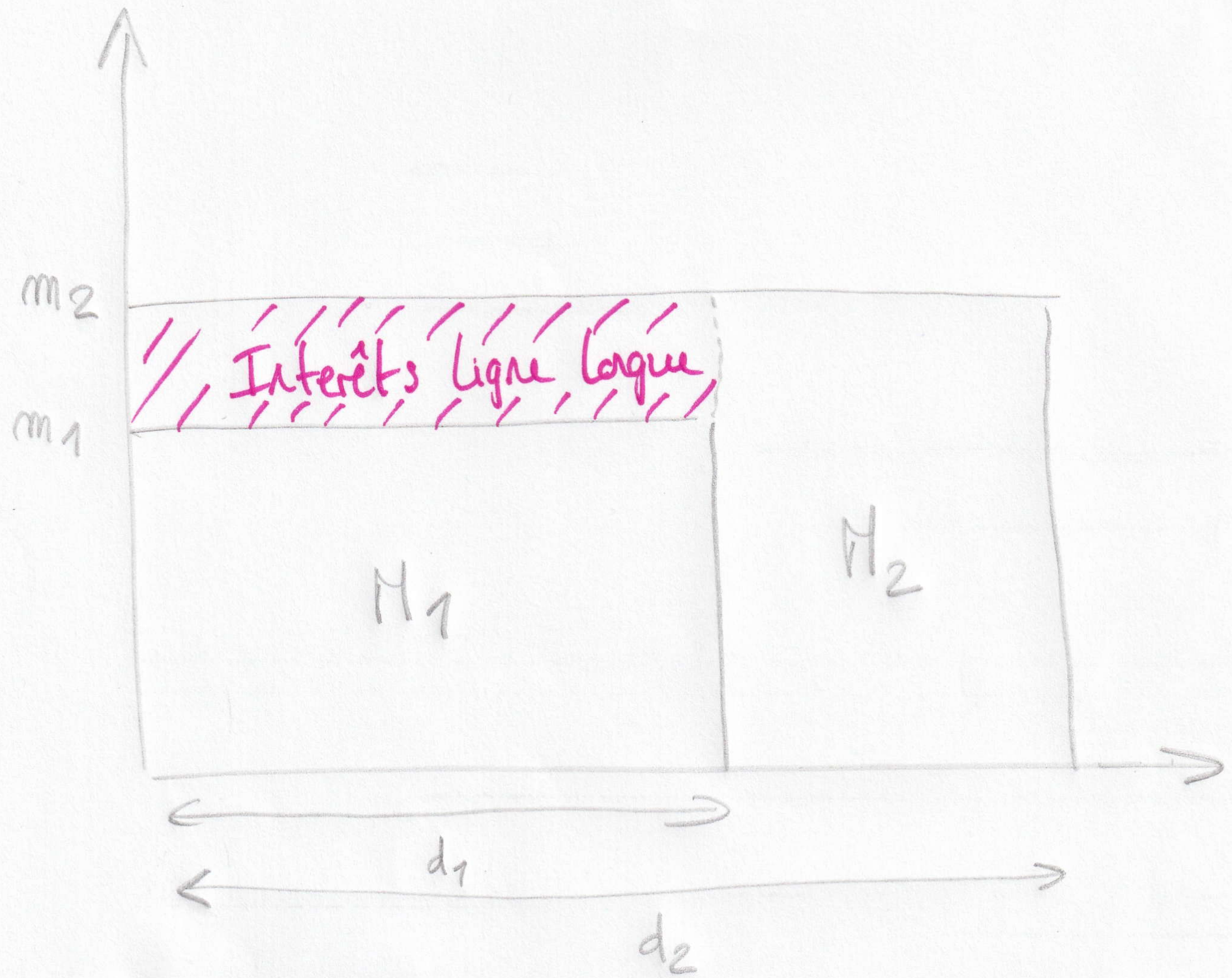


Reformulation

Maximiser $\frac{M_1}{M_1+M_2}$ tel que les intérêts de M_2 soient payés durant la période 1 sur la durée d_1. Cf aire violette

On cherche à maximiser $\dfrac{M_1}{M_1+M_2}$ et l'exprimer avec les données connues.

Données connues : d_1, t_1, d_2, t_2 (paramètres d'entrée).

M_1 est un prêt classique et vérifie

$$m_1 = M_1\,\rho(t_1, d_1) \quad \text{avec} \quad \rho(t,d) = \frac{t}{1-(1+t)^{-d}}$$

M_2 est un prêt supplémentaire et vérifie

$$m_2 = \left(M_2 + \frac{m_1}{\rho(t_2, d_1)}\right)\rho(t_2, d_2)$$

$$m_1 = M_1\,\rho(t_1, d_1) \iff M_1 = \frac{m_1}{\rho(t_1, d_1)}$$

$$m_2 = \left(M_2 + \frac{m_1}{\rho(t_2, d_1)}\right)\rho(t_2, d_2)$$

$$\iff \frac{m_2}{\rho(t_2, d_2)} = M_2 + \frac{m_1}{\rho(t_2, d_1)}$$

$$\iff M_2 = \frac{m_2}{\rho(t_2, d_2)} - \frac{m_1}{\rho(t_2, d_1)}$$

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{\dfrac{m_1}{\rho(t_1, d_1)}}{\dfrac{m_1}{\rho(t_1, d_1)} + \dfrac{m_2}{\rho(t_2, d_2)} - \dfrac{m_1}{\rho(t_2, d_1)}}$$

On se retrouve avec du m_1 et m_2, quantités inconnues. Compliqué à résoudre...

Tentons une autre piste.

On va chercher à calculer l'aire violette, elle devrait vérifier l'égalité suivante

$$(m_2 - m_1) d_1 = f(\text{Prêt } 2)$$

f étant la fonction qui définit l'ensemble des intérêts payés pour un prêt donné.

CF question 1, la quantité $f(\text{Prêt } 2)$ est calculable et connue ssi les paramètre d'entrée le sont aussi : M_2, t_2, d_2.
On connait t_2, d_2 mais pas M_2.
On peut essayer d'exprimer f qui définit la somme des intérêts mensuels et dégressifs d'un prêt au cours du temps.

Quelques traces de recherche :

$$f(M_2, t_2, d_2) = \sum_{d=0}^{d_2} \text{intérêt dégressifs (Prêt 2)}$$

intérêt degressif (Prêt 2) =

$M_{2_0} \times t_2$ à d_{2_0}, On note M_{2_0} le montant du prêt M_2 à rembourser au mois 0 de la durée d_2.

$M_{2_1} \times t_2$ à d_{2_1}, avec M_{2_1} exprimable via M_{2_0}

$$M_{2_1} = M_{2_0} - \left[M_{2_0}\, p(t_2, d_2) - M_{2_0} t_2\right] \; *$$

$$M_{2_1} = M_{2_0}\left(1 - p(t_2, d_2) + t_2\right)$$

* Le montant à rembourser à d_{2_1} est le montant M_{2_0}, à qui on enlève un mois de loyer m_{2_0} exprimé par $M_{2_0}\, p(t_2, d_2)$ à qui on enlève les intérêt $M_{2_0} t_2$ pour le mois 0.

On peut donc poser que

$$f(M_2, t_2, d_2) = \sum_{d=0}^{d_2} M_{2_d} t_2 = t_2 \sum_{d=0}^{d_2} M_{2_d}$$

avec $M_{2_0} = M_2$, le montant initial

et la suite $M_{2_{d+1}} = M_{2_d}\left(1 - p(t_2, d_2) + t_2\right)$

Ca ressemble de plus en plus à une série numérique... (Somme partielle d'ordre d_2)

Etant donné que M_{2_d} est une suite géométrique de raison $(1-\rho(t_2,d_2)+t_2)$

On peut utiliser le résultat sur les somme partielle d'ordre k pour une suite géométrique.

$$t_2 \sum_{d=0}^{d_2} M_{2_d} = t_2 \left(\frac{M_{2_0}(1-(1-\rho(t_2,d_2)+t_2))^{d_2+1}}{1-(1-\rho(t_2,d_2)+t_2)} \right)$$

On aurait donc

$$(m_2 - m_1)\, d_1 = t_2 \left(\frac{M_{2_0}\left[1-(1-\rho(t_2,d_2)+t_2)^{d_2+1}\right]}{1-\left[1-\rho(t_2,d_2)+t_2\right]} \right)$$

$$(m_2 - m_1)\, d_1 = M_2\, t_2 \left(\frac{\left[1-(1-\rho(t_2,d_2)+t_2)^{d_2+1}\right]}{1-\left[1-\rho(t_2,d_2)+t_2\right]} \right)$$

avec $m_2 = \left(M_2 + \dfrac{m_1}{\rho(t_2,d_1)}\right)\rho(t_2,d_2)$

et $m_1 = M_1\, \rho(t_1,d_1)$

$$\Longleftrightarrow \left[\left(M_2 + \frac{m_1}{\rho(t_2,d_1)}\right)\rho(t_2,d_2) - M_1\,\rho(t_1,d_1)\right] d_1$$

$$= M_2\, t_2 \left(\frac{\left[1-(1-\rho(t_2,d_2)+t_2)^{d_2+1}\right]}{1-\left[1-\rho(t_2,d_2)+t_2\right]} \right)$$

A partir de ce résultat, on peut tenter de retrouver la quantité $\dfrac{M_1}{M_1+M_2}$!!! ...

$$\Leftrightarrow d_1 \rho(t_2,d_2)\left(M_2 + \frac{m_1}{\rho(t_2,d_1)}\right) - d_1 M_1 \rho(t_1,d_1)$$
$$= M_2 t_2 \left(\frac{[1-(1-\rho(t_2,d_2)+t_2)^{d_2+1}]}{1-[1-\rho(t_2,d_2)+t_2]}\right)$$

$$\Leftrightarrow M_2 d_1 \rho(t_2,d_2) + \frac{m_1 d_1 \rho(t_2,d_2)}{\rho(t_2,d_1)} - d_1 M_1 \rho(t_1,d_1)$$
$$= M_2 t_2 \left(\frac{(1-X^{d_2+1})}{1-X}\right) \quad \text{avec } X = 1-\rho(t_2,d_2)+t_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d_1 \rho(t_2,d_2)}{t_2} + \frac{m_1 d_1 \rho(t_2,d_2)}{M_2 t_2 \rho(t_1,d_1)} - \frac{d_1 M_1 \rho(t_1,d_1)}{M_2 t_2}$$
$$= \frac{1-X^{d_2+1}}{1-X}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d_1 \rho(t_2,d_2)}{t_2} + \frac{M_1 \rho(t_1,d_1)\, d_1 \rho(t_2,d_2)}{M_2 t_2 \rho(t_1,d_1)} - \frac{d_1 M_1 \rho(t_1,d_1)}{M_2 t_2} = \frac{1-X^{d_2+1}}{1-X}$$

avec $m_1 = M_1 \rho(t_1,d_1)$ cf définition

$$\Leftrightarrow \frac{d_1 \rho(t_2,d_2)}{t_2} + \frac{M_1 d_1 \rho(t_2,d_2)}{M_2 t_2} - \frac{M_1 d_1 \rho(t_1,d_1)}{M_2 t_2}$$

$$= \frac{1 - X^{d_2+1}}{1 - X}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_2 d_1 \rho(t_2, d_2) + M_1 d_1 \rho(t_2, d_2) - M_1 d_1 \rho(t_1, d_1)}{M_2 t_2} = \frac{1 - X^{d_2+1}}{1 - X}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_1 \left(\frac{1}{M_1} M_2 d_1 \rho(t_2, d_2)\right) + d_1 \rho(t_2, d_2) - d_1 \rho(t_1, d_1)}{M_1 + M_2 \quad \frac{M_2 t_2}{M_1 + M_2}} = \frac{1 - X^{d_2+1}}{1 - X}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(\frac{\frac{1}{M_1} M_2 d_1 \rho(t_2, d_2) + d_1 \rho(t_2, d_2) - d_1 \rho(t_1, d_1)}{\frac{M_2 t_2}{M_1 + M_2}} \right) = \frac{1 - X^{d_2+1}}{1 - X}$$

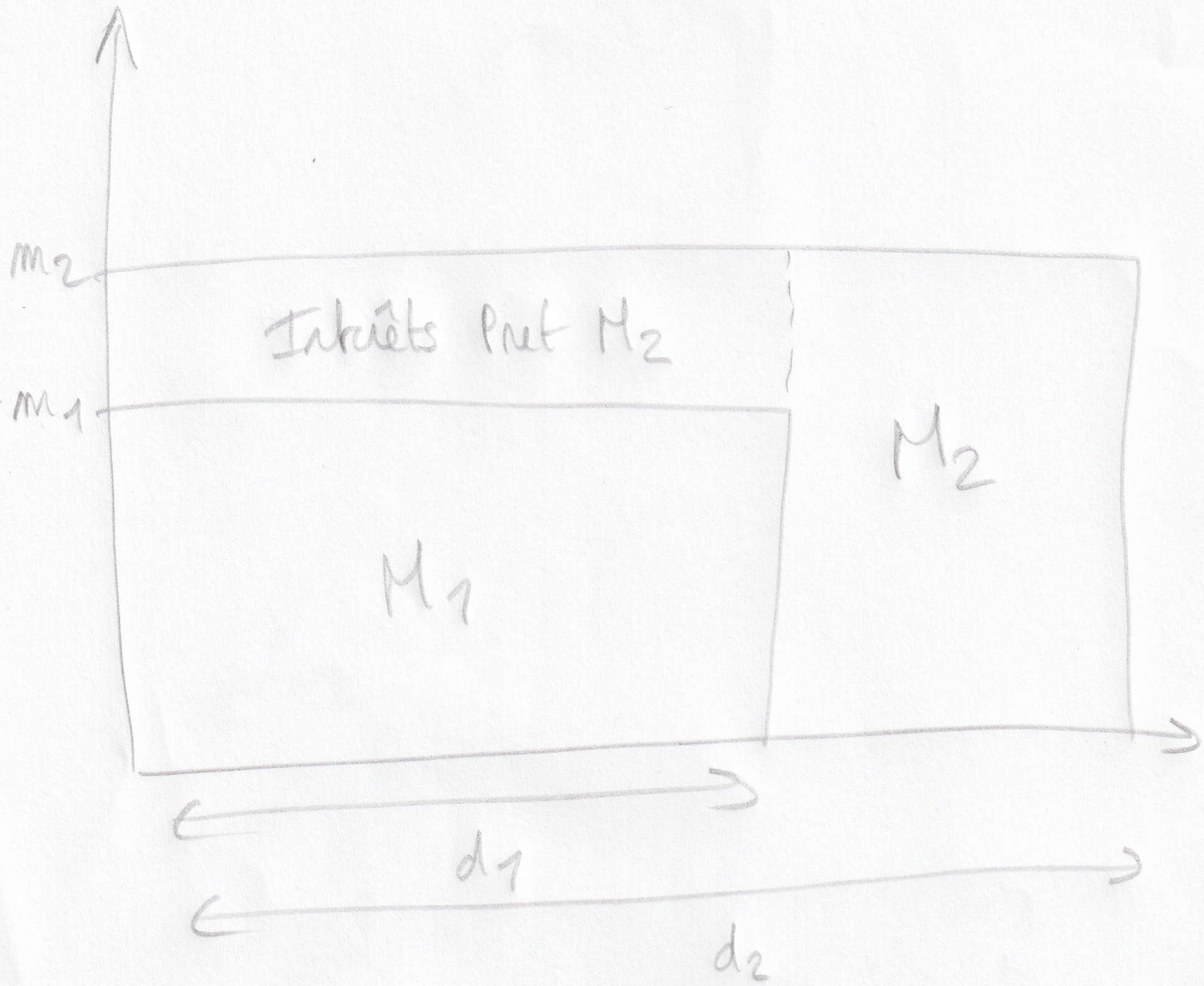
$$\Leftrightarrow \frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 + M_2}{M_2 t_2} \times \frac{1}{\frac{1}{M_1} M_2 d_1 \rho(t_2, d_2) + d_1 \rho(t_2, d_2) - d_1 \rho(t_1, d_1)} \times \frac{1 - X^{d_2+1}}{1 - X}$$

On ne peut exprimer le quotient

$$\frac{M_1}{M_1+M_2}$$

qu'en fonction de M_1 et M_2 ou m_1 et m_2 si on remplace dans l'équation. J'ai l'impression d'être sur une fausse piste qui me paraissait cohérente ...

On peut raisonner de manière purement géométrique



On peut utiliser une approche pas à pas.

Posons $m_1 \in]0;1[$ et $m_2 = 1 - m_1 \in]0;1[$

Alors $M_1 = m_1 d_1$ et $M_2 = (m_2 - m_1) d_1 + m_2 (d_2 - d_1)$

$$M_2 = m_2 d_1 - m_1 d_1 + m_2 d_2 - m_2 d_1$$

$$M_2 = -m_1 d_1 + m_2 d_2$$

$$M_2 = m_2 d_2 - m_1 d_1$$

Nous pouvons faire un algorithme qui pour chaque valeur de m_1 dans $]0;1[$ à 10^{-2} près, calcule $\frac{M_1}{M_1 + M_2}$ avec m_1 connu et m_2 connu. On retient la valeur max.

En usant de cette méthode de faire glisser m_1 sur l'axe des ordonnées ie $m_1 \in]0;1[$ et $m_2 = 1 - m_1$

Alors en appliquant les formules décrites dans le sujet :

$$m_1 = M_1 \times \rho(t_1, d_1) \Leftrightarrow M_1 = \frac{m_1}{\rho(t_1, d_1)}$$

$$m_2 = \left(M_2 + \frac{m_1}{\rho(t_2, d_1)}\right) \rho(t_2, d_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_2}{\rho(t_2, d_2)} = M_2 + \frac{m_1}{\rho(t_2, d_1)}$$

$$\Leftrightarrow M_2 = \frac{m_2}{\rho(t_2, d_2)} - \frac{m_1}{\rho(t_2, d_1)}$$

Alors on peut calculer le quotient $\frac{M_1}{M_1 + M_2}$ et conserver la valeur maximale de celui-ci.