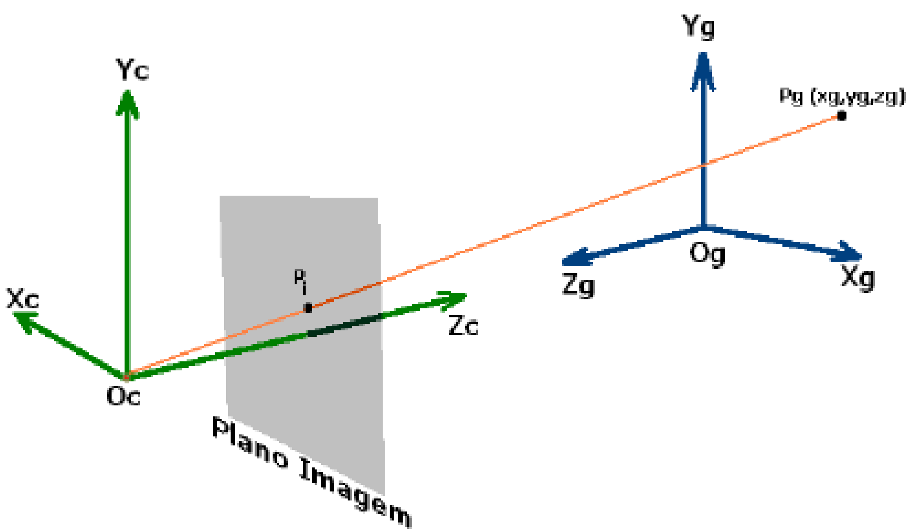
Calibração de Câmera

O modelo representado na matriz M é restrito a um único sistemas de referência 3D na câmera. Na prática isso não é comum, ocorrendo um sistema na câmera e outro para os objetos da cena.

Nesse caso, além de levar em conta os parâmetros intrínsecos à câmera (tamanho de pixel, centro da câmera, distância focal) é necessário determinar a rotação e translação (parâmetros extrínsecos à câmera) para alinhamento dos dois sistemas 3D.

M’= (translação(Ox,Oy)*escala(sx,sy)* rot) * (Rotação*Translação)



Calibração de Câmera

Existem métodos para a determinação da matriz de projeção contendo os parâmetros intrínsecos e extrínsecos à câmera;

O procedimento para a determinação da matriz é chamado de calibração de câmera;

Existem vários métodos de calibração, inicialmente analisaremos uma adaptação sobre o método descrito em Gonzalez e Woods (2000)

Existem bibliotecas de calibração:
https://sigmoidal.ai/como-usar-opencv-e-python-para-calibrar-cameras/
https://docs.opencv.org/3.4/dc/dbb/tutorial_py_calibration.html

Calibração de Câmera

Nesse método busca-se a matriz de projeção M_{proj} considerando as operações de alinhamento de sistemas (parâmetros extrínsecos) e a projeção em perspectiva

P é um ponto 3D de coordenadas (X,Y,Z) na cena capturada pela câmera que está sendo calibrada.

$$M_{proj} = M_{intr} * M_{ext} \quad onde$$

$$M_{intr} = perspectiva \quad e \quad M_{extr} = R * T$$

$$P_h = M_{proj} * P \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{P_h} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{14} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{24} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & a_{34} \end{pmatrix}}_{matriz\ de\ projeção} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

Calibração de Câmera

Se conhecermos o ponto P (3D) e sua projeção C na imagem
Teremos que determinar (inicialmente) 12 incógnitas a_{ij} para conhecermos a matriz de projeção A.

Precisaremos de (inicialmente) de 12 equações:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{P_h} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{14} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{24} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & a_{34} \end{pmatrix}}_{matriz\ de\ projeção} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

Calibração de Câmera

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}_{3,1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{14} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{24} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & a_{34} \end{pmatrix}_{3,4} * \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}_{4,1}$$

$$A \quad coordenada \quad c_3 \quad é \quad homogênea, \quad portanto:$$

$$I)\, x_c = \frac{c_1}{c_3} \quad e \quad y_c = \frac{c_2}{c_3} \quad e \quad P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calibração de Câmera

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{14} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{24} \\ a_{31} & \cdots & \cdots & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I)\, x_c = \frac{c_1}{c_3} \quad e \quad y_c = \frac{c_2}{c_3}$$

$$\textit{Também} \quad \textit{sabemos} \quad \textit{que}:$$

$$II)$$

$$c_1 = a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z + a14$$

$$c_2 = a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z + a24$$

$$c_3 = a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} Z + a34$$

Calibração de Câmera

$$substituindo \quad I \quad em \quad II:$$

$$(III)\, x_c = \frac{a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z + a_{14}}{a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} Z + a_{34}}$$

$$(IV)\, y_c = \frac{a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z + a_{24}}{a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} Z + a_{34}}$$

$$Reescrevendo:$$

$$(III)$$

$$a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z + a_{14} - x_c a_{31} X - x_c a_{32} Y - x_c a_{33} Z - x_c a_{34} = 0$$

$$(IV)$$

$$a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z + a_{24} - y_c a_{31} X - y_c a_{32} Y - y_c a_{33} Z - y_c a_{34} = 0$$

Calibração de Câmera

Fazendo:
$P=P_1=(X_1, Y_1, Z_1)$ e
$p_c=p_1=(x_1, y_1)$

(III)

$$a_{11} X_1 + a_{12} Y_1 + a_{13} Z_1 + a_{14} - x_1 a_{31} X_1 - x_1 a_{32} Y_1 - x_1 a_{33} Z_1 - x_1 a_{34} = 0$$

(IV)

$$a_{21} X_1 + a_{22} Y_1 + a_{23} Z_1 + a_{24} - y_1 a_{31} X_1 - y_1 a_{32} Y_1 - y_1 a_{33} Z_1 - y_1 a_{34} = 0$$

12 incógnitas: a_{ij}
1 ponto → 2 equações
6 pontos → 12 equações: precisamos de mais 5 pontos

Calibração de Câmera

Fazendo para 6 pontos:
(X_1, Y_1, Z_1) a (X_6, Y_6, Z_6) e seus correspondentes (x_1,y_1) a (x_6,y_6)
6 pontos → 12 equações

$$
\begin{aligned}
&a_{11}X_1+a_{12}Y_1+a_{13}Z_1+a14-x_1a_{31}X_1-x_1a_{32}Y_1-x_1a_{33}Z_1-x_1a_{34}=0\\
&a_{21}X_1+a_{22}Y_1+a_{23}Z_1+a24-y_1a_{31}X_1-y_1a_{32}Y_1-y_1a_{33}Z_1-y_1a_{34}=0\\
&a_{11}X_2+a_{12}Y_2+a_{13}Z_2+a14-x_2a_{31}X_2-x_2a_{32}Y_2-x_2a_{33}Z_2-x_2a_{34}=0\\
&a_{21}X_2+a_{22}Y_2+a_{23}Z_2+a24-y_2a_{31}X_2-y_2a_{32}Y_2-y_2a_{33}Z_2-y_2a_{34}=0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\ddots\\
&a_{11}X_6+a_{12}Y_6+a_{13}Z_6+a14-x_6a_{31}X_6-x_6a_{32}Y_6-x_6a_{33}Z_6-x_6a_{34}=0\\
&a_{21}X_6+a_{22}Y_6+a_{23}Z_6+a24-y_6a_{31}X_6-y_6a_{32}Y_6-y_6a_{33}Z_6-y_6a_{34}=0
\end{aligned}
$$

Calibração de Câmera

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 X_1 & -x_1 Y_1 & -x_1 Z_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1 X_1 & -y_1 Y_1 & -y_1 Z_1 & -y_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 X_2 & -x_2 Y_2 & -x_2 Z_2 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -y_2 X_2 & -y_2 Y_2 & -y_2 Z_2 & -y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_6 X_6 & -x_6 Y_6 & -x_6 Z_6 & -x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & -y_6 X_6 & -y_6 Y_6 & -y_6 Z_6 & -y_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema homogêneo com infinitas soluções.
Para resolvê-lo adequadamente faremos $a_{34}=1$
E reescreveremos o sistema...

Calibração de Câmera

Fazendo a_{34}=1

$$a_{11}X_1+a_{12}Y_1+a_{13}Z_1+a14-x_1a_{31}X_1-x_1a_{32}Y_1-x_1a_{33}Z_1-x_1a_{34}=0$$
$$a_{21}X_1+a_{22}Y_1+a_{23}Z_1+a24-y_1a_{31}X_1-y_1a_{32}Y_1-y_1a_{33}Z_1-y_1a_{34}=0$$
$$a_{11}X_2+a_{12}Y_2+a_{13}Z_2+a14-x_2a_{31}X_2-x_2a_{32}Y_2-x_2a_{33}Z_2-x_2a_{34}=0$$
$$a_{21}X_2+a_{22}Y_2+a_{23}Z_2+a24-y_2a_{31}X_2-y_2a_{32}Y_2-y_2a_{33}Z_2-y_2a_{34}=0$$
$$\ddots$$
$$a_{11}X_6+a_{12}Y_6+a_{13}Z_6+a14-x_6a_{31}X_6-x_6a_{32}Y_6-x_6a_{33}Z_6-x_6a_{34}=0$$
$$a_{21}X_6+a_{22}Y_6+a_{23}Z_6+a24-y_6a_{31}X_6-y_6a_{32}Y_6-y_6a_{33}Z_6-y_6a_{34}=0$$

Teremos…

Calibração de Câmera

Fazendo $a_{34}=1$, teremos:

$$
\begin{gathered}
a_{11}X_1+a_{12}Y_1+a_{13}Z_1+a14-x_1a_{31}X_1-x_1a_{32}Y_1-x_1a_{33}Z_1-x_1=0\\
a_{21}X_1+a_{22}Y_1+a_{23}Z_1+a24-y_1a_{31}X_1-y_1a_{32}Y_1-y_1a_{33}Z_1-y_1=0\\
a_{11}X_2+a_{12}Y_2+a_{13}Z_2+a14-x_2a_{31}X_2-x_2a_{32}Y_2-x_2a_{33}Z_2-x_2=0\\
a_{21}X_2+a_{22}Y_2+a_{23}Z_2+a24-y_2a_{31}X_2-y_2a_{32}Y_2-y_2a_{33}Z_2-y_2=0\\
\ddots\\
a_{11}X_6+a_{12}Y_6+a_{13}Z_6+a14-x_6a_{31}X_6-x_6a_{32}Y_6-x_6a_{33}Z_6-x_6=0\\
a_{21}X_6+a_{22}Y_6+a_{23}Z_6+a24-y_6a_{31}X_6-y_6a_{32}Y_6-y_6a_{33}Z_6-y_6=0
\end{gathered}
$$

Calibração de Câmera

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x_1Y_1 & -x_1Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 & -y_1Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -x_2Y_2 & -x_2Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -y_2X_2 & -y_2Y_2 & -y_2Z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_6X_6 & -x_6Y_6 & -x_6Z_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & -y_6X_6 & -y_6Y_6 & -y_6Z_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \cdots \\ x_6 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

Transferimos a coluna dos pontos (x_i,y_i) para a direita…

Com isso a matriz C deixa de ser $C_{12,12}$ para ser $C_{12,11}$

Calibração de Câmera

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x_1Y_1 & -x_1Z_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 & -y_1Z_1 \\
X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -x_2Y_2 & -x_2Z_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -y_2X_2 & -y_2Y_2 & -y_2Z_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_6X_6 & -x_6Y_6 & -x_6Z_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & -y_6X_6 & -y_6Y_6 & -y_6Z_6
\end{pmatrix}}_{\mathbf{C}}
\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \cdots \\ x_6 \\ \cancel{y_6} \end{pmatrix}$$

Eliminamos a última linha da matriz $C_{12,11}$ para mantê-la quadrada

Consequentemente precisamos eliminar a coordenada y6 no vetor de pontos

Com isso M será inversível...

Calibração de Câmera

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 X_1 & -x_1 Y_1 & -x_1 Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1 X_1 & -y_1 Y_1 & -y_1 Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 X_2 & -x_2 Y_2 & -x_2 Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -y_2 X_2 & -y_2 Y_2 & -y_2 Z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_6 & Y_6 & Z_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_6 X_6 & -x_6 Y_6 & -x_6 Z_6 \end{pmatrix}_{11,11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}_{11,1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ \cdots \\ x_5 \\ y_5 \\ x_6 \end{pmatrix}_{11,1}$$

$$\boldsymbol{C}_{11,11} \boldsymbol{A}_{11,1} = \boldsymbol{P}_{11,1}$$

$$C \quad \acute{e} \quad inversível$$

$$C\,A = P \Rightarrow C^{-1} C A = C^{-1} P \Rightarrow I\,A = C^{-1} P \Rightarrow A = C^{-1} P$$

Calibração de Câmera

Se forem utilizados mais do que seis pontos a solução do sistema será por mínimos quadrados (pseudo inversa)

$$\boldsymbol{A} = \left(C^T C\right)^{-1} C^T P$$

Calibração de Câmera

$$M_{proj} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_h = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = M_{proj} * \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 / c_3 \\ c_2 / c_3 \end{pmatrix}$$

Calibração de Câmera

$$M_{proj} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{pmatrix} \qquad P_h = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = M_{proj} * \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 / c_3 \\ c_2 / c_3 \end{pmatrix}$$

Exercício: utilize o arquivo seisPontosXYZxy (Moodle) para calcular a M_{proj}
Por meio de script Python.