计算机91刘青帅第三次作业

> ## 通用下降方法之回溯直线搜索
>
> 作业：假设函数f是满足$mI \le \nabla^2 f(x) \le MI$的强凸函数。令$d$为$x$处的下降方向。证明对于
>
> $$0 < t \le -\frac{\nabla f(x)^\top d}{M\|d\|_2^2}$$
>
> 回溯终止条件能够满足。

已知:

- 假设：目标函数f在S上有上界，即存在$M > 0$使得$\forall x \in S$，有$\nabla^2 f(x) \le MI$
- $p^* \le f(x) - \frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|_2^2$

证明：$\forall x, y \in S$，存在$z \in [x, y]$，使得

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^\top \nabla^2 f(z)(y-x)$$

$$f(y) \le f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x) + \frac{M}{2}\|y-x\|_2^2$$

$\forall x \in S, mI \le \nabla^2 f(x)$

由已知得, $f(x+td) \le f(x) + \nabla f(x)^T td + \frac{M}{2} \parallel td\|_2^2$

带入$t = -\frac{\nabla f(x)^T d}{M\|d\|_2^2}$, 得到$f(x+td) \le f(x) - \frac{1}{2M} \parallel \nabla f(x)^T \parallel_2^2$——①

而$t\nabla f(x)^T d = -\frac{\|\nabla f(x)^T\|_2^2}{M}$, 故有$\parallel \nabla f(x)^T \parallel_2^2 = -Mt\nabla f(x)^T d$——②

将②代入①有$f(x+td) \le f(x) + \frac{1}{2}t\nabla f(x)^T d$——③

又因为d为下降方向, 故$\nabla f(x)^T d < 0$, 而$0 < \alpha < \frac{1}{2}$

故$f(x+td) \le f(x) + \frac{1}{2}\nabla f(x)^T d \le f(x) + \alpha t \nabla f(x)^T d$

所以证明成立