Hermite interpoláció

Legyen adott a $x_0, x_1, ..., x_m$ csomópontrendszer, $x_i \in [a,b], i = \overline{0,m}$, az $r_i \in N, i = \overline{0,m}$ számok.
Legyen $n+1 = \sum_{i=0}^{m}(r_i+1)$ és az $f : [a,b] \to R$ függvény, amelyre $\exists\ f^{(j)}(x_i), i = \overline{0,m},\ j = \overline{0,r_i}$.

Értelmezés 1. *A P_n térre és a*
$\Lambda_H = \left\{\lambda_{ij}/\lambda_{ij}(f) = f^{(j)}(x_i), j = 0, ..., r_i,\ i = 0, 1, ..., m\right\}$ *funkcionálok halmazára vonatkozó interpolációs feladatot Hermite interpolációs feladatnak nevezzük.*

A Hermite interpolációs polinom a következő alakú

$$(H_nf)(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{r_i} h_{ij}(x)f^{(j)}(x_i) \tag{1}$$

A h_{ij} polinomokat fundamentális Hermite polinomoknak nevezzük.

$$h_{ij}(x) = \frac{(x-x_i)^j}{j!}u_i(x)\sum_{\nu=0}^{r_i-j}\frac{(x-x_i)^\nu}{\nu!}\left[\frac{1}{u_i(x)}\right]^{(\nu)}_{x=x_i},$$

A

$$f = H_nf + R_nf \tag{2}$$

képletet Hermite interpolációs képletnek nevezzük, ahol R_nf a maradéktag.
A Lagrange interpolációs polinom Newton alakját általánosítva írjuk fel a kétszeres csomópontú Hermite polinom osztott differenciás alakját.
Adottak az $x_i, i = \overline{0,m}$ csomópontok és $f(x_i), f'(x_i), i = \overline{0,m}$.
Tekintjük a $z_0, z_1, ..., z_{2m+1}$ kétszeres csomópontokat, ahol $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, i = \overline{0,m}$. A kétszeres csomópontú Hermite polinom felírásához megszerkesztjük a z_i csomópontoknak megfelelő osztott differencia táblázatot

$$\begin{array}{llll}
z_0 = x_0 & [z_0;f] = f(x_0) & & \\
z_1 = x_0 & [z_1;f] = f(x_0) & [z_0,z_1;f] = f'(x_0) & \\
z_2 = x_1 & [z_2;f] = f(x_1) & [z_1,z_2;f] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & [z_0,z_1,z_2;f] = \frac{[z_1,z_2;f]-[z_0,z_1;f]}{z_2-z_0} \\
z_3 = x_1 & [z_3;f] = f(x_1) & [z_2,z_3;f] = f'(x_1) & [z_1,z_2,z_3;f] = \frac{[z_2,z_3;f]-[z_1,z_2;f]}{z_3-z_1} \\
z_4 = x_2 & [z_4;f] = f(x_2) & [z_3,z_4;f] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & [z_2,z_3,z_4;f] = \frac{[z_3,z_4;f]-[z_2,z_3;f]}{z_4-z_2} \\
z_5 = x_2 & [z_5;f] = f(x_2) & [z_4,z_5;f] = f'(x_2) & [z_3,z_4,z_5;f] = \frac{[z_4,z_5;f]-[z_3,z_4;f]}{z_5-z_3}
\end{array}$$

Ennek alapján a kétszeres csomópontú Hermite polinom

$$\begin{aligned}
(H_{2m+1}f)(x) &= f(z_0) + (x-z_0)[z_0,z_1;f] + (x-z_0)(x-z_1)[z_0,z_1,z_2;f] + ... \\
&+ (x-z_0)...(x-z_{2m})[z_0,z_1,...,z_{2m+1};f],
\end{aligned}$$

Algoritmus az osztott differenciák kiszámításához:
Bemenet: $x_i, f(x_i), f'(x_i), i = 0, 1, ..., m$
Kimenet:$Q_{0,0}, Q_{1,1}, ..., Q_{2m+1,2m+1}$ együtthatók

$(H_{2m+1}f)(x) = Q_{0,0}+Q_{1,1}(x-x_0)+Q_{2,2}(x-x_0)^2+...+Q_{2m+1,2m+1}(x-x_0)^2...(x-x_{m-1})^2(x-x_m)$
1. Minden $i = 0, ..., m$ végezd el

$$z_{2i} = x_i, z_{2i+1} = x_i$$

$$Q_{2i,0} = f(x_i)$$

$$Q_{2i+1,0} = f(x_i), Q_{2i+1,1} = f'(x_i)$$

Ha $i \neq 0$

$$Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$$

2. Minden $i = 2, ..., 2m + 1$ végezd el
3. Minden $j = 2, 3, ..., i$ végezd el

$$Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}.$$

Feladat
1.Írjál egy függvényt a Hermite polinom értékének a kiszámítására, ha ismertek a csomópontok és a függvény értékei illetve deriváltjai a csomópontokban.
2. Ábrázold ugyanazon a grafikus képernyőn az f függvényt és a kétszeres csomópontú Hermite polinomát.
PÉLDA:

x_i	$f(x(i))$	$f'(x_i)$
1.3	0.6200860	-0.5220232
1.6	0.4554022	-0.5698959
1.9	0.2818186	-0.5811571

Ennek alapján

$$\begin{aligned} H_5(1.5) &= 0.6200860 + (1.5-1.3)(-0.5220232) + (1.5-1.3)^2(-0.897427) + \\ &+ (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)(0.0663657) + (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(0.0026663) + \\ &+ (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(1.5-1.9)(-0.0027738) = 0.5118277 \end{aligned}$$

1.3	0.6200860	-0.5220232	-0.0897427	0.0663657	0.0026663	-.0027738
1.3	0.6200860	-0.5489460	-0.0698330	0.0679655	0.0010020	
1.6	0.4554022	-0.5698959	-0.0290937	0.0685667		
1.6	0.4554022	-0.5786120	-0.0084837			
1.9	0.2818186	-0.5811571				
1.9	0.2818186					