

# Experimento 02

## Pêndulo de Torção

F 229  
GRUPO 1

17 de Setembro, 2014

Integrantes:	Henrique Noronha Facioli	157986
	Guilherme Lucas da Silva	155618
	Beatriz Sechin Zazulla	154779
	Lucas Alves Racoci	156331
	Isadora Sophia Garcia Rodopoulos	158018

### 1 Resumo

Neste experimento, estudamos um pêndulo de torção, cujo período  $T$  é determinado pela equação:

$$T = \sqrt{\frac{8\pi I_0}{4Gr}} \quad (1)$$

Neste estudo, medimos variações de  $T$  em função do comprimento do fio  $L$ , que tem liberdade de torção, com o auxílio de um photogate ligado a um cronômetro inteligente, formulando assim um gráfico linearizado da equação acima, tomando os eixos  $L$  em função de  $T^2$ . Além disso, calculamos o momento de inércia  $I_0$  do conjunto de três cilindros, supondo que os três tinham a mesma densidade e usando as formulas de volume de cilindro e a massa que nos foi dada. A partir disso, calculamos o módulo de cisalhamento  $G$  do fio de Aço ASTM, porém não obtivemos o valor esperado dentro da faixa de erro, apesar de chegarmos bem perto.

### 2 Objetivo

Este experimento tem como objetivo estudar o comportamento de um pêndulo de torção e determinar o módulo de cisalhamento (com seu respectivo erro) do fio que o compõe. Um pêndulo de torção é uma estrutura que oscila em torno de um eixo que coincide com o fio que o suspende. Obtêm-se facilmente dados sobre o fio em questão, uma vez que grandezas relacionadas a ele, tais como seu módulo de cisalhamento  $G$ , ou módulo de torção, e raio  $r$  estão diretamente ligadas ao período de oscilação do pêndulo como mostra a seguinte equação:

Deste modo, a partir do cálculo do momento de inércia  $I_0$ , da medição do raio  $r$  e de diversos valores para o período  $T$ , tomando experimentalmente variados comprimentos  $L$  para o fio, obtêm-se o módulo de cisalhamento  $G$  do mesmo, tal como objetivado.

### 3 Procedimentos e coleta de dados

#### 3.1 Materiais utilizados

Foram utilizados os seguintes materiais para a execução do experimento:

1. Pêndulo de torção (fio de suspensão e peso metálico circular preso na ponta do fio);
2. Micrômetro;
3. Paquímetro;
4. Trena de precisão milimétrica;
5. Photogate;
6. Cronômetro inteligente;

### 3.2 Procedimento

De posse dos materiais, iniciamos o experimento aferindo as dimensões (raios e alturas) da estrutura pendular circular, utilizando o paquímetro, para que conseguíssemos determinar seu momento de inércia. A massa de tal estrutura nos foi dada já mensurada em laboratório. Em seguida, medimos o diâmetro do fio que suspendia o pêndulo com o micrômetro, a fim de determinar seu raio  $r$ .



Figura 1: Montagem do experimento

Conectamos o photogate ao cronômetro inteligente e iniciamos as medidas. Para cada, utilizávamos a trena de precisão milimétrica para determinar o comprimento  $L$  do fio que suspendia o pêndulo. Oscilávamos o pêndulo de torção por vinte vezes passando pelo photogate ligado ao cronômetro inteligente, que no modo “Pêndulo” nos dava o período de cada oscilação, usado nas equações deste movimento em função do comprimento  $L$  determinado. Esse processo se repetiu por cerca de seis medições, número que se mostrou satisfatório para a obtenção dos dados.

Tabela 1: Valores de medidas do periodo  $T$  para cada comprimento  $L$  do fio

	$L_1$	$\Delta_{L_1}$	$L_2$	$\Delta_{L_2}$	$L_3$	$\Delta_{L_3}$	$L_4$	$\Delta_{L_4}$	$L_5$	$\Delta_{L_5}$	$L_6$	$\Delta_{L_6}$
cline2-13	0,358	0,001	0,203	0,001	0,258	0,001	0,464	0,001	0,398	0,001	0,589	0,001
N	$T_{1n}$	$\Delta_T$	$T_{2n}$	$\Delta_T$	$T_{3n}$	$\Delta_T$	$T_{4n}$	$\Delta_T$	$T_{5n}$	$\Delta_T$	$T_{6n}$	$\Delta_T$
1	4,7766	0,0001	3,6408	0,0001	4,0712	0,0001	5,4234	0,0001	5,0419	0,0001	6,0831	0,0001
2	4,7731	0,0001	3,6423	0,0001	4,0704	0,0001	5,4212	0,0001	5,0403	0,0001	6,0804	0,0001
3	4,774	0,0001	3,6422	0,0001	4,0732	0,0001	5,4228	0,0001	5,0417	0,0001	6,0824	0,0001
4	4,7746	0,0001	3,6432	0,0001	4,074	0,0001	5,4228	0,0001	5,0429	0,0001	6,0797	0,0001
5	4,7737	0,0001	3,6395	0,0001	4,0726	0,0001	5,4229	0,0001	5,0417	0,0001	6,0856	0,0001
6	4,7748	0,0001	3,6397	0,0001	4,0726	0,0001	5,4209	0,0001	5,0439	0,0001	6,0816	0,0001
7	4,7754	0,0001	3,6396	0,0001	4,0734	0,0001	5,4214	0,0001	5,0426	0,0001	6,0806	0,0001
8	4,7747	0,0001	3,6415	0,0001	4,0735	0,0001	5,4221	0,0001	5,0423	0,0001	6,0822	0,0001
9	4,7755	0,0001	3,6412	0,0001	4,0729	0,0001	5,4225	0,0001	5,0423	0,0001	6,0814	0,0001
10	4,7755	0,0001	3,6407	0,0001	4,0735	0,0001	5,4215	0,0001	5,0425	0,0001	6,0796	0,0001
11	4,7763	0,0001	3,6389	0,0001	4,0724	0,0001	5,4223	0,0001	5,0435	0,0001	6,0829	0,0001
12	4,7772	0,0001	3,6392	0,0001	4,0726	0,0001	5,4218	0,0001	5,0426	0,0001	6,081	0,0001
13	4,7765	0,0001	3,6402	0,0001	4,0675	0,0001	5,4207	0,0001	5,0434	0,0001	6,0802	0,0001
14	4,7776	0,0001	3,6402	0,0001	4,0692	0,0001	5,4212	0,0001	5,0433	0,0001	6,079	0,0001
15	4,7763	0,0001	3,6404	0,0001	4,0647	0,0001	5,4241	0,0001	5,0445	0,0001	6,0839	0,0001
16	4,7764	0,0001	3,6389	0,0001	4,0644	0,0001	5,4241	0,0001	5,0443	0,0001	6,0814	0,0001
17	4,7768	0,0001	3,6446	0,0001	4,0631	0,0001	5,4215	0,0001	5,0449	0,0001	6,0816	0,0001
18	4,7752	0,0001	3,6412	0,0001	4,065	0,0001	5,4215	0,0001	5,0433	0,0001	6,0805	0,0001
19	4,7754	0,0001	3,6415	0,0001	4,0677	0,0001	5,4208	0,0001	5,0442	0,0001	6,0802	0,0001
20	4,7756	0,0001	3,6421	0,0001	4,062	0,0001	5,4234	0,0001	5,0442	0,0001	6,0804	0,0001

Tabela 2: Valores de medidas do fio obtidas utilizando um manômetro

Raio do fio ( $m$ )	0,000275
$\Delta_r$	0,000005

## 4 Análise e Resultados

### 4.1 Momento de Inércia

Para calcular o  $I_0$  precisamos calcular o momento de inércia  $I_n$  de cada um dos cilindros componentes, e para isso tivemos que supor que os cilindros têm a mesma densidade assim pudemos usar a equação:

$$M_k = dV_k = \frac{V_{total}}{M_{total}} V_k \quad (2)$$

Onde:

- $M_k$  é a massa do k-ésimo cilindro;
- $V_{total}$  é a soma dos volumes de cada disco;
- $M_{total}$  é a massa dos tres cilindros juntos, e nos foi fornecido, velendo  $1,1774 \pm 0,0001$ ;
- $d$  é a densidade;
- $V_k$  é o volume do k-ésimo disco, dado por  $V_k = (2\pi R_k) * h_k$ ;

O erro para essas equações também foi calculado:

Para o cálculo do erro volumétrico:

$$\sigma_V^2 = (2\pi R h)^2 (\sigma_R)^2 + (\pi R^2)^2 (\sigma_h)^2 \quad (3)$$

Para o cálculo do erro do volume total  $V_t$  dos 3 discos

$$\sigma_{V_t}^2 = \sigma_{V_1}^2 + \sigma_{V_2}^2 + \sigma_{V_3}^2 \quad (4)$$

Para o cálculo do erro do momento de inércia  $I_0$

$$\sigma_{I_0}^2 = \left(\frac{R^2}{2}\right)^2 (\sigma_{V_1})^2 + (MR^2)^2 (\sigma_R)^2 \quad (5)$$

Todos os resultados são expressos nas seguintes tabelas:

Tabela 3: Características gerais do cilindro de maior tamanho

	Raio ( $m$ )	Altura ( $m$ )	Volume ( $m^3$ )	Massa ( $Kg$ )	Momento Inércia ( $Kg*m^3$ )
Medida	0,04990	0,01230	0,0000962	0,814	0,001013
Erro	0,00003	0,00005	0,0000004	0,005	0,000006

Tabela 4: Características gerais do cilindro de tamanho médio

	Raio ( $m$ )	Altura ( $m$ )	Volume ( $m^3$ )	Massa ( $Kg$ )	Momento Inércia ( $Kg*m^3$ )
Medida	0,04000	0,007900	0,0000397	0,336	0,000269
Erro	0,00003	0,00007	0,0000004	0,003	0,000003

Tabela 5: Características gerais do cilindro de menor tamanho

	Raio ( $m$ )	Altura ( $m$ )	Volume ( $m^3$ )	Massa ( $Kg$ )	Momento Inércia ( $Kg*m^3$ )
Medida	0,01005	0,0102	0,00000324	0,0274	0,00000138
Erro	0,00003	0,0001	0,00000004	0,0003	0,00000002

A partir desse dados, foi possível calcular o Momento de Inércia  $I_0$  total:

$$I_0 \pm \sigma_{I_0} = (1,284 \pm 0,006) * 10^{-3} Kg * m^2$$

## 4.2 Módulo de Cisalhamento

Para obter o módulo de cisalhamento  $G$  através da equação ??, primeiro tivemos que linearizar a equação:

$$T^2 = \frac{8\pi I_0 L}{Gr^4} \Leftrightarrow T^2 Gr^4 = 8\pi I_0 L \Leftrightarrow \underbrace{L}_y = \underbrace{\frac{Gr^4}{8\pi I_0}}_a * \underbrace{T^2}_x \quad (6)$$

Para isso escolhemos  $y = L$  e  $x = T^2$ , assim a relação entre o módulo de cisalhamento e o coeficiente angular a ficam assim:

$$a = \frac{Gr^4}{8\pi I_0} \Leftrightarrow G = \frac{a8\pi I_0}{r^4} \quad (7)$$

Onde:

- $I_0 = \sum_{k=1}^3 (I_k)$  é o momento de inércia total, soma dos momentos de inércia de todos os cilindros, já que todos estão girando no mesmo eixo;
- $R$  é o raio do cilindro;
- $a$  é o coeficiente linear do gráfico  $LxT^2$ ;

Para obter o coeficiente angular, aplicamos o método dos mínimos quadrados utilizando os dados da Tabela ??, calculando-se o desvio padrão, o erro estatístico, juntando com o erro instrumental e já propagando o erro de  $T$  para  $T^2$  com a fórmula  $\sigma_{T_m^2}^2 = 2\overline{T_m}\sigma_{T_m}$ , em que  $\overline{T_m}$  é a média dos  $n$   $T$ 's da Tabela ??. A partir desses dados foi possível montar a Tabela 6 e traçar o gráfico ilustrado na Figura 2.

Tabela 6: Dados para a construção do gráfico

$M$	1	2	3	4	5	6
$L(x10^{-1}m)$	$(3,58 \pm 0,01)$	$(2,03 \pm 0,01)$	$(2,58 \pm 0,01)$	$(4,64 \pm 0,01)$	$(3,98 \pm 0,01)$	$(5,89 \pm 0,01)$
$T^2(x10s^2)$	$(2,28 \pm 0,03)$	$(1,326 \pm 0,004)$	$(1,66 \pm 0,03)x10$	$(2,94 \pm 0,01)$	$(2,54 \pm 0,09)$	$(3,70 \pm 0,01)x10$

Usado Método dos mínimos quadrados, obtêm-se a fórmula:

$$\underbrace{L}_y = \underbrace{(1,622 \pm 0,005) * 10^{-2}}_a * \underbrace{T^2}_x + \underbrace{(-1,2 \pm 0,1) * 10^{-2}}_b \quad (8)$$

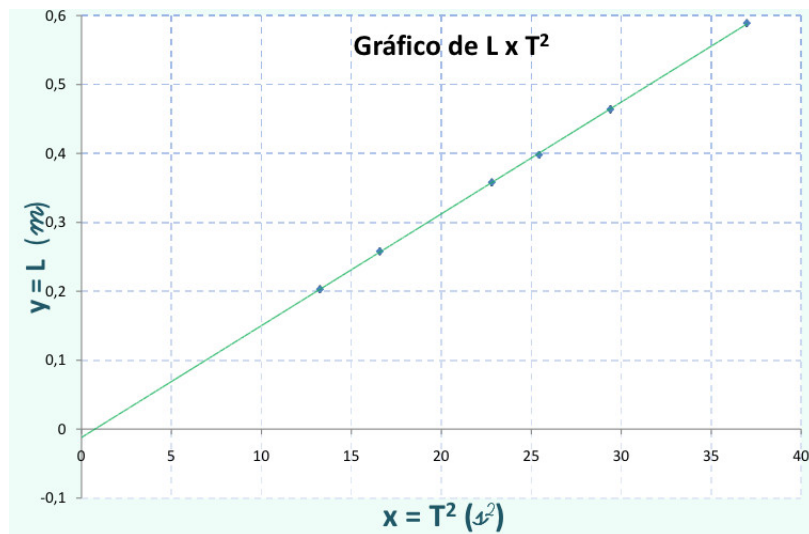


Figura 2: Gráfico do comprimento do fio  $L$  em função de  $T^2$

Portanto, sabendo que  $r = (2,75 \pm 0,05)x10^{-4}$  podemos aplicar na fórmula ?? e descobrir o valor de  $G$ , com erro propagado utilizando a seguinte fórmula:

$$\sigma_G^2 = (8\pi \frac{l_0}{r^4})^2 (\sigma_a)^2 + (8\pi \frac{a}{r^4})^2 (\sigma_{l_0})^2 + (-32\pi \frac{al_0}{r^5})^2 (\Delta_r)^2 \quad (9)$$

### 4.3 Resultados

Utilizando a fórmula obteve-se o seguinte resultado:

$$G \pm \sigma_G = (9,1 \pm 0,7) * 10^{10} \frac{N}{m^2} = 91 \pm 7 GPa$$

O valor esperado para o Aço ASTM, que foi o material usado é de aproximadamente 80 GPa. Ou seja, nosso valor e nossa faixa de erro estão um pouco maiores que o esperado.

Algumas hipóteses que ajudam a justificar o erro, em ordem de maior para menor relevância:

- O estado do fio, que parecia ter sido dobrado e depois esticado, o que pode ter prejudicado ou modificado suas características de cisalhamento.
- Diferença na densidade dos cilindros, pois, para calcular o  $\sigma$ , supomos que os cilindros tivessem densidades iguais;
- Deslizamento e atrito entre o suporte e o fio, durante as rotações.

Para corrigir estes defeitos, o ideal seria obviamente usar cilindros de mesma densidade e um fio novo, sem defeitos e imperfeições significativas.

## 5 Conclusão

Ao final desse experimento, o módulo de cisalhamento  $G$  obtido não está de acordo com o esperado, pelo que presumimos serem características do sistema montado, tais como a densidade desigual dos cilindros, imperfeições no fio e deslizamento entre o suporte e o fio. Porém o valor mínimo de nossa faixa de erro, 84 GPa é razoavelmente próximo do esperado.