

## Spline interpoláció

Legyen  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  az  $[a, b]$  intervallum egy felosztása.

ÉRTELMEZÉS 1. Az  $s_\Delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a  $\Delta$  felosztáshoz rendelt köbös másodrendű spline függvénynek nevezzük, ha

- $s_\Delta \in C^2[a, b]$
- az  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, n-1}$  intervallumok mindenikén  $s_\Delta$  egy harmadfokú polinom.

A köbös másodrendű spline függvény a következő feltételeknek kell eleget tegyen:

- (i.) minden egyes  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, n-1}$  részintervallumon egy harmadfokú polinom
- (ii.)  $s_\Delta(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$
- (iii.)  $s_\Delta(x_{i+1})|_{[x_{i+1}, x_{i+2}]} = s_\Delta(x_{i+1})|_{[x_i, x_{i+1}]}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-2$
- (iv.)  $s'_\Delta(x_{i+1})|_{[x_{i+1}, x_{i+2}]} = s'_\Delta(x_{i+1})|_{[x_i, x_{i+1}]}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-2$
- (v.)  $s''_\Delta(x_{i+1})|_{[x_{i+1}, x_{i+2}]} = s''_\Delta(x_{i+1})|_{[x_i, x_{i+1}]}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-2$

Teljesül valamely határfeltétel:

- (a.)  $s''_\Delta(x_0) = s''_\Delta(x_n)$ -természetes spline
- (b.)  $s'_\Delta(x_0) = f'(x_0)$ ,  $s'_\Delta(x_n) = f'(x_n)$ -teljes spline

Legyen  $Y = \{y_i | i = 0, \dots, n\}$  a függvényértékek és

$$h_{j+1} = x_{j+1} - x_j, j = 0, 1, \dots, n-1$$

illetve

$$M_j = s''_\Delta(x_j), j = 0, 1, \dots, n$$

amelyet a spline függvény momentumainak fogunk nevezni. Ekkor  $s''_\Delta$  az  $[x_j, x_{j+1}]$  intervallumon lineáris és  $s''_\Delta(x_j) = M_j$ ,  $s''_\Delta(x_{j+1}) = M_{j+1}$  és így

$$s''_\Delta(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_{j+1}}, x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Integrálva

$$s'_\Delta(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + A_j$$

és

$$s_\Delta(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(x - x_j) + B_j$$

ahol  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, n-1}$  és  $A_j, B_j$  meghatározandó állandók. Mivel  $s_\Delta(x_j) = y_j$  illetve  $s_\Delta(x_{j+1}) = y_{j+1}$

$$\begin{aligned} B_j &= y_j - M_j \frac{h_{j+1}^2}{6}, \\ A_j &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}^2}{6} (M_{j+1} - M_j) \end{aligned}$$

A spline függvény

$$s_{\Delta}(x) = \alpha_j + \beta_j(x - x_j) + \gamma_j(x - x_j)^2 + \delta_j(x - x_j)^3,$$

meghatározásához a következő együtthatókat kell meghatározni

$$\begin{aligned}\alpha_j &= y_j, \\ \beta_j &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{2M_j + M_{j+1}}{6}h_{j+1} \\ \gamma_j &= \frac{M_j}{2}, \\ \delta_j &= \frac{M_{j+1} - M_j}{6h_{j+1}}.\end{aligned}$$

Az együtthatók meghatározásához az  $M_j$  momentumok meghatározása szükséges. Mint láthattuk

$$s'_{\Delta}(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}^2}{6}(M_{j+1} - M_j),$$

kiszámítva ezek jobb és baloldali határértékét amikor  $x \rightarrow x_j$

$$\begin{aligned}s'_{\Delta}(x_j^-) &= \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{h_j}{6}M_{j-1} \\ s'_{\Delta}(x_j^+) &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1},\end{aligned}$$

de  $s'_{\Delta}(x_j^-) = s'_{\Delta}(x_j^+)$ , ahonnan

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_{j+1} + h_j}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, \quad (1)$$

$j = 1, 2, \dots, n-1$ . Az  $n-1$  egyenlet mellé még két egyenletet az (a.) illetve (b.) feltételekből kapunk:

-természetes spline függvény esetén

$$s''_{\Delta}(a) = s''_{\Delta}(b) = 0 \Rightarrow M_0 = M_n = 0$$

-teljes spline esetén

$$\begin{aligned}s'_{\Delta}(a) &= y'_0 \Rightarrow \frac{h_1}{3}M_0 + \frac{h_1}{6}M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \\ s'_{\Delta}(b) &= y'_n \Rightarrow \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n = y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}.\end{aligned}$$

(1) alapján

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, j = 2, \dots, n-1$$

ahol

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \mu_j = 1 - \lambda_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \\ d_j &= \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right)\end{aligned}$$

$j=1,2,\dots,n-1$ . A fenti feltételekből

(a.) esetben

$$\lambda_0 = 1, d_0 = 0, \mu_n = 1, d_n = 0 \text{ és így } \mu_0 = 0, \lambda_n = 0,$$

(b.) esetben

$$\lambda_0 = 1, d_0 = \frac{6}{h_1} \left( \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right), \mu_n = 1, d_n = \frac{6}{h_n} \left( y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right).$$

Az  $M_i$  momentumok meghatározásához a következő tridiagonális egyenletrendszert kell megoldani

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ 0 & \mu_2 & 2 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix}.$$

$\mu_j, \lambda_j$  csak az együtthatóktól függnének és  $\mu_j + \lambda_j = 1$ . A momentumok ismeretében meghatározzuk a  $A_j, B_j, j = \overline{0, n-1}$  állandókat is, így a  $s_\Delta$  függvény meg van határozva minden  $x \in [x_j, x_{j+1}]$  pontban,  $j = \overline{0, n-1}$ .

**Feladat** Ábrázoljuk az  $[a, b]$  intervallumon a  $\Delta$  felosztáshoz és  $Y$  értékekhez rendelt harmadfokú spline függvényt (a.) vagy (b.) esetben. Meg kell határozni az  $M_j$  értékeket (ehhez először meghatározzuk  $\mu_j, \lambda_j, d_j$ ) megoldva az egyenletrendszert (az egyenletrendszer mátrixát az *spdiags* függvény segítségével szerkeszthetjük meg), ezután az együtthatókat ajánlott külön függvényben megírni. Kiszámítjuk a közelítő értékeket adott vektorra attól függően, hogy mely  $[x_j, x_{j+1}]$  intervallumban vannak a pontok.

J.Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Springer, New York, 1996.