

渲染基础

段元兴

2019 年 6 月 18 日

Content

1	摘要	3
2	辐射度量学	3
2.1	辐射能量	3
2.2	辐射通量	3
2.3	辐照度	3
2.4	辐射强度	3
2.5	辐射率	3
3	光与物体表面的相互作用	4
3.1	双向反射分布函数	4
3.2	菲涅尔公式	4
4	光线与介质体的相互作用	5
4.1	介质体对光线的吸收	5
4.2	介质对光线的散射	5
5	渲染方程	5
6	一种计算辐射率的方法	5
6.1	蒙特卡洛积分法	6
6.1.1	投针法测圆周率	6
6.1.2	推广	6

1 摘要

作为图形学的基本问题,渲染一个场景到图片并非容易.这里将讨论渲染所需要的数学和物理基础. 真实世界的光学模型是空间中电磁波在真空和介质中的传播及其与介质相互作用,其中进入人眼的可见波段即为我们所见的光学世界.还有一种描述是用电磁波抽象出的“光线”或“光子”来表述电磁波的传播.由于直接去解电磁学方程来模拟这种模型十分麻烦,故一般采用光线描述来模拟.由此产生了光线追踪及其各种衍生的算法来计算真实光照.

2 辐射度量学

作为光学的一个分支,辐射度量学被用来衡量图形学中光的各种物理量.一般一根光线 (一个光子) 的衡量有其频率,能量,而大量光子则有通量等等概念.下面逐一介绍.

2.1 辐射能量

辐射能量 Q 也是能量的一种形式,即光能,所以其基本单位为 J .而对于单个光子的辐射能量:

$$Q = h\nu. \quad (1)$$

2.2 辐射通量

辐射通量 Φ 即为单位时间通过某截面的所有光子的能量的总和,其单位为 W .故可以定义:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}. \quad (2)$$

当然,光子不是无穷快的,若截面在移动,则其接收到的光子数会发生变化.但是一般情况的渲染基本上认为物体移动的速度远小于光速,故认为截面不变.

2.3 辐照度

辐照度 E 即为单位面积上的辐射通量.:

$$E = \frac{d\Phi}{dA}. \quad (3)$$

考虑这样一个情况:一束平行光垂直入射某个平面时其辐照度为 E_{\perp} ,当其以入射角 θ 射入另一个平面上时,由于辐射通量不变而面积变为 $\frac{A_{\perp}}{\cos \theta}$, 故:

$$E = E_{\perp} \cos \theta. \quad (4)$$

2.4 辐射强度

为了衡量某光源元(体光源,面光源或点光源)对特定方向的辐射强度,定义辐射强度:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}; \quad (5)$$

即该光源对某方向单位立体角的辐射通量.

2.5 辐射率

只有辐射强度并不足以描述一个光源的具体信息,例如这是个面光源,其上的各个面元的辐射强度各不相同,故定义辐射率:

$$L = \frac{dI}{dA} = \frac{dE}{d\omega} = \frac{d^2\Phi}{dAd\omega}. \quad (6)$$

定理:一束光线在传播的过程中辐射率不会改变:

$$L = L_0. \quad (7)$$

证明:设这束光线在传播了距离 r 的过程中垂直截面从 dA_1 扩张到 dA_2 .则1对2的辐射率

$$L_1 = \frac{r^2 d\Phi_{12}}{dA_1 dA_2}. \quad (8)$$

由于这个等式右侧关于1,2对称,故 $L_1 = L_2$,得证.

3 光与物体表面的相互作用

3.1 双向反射分布函数

现考虑一个小面元 $dA(\vec{r})$,设其自发光的辐射率是 $L(\vec{r}, \omega)$. 而设这个面元对入射光线的作用为: f ,即出射光线方向 ω_j 的辐射率 dL_j 为入射光线方向 ω_i 的单位立体角的垂直辐照度 dE_i 的 $f(\omega_i, \omega_j)$ 倍:

$$dL_j = f(\omega_i, \omega_j) dE_i = f(\omega_i, \omega_j) L_i \cos \theta_i d\omega_i. \quad (9)$$

这个函数被称为双向反射分布函数 (bidirectional reflectance distribution function, BRDF), 而物理限制了这个函数的一些性质:

1.赫姆兹互反律:

$$f(\omega_i, \omega_j) = f(\omega_j, \omega_i). \quad (10)$$

这个定律类似于光学中的光路可逆.

2.能量守恒:

$$\int_{\Omega} f(\omega_i, \omega_j) \cos \theta_i d\omega_i \leq 1 \quad (11)$$

3.2 菲涅尔公式

对于从某个折射率为1的介质1进入折射率为 n 的介质2的光线,设入射角为 i_0 , 折射角为 i_1 .设入射的辐照度为 dE_0 ,入射的辐射率为 L ,则:

$$dE_0 = \delta(i - i_0) L(\omega) \cos i d\omega. \quad (12)$$

积分可得:

$$\int_{\Omega} \delta(i - i_0) L(\omega) \cos i d\omega = E_0 \quad (13)$$

为总的入射辐照度,即:

$$L(\omega) = \frac{\delta(i - i_0) E_0}{2\pi \cos i}. \quad (14)$$

由菲涅尔公式可知,在自然光假设的条件下(所有偏振方向的振幅相同),其BRDF函数为:

$$f_r(\omega_0, \omega) = r \delta(i - i_0), \quad (15)$$

$$r = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\cos i_1 - n \cos i_0}{n \cos i_0 + \cos i_1} \right)^2 + \left(\frac{n \cos i_1 - \cos i_0}{\cos i_0 + n \cos i_1} \right)^2 \right].$$

对两边同时积分可得:

$$\int_{\Omega} L_r(\omega) \cos i d\omega = \int_{\Omega} f_r(\omega', \omega) L(\omega') \cos i d\omega = \int_{\Omega} r \delta(i - i_0) \frac{\delta(i' - i_0) E_0}{2\pi \cos i'} \cos i d\omega = r E_0 \quad (16)$$

为反射的总辐照度.

而现在则可以利用能量守恒来计算透射BRDF:

$$\int_{\Omega} L_t(\omega) \cos i d\omega = \int_{\Omega} f_t(\omega', \omega) L(\omega') \cos i d\omega = E_0 (1 - r). \quad (17)$$

而我们又可以假设 f_t 的形式为:

$$f_t(\omega', \omega) = t\delta(\omega' - \omega_0)\delta(\omega - \omega_1), \quad (18)$$

代入得:

$$\int_{\Omega} t\delta(\omega' - \omega_0)\delta(\omega - \omega_1) \frac{\delta(i' - i_0)E_0}{2\pi \cos i'} \cos id\omega = E_0(1 - r), \quad (19)$$

即:

$$t = \frac{\cos i_1}{\cos i_0}(1 - r). \quad (20)$$

4 光线与介质体的相互作用

4.1 介质体对光线的吸收

显然光线在介质中传播时会衰减,一般这个衰减比例是只和传播的距离和介质相关的,即我们可以假设:

$$dL = -\alpha L dx, \quad (21)$$

由此可以解得:

$$L = L_0 e^{-\alpha x}, \quad (22)$$

其中 x 为传播的距离, α 是与介质相关的衰减系数.

4.2 介质对光线的散射

介质中的光线不是一成不变的沿直线传播的,期间会与介质分子发生散射:瑞利散射和米氏散射等等.这里简化模型,仅仅考虑瑞利散射模型.

瑞利指出:在 $\frac{\lambda}{10}$ 量级的颗粒散射下,散射光强的分布如下:

$$I(\omega) \propto \omega^4(1 + \cos^2 \theta), \quad (23)$$

其中 ω 是光的角频率, θ 是散射角.于是在考虑光线在介质传播的时候可以将一部分光线散射出去进行计算以获取更真实的基于物理的渲染.

5 渲染方程

在大量的实践过程中,人们发现以面元作为基本图形元素能大量减少模拟所需要的计算量,于是基于面元的渲染方式时目前的主流,并将在很长一段时期内仍然时主流.

由此可以得出一般的渲染方程:

$$L_{\vec{r}_j}(\omega_j) = L_{e_j}(\omega_j) + \int_{\Omega} L_{\vec{r}_i}(\omega_i) f(\omega_i, \omega_j) \cos \theta_i d\omega_i. \quad (24)$$

当然若要实现基于物理的真实渲染,BRDF函数需要考虑以上的各种光与介质表面的相互作用,而且若是用路径追踪的方法来计算,还需要考虑光线在传播过程中与介质体的相互作用等等.

6 一种计算辐射率的方法

可以看出,渲染方程中的积分是对正半球空间立体角的积分.显然一般情况下我们不能直接获得任意方向 ω_i 上来自 \vec{r}_i 的辐射率 $L_{\vec{r}_i}(\omega_i)$ 关于 ω_i 的直接函数关系(但是这并不妨碍我们对某确定 ω_i 计算出该方向上的辐射率),因此需要用别的积分方式来间接计算这个值.联想到投针法来计算圆周率,很容易明白蒙特卡洛积分的一般思想.

6.1 蒙特卡洛积分法

6.1.1 投针法测圆周率

先来看看投针法计算圆周率.在区间 $I = [0, 1] \times [0, 1]$ 上有一个以1为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆周, 现在随机往 I 内部投针,若你均匀投针,则显然投进任意一个小区间 $dxdy$ 的概率为:

$$dp(x, y) = dxdy, \quad (25)$$

而若我们设一函数:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}, \quad (26)$$

若采样 N 次,第 i 次采样时的结果为 k_i , 则在区间 I 内在均匀投针时 g 的期望,也即对面积的期望(由于均匀投针)为:

$$E(g) = \frac{\int_I g(x, y) dp}{\int_I dp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{\pi}{4}, \quad (27)$$

便求出了 π .

但是还没结束,因为投针时你可能手残无法保证能均匀的投进 I ,所以实际上投进任意一个小区间 $dxdy$ 的概率为:

$$dp(x, y) = f(x, y) dxdy, \quad (28)$$

从而在区间 I 内在按照概率密度 $f(x, y)$ 投针时 g 的期望为:

$$E(g) = \frac{\int_I g(x, y) f(x, y) dxdy}{\int_I f(x, y) dxdy} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k'_i \neq \frac{\pi}{4}, \quad (29)$$

不符合我们需要计算面积的要求.

那么如何改进呢?假设你手抖的很有规律以至于可以通过某种方式获得 $f(x, y)$,则可以用如下方式消除手抖带来的影响:

取

$$h(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad (30)$$

则在区间 I 内在均匀投针时 h 的期望为:

$$E(h) = \frac{\int_I h(x, y) dxdy}{\int_I f(x, y) dxdy} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{k''_i}{f(x_i, y_i)} = \frac{\pi}{4}, \quad (31)$$

于是又可以愉快的计算 π 了!

6.1.2 推广

有了上面投针法的方法,我们可以推广到任何想要计算的积分!

对于某被积函数 $g(\vec{x})$,其在被积区间 V 上的积分为:

$$\int_V g(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{f(\vec{x}_i)}, \quad (32)$$

其中 $f(\vec{x}_i)$ 是第 i 次采样时在 \vec{x}_i 处的概率密度,满足:

$$\int_V f(\vec{x}) d\vec{x} = 1. \quad (33)$$