Gabario 4 - `ExercciosColoracaoVertices.pdf`

Gustavo Michels de Camargo

28 de junho de 2023

Resumo

Gabarito requerido pelo professor orientador Gilmario Barbosa do Santos e feito pelo monitor de Grafos Gustavo Michels de Camargo entre abril e maio de 2023.

1 Determine os limites inferior e superior, o número cromático $X(G)$ e $E(G)$. Execute uma coloração mínima para cada um dos grafos e verifique se você conseguiu o valor de $X(G)$?

a) K_7

b) $K_{3,5}$

c) C_9

d) **Peterson**

e) **Cubo** Q_k

f) **Completo tripartite** $K_{R,S,T}$

g) **Grafo Mycielski/Grotzsch (a construção do grafo Mycielski/Grotzsch sempre gera grafos livres de triângulos(K_3), na figura temos duas configurações isomorfas desse grafo construído a partir de C_5.)**

h) **Um grafo com 14 vértices e repetições de K_4.**

1.1 Respostas:

a) O grafo completo K_7 tem 7 vértices, todos conectados entre si. Como cada vértice está conectado a todos os outros vértices, o número cromático $X(G) = 7$. A coloração mínima requer 7 cores diferentes, uma para cada vértice. $E(G) = \frac{7(7-1)}{2} = 21$.

b) O grafo bipartido completo $K_{3,5}$ tem duas partes com 3 e 5 vértices cada. Como todos os vértices de uma parte estão conectados a todos os vértices da outra parte, o número cromático $X(G) = 2$. A coloração mínima requer 2 cores, uma para cada parte.

Para encontrar o número de arestas, basta multiplicar o número de vértices em cada parte. No caso de $K_{3,5}$, existem 3 vértices em uma parte e 5 vértices na outra parte, então $E(G) = 3 \times 5 = 15$.

c) O grafo cíclico C_9 é formado por um ciclo de 9 vértices. Para colorir um grafo cíclico com um número ímpar de vértices, são necessárias 3 cores. Portanto, o número cromático $X(G) = 3$. A coloração mínima requer 3 cores alternadas ao longo do ciclo. $E(G) = 9$.

d) O grafo de Petersen é um grafo não planar com 10 vértices e 15 arestas. Ele não possui triângulos, o que torna sua coloração mais complexa. No entanto, é possível mostrar que o número cromático $X(G) = 3$. A coloração mínima requer 3 cores, distribuídas de forma a não haver dois vértices adjacentes com a mesma cor. $E(G) = 15$.

e) O grafo cúbico Q_k é um grafo com 2^k vértices e $k * 2^{k-1}$ arestas. Como é bipartido, o número cromático $X(G) = 2$. A coloração mínima requer 2 cores, uma para cada parte. $E(G) = k*2^{k-1}$.

f) O grafo completo tripartido $K_{R,S,T}$ é composto por três conjuntos de vértices com R, S e T vértices em cada conjunto. Todos os vértices de um conjunto estão conectados a todos os vértices dos outros dois conjuntos, mas não há arestas entre vértices do mesmo conjunto.

Como todos os vértices de um conjunto estão conectados a todos os vértices dos outros dois conjuntos, é necessário pelo menos 3 cores para colorir o grafo de forma que vértices adjacentes não compartilhem a mesma cor. Portanto, o número cromático $X(G) = 3$. A coloração mínima requer 3 cores, uma para cada conjunto.

Para calcular o número de arestas $E(G)$ em um grafo completo tripartido, podemos somar o número de arestas entre cada par de conjuntos de vértices. Como existem R vértices no primeiro conjunto, S no segundo e T no terceiro, temos:

$E(G) = R \times S + S \times T + T \times R$

Para colorir o grafo completo tripartido, podemos usar o seguinte método:

(a) Atribua uma cor diferente a cada um dos três conjuntos de vértices (R, S e T).

(b) Verifique se nenhum vértice adjacente compartilha a mesma cor. Como os vértices dentro de um conjunto não estão conectados, e todos os vértices de um conjunto têm a mesma cor, essa condição será satisfeita.

Dessa forma, é possível obter a coloração mínima de um grafo completo tripartido usando apenas 3 cores.

g) O grafo de Grotzsch é um grafo livre de triângulos com 11 vértices e 20 arestas. Ele é obtido pela construção de Mycielski a partir do grafo C_5. O grafo de Grotzsch é um exemplo de grafo com número cromático 4 sem triângulos, mostrando que o número cromático de grafos planares sem triângulos pode ser maior que 3. A coloração mínima requer 4 cores, logo $X(G) = 4$, diferentes de modo que vértices adjacentes não compartilhem a mesma cor. $E(G) = 20$.

Para colorir o grafo de Grotzsch, podemos usar o seguinte método:

(a) Utilize um algoritmo de coloração de vértices guloso, atribuindo a menor cor disponível aos vértices em uma determinada ordem. É importante notar que diferentes ordens de vértices podem resultar em diferentes números cromáticos.

(b) Para melhorar a eficiência da coloração, pode-se tentar diferentes ordens de vértices e escolher a que resulta no menor número cromático.

No caso do grafo de Grotzsch, a coloração mínima pode ser alcançada com 4 cores, como mencionado anteriormente. Para confirmar que a coloração mínima foi alcançada, você pode comparar o resultado com o número cromático conhecido $X(G) = 4$.

h) Considere um grafo G com 14 vértices, onde 1 vértice se conecta a todos os outros vértices e os demais vértices possuem grau 5. Vamos analisar as propriedades desse grafo e determinar a coloração mínima necessária e o número de arestas $E(G)$.

Para este grafo, temos um vértice central (digamos, v1) que está conectado a todos os outros 13 vértices. Como este vértice v1 está conectado a todos os outros vértices, o número cromático $X(G)$ será pelo menos 2. No entanto, como o grafo contém repetições de subgrafos K_4, o número cromático será, na verdade, pelo menos 4.

Agora, vamos calcular o número de arestas $E(G)$. Há 13 arestas conectando o vértice central v1 aos outros vértices. Além disso, cada um dos 13 vértices restantes tem grau 5, o que significa que eles estão conectados a mais 4 vértices além do vértice central. No entanto, devemos dividir esse número por 2 para evitar contar as arestas duas vezes. Portanto, o número total de arestas é:

$E(G) = 13 + \frac{13 \times 4}{2} = 13 + 26 = 39$

Com base na estrutura do grafo fornecida, o número cromático mínimo $X(G)$ é pelo menos 4, e o número de arestas $E(G)$ é 39.

2 Determine $X(G)$, $\omega(G)$, $\Delta(G)$ e tente encontrar uma relação entre os valores para os seguintes casos:

a) Uma árvore

b) Um grafo caminho (P_n)

c) K_n

d) Grafo bipartido $K_{m,n}$

e) $C_2 i\ i \in N - \{0\}$

2.1 Respostas:

a) Em uma árvore, o número cromático $X(G) = 2$, pois sempre é possível colorir uma árvore com apenas duas cores. O clique máximo $\omega(G) = 2$, já que uma árvore não possui ciclos e, portanto, não pode conter cliques maiores que 2. A maior valência $\Delta(G)$ é $n - 1$, onde n é o número de vértices da árvore.

b) Em um grafo caminho, $X(G) = 2$, pois é possível colorir o grafo alternando as cores entre os vértices. O clique máximo $\omega(G) = 2$, já que um grafo caminho não possui ciclos e, portanto, não pode conter cliques maiores que 2. A maior valência $\Delta(G)$ é 2, pois os vértices intermediários do caminho têm grau 2.

c) Em um grafo completo K_n, $X(G) = n$, já que todos os vértices estão conectados a todos os outros vértices, e cada vértice precisa de uma cor diferente. O clique máximo $\omega(G) = n$, pois o grafo completo é um clique máximo em si. A maior valência $\Delta(G) = n - 1$, já que cada vértice está conectado a todos os outros vértices no grafo.

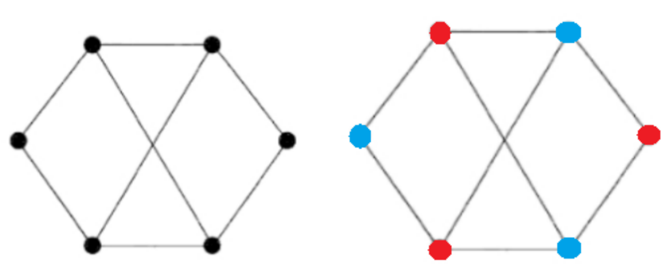
d) Em um grafo bipartido $K_{m,n}$, $X(G) = 2$, pois é possível colorir o grafo usando duas cores, uma para cada conjunto de vértices. O clique máximo $\omega(G) = 2$, pois um grafo bipartido não possui ciclos ímpares e, portanto, não pode conter cliques maiores que 2. A maior valência $\Delta(G)$ é igual ao maior valor entre m e n, pois cada vértice em um conjunto está conectado a todos os vértices do outro conjunto.

e) Em um ciclo par C_{2i}, $X(G) = 2$, pois é possível colorir o grafo alternando as cores dos vértices. O clique máximo $\omega(G) = 2$, já que um ciclo par não possui cliques maiores que 2. A maior valência $\Delta(G) = 2$, pois todos os vértices têm grau 2 em um ciclo.

Nota: Em todos os casos, podemos observar que $\Delta(G) \geq \omega(G) \leq X(G)$. Esta relação mostra que a maior valência do grafo é sempre maior ou igual ao clique máximo e que o clique máximo é sempre menor ou igual ao número cromático do grafo.

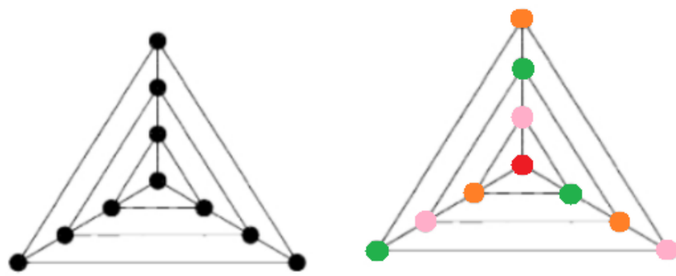
3 Determine os números cromáticos $X(G)$, para:

3.1



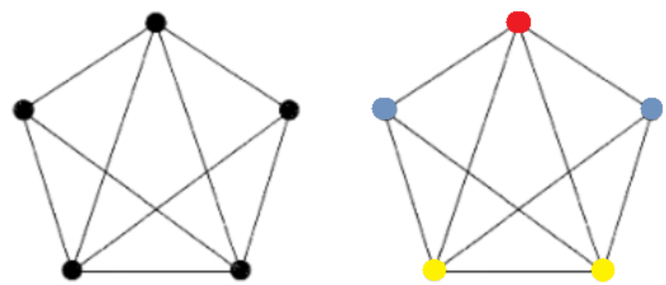
$X(G) = 2$

3.2



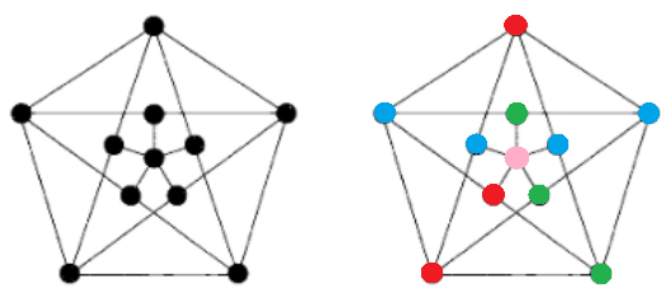
$X(G) = 4$

3.3



$X(G) = 3$

3.4



$X(G) = 4$

4 Prove usando indução no número de vértices (n), que se G é um grafo simples com grau máximo $\Delta(G)$, então $X(G) \leqslant \Delta(G) + 1$

4.1 Resposta:

Base da indução:

Se $n = 1$, então temos apenas um vértice, e seu grau máximo é $\Delta(G) = 0$. Nesse caso, podemos colorir o único vértice com uma cor, e assim $X(G) = 1$. A afirmação é verdadeira para $n = 1$ pois $1 \leqslant 0 + 1$.

Hipótese de indução:

Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum grafo simples G com $n = k$ vértices.

Passo de indução:

Considere um grafo simples G' com $n = k + 1$ vértices. Vamos mostrar que $X(G') \leqslant \Delta(G') + 1$.

Seja v um vértice arbitrário de G'. Remova v e todas as arestas incidentes a ele para criar um novo grafo G'' com k vértices. Pela hipótese de indução, podemos colorir G'' com no máximo $\Delta(G'') + 1$ cores.

Agora, vamos recolocar o vértice v e suas arestas incidentes em G''. O grau de v em G' é no máximo $\Delta(G')$. Como v tem no máximo $\Delta(G')$ vizinhos em G', há no máximo $\Delta(G')$ cores diferentes usadas entre os vértices adjacentes a v. Como estamos usando $\Delta(G'') + 1$ cores para colorir G'', sempre haverá pelo menos uma cor disponível que não está sendo usada pelos vizinhos de v. Podemos atribuir essa cor a v, resultando em uma coloração válida de G'.

Dessa forma, $X(G') \leqslant \Delta(G'') + 1 \leqslant \Delta(G') + 1$. Portanto, a afirmação é verdadeira para $n = k + 1$ vértices.

Logo, a afirmação é verdadeira para todos os grafos simples G com qualquer número de vértices n.

5 Prove que para todo grafo $G(V, E)$, com $m = |E|$ temos o seguinte majorante para o número cromático $X(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2 * m + \frac{1}{4}}$.

Dica: a soma dos graus de um grafo é igual a 2*m, particularmente, a soma dos graus de um $K_n = n * (n - 1)$. Uma das raízes será: $\frac{1+\sqrt{8*m+1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8*m+1}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8*m}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2 * m + \frac{1}{4}}$

5.1 Resposta:

Seja G um grafo com $n = |V|$ vértices e m arestas. Sabemos que a soma dos graus de todos os vértices de um grafo é igual a $2m$. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m. \tag{1}$$

Seja $k = X(G)$ o número cromático de G. Seja $V_1, V_2, \ldots, V_k$ a partição de V em conjuntos independentes, ou seja, para todo $1 \leq i \leq k$, o subgrafo induzido por V_i é um grafo sem arestas. Como a soma dos graus dos vértices de um grafo completo K_n é igual a $n(n-1)$, temos que:

$$\sum_{v \in V_i} \deg(v) \leq |V_i|(|V_i| - 1). \tag{2}$$

Somando a desigualdade (2) sobre todos os conjuntos V_i, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{v \in V_i} \deg(v) \leq \sum_{i=1}^{k} |V_i|(|V_i| - 1). \tag{3}$$

Pela equação (1), temos:

$$2m \leq \sum_{i=1}^{k} |V_i|(|V_i| - 1). \tag{4}$$

Seja $q_i = |V_i|$, então $n = \sum_{i=1}^{k} q_i$. Substituindo q_i na equação (4), temos:

$$2m \leq \sum_{i=1}^{k} q_i(q_i - 1). \tag{5}$$

Sabemos que $q_i(q_i - 1) \leq \frac{1}{4}(q_i^2 + 1)$, pois a função quadrática $x^2 - x - \frac{1}{4}$ possui raízes $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e é não negativa para $x \geq 0$. Portanto,

$$2m \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4}(q_i^2 + 1). \tag{6}$$

Reorganizando a equação (6), temos:

$$8m \leq \sum_{i=1}^{k} (q_i^2 + 4). \tag{7}$$

Como $\sum_{i=1}^{k} q_i = n$, temos:

$$8m \leq n^2 + 4k. \tag{8}$$

Agora, queremos encontrar um limite superior para k. Rearranjando a equação (8), obtemos:

$$k \geq \frac{8m - n^2}{4}. \tag{9}$$

Como $k = X(G)$, queremos encontrar um limite superior para k usando a equação (9). Note que se $n^2 \leq 8m$, então $k \geq 0$ e a desigualdade é trivialmente verdadeira. Portanto, consideremos o caso em que $n^2 > 8m$.

Sabemos que as raízes da função quadrática $x^2 - x - 8m$ são:

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 32m}}{2}. \tag{10}$$

Uma das raízes é:

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 32m}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 32m}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8m}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}. \tag{11}$$

Como $n^2 > 8m$, temos que $n > \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$. Portanto, pelo menos um dos conjuntos independentes V_i tem tamanho maior que $\frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$. Como k é o número mínimo de conjuntos independentes necessários para cobrir todos os vértices do grafo, temos que $k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Assim, provamos que para todo grafo $G(V, E)$, com $m = |E|$, temos o seguinte majorante para o número cromático $X(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2 * m + \frac{1}{4}}$.

6 Uma tabela de horários de aulas é exibida abaixo. Considerando que alguns alunos pretendem fazer matrícula em diferentes disciplinas, algumas delas não podem coincidir. Na tabela, as marcações (asterisco) representam os pares de disciplinas que não podem coincidir horários. Quantos períodos de aulas são necessários para atender a todas as disciplinas contemplando o interesse dos alunos?

	a	b	c	d	e	f	g
a		*	*	*			*
b	*		*	*	*		*
c	*	*		*		*	
d	*	*	*				*
e		*					
f			*	*			*
g	*	*				*	

6.1 Resposta:

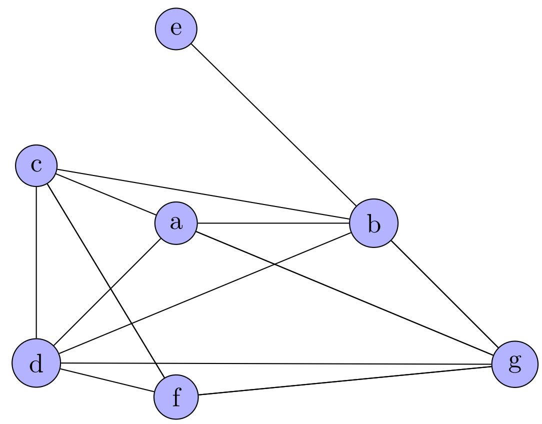
Primeiro, vamos transformar os dados de entrada em uma matriz de adjacências:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

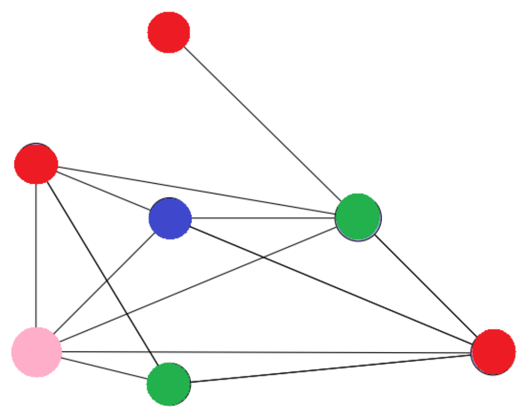
Agora vamos interpretar como um grafo não direcional:
Vértices: a, b, c, d, e, f, g
Arestas:

- (a, b)
- (a, c)
- (a, d)
- (a, g)
- (b, c)
- (b, d)
- (b, e)
- (b, g)
- (c, d)
- (c, f)
- (d, g)
- (f, c)
- (f, d)
- (f, g)
- (g, a)
- (g, b)
- (g, f)

O grafo:



O grafo colorizado:



Foram necessárias 4 cores para colorizar o grafo, **logo**, seriam necessários 4 períodos de aula para se adequar aos interesses dos alunos.

7 Há uma conferência científica anual com a organização de encontros de 10 comitês para debates, os comitês são identificados por letras de "A" a "J". Os membros participantes estão inscritos em diferentes comitês e identificados pelo respectivo número de crachá:

A={1,2,3,4}
B={1,6,7}
C={3,4,5}
D={2,4,7,8,9,10}
E={6,9,12,14}
F={5,8,11,13}
G={10,11,12,13,15,16}
H={14,15,17,19}
I={13,16,17,18}
J={18,19}

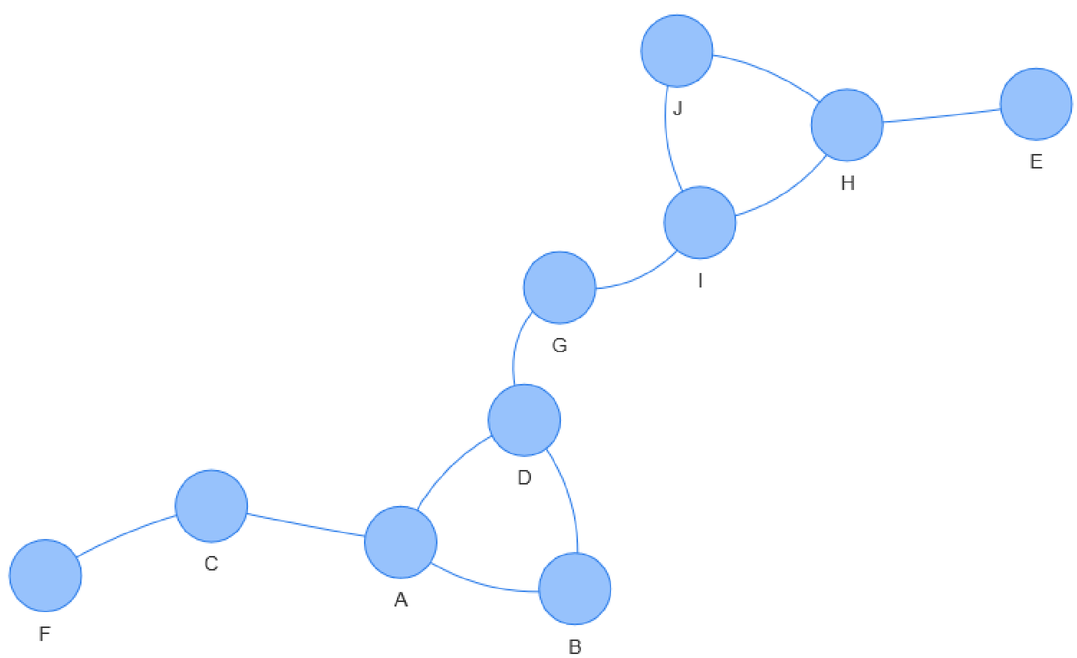
Os inscritos exigem participar dos comitês nos quais se inscreveram. Dessa forma, dois ou mais comitês que apresentem intersecção de nomes na lista de inscritos não podem

ser realizados no mesmo horário. Quantos horários distintos (sem sobreposição na lista de inscritos) serão necessários e quais os comitês que serão alocados a cada horário?

7.1 Resposta:

Para resolver esse problema, podemos modelá-lo como um problema de coloração de grafos, em que cada comitê é representado por um vértice e existe uma aresta entre dois vértices se houver pelo menos um membro em comum entre os comitês. O objetivo é atribuir cores (horários) aos vértices de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor (comitês com membros em comum não se encontram no mesmo horário).

Vamos criar o grafo de intersecção dos comitês:

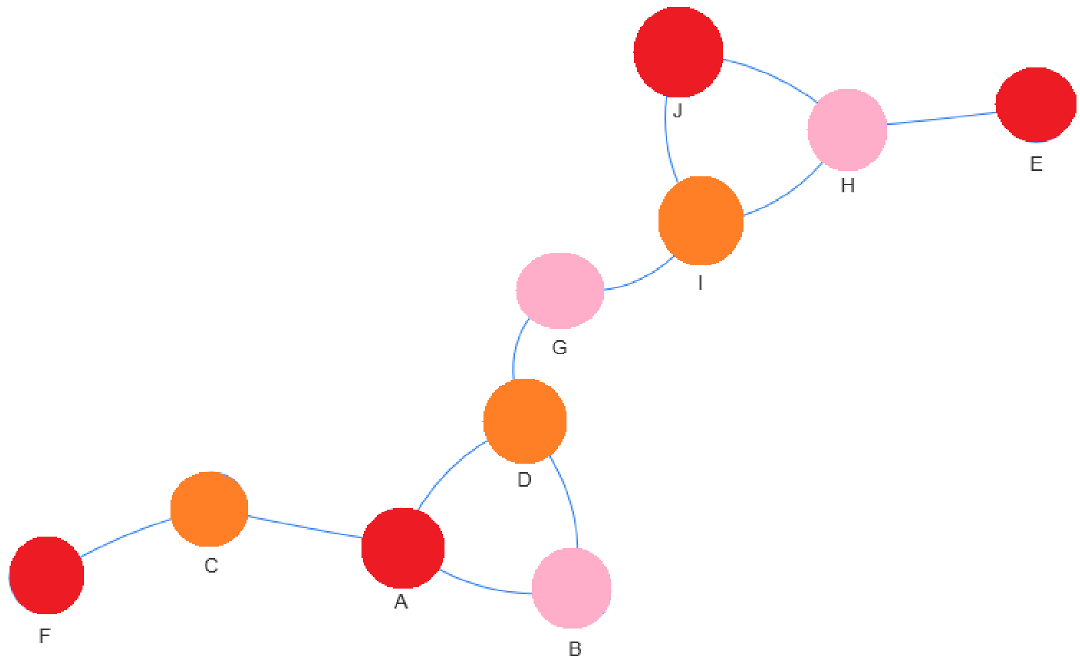


Agora, podemos aplicar o algoritmo de coloração de vértices (algoritmo de Welsh-Powell, por exemplo) para encontrar uma coloração válida para esse grafo.

1. Ordene os vértices por grau decrescente: D, G, A, B, C, H, I, J, E, F.

2. Atribua cores (horários) aos vértices na ordem especificada, usando a menor cor possível que não conflita com vértices adjacentes já coloridos.

Resultado:



Portanto, serão necessários 3 horários distintos para acomodar todos os comitês sem sobreposição na lista de inscritos. Os comitês alocados a cada horário são:

- Horário 1 (vermelho): A, E, F, J
- Horário 2 (rosa): B, G, H
- Horário 3 (laranja): C, D, I

8 Escreva os polinômios cromáticos diretamente para e verifique diferentes valores de k-coloração:

Lembre-se: "k" é uma quantidade inteira positiva:

$$k < X(G) \Rightarrow P_G(k) = 0$$
$$k \geq X(G) \Rightarrow P_G(k) > 0$$
$$X(G) = min\{k : P_G(k) > 0\}$$

a) C_4

b) K_6

c) $K_{1,5}$

d) $K_{2,5}$

e) $K_{2,s}$

8.1 Respostas:

a) Polinômio cromático: $P_{G_1}(k) = k(k-1)$
Número cromático: $X(G_1) = 2$

b) Polinômio cromático: $P_{G_2}(k) = k(k-1)(k-2)$
Número cromático: $X(G_2) = 3$

c) Polinômio cromático: $P_{G_3}(k) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k$
Número cromático: $X(G_3) = 2$

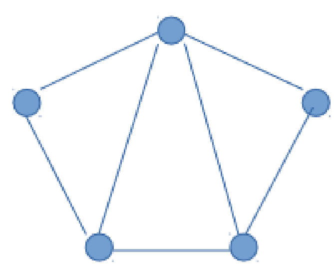
d) Polinômio cromático: $P_{K_{2,5}}(k) = k(k-1)^5$
Número cromático: $X(K_{2,5}) = 2$

e) Polinômio cromático: $P_{K_{2,s}}(k) = k(k-1)^s$
Número cromático: $X(K_{2,s}) = 2$

9 Para os casos abaixo descritos, escreva os polinômios cromáticos pela aplicação do teorema que aplica a redução do grafo por remoção e contração de aresta: $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$

a) K_4

b)



9.1 Respostas:

a) $P_{K_4}(k) = k(k-1)(k^2-k+3)$

b) $P_G(k) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k$