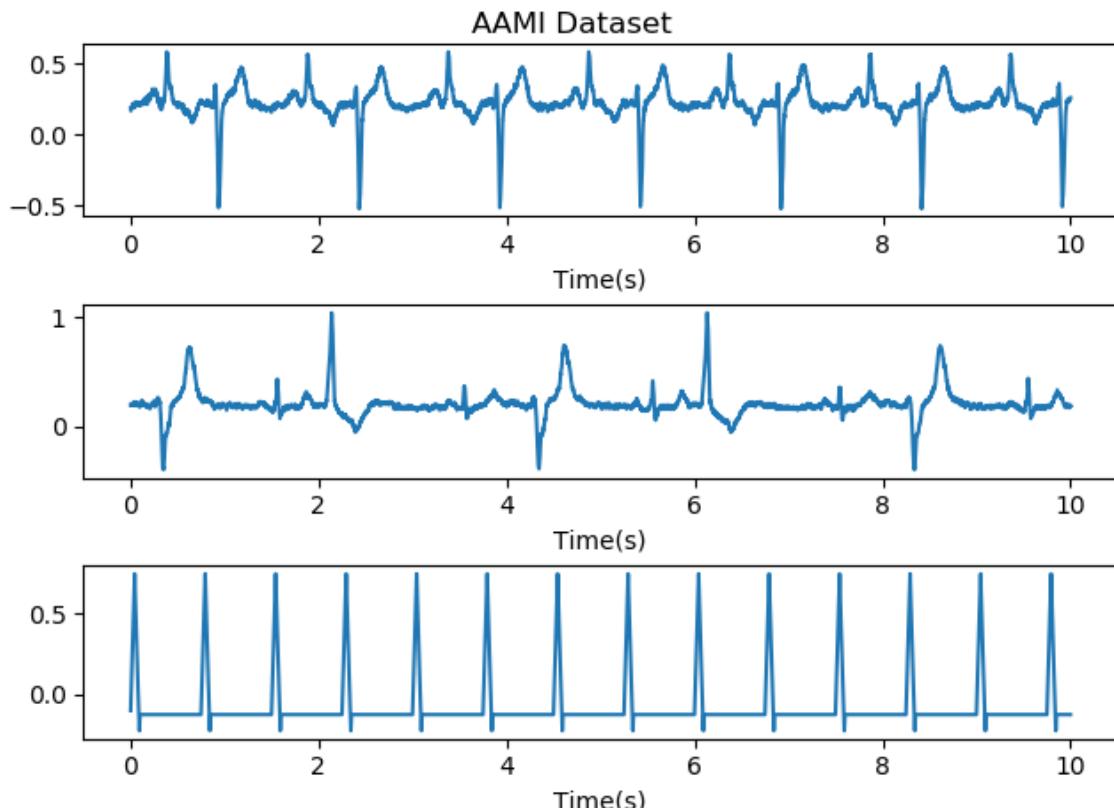
Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος FastICA και στις 3 περιπτώσεις, δεν εξάγει τα διάφορα σήματα επακριβώς αλλά εποπτικά, καθώς προσθέτει θόρυβο σε συνιστώσες που δεν είχαν, αντίθετα με τους αλγορίθμους πCA και AMUSE. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι τα δεδομένα μας είναι αφιλτράριστα καθώς μπορεί να εμπειριέχονται συχνότητες στα δεδομένα μας που να δημιουργούν μια συσχέτιση με τον 'λευκό' θόρυβο, κάνοντας τα μη-ανεξαρτήτα.

5.2 Βιοσήματα

5.2.1 Τεχνητά Βιοσήματα

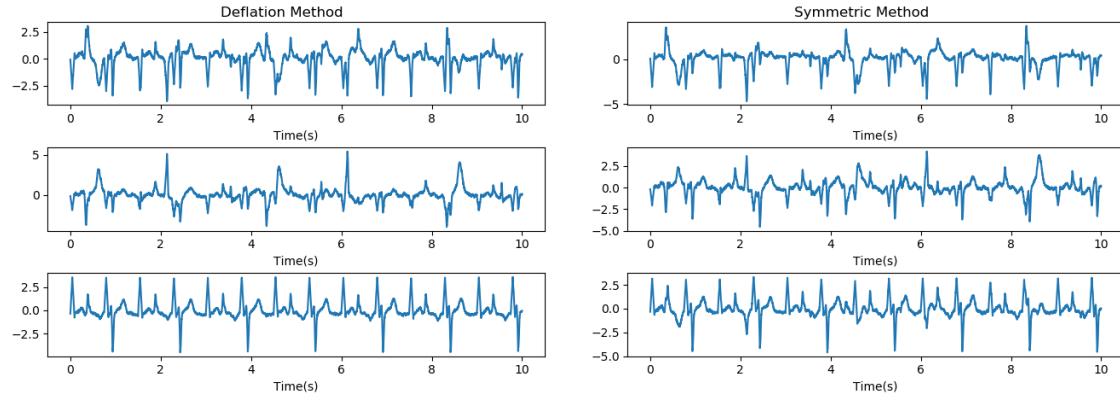
Τα παρακάτω σήματα περιέχουν και πραγματικές και συνθετικές κυματομορφές, οι οποίες χρησιμοποιούνται για έλεγχο σε συσκευές που εποπτεύονται ηλεκτροκαρδιογραφήματα τα οποία λάβαμε από το Physionet ATM [22] σε μορφή .txt μέσω του πακέτου WFDB [23] από το Cygwin. Επιλέγουμε 3 από τα διαθέσιμα σήματα, συγκεκριμένα τα "aami3a", "aami3b", και "aami4a" στα οποία δεν γνωρίζουμε την περίοδο τους. Καλούμαστε να αναγνωρίσουμε τα περιοδικά σημάτα, όπως και την περίοδο του καθενός, εκτελώντας τους αλγορίθμους με είσοδο των πίνακα που δημιουργείται από τα παραπάνω αρχεία. Το κάθε σήμα έχει διάρκεια 10 δευτερολέπτων και ρυθμό δειγματοληψίας ίσο με 720 Hz, ανάλυση 12 bits και τα πλάτος του κάθε σήματος είναι σε mV.

Τα σήματα πηγής φαίνονται στο σχήμα 5.13:



Σχήμα 5.13: AAMI Dataset

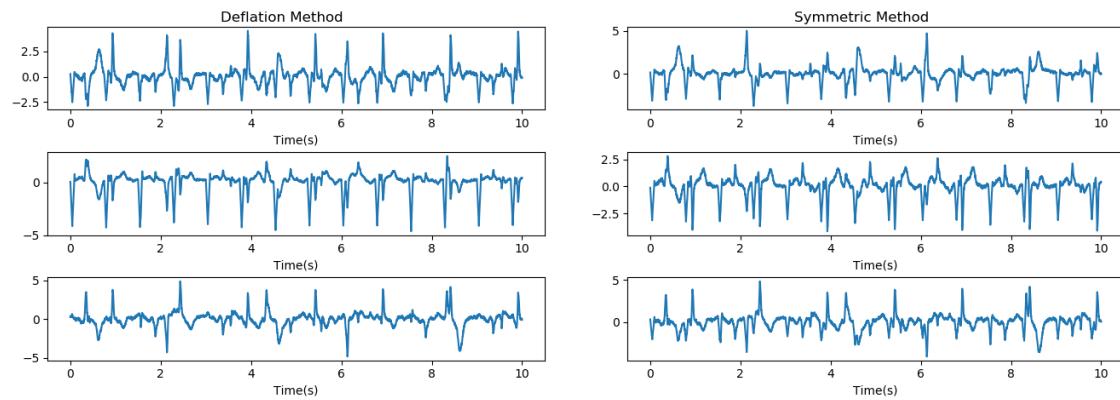
Τα σχήματα 5.14a και 5.14a είναι οι ανεξάρτητες συνιστώσες που εξάγει ο αλγόριθμος FastICA για 'logcosh', τα σχήματα 5.15a και 5.15b για 'exp' και τα σχήματα 5.16a και 5.16b για 'cube'.



(a) Deflation

(b) Symmetric

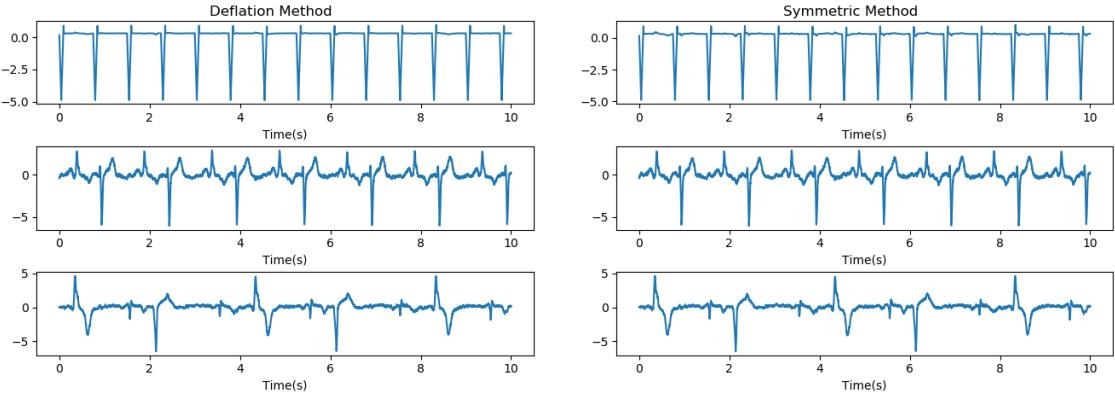
Σ χήμα 5.14: Αποτελέσματα για $g = \text{'logcosh'}$



(a) Deflation

(b) Symmetric

Σ χήμα 5.15: Αποτελέσματα για $g = \text{'exp'}$

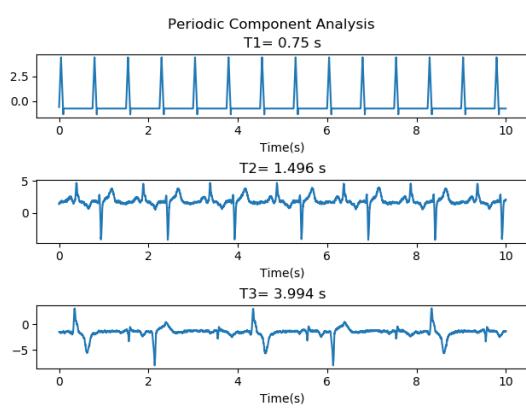


(a) Deflation

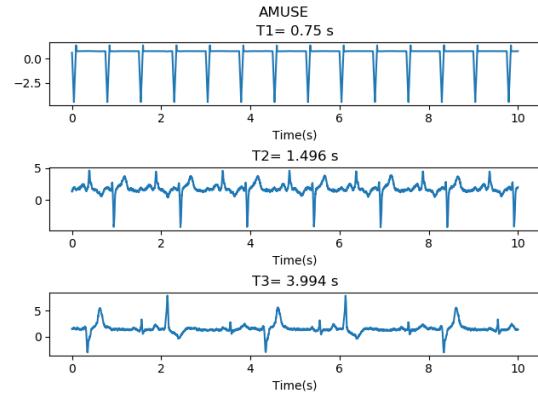
(b) Symmetric

$\Sigma\chi\eta\mu\alpha 5.16$: Αποτελέσματα για $g = \text{'cube'}$

Στα σχήματα 5.17a, 5.17b φαίνονται οι περιοδικές συνιστώσες με τις αντίστοιχες περιόδους και στα σχήματα 5.18a, 5.18b τα αντίστοιχα περιοδικά σφάλματα.

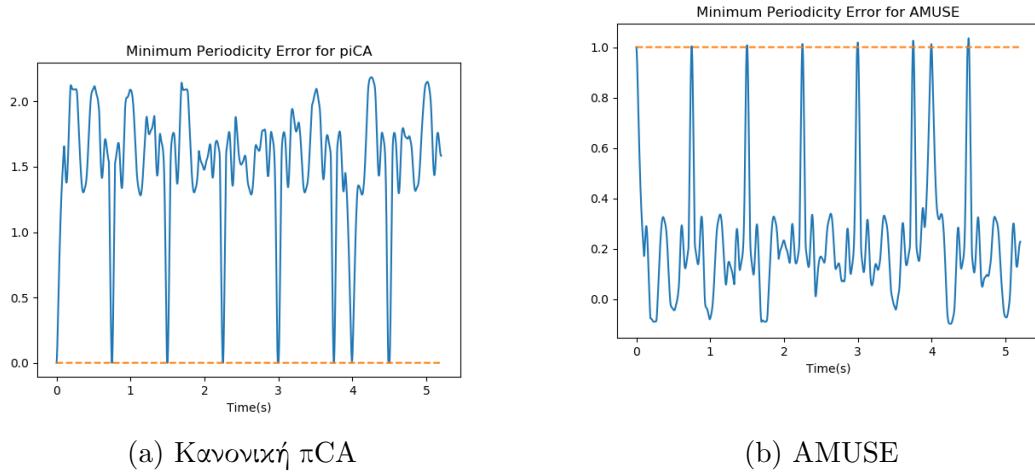


(a) Κανονική πCA



(b) AMUSE

$\Sigma\chi\eta\mu\alpha 5.17$: Οι περιοδικές συνιστώσες του AAMI Dataset για $T_1 = 0.75$ s, $T_2 = 1.496$ s και $T_3 = 3.994$ s



Σχήμα 5.18: Τα ελάχιστα περιοδικά σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως 5.2 δευτερόλεπτα

Βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος πCA βγάζει καθαρά τα σήματα όπως περιμέναμε, αναγνωρίζοντας και την περίοδο του καθενός. Όσο για τον αλγόριθμο Fast ICA, στην περίπτωση 'cube' λαμβάνουμε αρκετά καλά αποτελέσματα, δηλαδή μικρή αλλοίωση την τελική μορφή των σημάτων, και στις δύο προσεγγίσεις ενώ οι άλλες δύο περιπτώσεις αποτυγχάνουν πλήρως στην αναγνώριση των αρχικών σημάτων.

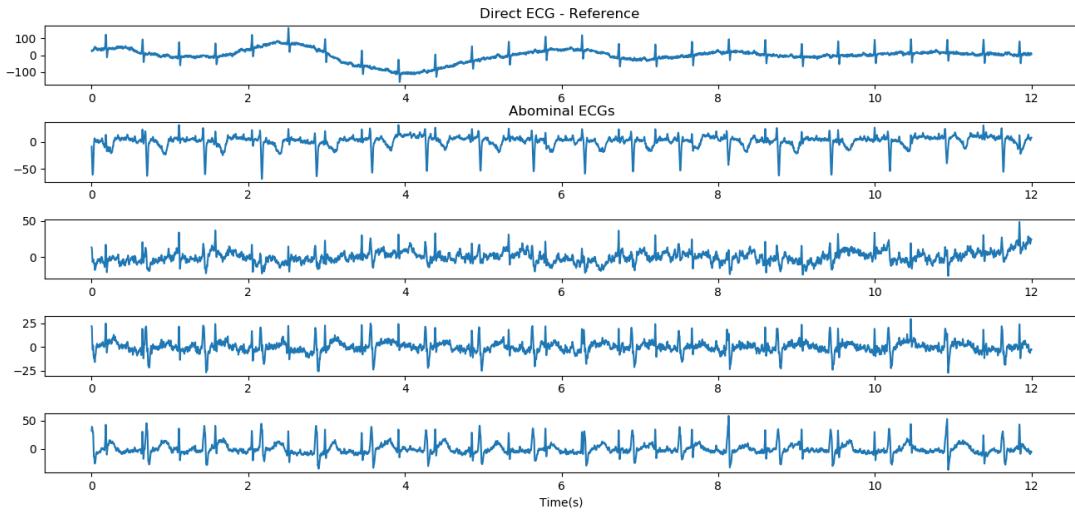
5.2.2 Πραγματικά Βιοσήματα - Παράδειγμα 1

Η βάση δεδομένων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η "Abdominal and Direct Fetal Electrocardiogram Database (adfecgdb)" [24][25][26] και συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε τα σήματα r01.edf, που κατεβάσαμε και αποθηκεύσαμε σε αρχείο .txt μέσω του πακέτου WFDB .

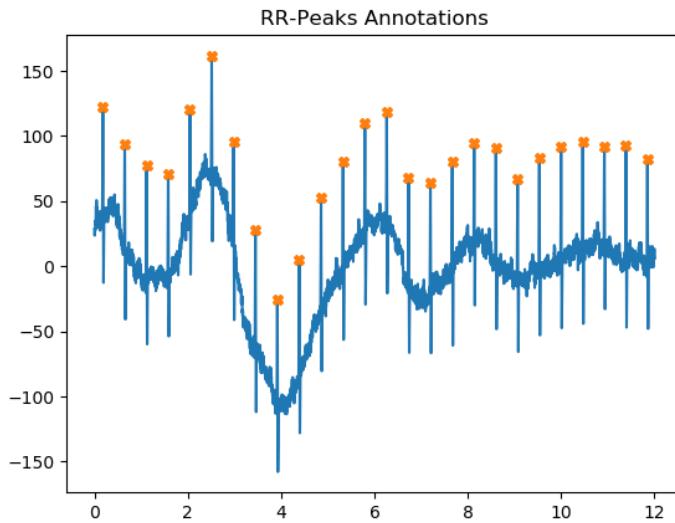
Τα δεδομένα περιέχουν πολυκάναλες καταγραφές εμβρυακών ηλεκτροκαρδιογραφημάτων από 5 γυναίκες μεταξύ 38 και 41 εβδομάδων κύησης. Κάθε καταγραφή περιλαμβάνει 4 διαφορικά σήματα που αποκτήθηκαν από την κοιλία της μητέρας και 1 εμβρυακό ηλεκτροκαρδιογράφημα ως σήμα αναφοράς, από το κεφάλι του εμβρύου. Το εύρος ζώνης των σημάτων είναι 1 Hz - 150 Hz και έχει φιλτραριστεί η παρεμβολή των 50 Hz από την παροχή ρεύματος, όπως και οι χαμηλές συχνότητες του baseline drift που οφείλονται στην κίνηση και την αναπνοή του μητέρας. Επιπλέον, όλα τα σήματα έχουν δειγματοληφθεί ταυτόχρονα με ρυθμό δειγματοληψίας $F_s = 1kHz$ με ακρίβεια 16 bits και τα πλάτη των όλων των σημάτων είναι σε mV.

Θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε το μητρικό και το εμβρυακό ECG με τις παραπάνω μεθόδους. Θα χρησιμοποιήσουμε το εμβρυακό ηλεκτροκαρδιογράφημα ως σήμα αναφοράς για την σύγκριση των εξαχθέντων συνιστωσών και τα υπόλοιπα ως μικτά σήματα προς εξαγωγή των συνιστωσών. Για την σύγκριση των σημάτων με το εμβρυακό ECG, θα υπολογίσουμε τις θέσεις των RR-intervals, δηλαδή της χρονικής διαφοράς μεταξύ R peaks από το σήμα αναφοράς. Σε όποια σήματα συμπίπτουν τα παραπάνω σημεία, θα αποτελούν εμβρυακά ενώ οποιοδήποτε περιοδικό σήμα, διάφορο του σήματος αναφοράς, θα αποτελεί μητρικό σήμα.

Στο σχήμα 5.19 φαίνονται τα πρώτα 12 δευτερόλεπτα του αρχείου r01 και στο σχήμα 5.20 φαίνονται οι ύσεσεις των RR peaks του εμβρυακού ηλεκτροκαρδιογραφήματος

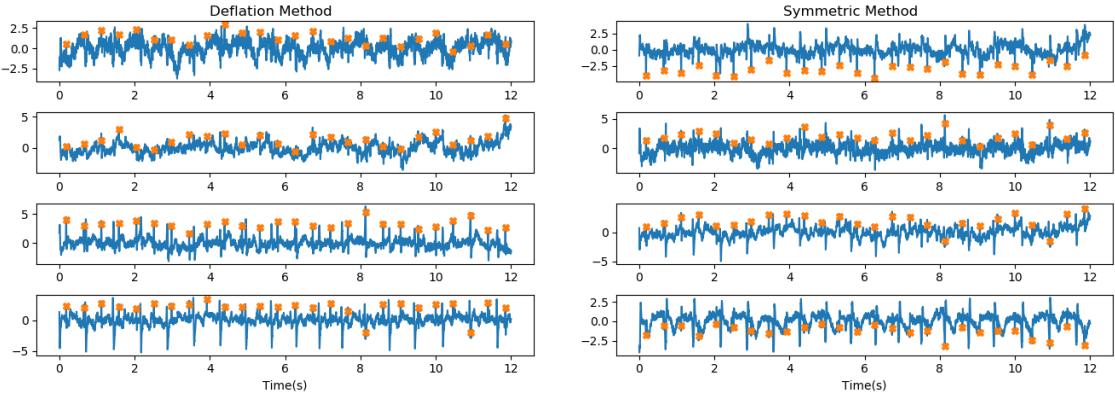


Σχήμα 5.19: Σήματα Ηλεκτροδίων της r01



Σχήμα 5.20: Τα RR intervals του εμβρυακού ECG

Στα σχήματα 5.21a και 5.21b φαίνονται οι ανεξάρτητες συνιστώσες για 'logcosh'. Στο πρώτο σχήμα, μπορούμε να πούμε ότι η 3η συνιστώσα αποτελεί το εμβρυακό και η 4η το μητρικό ενώ στο δεύτερο σχήμα, το 1ο είναι το εμβρυακό και το 4o το μητρικό. Η Συμμετρική προσέγγιση βλέπουμε ότι αναγνωρίζει καλύτερα το εμβρυακό σήμα ενώ για το μητρικό δεν μπορούμε να αποφανθούμε περαιτέρω.

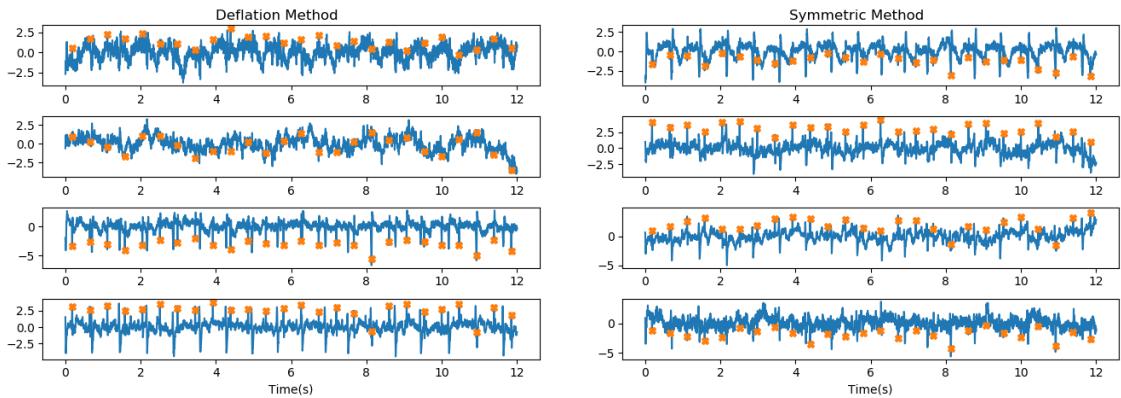


(a) Deflation

(b) Symmetric

$\Sigma\chi_5.21$: Αποτελέσματα για $g = \text{'logcosh'}$

Στα σχήματα 5.22a και 5.22b φαίνονται οι ανεξάρτητες συνιστώσες για 'exp'. Στο πρώτο σχήμα, η 4η συνιστώσα είναι πιο κοντά στο εμβρυακό ECG ενώ στη δεύτερη σχήμα, το 1o είναι το εμβρυακό και το 4o το μητρικό. Όπως και στην 'logcosh' περίπτωση, βλέπουμε ότι η Συμμετρική προσέγγιση παράγει καλύτερα αποτελέσματα.

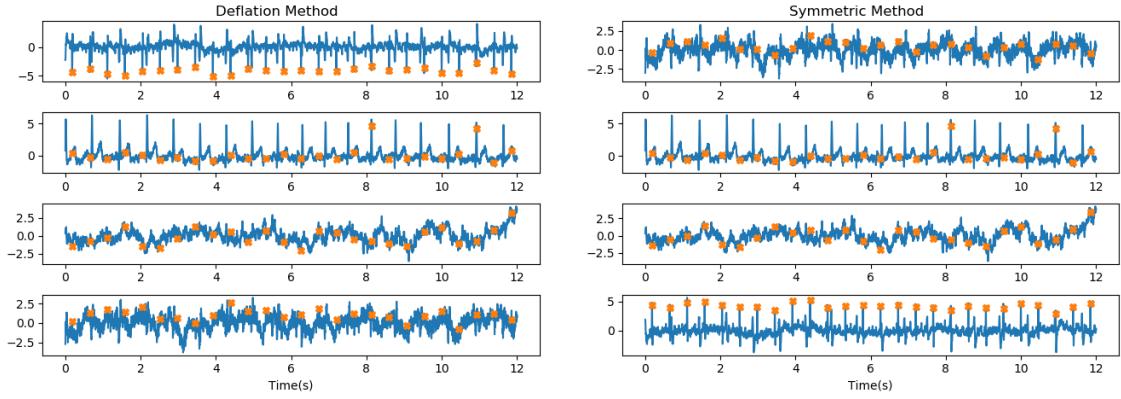


(a) Deflation

(b) Symmetric

$\Sigma\chi_5.22$: Αποτελέσματα για $g = \text{'exp'}$

Στα σχήματα 5.23a και 5.23b φαίνονται οι ανεξάρτητες συνιστώσες για 'cube'. Στο πρώτο σχήμα, η 1η συνιστώσα είναι το εμβρυακό ECG και το 2o το μητρικό ενώ στη δεύτερη σχήμα, το 4o είναι το εμβρυακό και το 2o το μητρικό. Σε αντίθεση με τις άλλες συναρτήσεις, η συνάρτηση 'cube' εξάγει καλά αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις.

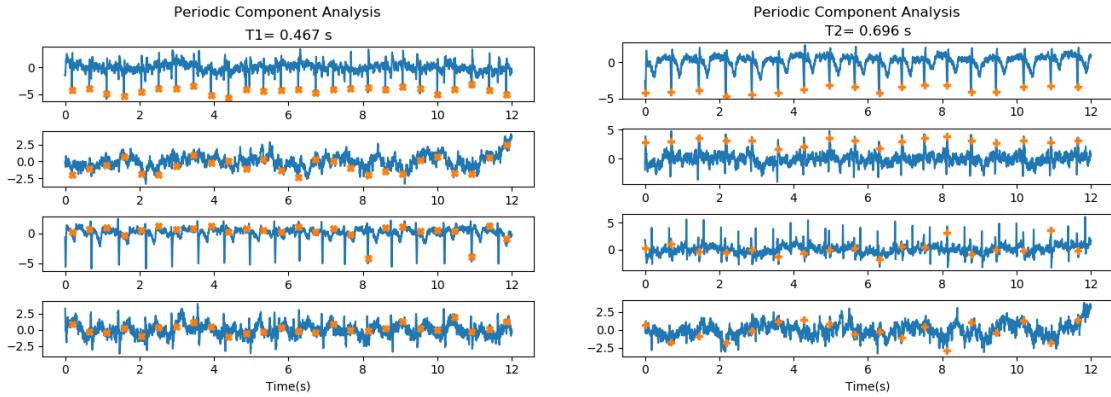


(a) Deflation

(b) Symmetric

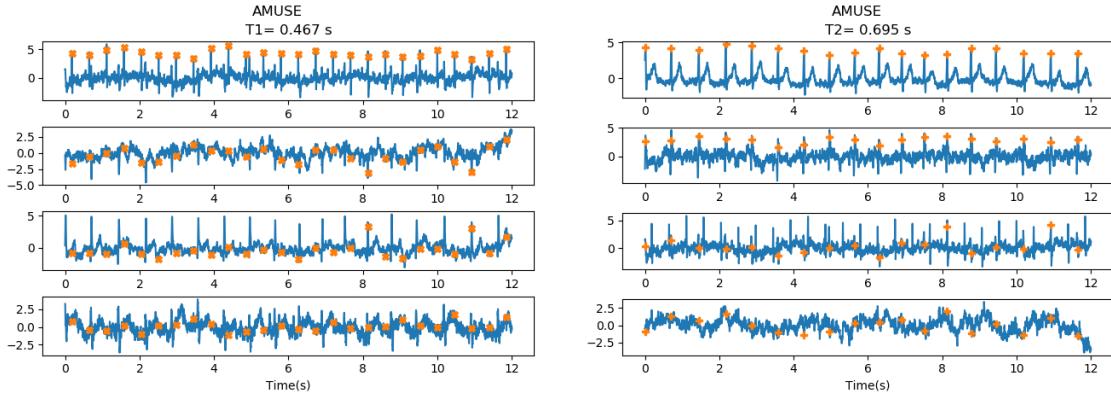
Σχήμα 5.23: Αποτελέσματα για $g = \text{'cube'}$

Στο σχήμα 5.24 φαίνονται οι περιοδικές συνιστώσες που εξάγονται από τον πCA. Το πρώτο σχήμα δίνει ως πρώτη συνιστώσα το εμβρυακό ECG και το δεύτερο σχήμα το μητρικό αντίστοιχα. Πρέπει να τονίσουμε ότι στο δεύτερο σχήμα, πήραμε ως αναφορά τα R peaks του μητρικού ECG. Παρατηρούμε επίσης ότι η 3η συνιστώσα του πρώτου σχήματος και του δεύτερου σχήματος είναι το μητρικό και εμβρυακό ECG αντίστοιχα.



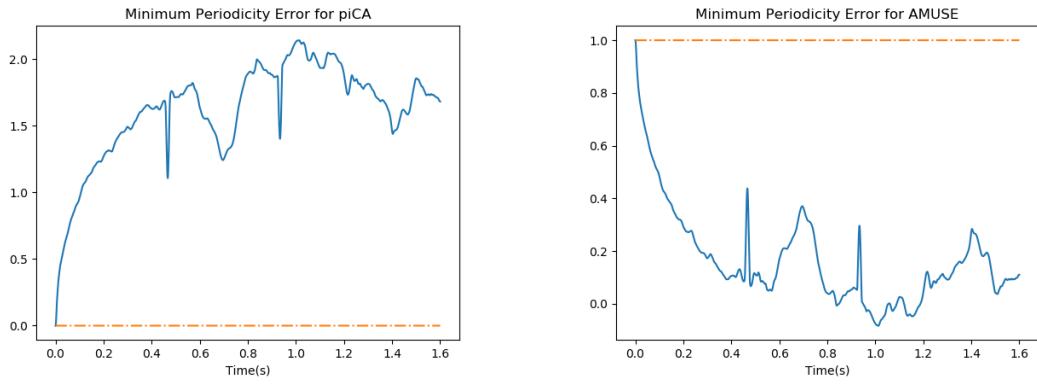
Σχήμα 5.24: Περιοδικές συνιστώσες για πCA με περιόδους $T_1 = 0.467\text{s}$ και $T_2 = 0.696\text{s}$

Στο σχήμα 5.25 φαίνονται οι περιοδικές συνιστώσες που εξάγονται μέσω AMUSE. Παρατηρούμε τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα με τον αλγόριθμο πCA.



Σχήμα 5.25: Περιοδικές συνιστώσες για AMUSE με περιόδους $T_1 = 0.467\text{s}$ και $T_2 = 0.696\text{s}$

Τέλος, στο σχήμα φαίνονται τα περιοδικά σφάλματα για τους αλγόριθμους πCA και AMUSE.



(a) Κανονική πCA

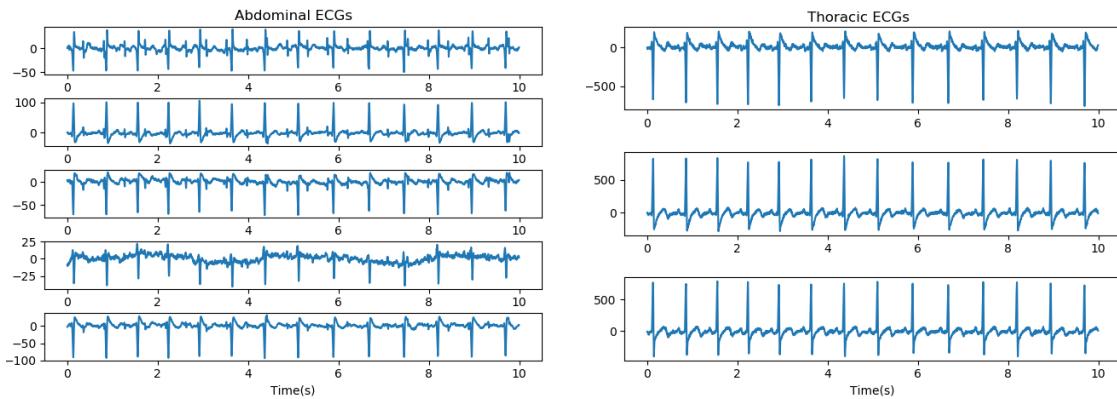
(b) AMUSE

Σχήμα 5.26: Τα ελάχιστα περιοδικά σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως 1.6 δευτερόλεπτα

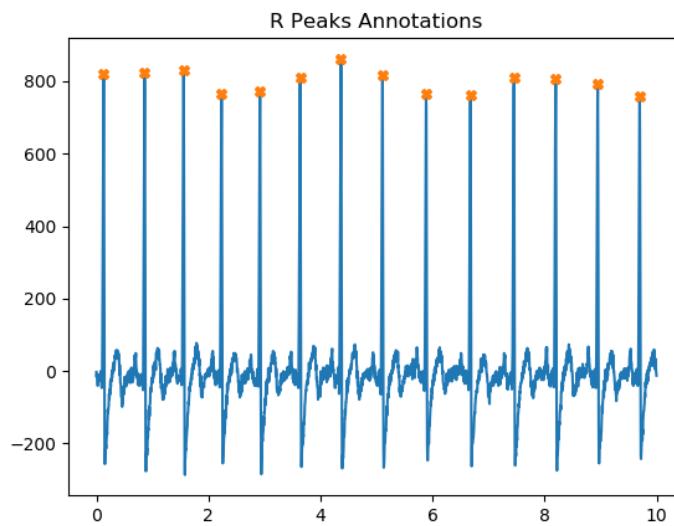
5.2.3 Πραγματικά Βιοσήματα - Περίπτωση 2

Η βάση δεδομένων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η DaISy [27] που περιέχει πολυκάναλες καταγραφές του δερματικού δυναμικού μιας εγκύου γυναίκας. Τα δεδομένα περιέχουν 5 καταγραφές γύρω από την κοιλιακή κοιλότητα της μητέρας και 3 θωρακικές καταγραφές που φαίνονται στο σχήμα 5.27. Τα σήματα έχουν δειγματοληφθεί ταυτόχρονα με ρυθμό δειγματοληψίας 250 Hz, έχουν διάρκεια 10 δευτερολέπτων και το πλάτος τους είναι σε mV. Τα σήματα είναι σε μορφή .dat με πρώτη στήλη τα δείγματα σε μορφή δευτερολέπτων ενώ οι υπόλοιπες στήλες τις παρατηρήσεις των ηλεκτροκαρδιογραφημάτων.

Ο σκοπός μας είναι, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, να αναγνωρίσουμε το εμβρυακό και το μητρικό ECG με μόνη διαφορά ότι το σήμα αναφοράς θα είναι ένα από τα θωρακικά ηλεκτροκαρδιογραφήματα των δεδομένων, συγκεκριμένα το μητρικό ECG. Άρα, οποιοδήποτε περιοδικό σήμα με διαφορετικά R peaks θα είναι το εμβρυακό.

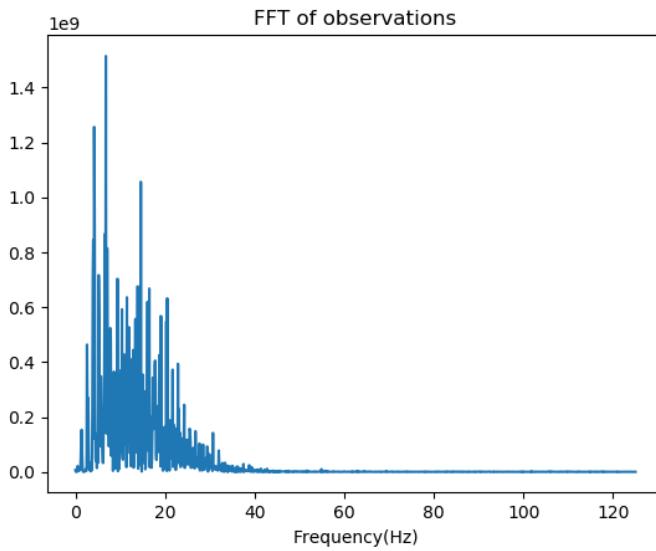


Σχήμα 5.27: Βάση δεδομένων DaISy



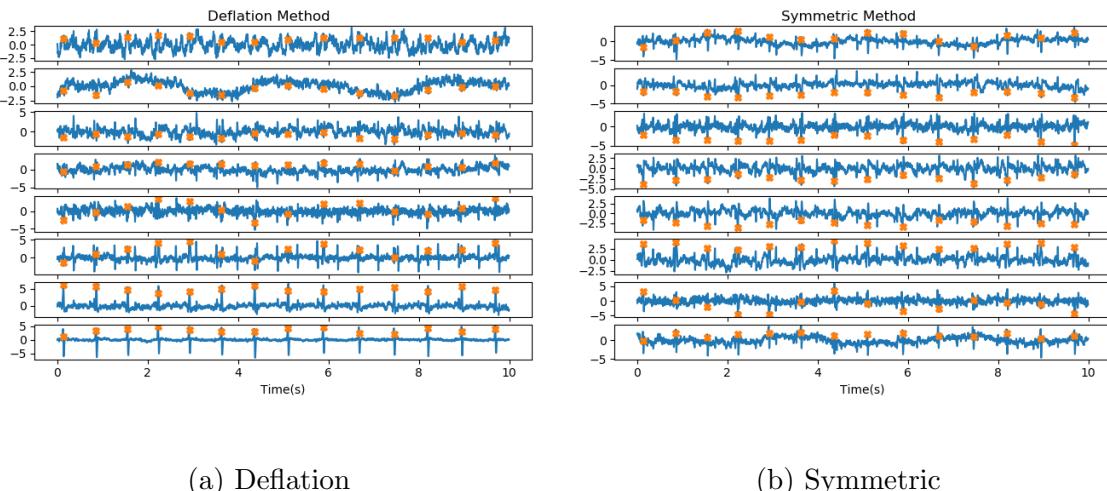
Σχήμα 5.28: Τα RR intervals του μητρικού ECG που λαμβάνονται από τον θώρακα

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εφαρμογή φίλτρου δεν φέρει μεγάλο αποτέλεσμα, καθώς όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.29, το φάσμα των παρατηρήσεων είναι γύρω από τις συχνότητες 1 Hz έως 20Hz. Οπότε καλούμαστε να εξάγουμε τις συνιστώσες ενδιαφέροντος υπό την παρουσία θορύβου.



Σχήμα 5.29: Συχνοτικό φάσμα των παρατηρήσεων

Στα σχήματα 5.30 α και 5.30 β φαίνονται οι ανεξάρτητες συνιστώσες για 'logcosh'. Παρατηρούμε ότι στην πρώτη εικόνα, τα σχήματα 7,8 αντιστοιχούν στο μητρικό ECG ενώ το 6 θυμίζει το εμβρυακό, ενώ στην δεύτερη εικόνα δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα.

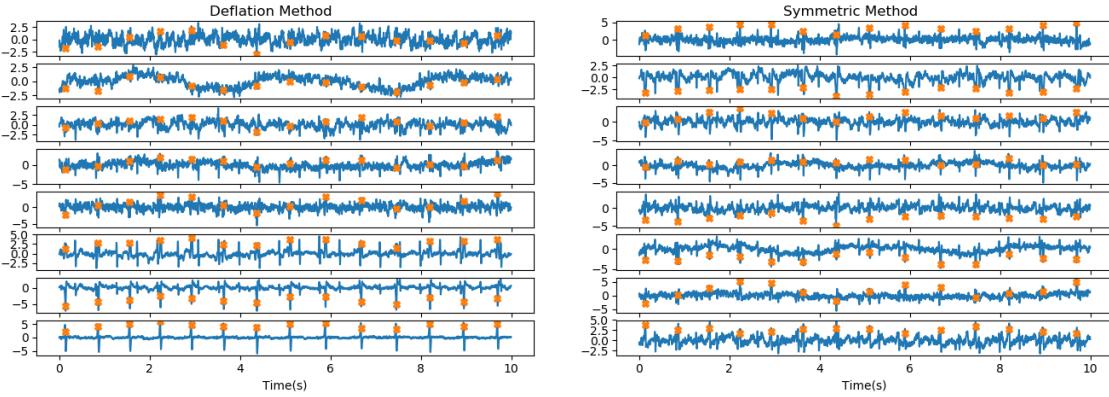


(a) Deflation

(b) Symmetric

Σχήμα 5.30: Αποτελέσματα για $g = \text{'logcosh'}$

Στα σχήματα 5.31 α και 5.31 β φαίνονται οι ανεξάρτητες συνιστώσες για 'exp'. Παρατηρούμε ότι στην πρώτη εικόνα, το σχήμα 8 αντιστοιχεί στο μητρικό ECG χωρίς να έχουμε βρει το εμβρυακό ενώ στην δεύτερη εικόνα δεν μπορούμε πάλι να βγάλουμε συμπεράσματα.

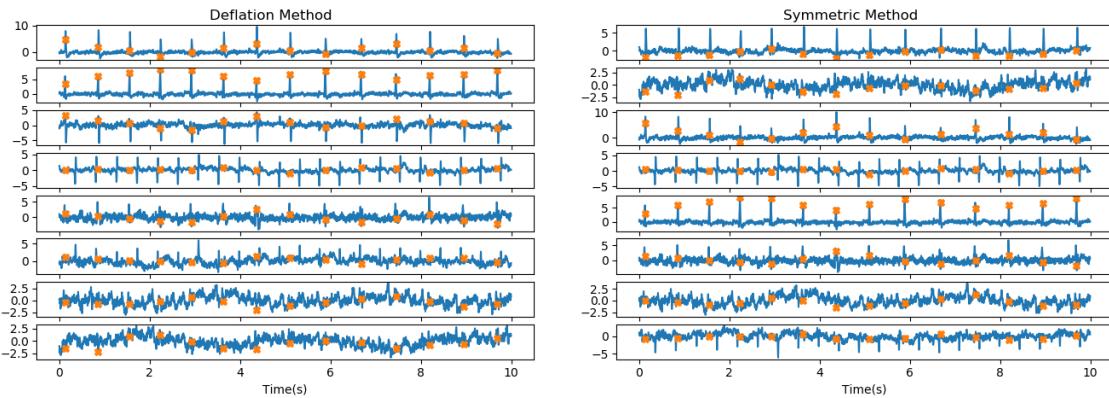


(a) Deflation

(b) Symmetric

$\Sigma\chi_5.31$: Αποτελέσματα για $g = \text{'exp'}$

Στα σχήματα 5.32α και 5.32β φαίνονται οι ανεξάρτητες συνιστώσες για 'cube'. Παρατηρούμε ότι στην πρώτη εικόνα, τα σχήματα 1, 2 και 3 αντιστοιχούν στο μητρικό ECG και το 4ο στο εμβρυακό, ενώ στην συμμετρική προσέγγιση, το 4ο σχήμα είναι το εμβρυακό και τα σχήματα 1, 3 και 5 το μητρικό. Βλέπουμε επιπλέον ότι ο αλγόριθμος FastICA δίνει αρχετά καλά αποτελέσματα με την χρήση της συνάρτησης x^3 .

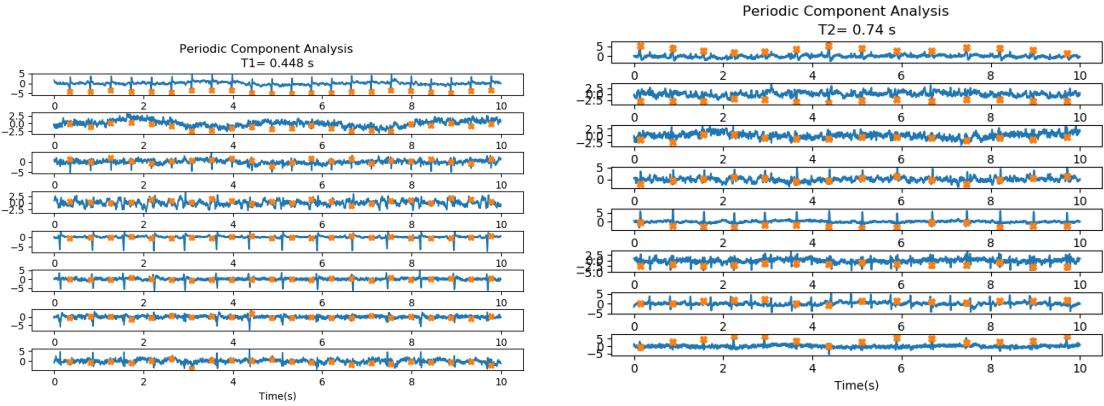


(a) Deflation

(b) Symmetric

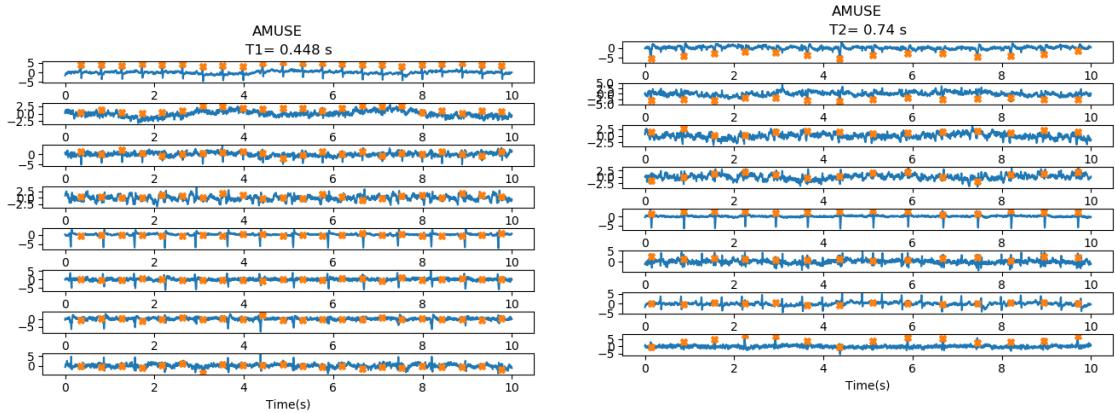
$\Sigma\chi_5.32$: Αποτελέσματα για $g = \text{'cube'}$

Στο σχήμα 5.33 φαίνονται οι περιοδικές συνιστώσες που εξάγονται από τον πCA. Η πρώτη γραφική παράσταση φανερώνει ως πρώτη συνιστώσα το εμβρυακό ηλεκτροκαρδιογράφημα με την αντίστοιχη περίοδο ενώ στο τέλος βλέπουμε το μητρικό. Αντίστοιχα, στην δεύτερη γραφική παράσταση, παρατηρούμε ότι το μητρικό ηλεκτροκαρδιογράφημα φαίνεται στην πρώτη θέση με την παρουσία θορύβου, όσο αφορά τα R peaks, αλλά και στην πέμπτη καθαρότερα, ακολουθώντας τα εμβρυακά. Αυτό το γεγονός μάλλον οφείλεται στην παρουσία θορύβου, όπως αναφέραμε παραπάνω, αλλά και στην ακρίβεια του βήματος που χρησιμοποιούμε ως timelag.



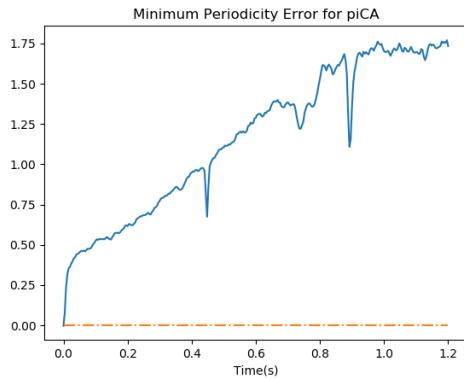
Σχήμα 5.33: Περιοδικές συνιστώσες για πCA με περιόδους $T_1 = 0.448\text{s}$ και $T_2 = 0.74\text{s}$

Αντίστοιχα, στο σχήμα 5.34 φαίνονται οι περιοδικές συνιστώσες που εξάγονται από τον AMUSE. Βλέπουμε τα ίδια ακριβώς ίδια αποτελέσματα με τον πCA.

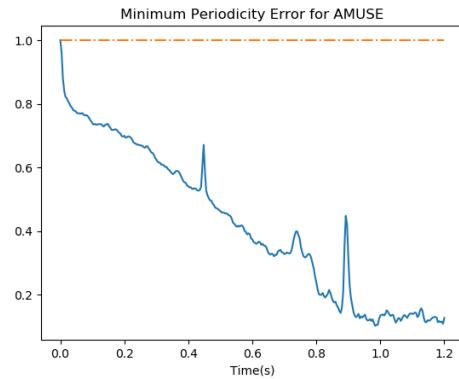


Σχήμα 5.34: Περιοδικές συνιστώσες για AMUSE με περιόδους $T_1 = 0.448\text{s}$ και $T_2 = 0.74\text{s}$

Τέλος, στο σχήμα 5.35 φαίνονται τα περιοδικά σφάλματα για τους παραπάνω αλγορίθμους.



(a) Κανονική πCA



(b) AMUSE

Σχήμα 5.35: Τα ελάχιστα περιοδικά σφάλματα για χρονική καθυστέρηση από 0 έως 1.2 δευτερόλεπτα

Όπως και με τα προηγούμενα σήματα, βλέπουμε ότι οι αλγόριθμοι πCA και AMUSE αναγνωρίζουν αρκετά καλά τα σήματα ενδιαφέροντος, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο FastICA.

5.2.4 Αξιολόγηση στην εξαγωγή βιοσημάτων

Για την αξιολόγηση των πραγματικών σημάτων [28], θα υπολογίσουμε την ακρίβεια - Accuracy και την ευαισθησία - Sensitivity στα αποτελέσματα που λάβαμε από τον πCA στα κεφάλαια 5.2.2 και 5.2.3. Εφόσον με τον αλγόριθμο πCA λαμβάνουμε την περιοδική συνιστώσα με ελάχιστο περιοδικό σφάλμα σε κάθε timelag, αρκεί μόνο να εξετάσουμε την πρώτη συνιστώσα για κάθε περίοδο.

Ος Sensitivity ορίζεται το ποσοστό των R peaks που αναγνωρίστηκαν σωστά από τον αλγόριθμο και ως Accuracy την συνολική ορθότητα της μεθόδου. Συγκεκριμένα:

$$\text{Sensitivity} = \frac{TP}{TP + FN} \quad (5.2.1)$$

$$\text{Accuracy} = \frac{TP}{TP + FN + FP} \quad (5.2.2)$$

όπου

- TP (True Positive) ο αριθμός των peak του εκάστοτε σήματος αναφοράς
- FN (False Negative) ο αριθμός των peak που παρέλειψε να αναγνωρίσει ο αλγόριθμος
- FP (False Positive) ο αριθμός των peak που αναγνώρισε εσφαλμένα ο αλγόριθμος

Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται τα ποσοστά των κριτηρίων των σχέσεων (5.2.1) και (5.2.2):

	Εμβρυακό ECG	Μητρικό ECG
Sensitivity	100 %	100 %
Accuracy	100 %	100 %

Πίνακας 5.3: Απόδοση του abfecg dataset

	Εμβρυακό ECG	Μητρικό ECG
Sensitivity	100 %	100 %
Accuracy	100 %	87.5 %

Πίνακας 5.4: Απόδοση του DaISy dataset

Στο abfecgdb dataset έχουμε 26 κορυφές για το εμβρυακό ECG και 18 κορυφές για το μητρικό, με τον αλγόριθμο να τις αναγνωρίζει όλες. Από την άλλη, στο DaISy dataset, έχουμε 26 κορυφές για το εμβρυακό, που αναγνωρίζονται όλες και 14 για το μητρικό, εκ των οποίων οι 2 αναγνωρίζονται εσφαλμένα.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Μελλοντική Έρευνα

Με τα αποτελέσματα των αλγορίθμων που παρουσιάσαμε και εκτελέσαμε στην παρούσα εργασία για τεχνητά και πραγματικά σήματα, μπορούμε να καταλήξουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Η υπόθεση ότι όλα τα σήματα έχουν περιοδική δομή, ιδιαίτερα όταν ασχολούμαστε με βιοσήματα, είναι 'ισχυρότερη' από την υπόθεση ότι όλα τα επιμέρους σήματα είναι ανεξάρτητα. Για αυτόν τον λόγο, ο αλγόριθμος πCA υπερισχύει του αλγορίθμου FastICA στην εξαγωγή συνιστωσών με περιοδική δομή.
2. Ο αλγόριθμος πCA είναι πιο αποδοτικός από άποψη χρόνου, καθώς απαιτείται μόνο ο υπολογισμός 3 πινάκων σε αντίθεση με τον επαναληπτικό αλγόριθμο σύγκλισης του FastICA.
3. Στον αλγόριθμο ICA δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε την σειρά των εξαγώμενων συνιστωσών σε αντίθεση με τον πCA, όπου οι εξαγώμενες συνιστώσες ταξινομούνται με βάση την περιοδικότητα τους.
4. Οι ιδιοτιμές που υπολογίζονται από την σχέση (4.1.10) αποτελούν ένα μέτρο της ύπαρξης θορύβου στις εξαγώμενες συνιστώσες και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κατώφλι για την απόρριψη ασήμαντων συνιστωσών. Με άλλα λόγια, εάν θεωρήσουμε κάθε απεριοδικό σήμα πηγής ως θόρυβο, η μέθοδος πCA μπορεί να ερμηνευτεί ως μετασχηματισμός που κατανέμει την διασπορά του θορύβου στις λιγότερο σημαντικές συνιστώσες. Με τον αλγόριθμο FastICA δεν μπορεί να επιτευχθεί αυτό καθώς αναζητεί τις πιο ανεξάρτητες και όχι τις πιο περιοδικές (λιγότερο θορυβώδεις) συνιστώσες.

Τέλος, μερικές προτάσεις για μελλοντική έρευνα είναι:

- η εύρεση μεθόδου συγχρονισμού των σημείων ενδιαφέροντος ώστε να μην υπάρχουν αλλαγές στην φάση των εξαγόμενων περιοδικών συνιστωσών και παρουσιάζονται ανεστραμμένες.
- η δημιουργία γραφικής διεπαφής (GUI) για την εύρεση και την αναπαράσταση περιοδικών συνιστωσών.
- η ανάπτυξη μεθόδων εύρεσης βέλτιστου βήματος για την χρονική καθυστέρηση με σκοπό τον βέλτιστο συνδυασμό ακρίβειας και ταχύτητας.
- η δυνατότητα επέκτασης των μεθόδων για πιο περίπλοκα συστήματα BSS.
- η εφαρμογή και σύγκριση των μεθόδων που παρουσιάστηκαν σε αυτή την εργασία και σε άλλα περιοδικά σήματα.

Παράρτημα A'

Κώδικες

Οι κώδικες είναι Python με χρήση των βιβλιοθηκών NumPy[29], SciPy[30] και matplotlib[31]. Γράφτηκαν στο Spyder IDE και υλοποιήθηκαν με την έκδοση 3.6.5

A.1 fastica.py

```
1 import numpy as np
2 from numpy import linalg as la
3 import preproc as prc
4 from deflational_method import ica_def
5 from symmetric_method import ica_sym
6
7 def fastica(X,n_comp=None,algorithm = 'deflation',whiten=True,fc = 'exp',alpha = 1.0,
8             max_it = 10000,tol = 10**-6,w_init = None):
9     ...
10
11    PARAMETERS:
12    X ( array p,n) : contains the observations measured on p variables
13    OPTIONAL:
14    n_comp (int) : number of components to extract
15    algorithm(string 'symmetric' or 'deflational') : FastICA solving method
16    whiten (bool) : do data whitening .If False , we assume that the data is already whiten
17    fc ( string 'logcosh'/'exp'/'cube') : form of G function for computing the negentropy
18    alpha (float) : only use for fc = 'logcosh' . Default is 1.0
19    max_it(int) : maximum iteration number
20    tol(float) : tolerance which the un-mixing matrix is considered that has converged
21    w_init ( array n_comp,n_comp) : initial values for un-mixing array
22
23    OUTPUTS:
24    K(array n_comp,p): pre-whitening matrix
25    W(array n_comp,n_comp): estimated un-mixing matrix
26    S(array p,n): estimated source signal matrix
27
28    ...
29    if (alpha < 1.0) or (alpha > 2.0) :
30        raise ValueError("alpha must be in [1,2]")
31
32    if type(fc) is str:
33        if fc == 'logcosh':
34            def g(x,alpha):
35                return np.tanh(x)
36            def gdot(x,alpha):
37                return alpha*(1 - (np.tanh(x))**2)
38        elif fc == 'exp':
39            def g(x,alpha):
40                return x*np.exp(-0.5*(x**2))
41            def gdot(x,alpha):
42                return np.exp(-0.5*(x**2))*(1-x**2)
43        elif fc == 'cube':
```

```

43         def g(x,alpha):
44             return x**3
45         def gdot(x,alpha):
46             return 3*x**2
47     else:
48         raise ValueError("Function does not included.")
49
50 sensors,samples = X.shape
51
52 if n_comp is None :
53     n_comp = int(min(sensors,samples))
54 elif (n_comp > min(sensors,samples)):
55     n_comp = min(sensors,samples)
56     print("Components to large.It was set",n_comp)
57
58 if whiten :
59     # Centering the columns / variables
60     X = prc.mean_remove(X,sensors,samples)
61     # Do the PCA algorithm and then the data whitening
62     eig,e = prc.pca_eig(X,n_comp)
63     Z,K = prc.data_whitening(X,eig,e)
64 else:
65     Z = X.copy()
66     K = None
67
68 if w_init is None:
69     # Choose random initial values
70     # ||w|| must be 1
71     w_init = np.random.normal(size = (n_comp,n_comp))
72 else:
73     w_init = np.asarray(w_init)
74     if w_init.shape != (n_comp,n_comp):
75         raise ValueError("Wrong Shape. The correct dimensions are",(n_comp,n_comp))
76
77 if algorithm == 'symmetric':
78     W = ica_sym(Z,n_comp,max_it,tol,g,gdot,w_init,alpha)
79 elif algorithm == 'deflation':
80     W = ica_def(Z,n_comp,max_it,tol,g,gdot,w_init,alpha)
81 else:
82     raise ValueError("Wrong Argument")
83 S_e = W@K@X
84 return K,W,S_e,Z

```

A.2 deflational method.py

```

1 import numpy as np
2 from numpy import linalg as la
3
4 def ica_def(X,comp,max_it,tol,g,gdot,w_init,alpha):
5     '''
6         PARAMETERS:
7             X(array p,n): "white" array of signals that we need to estimate
8             comp(int): independent components that we need to estimate
9             max_it(int): maximum iterations of algorithm running
10            tol(float): tolerance error that the algorithm converge
11            g(function): contrast function that we define on fast_ica function
12            gdot(function): contrast function that we define on fast_ica function
13            w_init(array p,p): initial weights array
14            alpha(float): parameter for g and gdot
15        OUTPUTS:
16            W(array p,p): estimated un-mixing matrix
17
18    NOTES:
19        We use deflational orthogonalization based on Gram-Schmidt method
20        for un-mixing matrix
21        '''
22
23    # prelocate un-mixing matrix
24    W = np.zeros((comp,comp) , dtype = np.float64)
25    p,n = X.shape
26    # We choose comp independed components to estimate
27    for i in range(comp):
28        # Choose an initial value and normalize it
29        w = w_init[i,:].copy()
30        w /= la.norm(w)
31
32        iterations = 0 ; lim = 1.01
33        # we set lim = 1.01 to be sure that the algorithm will run at least one time
34        while( (iterations < max_it -1 ) and (lim > tol ) ):
35            # Calculate w*X product in order to calculate g(w*X) and g'(w*X)
36            wtx = np.dot(w,X)[np.newaxis,:] # shape 1xn
37            gwtx = g(wtx,alpha) # shape 1xn
38            gdotwtx = gdot(wtx,alpha) # shape 1xn
39            # the first term of w1 computes the mean value for all the rows of X*g(wX).T (vector)
40            # and the second term computes the mean value of g'(wX) matrix (number)
41            w1 = (X@gwtx.T).mean(axis=1) - (np.mean(gdotwtx))*w # shape 1xp
42            #
43            Gram - Schmidt method:
44            After with estimate up vectors , we do the one unit algorithm for wp+1
45            and after every iteration step we subtract from wp+1 the projections
46            (wp+1*wj)wj j=1, ...,p of the previously estimated vectors
47            and then we normalize the wp+
48            ...
49            temp = np.zeros_like(w1)
50            for j in range(i):
51                wt = W[j,:].copy()
52                # Calculate sum{(w1*w)wj}
53                temp+= (w1@wt)*wt
54                w1-=temp
55                # Normalization
56                w1/=la.norm(w1)
57                # the algorithm converge when the inner product of W(k+1)
58                # and W(k) is close to 1. So we define lim as the absolute sum of the
59                # inner product w1 and w and we subtract it from 1
60                lim = np.abs(np.abs((w1*w).sum())-1)
61                w = w1 ; iterations+=1
62                W[i,:] = w
63                #
64                The algorithm ends if one of below coditions is fulfilled
65                i) The inner product of W(k+1) and W(K) is close to 1
66                ii) If it surpasses the maximum number of iterations
67                in the second , case the algorithm might not coveredg
68
69    return W

```

A.3 symmetric method.py

```

1 import numpy as np
2 from math import sqrt
3 from numpy import linalg as la
4
5 def ica_sym(X,comp,max_it,tol,g,gdot,w_init,alpha):
6     '''
7     PARAMETERS:
8     X(array p,n): "white" array of signals that we need to estimate
9     comp(int): independent components that we need to estimate
10    max_it(int): maximum iterations of algorithm running
11    tol(float): tolerance error that the algorithm converge
12    g(function): contrast function that we define on fast_ica function
13    gdot(function): contrast function that we define on fast_ica function
14    w_init(array p,p): initial weights array
15    alpha(float): parameter for g and gdot
16    OUTPUTS:
17    W(array p,p): estimated un-mixing matrix
18
19    NOTES:
20    We use symmetrical orthogonalization for the whole un-mixing matrix
21    ...
22    # We choose the initial matrix and we normalize that
23    W = w_init.copy()
24    W /= sqrt(sum(sum(W**2)))
25    # Orthogonalize through sqrt of W W.T matrix
26    # Compute eigenvalues of W@W.T
27    ew,Vw = la.eig(W@W.T)
28    # Make the diagonal matrix with the eigenvalues
29    D_sqrt = np.diag(1./np.sqrt(ew))
30    # Compute the square root of W W.T
31    sqrt_WWT = (Vw @ D_sqrt) @ Vw.T
32    # W = sqrt(WW.T) * W
33    W = sqrt_WWT @ W
34
35    # preallocate the correct un-mixing matrix
36    W1 = np.zeros_like(W,dtype = float)
37
38    iterations = 0 ; lim = 1.01
39    # we set lim = 1.01 to be sure that the algorithm will run at least one time
40    while((lim>tol) and (iterations < max_it -1)):
41        for i in range(comp):
42            w = W[i,:].copy()
43            w = w/la.norm(w)
44            # Calculate w*X product in order to calculate g(w*X) and g'(w*X)
45            wtx = np.dot(w,X) [np.newaxis,:]
46            gdotwtx = gdot(wtx,alpha) #shape 1xn
47            gwtx = g(wtx,alpha) #shape 1xn
48            # the first term of w1 computes the mean value for all the rows of X*g(wX).T (vector)
49            # and the second term computes the mean value of g'(wX) matrix (number)
50            w1 = np.mean(X.dot(gwtx.T),axis=1) - (np.mean(gdotwtx))*w #shape 1xp
51            W1[i,:] = w1
52        ...
53        After we compute all up vectors, we do the symmetric orthogonalization
54        with the square root General Eigvalue Decomposition of WW.T matrix
55        ...
56        # Same procedure as the beginning
57        ew1,Vw1 = la.eig(W1 @ W1.T)
58        D1_sqrt = np.diag(1./np.sqrt(ew1))
59        sqrt_W1W1T = (Vw1 @ D1_sqrt) @ Vw1.T
60        W1 = sqrt_W1W1T @ W1
61        # the algorithm converge when the inner product of W(k+1)
62        # and W(k) is close to identity matrix. So we define lim as the maximum element
63        # of W_new @ W_old.T - I_n
64        lim = np.max(np.abs(np.diag(np.dot(W1,W.T))-np.identity(comp)))
65        W = W1 ; iterations+=1
66
67 return W

```

A.4 piCA.py

```
1 import numpy as np
2 from misc import is_def
3 import preproc as pre
4 import CO_Ct ,C_e
5 import rayleigh_minimum as rm
6 import min_max
7
8 def piCA(X,f,minlag,maxlag,preproc = True,norm = True,amuse = False,circ = False) :
9     '''
10     PARAMETERS:
11     X (array nxm): mixed signals
12     f(float) : sampling frequency
13     minlag(float): minimum limit of time
14     maxlag(float): maximum limit of time
15     preproc(bool): must be true to preprocess the data(mean remove - data whitening)
16     norm(bool): if True, we do the normalization
17     amuse(bool): if True , we use AMUSE method
18     OUTPUTS:
19     Er(array k,1): Minimun periodicity error
20     K(array n,n): Whitenizing matrix
21     W(array k,n): Eigenvectors of local minimum eigenvalues
22     periods(list): Position(k) of local minima
23     Z(array n,m): Whiten data
24     '''
25     if (len(X.shape) != 1):
26         if X.shape[0] > X.shape[1] :
27             print("Signals must be represented be as rows of X array")
28             X = X.T
29         # n xm dimension of X array
30         sensors,samples = X.shape
31     else:
32         sensors,samples = 1,len(X)
33
34     # Check errors about time lag
35     if (minlag < 0) or (maxlag < 0):
36         raise ValueError("Lag values must be non-negative")
37     elif (minlag > samples) or (maxlag > samples):
38         raise ValueError("Lag values must be less than the observations")
39     elif (minlag > maxlag):
40         raise ValueError("Minimum Lag value must be less than Maximum Lag value")
41
42     # Check error about Sampling Frequency
43     if (f <= 0):
44         raise ValueError("Sampling Frequencyby be positive")
45
46     if ( not is_def(np.cov(X)) and preproc == True ):
47         print("Covariance matrix of X array must be positive in order to do data whitening")
48         print("preproc value is set to False")
49         preproc = False
50
51     # Check conditions for AMUSE algorithm
52     if (amuse == True and preproc == False):
53         raise ValueError("AMUSE need whiten data")
54
55     if (circ == True and preproc == False ):
56         raise ValueError("Circular piCA needs whiten data")
57
58     if (amuse == True and circ == True):
59         raise ValueError("Choose one of methods and then proceed")
60
61     if preproc:
62         X_0 = pre.mean_remove(X,sensors,samples)
63         # we will compute the same number of PCA components as the sensors
64         eig,v = pre.pca_eig(X_0,sensors)
65         Z,K = pre.data_whitening(X_0,eig,v)
66         # Covariance matrix of Z is I
67     else:
68         Z = X.copy()
```

```

69     K = None
70
71 # Choose time values for algorithm evaluation
72 k_max = int(maxlag*f); k_min = int(minlag*f)
73 print(k_max,k_min)
74 length_k = k_max - k_min + 1
75 if (length_k == 1):
76     k = [k_min] # k is list that has only one term
77 else:
78     # k is a list that has values in [minlag,maxlag]
79     k = [x for x in range(k_min,k_max+1)]
80 print("k length",len(k))
81
82 # Compute the C matrix. C has (sensors)x(sensors) dimension
83 C = Z@Z.T/(samples-1) # C matrix is semi-definitive
84 # We make the C matrix as symmetric as possible from (1)
85 print(C)
86 C = 0.5*(C+C.T)
87 print("C dimension",C.shape)
88
89 if not (amuse or circ):
90     CO,Ct = CO_Ct.compute(Z,k,norm)
91
92     if (not is_def(CO)) :
93         raise ValueError("CO matrix is not semi-definitive")
94     if (not is_def(Ct)) :
95         raise ValueError("Ct matrix is not semi-definitive")
96
97 # Compute Ce matrix = (Ct0 + Ct0.T)/2
98 Ce = C_e.compute(Z,k,amuse,circ,norm)
99
100 # Compute A matrix
101 A = np.zeros((len(k),sensors,sensors),dtype = np.float64)
102
103 for j in range(len(k)):
104     if (amuse or circ):
105         A[j,:,:] = Ce[j,:,:]
106     else:
107         A[j,:,:] = CO[j,:,:]+Ct[j,:,:]-2*Ce[j,:,:]
108
109 # Make A matrix as symmetric as possible from (1)
110 if not (amuse or circ):
111     for i in range(A.shape[0]):
112         A[i,:,:] = (0.5*(A[i,:,:]+A[i,:,:].T))
113
114 if (not is_def(A) and not (amuse or circ)) :
115     raise ValueError("A matrix is not semi-definitive")
116
117 # Find the eigenvalues with their matching eigvector that minimize
118 # the Rayleigh fraction ( $wT*A[k]*w)/(wT*C*w)$  for each k.
119 Er,Wr = rm.find(A,C,preproc,amuse,circ)
120
121 # Find the local minima/maxima through minimum eigenvalues and plot them
122 if (length_k != 1):
123     k_ideal_full = min_max.find(Er,k,amuse,circ)
124
125     if (k_ideal_full == []):
126         raise ValueError("Not found any periodic components")
127
128     # With below algorithm, we will only keep the basic periods by removing
129     # the multiples of them
130     k_ideal_full = [x+int(minlag*f) for x in k_ideal_full ]
131     k_ideal = []
132     for i in range(sensors):
133         k_ideal.append(k_ideal_full[0])
134         k_ideal_full = [ x if x%k_ideal_full[0] != 0 else 0.0 for x in k_ideal_full]
135         k_ideal_full = [ x for x in k_ideal_full if x!= 0.0]
136         if (k_ideal_full == []):
137             break
138     k_ideal = [ x-int(minlag*f) for x in k_ideal]
139     # use only for plotting

```

```

140     periods = [round((x)/f,3) for x in k_ideal]
141     # Preallocate un-mixing matrix
142     W = np.zeros((len(k_ideal),sensors,sensors) , dtype = np.float64)
143     # Save the matching eigenvectors of minimum/maximum positions
144     for kx in range(len(k_ideal)):
145         W[kx,:,:] = Wr[k_ideal[kx],:,:]
146
147 else:
148     W = Wr.copy() ; k_ideal = None
149     periods = [round(k[0]/f,3)]
150
151 return Er,K,W,periods

```

A.5 preproc.py

```

1 import numpy as np
2 from scipy import linalg as la
3
4 def mean_remove(X,rows,cols):
5     '''
6     PARAMETERS:
7     X(array rows,cols):array that needs its mean value removed from all observations
8     OUTPUTS:
9     X_tilde (array rows,cols):array with zero mean
10    '''
11    p,n = rows,cols
12    # We compute the mean value of the columns of X array and
13    # reshape in a px1 array (p = number of different signals)
14    mx = X.mean(axis=-1).reshape((p,1))
15    # remove the mean matrix(px1) from the signals
16    X_tilde = X - mx.dot(np.ones((1,n)))
17
18    # Check if mean of X_tilde is close to zero
19    mxt = X_tilde.mean(axis=-1).reshape((p,1))
20    if np.all(np.abs(mxt) > 10**(-7)):
21        raise ValueError("Mean remove has failed")
22
23    return X_tilde
24
25 def pca_eig(X,comp):
26    p,n = X.shape
27    if(comp > min(X.shape)):
28        print("Principal components must be less than signals")
29        comp = min(X.shape)
30    # Compute the covariance matrix of X
31    Cx = np.cov(X)
32    # e is the eigvector matrix where i-th column
33    # responds to i-th eigenvalue
34    e,V = la.eig(Cx)
35    # returns index sort in ascending order and reverse it
36    eig_sort = np.argsort(e)[::-1]
37    # re-arrange the vectors in the correct order
38    e,V = e[eig_sort] , V[:,eig_sort]
39    # keep the N first eigenvalues and eigvectors as given by components
40    e,V = e[:comp] , V[:,:comp]
41    return e,V
42
43 def data_whitening(X,e,V):
44    '''
45    PARAMETERS:
46    X(array p,n): array that will be whiten
47    e(array p,1): eigenvalues of X array that are sorted in descending order
48    V(array p,p): matrix that consists the right eigvectors that corresponds
49        on each eigenvalue
50    OUTPUTS:
51    Z(array p,n): array that has whitened
52    A(array p,p): whiten trasformation matrix
53
54    NOTES:
55    1) The white trasformation is reversible
56    2) Must perform after PCA algorithm
57    '''
58    # Compute D^(-1/2) matrix (D= diag(d1,...,dp))
59    D = np.diag(1./np.sqrt(e))
60    A = (np.real(V@D)).T
61    # A = D^(-1/2)*V.T
62    #print((V@D).T - D@V.T)
63    #A = np.real(D@V.T)
64    Z = np.real(np.dot(A,X))
65    return Z,A

```

A.6 is def.py

```
1  from scipy import linalg as la
2
3  def is_def(X,tol=-5*(10**-3)):
4      '''
5          PARAMETERS:
6          X (array p,n): array that will be checked if is positive semi-definitive
7          tol(float): tolerance of eigenvalue that will be considered non-negative
8
9          OUTPUTS:
10         True/False(boolean):True if X array is positive definitive.
11                 Else , False
12
13         An array is positive semi-definitive if all its eigenvalues are non-negative.
14         We implement Sylvester's criterion in order to deduce if a matrix is definitive
15         '''
16
17         count = 0
18         # For 3 dimension arrays
19         if ( len(X.shape) == 3):
20             Max = X.shape[0] ; n_of_pos = X.shape[1]
21             for i in range(Max):
22                 p = 0;
23                 for j in range(n_of_pos):
24                     size = X[i,j,j].shape
25                     if size == ():
26                         size = (1,1)
27                         # T is the ixi , i = 1,...,n matrix that we will compute its
28                         # minor determinant
29                         T = (X[i,j,j]).reshape((size[0],size[0]))
30                         if( la.det(T) > tol):
31                             p+=1
32                         if (p == n_of_pos):
33                             count+=1
34                         # if all minor determinants are positive, then X matrix is positive definite
35                         if (count >= Max-1):
36                             return True
37                         return False
38         else :
39             n_of_pos = X.shape[0]
40             for j in range(n_of_pos):
41                 size = X[j,j].shape
42                 if size == ():
43                     size = (1,1)
44                     # T is the ixi , i = 1,...,n matrix that we will compute its
45                     # minor determinant
46                     T = (X[j,j]).reshape((size[0],size[0]))
47                     if(la.det(T) > tol):
48                         count+=1
49                         # if all minor determinants are positive, then X matrix is positive definite
50                         if (count == n_of_pos):
51                             return True
51                         return False
```

A.7 C0/Ct.py

```

1 import numpy as np
2
3 def compute(X,k,norm):
4     '''
5         PARAMETERS:
6             X(array p,n): Array that contains the mixed signals
7             k(list): values from [k_min,k_max] (minlag,maxlag)
8             norm(boolean): If True , we normalize the output by multiplying with 1/(samples-k)
9             flag(character): '0' to compute CO array / 't' to compute Ct
10        OUTPUTS:
11            C(array k,p,n): CO/Ct array
12            ...
13
14    sensors,samples = X.shape
15
16    # We compute for each k the matrix below. Note that we must match the C[k]
17    # with k
18    L = len(k)
19
20    # Prelocate the CO or Ct matrix.
21    CO = np.zeros((L,sensors,sensors),dtype = np.float64)
22    Ct = np.zeros((L,sensors,sensors),dtype = np.float64)
23
24    # We will compute CO and Ct matrix using (2)
25    # CO[k-1] = CO[k] + X[m-k+1]*X[m-k+1])T
26    # Ct[k-1] = Ct[k] + X[k]*X[k])T
27    # for the non-normalized matrix CO and Ct
28    # In other words , we start from the max(k) value and we compute
29    # until the min(k) value
30    #'''
31    # First we compute the CO and Ct matrix for k = maxlag
32    x0 = X[:,:(samples-1)-k[-1]] ; CO[-1,:,:] = x0@x0.T
33    xt = X[:,k[-1]+1:(samples-1)] ; Ct[-1,:,:] = xt@xt.T
34
35    # We do the recursive algorithm about CO/Ct for k = maxlag-1,...,minlag
36    for i in range(L-1,0,-1):
37        x0 = X[:,(samples-1)-k[i]+1] ; x0 = x0.reshape((sensors,1))
38        CO[i-1,:,:] = CO[i,:,:] + x0@x0.T
39        xt = X[:,k[i]] ; xt = xt.reshape((sensors,1))
40        Ct[i-1,:,:] = Ct[i,:,:] + xt@xt.T
41
42    if norm:
43        for i in range(L):
44            CO[i,:,:] = CO[i,:,:] /((samples-1)-k[i])
45            Ct[i,:,:] = Ct[i,:,:] /((samples-1)-k[i])
46
47    # Make the matrix as symmetric as possible from (1)
48    for i in range(L):
49        CO[i,:,:] = 0.5*(CO[i,:,:]+CO[i,:,:].T)
50        Ct[i,:,:] = 0.5*(Ct[i,:,:]+Ct[i,:,:].T)
51
52    return Ct,CO

```

A.8 Ce.py

```
1 import numpy as np
2 from numpy import fft
3
4 def compute(X,k,amuse,circ,norm):
5     '''
6     PARAMETERS:
7     X(array p,n): Array that contains the mixed signals
8     k(list): values from [kmin,k_max] (minlag,maxlag)
9     amuse(boolean): If True , we do AMUSE nCA
10    circ(boolean): If True , we do circular nCA
11    norm(boolean): If True , we normalize the output by multiplying with 1/(samples-k)
12
13    OUTPUTS:
14    C(array k,p,n): Ce array
15
16    Ce[k] = 0.5*(Ct0[k]+Ct0[k].T)
17    We will use Fast Fourier Transform to compute Ce array
18    As we know , the elements of Ct0[k] are the cross-correlations between signals of
19    X array and we observed that it is the circular convolution of Xi with the
20    mirrored X for k = 0 , if we add zeros on both of signals so that we have
21    2*(samples)-1 samples
22    ...
23
24    sensors,samples = X.shape ; L = len(k)
25
26    def nextpow2(i):
27        n = 1
28        while (n < i):
29            n *= 2
30        return n
31
32    if circ:
33        fft_samples = samples
34    else:
35        fft_samples = 2^nextpow2(2*samples-1)
36
37    # Calculate the FFT of the rows of X array
38    Xf = fft.fft(X,fft_samples)
39    Xfc = Xf.conj()
40
41    # Calculate the DFT of the cross-correlation
42    Cs = np.empty( (int(0.5*sensors*(sensors+1)),fft_samples),dtype = np.float64); l = 0
43    for i in range(sensors):
44        for j in range(i,sensors):
45            # Compute F(cij) = Re[F{Xf(i}]*F{Xfc(j)}]
46            Cs[i*(sensors-1)+j-1,:] = np.real(Xf[i,:]*Xfc[j,:])
47            l+=1
48
49    # Compute the inverse FFT of cross correlation and keep only those that we need
50    Cs = fft.ifft(Cs) ; Cs = Cs[:, :samples]
51    Cs = Cs[:,k[0]:k[-1]+1]
52
53    Ce = np.zeros((L,sensors,sensors) , dtype=np.float64) ; m = 0
54    for i in range(sensors):
55        for j in range(i,sensors):
56            # Compute F(cij) = Re[F{Xf(i}]*F{Xfc(j)}]
57            Ce[:,j,i] = np.real(Cs[i*(sensors-1)+j-m,:])
58            if not(i==j):
59                Ce[:,i,j] = Ce[:,j,i]
60            m+=1
61
62    if norm:
63        for i in range(L):
64            Ce[i,:,:] = Ce[i,:,:] / (samples-1-k[i])
65
66    return Ce
```

A.9 Rayleigh Minimum.py

```
1 import numpy as np
2 from numpy import linalg as la
3
4 def find(A,C,preproc,amuse,circ):
5     '''
6         PARAMETERS:
7         A(array k,n,n): array that was computed on piCA
8         C(array n,n): array that was computed on piCA
9         preproc(boolean): True if data was preprocessed(mean removed - PCA - data whitening)
10        amuse(boolean): True if AMUSE method is used
11        OUTPUTS:
12        E(array k,1): eigenvalues that minimize Rayleigh fraction
13        W(array k,n): eigenvectors of above eigenvalues
14        '''
15        # We will find the smallest eigenvalue with the matching
16        # eigenvector for each k
17        sensors,sensors = C.shape ; L = A.shape[0]
18
19        # Preallocate the W and E matrix that will have the
20        # smallest eigenvalue and the matching eigenvector for each k
21        W = np.zeros((L,sensors,sensors),dtype = np.float64) # rows are eigenvectors transpose
22        E = np.zeros((L),dtype = np.float64)
23
24        for i in range(L):
25            # if data is preprocessed , the General Eigenvalue Problem
26            # becomes a simple Eigenvalue Problem from (8)
27            if (preproc):
28                e,w = la.eig(A[i,:,:])#right = False,left = True)
29            else:
30                e,w = la.eig(A[i,:,:],C,right = True)
31            # Find the ideal position of eigenvalues in descending order
32            # and the smallest value must be in 0-place
33            e_index = np.argsort(e)
34            if (amuse or circ):
35                e_index= e_index[::-1]
36            # Sort eigenvalues with the matching eigenvectors
37            e = e[e_index] ; w = w[:,e_index]
38            # Keep the smallest eigenvalue and matching eigenvector
39            # in row form
40            E[i] = np.real(e[0]) ; W[i,:,:] = np.real(w.T)
41        # return the smallest eigenvalues and eigenvectors for all k
42        return E,W
```

A.10 min/max.py

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 from scipy import signal
3
4 def find(Er,k,amuse,circ):
5     #print maximum eigenvalue in order to find the proper height
6     if not (amuse and circ):
7         print(max(Er))
8     # plot eigenvalues for first time in order to estimate
9     # the finding parameters
10    plt.plot(k,Er)
11    plt.waitforbuttonpress() ; plt.close()
12    # Give initial parameters in order to find local maxima
13    # height parameter gives a threshold on minimum height for eigenvalues
14    # Must be real positive value
15    h = input("Give the parameter for height: ")
16    # distance parameter express the distance between local maximas
17    # Must be integer value
18    d = input("Give the parameter for distance: ")
19    # width parameter is presented in order to separate spikes from real local maximas
20    # Must be integer value
21    w = input("Give the parameter for width: ")
22    while (h != "OK" and d != "OK" and w != "OK"):
23        peaks = []
24        if not (amuse^circ) :
25            # in normal nCA, we reverse eigenvalue matrix in order to find minima
26            E_m = - Er + max(Er)
27        else:
28            E_m = Er
29        #We find peaks of eigenvalues and plot them
30        peaks,_ = signal.find_peaks(E_m,height = float(h),distance = int(d) , width = int(w))
31        plt.plot(k,Er)
32        plt.plot(peaks,Er[peaks] , "o")
33        plt.waitforbuttonpress() ; plt.close()
34        # if we are satisfied with those values, we write OK in every parameter
35        h = input("Give the parameter for height: ")
36        d = input("Give the parameter for distance: ")
37        w = input("Give the parameter for width: ")
38    return peaks
```

A.11 period check correlation.py

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy import signal
4
5 def check(S,P,Fs,t):
6     '''
7     PARAMETERS:
8     S(array nxm): signals that produced from nCA algorithm
9     P(list): periods of signals that produced from nCA algorithm
10    Fs(float): sampling frequency of continuous signals
11
12    in this function , we find the peaks of autocorrelation for each signal produced on
13    nCA algorithm. Based on theory , the time difference of peaks give us the period of each signal.
14    If the difference is the same as the period of the signal , we deduce that our method is correct
15    '''
16    P_correct = []
17    for i in range(S.shape[0]):
18        # Remove the mean value of each signal
19        s_m = S[i,:] - np.mean(S[i,:])*np.ones((S.shape[1]))
20        # Compute the autocorrelation of signal
21        s = np.correlate(s_m,s_m,"full")
22        s = s[int(s.shape[0]/2):]
23        # Normalize the autocorrelation
24        s/=max(s)
25        # find the maximum peaks
26        peaks,_ = signal.find_peaks(s,height = 0.1,distance = 20,width=1)
27        # The time between autocorrelation spikes must be equal to the period
28        # of the signal
29        if (len(peaks) != 0):
30            print("Period of signal " + str(i+1)+ " is " + str(round((peaks[0])/Fs,3))+" seconds")
31            P_correct.append(peaks[0]/Fs)
32
33    return P_correct
```

Βιβλιογραφία

- [1] G. Strang, *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
- [2] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, 2000.
- [3] I.A.Κουτρουβέλης, *Εφαρμοσμένες Πιθανότητες και Στατιστική*. Εκδόσεις Συμετρία, 2011.
- [4] H. P. Hsu, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Probability, Random Variables and Random Processes*. The McGraw-Hill Companies, 1997.
- [5] I. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, 2nd Edition. Springer, 2002.
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier.
- [7] K. S. Agnan Kessy, Alex Lewin, “Optimal whitening and decorrelation,” *American Statistician 2018, Vol. 72, No. 4, pp. 309-314*.
- [8] <https://en.wikipedia.org/wiki/Heart>.
- [9] P. Iaizzo, *Handbook of cardiac anatomy, physiology, and devices*. Humana Press, 2005.
- [10] E. O. Aapo Hyvärinen, Juha Karhunen, *Independent Component Analysis*. John Wiley & Sons, 2001.
- [11] G. Naik, “An overview of independent component analysis and its applications,” *Informatica (Ljubljana)*, 2011.
- [12] B. M.V, “Σημειώσεις Στατιστικής 3,” *Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς*.
- [13] J. A. T. Thomas M. Cover, *Elements of Information Theory*, 2nd Edition. John Wiley & Sons, 2006.
- [14] A. Hyvarinen, “Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1999.
- [15] <https://www.csd.uoc.gr/~hy119/Schmidt.pdf>.
- [16] L. K. Saul and J. Allen, “Periodic component analysis: An eigenvalue method for representing periodic structure in speech.,” *NIPS*, 2000.

- [17] L. Tong, R. . Liu, V. C. Soon, and Y. . Huang, “Indeterminacy and identifiability of blind identification,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1991.
- [18] R. Sameni, C. Jutten, and M. B Shamsollahi, “Multichannel electrocardiogram decomposition using periodic component analysis,” *IEEE transactions on biomedical engineering*, 2008.
- [19] Ιωάννης Κατσιός, ‘Διαχωρισμός ψηφιακών σημάτων καρδιογραφίας στις περιοδικές συνιστώσες τους,’ *Πανεπιστήμιο Πατρών*, 2016.
- [20] A. I. Μάργαρης, *Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου*. Εξδόσεις Τζιόλα , 2015.
- [21] C. Pinheiro, “Arrhythmic ecg signals extraction by blind source separation,” *Elektronika ir Elektrotechnika*, 2010.
- [22] Association For The Advancement Of Medical Instrumentation, “Ansi/aami ec13 test waveforms,” 2002.
- [23] <https://www.physionet.org/physiotools/wfdb.html>.
- [24] J. Jezewski, A. Matonia, T. Kupka, D. Roj, and R. Czabanski, “Determination of fetal heart rate from abdominal signals: Evaluation of beat-to-beat accuracy in relation to the direct fetal electrocardiogram,” *Biomedizinische Technik/Biomedical Engineering*, 2012.
- [25] A. L. Goldberger, L. A. N. Amaral, L. Glass, J. M. Hausdorff, P. C. Ivanov, R. G. Mark, J. E. Mietus, G. B. Moody, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, “Physiobank, physiotoolkit, and physionet,” *Circulation*, 2000.
- [26] <https://physionet.org/physiobank/database/adfecgdb/>.
- [27] B.DeMoor, “Database for the identification of systems (daisy),”
- [28] R. Selva Kumari and L. Sherly, “Extraction of fetal ecg signal from abdominal and thoracic ecg signal using periodic component analysis,” *International Journal of Human Physiology*, 2012.
- [29] <http://www.numpy.org>.
- [30] <https://www.scipy.org>.
- [31] <https://matplotlib.org>.