

Appunti di Fondamenti di Automatica

Lorenzo Prosseda, a.a. 2017-2018

Capitolo 1. Sistemi LTI a tempo continuo	5
1.1. Modello matematico	5
1.2. Comportamento del sistema	12
1.3. Rappresentazione equivalente	17
1.4. Movimenti generati dai modi	18
1.5. Equilibrio di sistemi LTI	24
1.6. Risposta all'impulso	24
1.7. Stabilità del sistema	25
1.8. Sistemi non lineari tempo-invarianti	28
Capitolo 2. Sistemi dinamici a tempo discreto	31
2.1. Modello matematico nel tempo discreto	31
2.2. Comportamento nel tempo discreto	34
2.3. Rappresentazione equivalente discreta	35
2.4. Movimenti nel tempo discreto	36
2.5. Stabilità del sistema	38
2.6. Sistemi non lineari a tempo discreto	40
Capitolo 3. Funzione di trasferimento	43
3.1. Definizione	43
3.2. Proprietà	44
3.3. Forme fattorizzate	47
3.4. Risposta forzata allo scalino	48
Appendice A. Richiami di Geometria e Algebra Lineare	53
A.1. Matrici	53
A.2. Autovalori e autovettori	56
A.3. Similitudine e diagonalizzabilità	58
A.4. Esponenziali di matrici	61
A.5. Numeri nel campo complesso	62
Appendice B. Strumenti per analisi nel tempo continuo	63
B.1. Trasformata di Laplace	63
Indice analitico	73

CAPITOLO 1

Sistemi LTI a tempo continuo

1.1. Modello matematico

1.1.1. Problemi di controllo. Un *problema di controllo* consiste nell'imporre un *funzionamento desiderato* a un *processo* assegnato: il processo è dunque l'oggetto del problema di controllo; il funzionamento desiderato è una funzione che mette in relazione le *variabili controllate* coi loro *segnali di riferimento* (il loro valore desiderato).

Si vuole ottenere una evoluzione del sistema nel tempo per cui le variabili controllate abbiano un valore quanto più possibile vicino al segnale di riferimento.

Di un processo bisogna valutare, oltre all'andamento delle variabili controllate, anche due fonti di errore:

Incertezza: I valori delle variabili controllate non possono essere misurati senza *incertezza*; inoltre nel processo possono intervenire variabili non controllate dall'esterno, chiamate *disturbi*.

Tempo: Le variabili di un problema di controllo sono funzioni del tempo ed esso può essere *continuo* o *discreto*; inoltre un componente del sistema potrebbe variare le proprie caratteristiche nel tempo (*non stazionario*).

Un processo è costituito in generale dai seguenti elementi:

- **USCITA:** chiamata in generale $y(t) \in \mathbb{R}^p$, è la variabile che viene misurata e vogliamo controllare; l'apice p indica la cardinalità dell'uscita (numero di uscite, sono trattate come un vettore) ed essa è chiamata anche variabile controllata.
- **TRASDUTTORE:** misura le variabili fisiche dell'uscita, restituendo in retroazione una misura dell'uscita o dei disturbi del processo; esso sarà soggetto a un errore di misura.
- **CONTROLLORE:** sistema che, interagendo col processo, ne controlla le variabili tramite un attuatore; prende in ingresso i valori di misura dei trasduttori e l'andamento desiderato del processo (chiamato *variabile di riferimento* $w(t)$).
- **ATTUATORE:** sistema che influenza il processo agendo sulla *variabile manipolabile* $u(t) \in \mathbb{R}^m$ anche detta ingresso del processo; l'apice m indica la cardinalità degli ingressi (come per l'uscita).
- **DISTURBO:** variabili che non possono essere controllate ma possono essere "viste" dal controllore in tempo reale tramite un trasduttore dedicato; si indicano con $d(t) \in \mathbb{R}^{m_d}$ dove l'apice m_d indica la cardinalità dei disturbi (come per ingressi e uscite).

Nel corso vedremo
spesso l'attuatore
"inglobato" nel
controllore

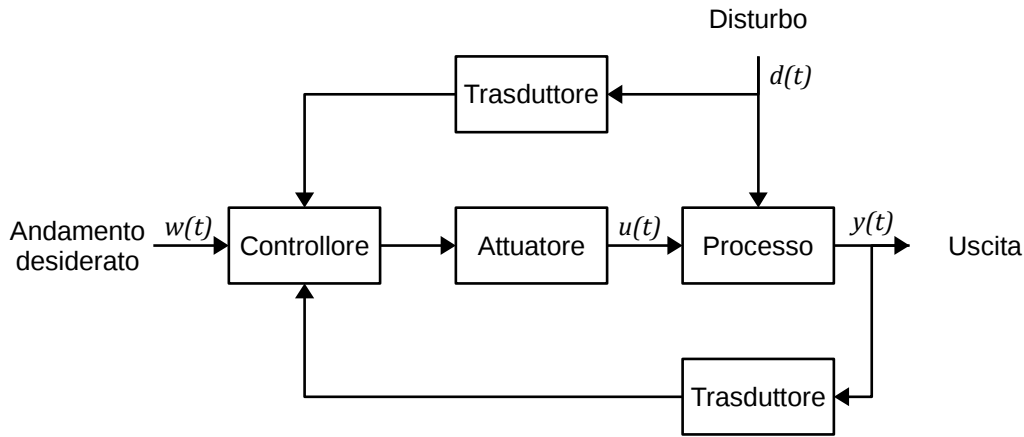


Figura 1.1.1. Anello di controllo in retroazione

Quando $m = p$ il sistema si dice quadrato ed è una minima condizione per ottenere il comportamento desiderato dal sistema, tuttavia non è detto che il numero di ingressi sia sempre pari alle uscite.

In un contesto ideale sarebbe possibile calcolare (tramite un'inversione delle sue equazioni) gli ingressi del sistema per ottenere esattamente le uscite desiderate; tuttavia a causa dei disturbi questo non è possibile nel mondo fisico.

Un sistema si dice allora *stabile* quando, accoppiando controllore e processo, l'uscita è stabile nel tempo ed è vicina al valore desiderato anche in presenza dei disturbi.

1.1.2. Processi a tempo continuo. Un processo a tempo continuo presenta una uscita ($y(t)$) e due possibili ingressi: manipolabili ($u(t)$) e non manipolabili ($d(t)$); un modello per questo sistema è dato dalla Definizione 1.1.

DEFINIZIONE 1.1. Un modello matematico è un insieme di equazioni che descrivono il comportamento del sistema e i legami tra ingressi e uscite.

I sistemi sono classificati tramite caratteristiche dei modelli (delle equazioni) che li rappresentano:

Statico/Dinamico: la presenza del solo ingresso nella funzione di uscita del sistema lo classifica come statico; si dirà invece dinamico se presenta delle variabili di stato (vedi Esempio 1.2).

Lineare: tutte le equazioni del modello sono combinazioni lineari delle variabili di stato e degli ingressi.

Proprio: l'ingresso figura nell'equazione di uscita; altrimenti, se l'ingresso non compare nell'equazione di uscita (la influenza indirettamente) il sistema si dice strettamente proprio.

Stazionario: la variabile tempo non modifica esplicitamente le variabili del sistema (per esempio una variabile che cambia comportamento nel tempo, come un componente che si usura).

SISO/MIMO: sistema con una sola uscita e un solo ingresso o più uscite e più ingressi.

A seguire due esempi riguardanti un sistema statico e uno dinamico:

Per sistemi a *tempo continuo*, trattati in questo capitolo, la variabile tempo è sempre reale ($t \in \mathbb{R}$), ovvero tra due istanti di tempo ne esiste sempre un'altro

ESEMPIO 1.1. Sia dato un resistore di valore R di resistenza, ai cui capi è applicata una tensione $v(t)$ dove $t \in \mathbb{R}$; nel resistore scorrerà una corrente $i(t)$ dipendente dalla tensione applicata. Il modello del processo è il seguente:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Dalla precedente equazione si deduce che, scegliendo di voler misurare la corrente nel resistore, l'uscita sarà $y(t) = i(t)$ mentre l'ingresso sarà $u(t) = v(t)$; inoltre notando che una perturbazione dell'ingresso si ripercuote istantaneamente sull'uscita ($y(t)$ dipende direttamente da $u(t)$) si può classificare il sistema come statico.

Il sistema ha un solo ingresso e una sola uscita, quindi è quadrato e SISO (single input, single output). \square

ESEMPIO 1.2. Sia data una serie costituita da un resistore di valore R di resistenza e un condensatore di capacità C ; ai capi del circuito è applicata una tensione $v(t)$, che causa una tensione $v_c(t)$ ai capi del condensatore e una corrente $i(t)$ nella serie. Sia $v_c(t)$ la variabile da misurare.

Adottando l'equilibrio delle tensioni possiamo scrivere che la somma delle tensioni su resistore e condensatore è pari alla tensione forzata sulla serie:

$$R \cdot i(t) + v_c(t) = v(t)$$

Nel caso del condensatore, la tensione ai suoi capi è proporzionale alla carica sulle sue armature e alla capacità come $v_c(t) = q(t) / C$, da cui si ottiene derivando

$$\dot{v}_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \overbrace{\frac{\partial q(t)}{\partial t}}^{\text{corrente}} = \frac{i(t)}{C}$$

La corrente nella serie sarà la stessa per il condensatore e il resistore, e può essere ricavata dalla legge di Ohm come tensione sul resistore ($v(t) - v_c(t)$) divisa la sua resistenza

$$i(t) = -\frac{1}{R}v_c(t) + \frac{1}{R}v(t)$$

Sostituendo $i(t)$ nell'espressione di $\dot{v}_c(t)$ si ottiene la seguente

$$\dot{v}_c(t) = -\frac{1}{RC}v_c(t) + \frac{1}{RC}v(t)$$

Scegliendo di voler misurare la tensione ai capi del condensatore si ha che $y(t) = v_c(t)$, l'ingresso sarà la tensione forzata sulla serie $u(t) = v(t)$. Rispetto all'Esempio 1.1, pur conoscendo la tensione $v(t)$ ai capi della serie non è possibile ottenere la tensione $v_c(t)$ ai capi della capacità (sarebbe necessario integrare l'equazione differenziale $\dot{v}_c(t)$, in cui compaiono delle costanti che rappresentano le *condizioni iniziali* del sistema, ignote nel contesto di questo esercizio). La presenza di una grandezza simile in uscita classifica questo sistema come dinamico. \square

DEFINIZIONE 1.2. Si chiamano *variabili di stato* quelle la cui conoscenza all'istante iniziale è necessaria per determinare l'andamento del sistema a seguito di un ingresso; esse sono indicate come $x(t) \in \mathbb{R}^n$ con apice n la cardinalità del sistema.

Per $n > 0$ il sistema si dice dinamico, altrimenti statico.

Le variabili di stato in pratica indeboliscono il legame tra ingresso e uscita; il loro numero determina l'*ordine* del sistema (quello dell'Esercizio 1.2 è del primo ordine); i sistemi fisici in generale hanno infinite variabili di stato.

Una formulazione generale per le equazioni del modello matematico per processi a tempo continuo è la seguente:

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \text{Equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & \text{Equazione di uscita} \end{cases}$$

**Equazioni di un
processo a
tempo continuo**

Tornando ai precedenti esempi, i sistemi che descrivono possono essere classificati nel modo seguente:

	Esempio 1.1	Esempio 1.2
Equazioni di stato	$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{R}u(t) \\ \text{per } v(t)=u(t) \end{cases}$	$\begin{cases} y(t) = x(t) \\ \dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{per } v_c(t)=x(t) \\ \text{per } v(t)=u(t) \end{array}$
Caratteristiche	Proprio, statico, stazionario, lineare	Strettamente proprio, dinamico del I ordine, stazionario, lineare

Tabella 1.1.1. Classificazione di due sistemi, esempi 1.1 e 1.2

Nel prossimo esempio si effettuerà una classificazione completa del sistema meccanico di un ammortizzatore MacPherson:

ESEMPIO 1.3. Sia dato un ammortizzatore inserito in una molla: possiamo considerare il sistema (sospensione) come una massa sospesa m (il veicolo) collegata a una molla di coefficiente k (in cui è inclusa anche la rigidità dello pneumatico) e un ammortizzatore con coefficiente di attrito viscoso β . La sospensione in questione è attiva, ovvero è possibile applicare in modo controllato una forza $\vec{F}(t)$ alla massa m (vedi Figura 1.1.2).

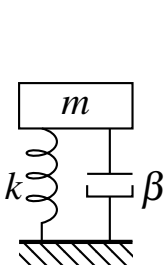


Figura 1.1.2

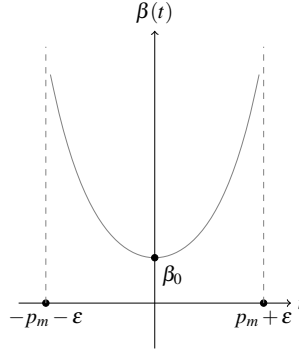


Figura 1.1.3

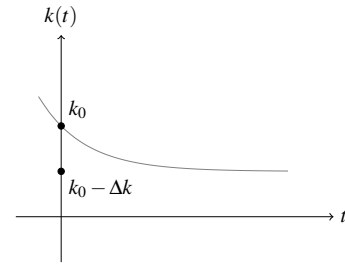


Figura 1.1.4

In condizioni statiche la posizione della massa rispetto al suolo è data da p_k (posizione di riposo della molla); la variabile $\bar{p}_m = p_m(t) - p_k$ è la posizione della massa rispetto alla posizione di riposo p_k .

L'ammortizzatore è dotato di fondo corsa, un limite meccanico all'estensione della molla: il coefficiente β di attrito viscoso dipenderà allora dalla posizione \bar{p}_m della massa (che è anche l'elongazione della molla); possiamo scrivere

$$\beta(\bar{p}_m) : \begin{cases} \beta_0 & \text{se } \bar{p}_m \in [-p_m, p_m] \\ \frac{\beta_0 \varepsilon}{\varepsilon - |\bar{p}_m| + |p_k|} & \text{se } \bar{p}_m \in (-p_m - \varepsilon, -p_m) \cup (p_m, p_m + \varepsilon) \end{cases}$$

dove i valori di fondo corsa sono indicati da ε , e β_0 è il valore di attrito viscoso in condizioni statiche: l'espressione ha un coefficiente di attrito viscoso prossimo a β_0 finché non si raggiunge uno dei due asintoti verticali ($-p_m - \varepsilon$ e $p_m + \varepsilon$) dove β tende a diventare infinitamente grande (vedi Figura 1.1.3).

Per quanto riguarda il coefficiente della molla (rigidità della sospensione) esso può variare nel tempo, a causa dell'usura: modellizziamo tale valore con l'espressione

$$k(t) = k_0 - (1 - e^{-\lambda t}) \Delta k$$

con k_0 il valore iniziale della molla appena costruita e λ un parametro costante: l'espressione decresce esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$ da k_0 a $k_0 - \Delta k$ (vedi Figura 1.1.4).

Il modello per questo sistema si può scrivere usando le equazioni di Newton, equilibrando la traslazione verticale della massa:

$$\overbrace{m\ddot{\bar{p}}_m(t)}^{\text{forza della massa}} + \underbrace{\beta(\bar{p}_m(t))\dot{\bar{p}}_m(t)}_{\text{forza dell'attrito viscoso}} + \overbrace{k(t)\bar{p}_m(t)}^{\text{forza della molla}} = \underbrace{F(t) - mg}_{\text{forza sospensione}}$$

Per indicare le derivate di \bar{p}_m è stata usata la notazione puntata: ad ogni punto sulla variabile corrisponde un grado di derivazione; quindi $\ddot{\bar{p}}_m(t)$ è l'accelerazione e $\dot{\bar{p}}_m(t)$ la velocità

Per scrivere la precedente nella forma generale bisogna individuare le variabili di stato (\bar{p}_m e $\dot{\bar{p}}_m$ pari a x_1 e x_2), gli ingressi ($F(t)$ pari a $u(t)$) e i disturbi ($-mg$ nell'espressione della forza sulla sospensione, pari a $d(t)$); la precedente diventa

$$m\dot{x}_2(t) + \beta(x_1(t))x_2(t) + k(t)x_1(t) = u(t) - d(t)$$

dove posizione (x_1) e velocità (x_2) formano il vettore di variabili di stato; bisogna includere nel modello l'equazione che mette in relazione le due variabili di stato ($\dot{x}_1(t) = x_2(t)$) e due funzioni di stato; se vogliamo misurare la posizione della massa imponiamo $x_1(t)$ in uscita:

$$\begin{aligned} f_1(x(t), u(t), t) &= x_2(t) \\ f_2(x(t), u(t), t) &= \frac{-\beta(x_1(t))}{m}x_2(t) - \frac{k(t)}{m}x_1(t) + \frac{u(t)}{m} - \frac{d(t)}{m} \\ g(x(t), u(t), t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Si osserva che il sistema è dinamico del secondo ordine (2 variabili di stato), non è lineare (la seconda equazione di stato non è lineare), è tempo-variante (non stazionario, il coefficiente della molla $k(t)$ cambia nel tempo), è SISO (ha un ingresso e una uscita), è strettamente proprio (l'ingresso non figura nell'equazione di uscita). \square

Nel prossimo esempio misuriamo il moto di un autoveicolo, tramite i principi della dinamica

ESEMPIO 1.4. Sia dato un autoveicolo in movimento tramite la forza di trazione del motore $F(t)$ attraverso le ruote, a cui si oppongono la massa m , la forza di inerzia $m\dot{v}(t)$ e la resistenza aerodinamica $\beta mv^2(t)$; ✓ scrivere un modello che abbia come ingresso la forza di trazione e come uscita la velocità.

L'equazione del sistema sarà l'equilibrio della forza di trazione con quelle che vi si oppongono:

$$m\dot{v}(t) + \beta mv^2(t) = F(t)$$

Per scrivere la precedente in modo standard consideriamo che (dalla richiesta dell'esercizio) l'uscita vale $y(t) = v(t)$ e l'ingresso vale $u(t) = F(t)$; inoltre è presente la

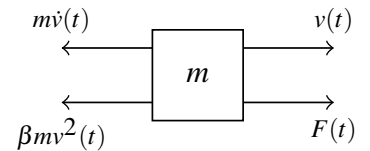


Figura 1.1.5. Modello per autoveicolo in movimento

derivata della velocità nell'equazione del sistema: si tratta di una variabile di stato ($x(t) = v(t)$).

Dopo queste considerazioni l'equazione diventa

$$m\dot{x}(t) + \beta mx^2(t) = u(t) \text{ da cui segue}$$

$$\dot{x}(t) = -\beta x^2(t) + \frac{u(t)}{m}; \quad y(t) = x(t)$$

Si tratta di un sistema dinamico del primo ordine (una variabile di stato), stazionario (nessuna equazione dipende dal tempo), non lineare (compare un termine al quadrato nell'equazione di stato), strettamente proprio (non compare l'ingresso nell'equazione di uscita), SISO (un ingresso e una uscita).

Se ora immaginiamo di voler misurare anche la posizione del veicolo, dobbiamo introdurre un nuovo stato coerente con quello presente che riguardi la grandezza spazio $p(t)$. Sapendo che $v(t) = \dot{p}(t)$ e ponendo dunque $x_1(t) = p(t)$ e $x_2(t) = v(t)$ si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\beta x_2^2(t) + \frac{u(t)}{m} \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (\text{nuovo modello per il sistema})$$

Rispetto al modello precedente è cambiato l'ordine (secondo) mentre le altre caratteristiche sono immutate. \square

Nel prossimo esempio un sistema dinamico di ordine IV:

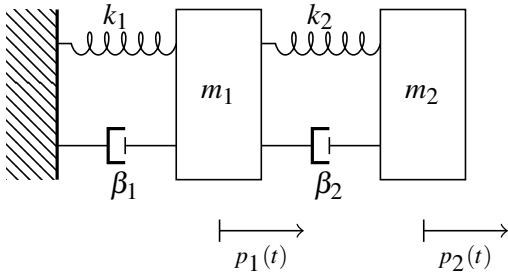


Figura 1.1.6. Sistema di due masse con sospensioni

ESEMPIO 1.5. Sia dato un sistema costituito da due masse m_1 e m_2 ciascuna avente una propria molla di costante k_1 e k_2 e un proprio ammortizzatore di coefficiente di attrito β_1 e β_2 ; le due masse sono collegate in serie a un vincolo - rispettivamente m_1 è collegata al vincolo e m_2 è collegata a m_1 - e la loro posizione rispetto a quella di riposo è data da $p_1(t)$ e $p_2(t)$; si possa esercitare una forza su ciascuna massa in modo longitudinale rispetto al sistema (rispettivamente $F_1(t)$ e $F_2(t)$). ✓ Si scriva un modello per misurare

la posizione nel tempo delle due masse.

Usando l'equilibrio delle forze (per una massa alla volta) possiamo scrivere un'equazione tra forza d'inerzia, forza dell'ammortizzatore, forza elastica e forze esercitate dall'altra massa in seguito al suo moto relativo, tutto eguagliato alla forza sulla massa considerata

$$m_1\ddot{p}_1(t) + \beta_1\dot{p}_1(t) + k_1p_1(t) + \beta_2(\dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t)) + k_2(p_1(t) - p_2(t)) = F_1(t)$$

$$m_2\ddot{p}_2(t) + \beta_2(\dot{p}_2(t) - \dot{p}_1(t)) + k_2(p_2(t) - p_1(t)) = F_2(t)$$

Possiamo scrivere il modello nella sua forma standard usando le seguenti considerazioni (sono presentate direttamente le forme matriciali):

$$u(t) : \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}; \quad y(t) : \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

Ingressi e uscite si ricavano dalla richiesta dell'esercizio, mentre gli stati sono determinati dai termini differenziali: dato che sono due per ciascuna equazione, si

In questo esempio viene introdotta in modo diretto la notazione vettoriale per le equazioni del sistema

avranno 4 stati; inoltre sarà necessario rispettare la scrittura $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$ per ottenere le equazioni standard del sistema:

$$x(t) : \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix}$$

Ora possiamo scrivere le equazioni standard sostituendo nelle equazioni del sistema:

$$(1.1.2) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ 1/m_1 (-\beta_1 x_2(t) - k_1 x_1(t) - \beta_2 (x_2(t) - x_4(t)) - k_2 (x_1(t) - x_3(t)) + u(t)) \\ x_4(t) \\ 1/m_2 (-\beta_2 (x_4(t) - x_2(t)) - k_2 (x_3(t) - x_1(t)) + u_2(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Si tratta di un sistema dinamico del quarto ordine, lineare (le equazioni di stato e di uscita non hanno termini quadratici), stazionario, MIMO (due ingressi e due uscite), strettamente proprio (nell'equazione di uscita non compare l'ingresso). \square

1.1.3. Modello standard per processi LTI. Per i sistemi lineari stazionari (tempo-invarianti), chiamati LTI, la forma matriciale standard del modello è la seguente:

**Modello
matriciale
standard per
sistemi LTI**

$$(1.1.3) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{bmatrix}$$

I coefficienti A, B, C, D sono matrici di coefficienti ricavati dalle equazioni in forma matriciale “canonica”: per esempio osservando le equazioni (1.1.2) dell'Esempio 1.5, si ha che le quattro matrici varranno rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{-\beta_1 - \beta_2}{m_1} & \frac{+k_2}{m_1} & \frac{+\beta_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{\beta_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-\beta_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove la matrice C ha sulle righe le uscite e sulle colonne gli stati (la prima uscita è pari al primo stato e la seconda pari al terzo stato); la matrice D ha sulle righe le uscite e sulle colonne gli ingressi (ed essendo il sistema nell'esempio strettamente proprio, sarà una matrice nulla); la matrice B ha sulle righe gli stati e sulle colonne gli ingressi; la matrice A ha sulle righe e sulle colonne gli stati.

Si noti che un sistema rimane lineare anche se tempo-variante: infatti se uno dei coefficienti matriciali cambia nel tempo, il modello (1.1.3) rimane una combinazione lineare.

In generale, posto che $u \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p$, i coefficienti matriciali saranno rispettivamente di dimensione:

**Dimensioni dei
coefficienti
standard per
sistemi LTI**

$$(1.1.4) \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

Ricapitolando, i coefficienti matriciali sono costituiti come $A = \#_{\text{stati}} \times \#_{\text{stati}}, B = \#_{\text{stati}} \times \#_{\text{ingressi}}, C = \#_{\text{uscite}} \times \#_{\text{stati}}, D = \#_{\text{uscite}} \times \#_{\text{ingressi}}$ dove $\#_i$ è la cardinalità della funzione i al pedice nelle equazioni (1.1.1).

Un sistema particolare (della categoria LTI) che ha il modello (1.1.3) è il *sistema a ritardo di tempo*: i ritardi sono presenti in ogni sistema di controllo e rappresentano dei limiti alle prestazioni del sistema; per modellizzare un ritardo pari a τ secondi si scrive l'uscita influenzata come $y(t) = u(t - \tau)$.

Il sistema con questa uscita rimane lineare e ha una traslazione di $y(t)$ lungo l'asse del tempo; per verificare che un sistema sia lineare non ostante la presenza di disturbi si può studiare usando la *sovrapposizione degli effetti*: se l'ingresso e l'uscita sono combinazioni lineari di due segnali allora il sistema è lineare, ovvero deve valere

$$(1.1.5) \quad \begin{aligned} u_{\text{TOT}}(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \\ y_{\text{TOT}}(t) &= \alpha_1 u_1(t - \tau) + \alpha_2 u_2(t - \tau) \end{aligned}$$

Vale che $u_i(t - \tau) = y_i(t)$ ovvero l'uscita è pari all'ingresso sfasato del ritardo, da cui $y_{\text{TOT}}(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$.

**Sovrapposizione
degli effetti per
LTI**

1.2. Comportamento del sistema

1.2.1. Movimenti ed equilibrio. Dato un sistema lineare ad un certo istante iniziale t_0 a cui corrisponde lo stato (condizione) iniziale $x(t_0) = x_0$ e un segnale $u(t)$ per $t \in (t_0, \infty)$, in generale si può dire che:

DEFINIZIONE 1.3. Il *movimento* di un sistema LTI dinamico sono le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ (rispettivamente dello stato e dell'uscita), a fronte di condizioni iniziali $x(t_0)$ e ingresso $u(t)$ per $t > t_0$.

I movimenti di un sistema non lineare non sono calcolabili in forma chiusa ed è necessario applicare metodi di calcolo numerico. Una classe particolare di movimenti sono gli equilibri:

DEFINIZIONE 1.4. Gli *equilibri* di un sistema dinamico sono una classe di movimenti per cui il valore dell'ingresso, dello stato e dell'uscita sono costanti nel tempo; in termini di equazioni (1.1.1) si deve avere $\dot{x}(t) = 0$ per ottenere un andamento costante.

Un equilibrio è dunque una coppia di valori (\bar{u}, \bar{x}) tali che le equazioni di stato siano tutte nulle ($f(\bar{u}, \bar{x}, t) = 0$) e l'uscita di equilibrio vale $g(\bar{u}, \bar{x}, t) = \bar{y}$.

Uno dei requisiti principali dei sistemi di controllo è la garanzia di stabilità; questo concetto è legato in modo analitico ai movimenti del sistema: si parla infatti di stabilità dei movimenti di un sistema (e non del sistema).

DEFINIZIONE 1.5. Il movimento dello stato ottenuto a partire da condizioni iniziali $x(t_0)$ e applicando l'ingresso $u(t \geq t_0)$ si dice *stabile* se, comunque preso un ε piccolo a piacere positivo esiste un δ piccolo a piacere positivo tale che, per tutti i valori di \tilde{x}_0 (perturbazioni dei valori iniziali) che soddisfano $\|\tilde{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ (condizione iniziale perturbata sufficientemente vicina a quella iniziale nominale) risulti $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon$, dove $\tilde{x}(t)$ è il movimento generato dal sistema con condizione iniziale \tilde{x}_0 (valga $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$) e lo stesso ingresso, con $t > t_0$.

Scrivendo la formula logica si ha che la definizione equivale a

$$(1.2.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall \tilde{x}_0 (\|\tilde{x}_0 - x_0\| \leq \delta) \Rightarrow \forall t > t_0 (\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon))$$

**Stabilità di un
sistema LTI**

La definizione afferma che per ogni $t > t_0$ il segnale perturbato $x(t)$ rimane confinato intorno al movimento nominale per una \tilde{x}_0 entro un intorno della condizione iniziale nominale.

Dalla Definizione 1.5 segue la

DEFINIZIONE 1.6. Un movimento si dice *instabile* se non vale la (1.2.1).

Se anche in presenza di una perturbazione si osserva una convergenza del movimento a quello nominale si parla di

DEFINIZIONE 1.7. Un movimento si dice *asintoticamente stabile* se soddisfa la Definizione 1.5 e vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t) - x(t)\| = 0$$

ovvero la perturbazione si smorza nel tempo.

Nei capitoli successivi si vedrà che nel caso di sistemi lineari dinamici tempo-invarianti la stabilità è una proprietà strutturale, ovvero se il sistema ha un movimento stabile allora tutti i suoi movimenti sono stabili (quindi per i sistemi LTI si può anche parlare di stabilità del sistema).

Il prossimo esempio presenta il concetto di equilibrio dei movimenti e di sovrapposizione degli effetti in modo analitico:

ESEMPIO 1.6. *Sia dato un circuito costituito da una serie di un resistore di resistenza R e un condensatore di capacità C ; è possibile forzare una tensione $v(t)$ ai capi della serie e si vuole misurare la tensione $v_c(t)$ ai capi del condensatore. ✓ Studiare la condizione di equilibrio e i movimenti del sistema.*

In analogia con l'Esempio 1.2, il modello per questo sistema, posto $v_c(t) = x(t)$, è $\dot{x}(t) = -1/RC \cdot x(t) + 1/RC \cdot u(t)$; $y(t) = x(t)$. Applichiamo al circuito una tensione costante $u(t) = \bar{u}$ e controlliamo se si presenta un movimento di equilibrio: dalla Definizione 1.4 segue che dobbiamo cercare \bar{x} tale che $-1/RC \cdot \bar{x} + 1/RC \cdot \bar{u} = 0$; questo si verifica per $\bar{x} = \bar{u}$. Tutte le coppie (\bar{x}, \bar{u}) tali che $\bar{x} = \bar{u}$ sono equilibri.

Per capire di che tipo di equilibrio si tratti (stabile, instabile, asintoticamente stabile) si usa di nuovo la Definizione 1.4, assumendo che prendendo un movimento di equilibrio la condizione iniziale sia l'equilibrio stesso: partiamo dunque da $\bar{x} = x(t_0)$ e applichiamo il segnale costante $\bar{u} = u(t > t_0)$ (pari al valore di equilibrio); siccome il sistema è tempo-invariante possiamo considerare il tempo iniziale $t_0 = 0$.

Studiamo in queste condizioni il comportamento di un movimento del sistema a fronte di una perturbazione: ponendo $\tilde{x}(t_0) = \bar{x} + \delta$ scriviamo l'equazione del movimento quando $u(t) = \bar{u}$ come

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-1/RCt} + (1 - e^{-1/RCt}) \bar{u}$$

Si tratta dell'equazione analitica del movimento dello stato in forma chiusa; notando che compaiono degli esponenziali con esponente sempre minore di zero (il tempo t e i valori di R e C sono positivi) possiamo affermare che la precedente tende per $t \rightarrow \infty$ a \bar{u} , che è il valore del movimento nominale: il movimento converge a quello nominale in modo asintotico, in particolare (dalla Definizione 1.5)

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| = \|\bar{x} - \tilde{x}_0 e^{-1/RCt} - (1 - e^{-1/RCt}) \bar{u}\|$$

$$\stackrel{\bar{x} \rightarrow \bar{u}}{=} \|\bar{x} - \tilde{x}_0 e^{-1/RCt} - \bar{x} + e^{-1/RCt} \bar{u}\| = \|(\delta - \bar{x}) e^{-1/RCt} + e^{-1/RCt} \bar{u}\|$$

$$\stackrel{\bar{u} \rightarrow \bar{x}}{=} \|\delta e^{-1/RCt} + (\bar{x} - \bar{x}) e^{-1/RCt}\| = \|\delta e^{-1/RCt}\|$$

Nel passaggio $*$ si è usata la considerazione iniziale per cui $\tilde{x}(t_0) = \bar{x} + \delta = \tilde{x}_0$; si ottiene un'esponenziale decrescente che soddisfa la Definizione 1.7, dunque per questo sistema qualsiasi condizione di equilibrio ha stabilità asintotica. \square

1.2.2. Formula di Lagrange. Vogliamo calcolare i movimenti di un sistema lineare: consideriamo prima l'equazione di stato (il movimento dell'uscita si ottiene facilmente dal movimento dello stato):

$$\dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu(\tau)$$

dove si assume che $x(\tau = t_0)$ e $u(\tau > t_0)$. Moltiplicando entrambi i membri per l'esponenziale di matrice $e^{A(t-\tau)}$ si ottiene

$$e^{A(t-\tau)}\dot{x}(\tau) - Ae^{A(t-\tau)}x(\tau) = e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)$$

$$e^{A(t-\tau)}\dot{x}(\tau) - Ae^{A(t-\tau)}x(\tau) = \frac{\partial (e^{A(t-\tau)}x(\tau))}{\partial \tau}$$

La seconda uguaglianza mette in risalto che al primo membro è presente una derivata di un prodotto: sostituendo una delle due precedenti equazioni nell'altra e integrando entrambi i membri scriviamo

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} e^{A(t-\tau)}x(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

Il primo membro può essere ricavato direttamente come $[e^{A(t-\tau)}x(\tau)]_{t_0}^t = x(t) - e^{A(t-t_0)}x(t_0)$; il secondo membro non può essere manipolato nella sua forma generale: la scrittura risultante è la formula di Lagrange:

$$(1.2.2) \quad x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

Si ricordi che i coefficienti scritti in maiuscolo sono matrici, per le quali valgono specifiche proprietà (consultare l'appendice A)

Formula di Lagrange

La (1.2.2) è un integrale di convoluzione che permette di ottenere l'espressione del movimento dello stato di un sistema LTI; essa è la somma di due contributi: un primo contributo chiamato *movimento libero* (dipendente dalla matrice A e dalle condizioni iniziali), e un secondo contributo chiamato *movimento forzato* (dipendente dall'effetto dell'ingresso sul sistema).

Verifichiamo ora la proprietà della sovrapposizione degli effetti nei sistemi LTI sui movimenti del sistema:

OSSERVAZIONE 1.1. Il PSE afferma che, presa una coppia di condizioni iniziali e una di ingressi, il movimento dello stato e dell'uscita del sistema si ottiene come combinazione lineare dei movimenti degli ingressi e degli stati; poniamo per semplicità $t_0 = 0$ e scriviamo in generale le coppie ingresso-stati usando la (1.2.2):

$$\begin{cases} x'(t) = e^{At}x'_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu'(\tau) d\tau & \text{per } (x'_0, u'(t)) \\ x''(t) = e^{At}x''_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu''(\tau) d\tau & \text{per } (x''_0, u''(t)) \end{cases}$$

D'ora in avanti si userà la sigla PSE per riferirsi al principio di sovrapposizione degli effetti

a questo punto si prende una terza coppia $(x'''_0, u'''(t))$ come combinazione lineare dei movimenti delle due precedenti:

$$\begin{aligned} x'''_0 &= \alpha_1 x'_0 + \alpha_2 x''_0 \\ u'''(t) &= \alpha_1 u'(t) + \alpha_2 u''(t) \end{aligned}$$

dove i coefficienti α_1 e α_2 sono scalari; dalle due precedenti il movimento dello stato sarà (raccolgendo dalla (1.2.2))

$$\boxed{x'''(t) = \alpha_1 x'(t) + \alpha_2 x''(t)}$$

La (1.2.2) permette anche per calcolare l'espressione del movimento di uscita; nel contesto di questa osservazione vale

$$(1.2.3) \quad y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

Possiamo dunque calcolare i movimenti dell'uscita rispetto ai movimenti dello stato applicando la precedente e raccogliendo come per il movimento dello stato:

$$\boxed{y'''(t) = \alpha_1 y'(t) + \alpha_2 y''(t)}$$

1.2.3. Movimento libero e forzato. Prendiamo un sistema di ordine uno con a e b scalari: avremo il movimento dello stato $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$; consideriamo il movimento libero ponendo $u(t) = 0$ e supponiamo nota la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, applicando la (1.2.2) scriveremo

$$(1.2.4) \quad x(t) = e^{at}x_0$$

che è la componente del movimento libero. Questa funzione dipende dal valore di a nel seguente modo

- per $a > 0$ si ha un andamento esponenziale crescente;
- per $a < 0$ si ha un andamento esponenziale decrescente;
- per $a = 0$ si ha un andamento costante.

Considerando il caso $a = 0$, ci chiediamo quanto velocemente il movimento libero converga a zero, ovvero quando $x(t) = \varepsilon x_0$ con $\varepsilon \in (0, 1)$ molto piccolo.

Sostituendo si ha $e^{at\varepsilon}x_0 = x_0\varepsilon \rightarrow e^{at\varepsilon} = \varepsilon \rightarrow t\varepsilon = \frac{1}{|a|} |\ln(\varepsilon)|$ e ponendo $T = \frac{1}{|a|}$ (chiamata *costante di tempo*) scriviamo infine

$$t_\varepsilon = T |\ln(\varepsilon)|$$

Il valore T ci dice quanto velocemente il movimento libero (per moto convergente) converge. Per esempio per $\varepsilon = 5\%$ vale $t_\varepsilon \simeq 3T$.

Analizziamo adesso il movimento forzato, ponendo l'ingresso al valore $u(t) = \bar{u} \cdot \text{sca}(t)$ dove l'ingresso canonico $\text{sca}(t) : \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$ viene moltiplicato per il valore costante \bar{u} . Annulliamo le altre condizioni iniziali per studiare solo la parte forzata, ponendo $t_0 = 0$, $\bar{u} > 0$, $x_0 = 0$. Sono ammissibili due procedimenti:

(1) FORMULA DI LAGRANGE:

Dall'integrale di convoluzione al secondo addendo di (1.2.2) otteniamo (portando le costanti fuori dall'integrale)

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} b\bar{u} \text{sca}(\tau) d\tau = e^{at} b\bar{u} \int_0^t e^{-a\tau} \text{sca}(\tau) d\tau$$

Tra gli estremi di integrazione $\text{sca}(\tau)$ vale 1

$$(1.2.5) \quad = e^{at} b\bar{u} \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{at} b\bar{u} [e^{-a\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} = \boxed{-\frac{b}{a} \bar{u} (1 - e^{at})}$$

Al variare dello scalare a nell'esponenziale si hanno i seguenti andamenti (supponiamo $b \geq 0$):

Nell'automatica si utilizzano gli ingressi canonici di un sistema, segnali interessanti dal punto di vista delle prestazioni del sistema e del calcolo del suo comportamento; useremo nel seguito lo scalino ($\text{sca}(t)$)

Movimento forzato

- per $a > 0$ si ha un andamento esponenziale crescente, tendente a $+\infty$;
- per $a < 0$ si ha un andamento esponenziale decrescente, tendente a $\frac{b}{|a|}\bar{u}$;
- per $a = 0$ si ha un andamento lineare, tendente a $b\bar{u}$; per ottenerlo bisogna fare un passo indietro rispetto alla (1.2.2): se a si annulla infatti vale che $\dot{x}(t) = b\bar{u}$ che è un segnale costante, dunque la primitiva $x(t)$ ha andamento di una retta divergente.

(2) SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

Calcoliamo per prima cosa la condizione di equilibrio del sistema ($\dot{x}(t) = 0$) a fronte di un ingresso costante \bar{u}

$$(1.2.6) \quad \dot{x}(t) = a\bar{x} + b\bar{u} = 0 \rightarrow \boxed{\bar{x} = -\frac{b}{a}\bar{u}}$$

Interessiamoci al movimento forzato con ingresso a scalino e condizioni iniziali nulle; possiamo scomporre questo ingresso come una somma di contributi: condizione iniziale \bar{x} e $u(t) = \text{sca}(t)$, e condizione iniziale $x_0 - \bar{x}$.

Per il primo contributo, essendo il sistema in equilibrio per ipotesi, il movimento vale $x(t) = \bar{x}$. Per il secondo contributo considero

$$\begin{cases} x'_0 = \bar{x}, & u'(t) = \bar{u} \cdot \text{sca}(t) \\ x''_0 = -\bar{x}, & u''(t) = 0 \end{cases}$$

La somma di tali condizioni iniziali e ingressi fornisce il movimento cercato senza usare l'integrale di convoluzione:

$$\begin{cases} x'(t) = \bar{x} & (1) \\ x''(t) = -e^{at}\bar{x} * \frac{b}{a}e^{at}\bar{u} & (2) \end{cases}$$

dove la (1) rappresenta il movimento a partire da condizioni iniziali di equilibrio con ingresso di equilibrio, mentre (2) con ingresso nullo e condizione iniziale $-\bar{x}$ è la risposta libera del sistema (nell'uguaglianza $*$ si è sostituita la (1.2.6) a \bar{x}).

Il movimento cercato sarà la somma dei due contributi appena calcolati (dalla (1.1.5) usiamo $x_0 = x'_0 + x''_0$):

$$x(t) = -\frac{b}{a}\bar{u}(1 - e^{at})$$

Otteniamo infine lo stesso risultato dell'integrale di convoluzione.

OSSERVAZIONE 1.2. Ricapitolando, abbiamo scelto una condizione iniziale e un ingresso per facilitare i calcoli: volendo studiare la condizione iniziale nulla $x_0 = 0$, prendiamo una prima condizione iniziale $x'_0 = \bar{x}$ perché in sua presenza il movimento sarà costante pari a \bar{x} ; siccome la condizione di interesse è quella nulla, prendiamo un secondo movimento con condizione iniziale opposta al primo ($x''_0 - \bar{x}$) tale che la somma dei due si annulli. Infine abbiamo preso due ingressi tali che $u'(t) + u''(t) = u(t)$.

Proviamo nuovamente a calcolare nel caso $a < 0$ il tempo che il movimento forzato impiega a raggiungere un valore stazionario (asintotico) di stato:

$$x(t_\varepsilon) = \bar{x}(1 - \varepsilon) = -\frac{b}{a}\bar{u}(1 - \varepsilon) = -\frac{b}{a}\bar{u}(1 - e^{at_\varepsilon})$$

ottenuta dalle (1.2.6) per il secondo membro e (1.2.5) per il terzo. Dall'equazione precedente si ricava

$$t_\varepsilon = \frac{1}{|a|} |\ln(\varepsilon)|$$

che è la stessa condizione del (1.2.4); essa implica la presenza di una costante di tempo $T = 1/|a|$ per movimenti convergenti ($a < 0$).

1.3. Rappresentazione equivalente

Rispetto al precedente paragrafo, dobbiamo generalizzare i conti fatti per ottenere i movimenti a coefficienti matriciali (soprattutto per quanto riguarda la matrice A); per affrontare questa generalizzazione introduciamo il seguente concetto di *rappresentazione equivalente*, in sistemi LTI.

Riprendendo l'Esempio 1.5, si era scelto come vettore dello stato posizione e velocità delle due masse; nulla ci vieta di scegliere diversamente lo stato. Prendendo distanza e velocità relative tra le due masse otteniamo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_1(t) - p_2(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t) \end{bmatrix}$$

Si noti che è ammissibile qualsiasi scelta che sia una combinazione lineare degli stati di partenza; in questo specifico caso lo stato equivalente può essere espresso come il prodotto di una matrice di trasformazione per il vettore degli stati:

$$\hat{x}(t) = T \cdot x(t) \rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_1(t) - p_2(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t) \end{bmatrix}}^{\hat{x}(t)} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^T \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} p_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix}}^{x(t)}$$

Perché l'equivalenza sia valida deve verificarsi che T sia una matrice invertibile (nel contesto di questo esempio $\det(T) = -1$ quindi è invertibile).

Ci chiediamo ora come si possano ottenere le rispettive equazioni della dinamica del sistema: dalla precedente, esplicitando lo stato e supponendo T invertibile si può riscrivere che $x(t) = T^{-1} \cdot \hat{x}(t)$.

Partiamo da (1.1.3) e adottiamo le considerazioni appena fatte:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \rightarrow T^{-1}\dot{\hat{x}}(t) = A \cdot T^{-1}\hat{x}(t) + Bu(t) \\ &\rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = T \cdot A \cdot T^{-1}\hat{x}(t) + T \cdot Bu(t) \end{aligned}$$

L'equazione di uscita sarà di conseguenza

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \rightarrow y(t) = C \cdot T^{-1}\hat{x}(t) + Du(t)$$

Il sistema che si ottiene è LTI della stessa forma di quello originale (1.1.3) ma con i coefficienti matriciali (la cosiddetta rappresentazione del modello) equivalenti che ridefiniscono le equazioni nel modo seguente:

$$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1}, \hat{B} = T \cdot B, \hat{C} = C \cdot T^{-1}, \hat{D} = D$$

**Modello
equivalente per
sistemi LTI** (1.3.1)

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) \\ y(t) = \hat{C} \cdot \hat{x}(t) + \hat{D} \cdot u(t) \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1.3. Per il PSE uno stato è combinazione lineare dello stato precedente e questo vale per tutti i movimenti; fissando condizione iniziale e ingresso si ottiene un movimento la cui rappresentazione equivalente è la combinazione lineare dei movimenti originali secondo la matrice T di trasformazione.

Dall'Osservazione A.10 possiamo risolvere il calcolo dei movimenti di un generico sistema con matrice A quadrata, di cui basta cercare la rappresentazione equivalente più comoda per risolvere le equazioni: se A fosse diagonalizzabile, potremmo adottare una rappresentazione equivalente nella quale \hat{A} è diagonale (quindi composta dai soli autovalori sulla diagonale mentre gli altri elementi sono nulli); questo facilita l'uso della (1.2.2) poiché l'esponenziale di una matrice diagonale si ricava facilmente.

Si nota che qualsiasi movimento dello stato di un sistema LTI è combinazione lineare di un numero piccolo di movimenti possibili, tanti quanti gli autovalori della matrice A della rappresentazione.

Nelle prossime sezioni vedremo che tutte le proprietà di un sistema LTI dipendono dagli autovalori di A , chiamati *modi* del sistema.

1.4. Movimenti generati dai modi

1.4.1. Modi e autovalori. Prendiamo in esame il caso in cui la matrice A da (1.1.3) sia diagonalizzabile (autovalori tutti distinti, vedi Osservazione A.9): gli autovettori della matrice saranno soluzione di $(\lambda_i I - A) v_i = 0$, generando una matrice di autospazi per una matrice diagonale di autovalori come

$$A = \overbrace{[v_1, v_2, \dots, v_n]}^{T_D} \cdot \overbrace{\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}}^{A_D} \cdot T_D^{-1}$$

dove T_D è la trasformazione che diagonalizza A in A_D (matrice diagonale con autovalori di A); possiamo riscrivere la relazione tra la matrice e la sua diagonale nei modi seguenti:

$$T_D^{-1} \cdot A_D = A \cdot T_D^{-1} \rightarrow A = T_D^{-1} \cdot A_D \cdot T_D \rightarrow A_D = T_D \cdot A \cdot T_D^{-1}$$

Se scegliamo un nuovo stato $\hat{x}(t) = T_D \cdot x(t)$ ottenuto tramite la matrice di diagonalizzazione, ottengo l'equazione del modello:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_D \cdot \hat{x}(t) + T_D \cdot B u(t) \\ y(t) = C \cdot T_D^{-1} \cdot \hat{x}(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Notiamo che il nuovo sistema ha per matrice di stato una matrice diagonale (A_D); ponendo la condizione iniziale $\hat{x}_0 = T_D \cdot x_0$, il movimento libero (poniamo ingresso $u(t) = 0$) del sistema si ottiene dalla (1.2.4):

$$\hat{x}(t) = e^{A_D t} \hat{x}_0$$

dove l'esponenziale di matrice diagonale vale $e^{A_D t} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$, dove gli autovalori sulla diagonale sono chiamati *modi* del sistema.

OSSERVAZIONE 1.4. Questa è una generalizzazione del caso scalare studiato nella precedente sezione: la matrice A era composta da un singolo elemento e avevamo ottenuto movimenti della forma e^{at} .

Nel caso vettoriale con matrice A diagonalizzabile, troviamo una matrice di trasformazione T_D che produce un sistema equivalente il cui stato è combinazione degli stati originali, col vantaggio che la sua matrice di stato (A_D) è diagonale; a questo punto analizzando il movimento libero con la (1.2.2) si ottiene necessariamente la combinazione lineare dei modi (espressioni della stessa forma $e^{\lambda_i t}$) del nuovo sistema.

Infine, calcoliamo il movimento libero dello stato del sistema originale, tramite la trasformazione inversa

$$x(t) = T_D^{-1} \cdot \hat{x}(t)$$

Possiamo affermare che in sistemi LTI qualsiasi movimento libero del sistema è una combinazione dei suoi modi, che sono al più n . Se la matrice di stato ha coefficienti reali, si ottengono autovalori reali oppure complessi coniugati; i casi possibili sono elencati di seguito (viene sottinteso che per λ_i complessi si abbia una coppia di autovalori complessi coniugati):

- $\lambda_i \in \mathbb{R}$
 - $\lambda_i < 0$: modo convergenti;
 - $\lambda_i = 0$: modo costanti;
 - $\lambda_i > 0$: modo divergenti.
- $\lambda_i \in \mathbb{C}$
 - $\Re(\lambda_i) > 0$: modo oscillante divergente;
 - $\Re(\lambda_i) = 0$: modo oscillante limitato;
 - $\Re(\lambda_i) < 0$: modo oscillante convergente.

**Andamenti
asintotici dei
modi di sistemi
LTI**

In particolare, per il caso di autovalori complessi coniugati, avremo $\lambda_{i,1} = \sigma_i + j\omega_i$, $\lambda_{i,2} = \sigma_i - j\omega_i$, si dimostra che anche gli autovettori associati sono complessi coniugati e gli esponenziali $e^{\lambda_i t}$ saranno moltiplicati per coefficienti complessi coniugati; otterremo dei termini del tipo:

$$(a_i + jb_i) e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + (a_i - jb_i) e^{(\sigma_i - j\omega_i)t}$$

Se chiamiamo il modulo del coefficiente complesso $m_p = |a_i \pm jb_i|$ e la sua fase $\phi_p = \arg(a_i \pm jb_i)$, possiamo riscrivere la precedente come:

$$m_p e^{j\phi_p} \cdot e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + m_p e^{-j\phi_p} \cdot e^{(\sigma_i - j\omega_i)t}$$

$$(1.4.1) \quad \text{Modo oscillante} \quad = m_p e^{\sigma_i t} \cdot (e^{j(\omega_i t + \phi_p)} + e^{-j(\omega_i t - \phi_p)}) = \boxed{m_p e^{\sigma_i t} \cdot 2 \cos(\omega_i t + \phi_p)}$$

dove nella seconda uguaglianza è stata utilizzata la (A.5.1) ottenendo $e^{(\omega_i t \pm \phi_p)} = \cos(\omega_i t \pm \phi_p) + j \sin(\omega_i t \pm \phi_p)$. Chiamiamo modo oscillante l'espressione (1.4.1), anche se in modo improprio dato che si tratta della combinazione lineare di due modi (la coppia di complessi coniugati); esso presenta un andamento reale in funzione del tempo.

ESEMPIO 1.7. Sia dato un circuito formato da una maglia con la serie di resistore di valore R , condensatore di valore C e induttore di valore L , chiusi su un generatore indipendente di tensione $u(t)$, che è l'ingresso del sistema. Nella serie scorre una corrente $i(t)$ e su condensatore e induttore ci sarà rispettivamente una tensione $v_c(t)$ e $v_L(t)$; ✓ si scriva un modello per questo sistema che abbia come uscita la tensione sul condensatore $v_c(t)$ e ✓ si analizzi il movimento libero del sistema (senza ingresso) al variare dei parametri costruttivi (R, L, C).

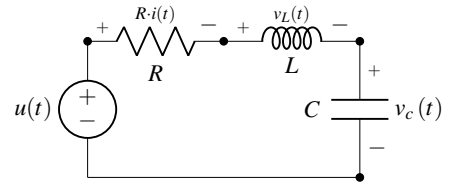


Figura 1.4.1. Circuito RLC con generatore controllato in ingresso

Per i due componenti dinamici (condensatore e induttore) si hanno dalla Fisica le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v_c(t) &= \frac{i(t)}{C} \\ \frac{\partial}{\partial t} i(t) &= \frac{v_L(t)}{L} = \frac{1}{L} (u(t) - Ri(t) - v_c(t)) \end{aligned}$$

Abbiamo sostituito la tensione sull'induttore nella seconda relazione col bilancio delle tensioni sulla maglia, scrivendo $v_L(t)$ in funzione di $v_c(t)$, con $Ri(t)$ la tensione sul resistore.

Scegliamo le variabili di stato per portare le equazioni in forma standard: abbiamo la derivata della tensione sul condensatore nella prima e la derivata della corrente nella seconda, quindi prendiamo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

da cui segue la seguente scrittura per l'equazione di stato (1.1.3):

$$\dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}}^A \cdot x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}}^B u(t)$$

Scegliamo come condizioni iniziali una certa corrente nel circuito e una certa tensione ai capi della capacità al tempo $t = 0 = t_0$; imponiamo inoltre l'equazione di uscita per ottenere $v_c(t)$:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t_0) \\ v_c(t_0) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

Cerchiamo prima di tutto gli autovalori della matrice di stato A :

$$\begin{vmatrix} \lambda + R/L & 1/L \\ -1/C & \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$$

Dovremo studiare i casi distinti in cui gli autovalori saranno reali e i casi in cui saranno complessi coniugati, in dipendenza dal numeratore della frazione sotto radice. Dovendo cercare il movimento libero calcoleremo la funzione $e^{A \cdot t} x_0$, dalla (1.2.4).

AUTOVALORI REALI E DISTINTI ($R^2C > 4L$):

In questo caso vale $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$ dunque avendo autovalori distinti la matrice A è diagonalizzabile; gli autovettori associati a tali autovalori sono:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ L\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ L\lambda_1 \end{bmatrix}$$

da cui otteniamo l'inversa della matrice di trasformazione e possiamo ricavare direttamente T_D :

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L\lambda_2 & L\lambda_1 \end{bmatrix} \rightarrow T_D = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & -1/L \\ -\lambda_2 & 1/L \end{bmatrix}$$

La matrice di stato sarà dunque simile a una matrice diagonale A_D con gli stessi autovalori:

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L\lambda_2 & L\lambda_1 \end{bmatrix}}^{T_D^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{A_D} \cdot \overbrace{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & -1/L \\ -\lambda_2 & 1/L \end{bmatrix}}^{T_D}$$

L'esponenziale di questa matrice diagonale vale quanto quello della sua diagonalizzata A_D trasformata da T_D :

$$e^{A \cdot t} = T_D^{-1} \overbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}}^{e^{A_D t}} \cdot T_D$$

D'ora in avanti si prestino molta attenzione al pedice D alle matrici: le relazioni che seguono sfruttano le proprietà di similitudine e diagonalizzabilità de l'appendice A

La risposta libera del sistema $x(t) = e^{A \cdot t} x_0$ si riscrive dalle precedenti come:

$$x(t) = T_D^{-1} \cdot e^{A_D t} \cdot T_D \cdot x_0$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} (\lambda_1 x_{0,1} - 1/L x_{0,2}) e^{\lambda_1 t} + (\lambda_2 x_{0,1} + 1/L x_{0,2}) e^{\lambda_2 t} \\ (\lambda_1 x_{0,1} - 1/L x_{0,2}) L \lambda_2 e^{\lambda_1 t} + (-\lambda_2 x_{0,1} + 1/L x_{0,2}) L \lambda_1 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

La precedente ha due componenti siccome lo stato ha due componenti. I suoi coefficienti sono una combinazione lineare dei coefficienti dello stato iniziale e degli elementi della matrice di trasformazione. Il movimento avrà un andamento sempre convergente: dall'espressione degli autovalori ricavata inizialmente si ricava

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}} \right) < 0$$

essendoci posti nel caso $R^2 C > 4L$, quindi gli autovalori reali distinti saranno sempre negativi e ogni possibile modo derivante avrà andamento convergente.

Le costanti di tempo di ciascun modo sono $T_i = \frac{1}{|\lambda_i|}$.

AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI ($R^2 C < 4L$):

I due autovalori saranno pari a $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega \in \mathbb{C} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$; essendo sempre distinti la matrice di stato sarà comunque diagonalizzabile. Gli autovettori di A e le relative matrici di trasformazione sono uguali a quelle ottenute nel caso precedente; in particolare vale

$$\sigma = -\frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{|R^2 C - 4L|}{4L^2 C}}$$

Anche in questo caso è corretta l'espressione per $x(t) = e^{A \cdot t} x_0$ ottenuta nel caso precedente; per facilitare la scrittura del primo stato, definiamo i seguenti:

$$m_p = \left| \frac{x_{0,1}}{2} - \frac{j}{2\omega} \left(\sigma x_{0,1} - \frac{1}{L} x_{0,2} \right) \right|, \quad \phi_p = \arg \left(\frac{x_{0,1}}{2} - \frac{j}{2\omega} \left(\sigma x_{0,1} - \frac{1}{L} x_{0,2} \right) \right)$$

Dopo aver messo in coordinate polari i coefficienti tramite le due precedenti, si ottiene:

$$x_1(t) = m_p e^{\sigma t} \cdot 2 \cos(\omega t + \phi_p)$$

Viene riconfermato il risultato (1.4.1).

Un circuito
oscillante
analogico, come un
risonatore puro, ha
applicazioni nel
campo
dell'elettronica
delle
telecomunicazioni

L'andamento è decrescente, determinato dall'esponente $\sigma = -R/2L < 0$, dato che le grandezze di resistenza e induttanza sono sempre positive in un sistema reale; la pulsazione ω risulta invece inversamente proporzionale ai valori di resistenza e induttanza: se avessimo un circuito di resistenza $R = 0$ si avrebbe $\omega = \sqrt{1/LC}$, che caratterizza il circuito come risonatore puro.

AUTOVALORI COINCIDENTI ($R^2 C = 4L$):

I due autovalori saranno pari a $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = -R/2L$ (si annulla la radice nell'espressione degli autovalori) e in generale, la matrice di stato potrebbe non essere diagonalizzabile: controlliamo che la molteplicità algebrica dell'autovalore λ (pari a 2 in questo caso) e quella geometrica coincidano:

$$g_1 = n - \text{rango} \left(-\frac{R}{2L} I - A \right) = 2 - \text{rango} \left(\begin{bmatrix} -\frac{R}{2L} + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \right)$$

$$= 2 - \text{rango} \left(\begin{bmatrix} -\frac{R}{2L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{R}{4L} & -\frac{1}{2L} \end{bmatrix} \right) = 2 - 1 = 1$$

dove nella seconda abbiamo sostituito $C = 4L/R^2$ dalla condizione studiata e il rango è 1 poiché la seconda riga è combinazione lineare della prima per $-R/2$. Essendo $g_1 < n_1$ la matrice di stato non è diagonalizzabile; tuttavia può essere scritta in forma (A.3.2): la matrice A_J ottenuta sarà in relazione con A nel modo seguente:

$$(1.4.2) \quad A = T_J^{-1} \cdot A_J \cdot T_J$$

La matrice in forma di Jordan avrà sulla diagonale i due autovalori coincidenti e un 1 in posizione $a_{1,2}$ mentre la matrice di trasformazione si ottiene calcolando (A.3.1):

$$A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad T_J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 L & L(\lambda_1 - 1) \end{bmatrix} \rightarrow T_J = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L(\lambda_1 - 1) & 1 \\ -\lambda_1 L & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo a questo punto ottenere il movimento libero con (1.2.4) applicato al sistema in forma di Jordan, a cui applichiamo la trasformazione (1.4.2):

$$(1.4.3) \quad x(t) = T_J^{-1} \cdot e^{A_J t} \cdot T_J \cdot x_0 = e^{A t} x_0$$

dove si ha che $e^{A_J t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$.

OSSERVAZIONE 1.5. Svolgendo il prodotto (1.4.3) otteniamo una risposta libera come combinazione lineare dei modi ottenuti nel caso di autovalori reali distinti, con dei nuovi modi esponenziali (tanti quanti gli autovalori con $g_i < n_i$).

Nel caso di una matrice non diagonalizzabile, gli autovalori con molteplicità algebrica $n_i > 1$ che si ottengono dalla forma di Jordan determinano i seguenti andamenti dei modi:

- $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (modi del tipo $t e^{\lambda_i t}$):
 - $\lambda_i > 0$: modo divergente;
 - $\lambda_i = 0$: modo limitato;
 - $\lambda_i < 0$: modo convergente.
- $\lambda_i \in \mathbb{C}$ (autovalori complessi coniugati, modi del tipo $t e^{\sigma t} (\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi))$):
 - $\Re(\lambda_i) > 0$: modo divergente (esponenziale);
 - $\Re(\lambda_i) = 0$: modo divergente (lineare);
 - $\Re(\lambda_i) < 0$: modo convergente.

□

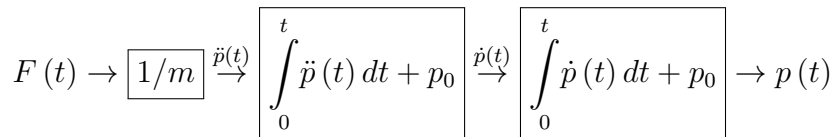


Figura 1.4.2. Schema a blocchi del doppio integratore in questo sistema

ESEMPIO 1.8. Consideriamo un carrello di massa m che si muova lungo una superficie priva di attrito con una traiettoria rettilinea; la sua posizione è data da $p(t)$ mentre ad esso è applicata una forza esterna $F(t)$. ✓ Scrivere un modello per questo sistema in cui si misuri la posizione e ✓ stabilirne l'andamento dei modi.

Il sistema nell'esempio con due autovalori coincidenti nulli appartiene alla categoria dei *doppi integratori*

Si ricava facilmente l'equazione della dinamica del sistema:

$$m \cdot a(t) = F(t)$$

L'ingresso del sistema sarà la forza ($u(t) = F(t)$) e l'uscita da misurare la posizione ($y(t) = p(t)$); come stati scegliamo la posizione ($p(t)$) e la velocità ($\dot{p}(t)$) in modo da poter scrivere in funzione di essi l'accelerazione ($\ddot{p}(t)$):

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix}$$

Dalla (1.1.3) le equazioni di stato saranno scritte come:

$$\dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^A \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix}}^{x(t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}^B \cdot \overbrace{F(t)}^{u(t)}$$

Il sistema di questo esempio si chiama appunto doppio integratore poiché presenta due integrazioni in serie dell'ingresso (mostrate in Figura 1.4.2); cerchiamo gli autovalori della matrice di stato per calcolare i movimenti del sistema: essendo una matrice triangolare, gli autovalori sono i coefficienti sulla diagonale principale, ovvero vale:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Si osserva inoltre che A è già in forma (A.3.2); posto $x(t_0) = x_0$, il movimento libero (1.2.4) di questo sistema sarà pari a

$$x(t) = e^{A \cdot t} x_0 = \begin{bmatrix} e^{0t} & te^{0t} \\ 0 & e^{0t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,1} + tx_{0,2} \\ x_{0,2} \end{bmatrix}$$

dove l'esponenziale si calcola in modo diretto per la matrice di stato di ordine 2 in forma di Jordan.

Il movimento ottenuto rappresenta il fatto che in un sistema di questo tipo, in assenza di forze in ingresso e di disturbi come l'attrito (siamo nel caso dell'esempio) la velocità rimarrà costante nel tempo mentre la posizione (integrale della velocità) aumenterà in modo lineare.

Calcoliamo invece il movimento forzato applicando in ingresso uno scalino (forza costante) come $u(t) = \bar{u} \cdot \text{sca}(t)$; la (1.2.5) assume il seguente valore:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \cdot \bar{u} \cdot \text{sca}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{t-\tau}{m} \bar{u} \cdot \text{sca}(\tau) \\ \frac{1}{m} \bar{u} \cdot \text{sca}(\tau) \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}}{2m} [- (t-\tau)^2]_0^t \\ \frac{1}{m} \bar{u} [\tau]_0^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}}{2m} t^2 \\ \frac{1}{m} \bar{u} t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

I coefficienti risultanti dal movimento forzato sono una riscrittura delle equazioni della dinamica, rispettivamente $a_{1,1} : v(t) = a(t)t$, $a_{2,1} : p(t) = \frac{1}{2}a(t)t^2$ ponendo $a(t) = \bar{u}/m$. Notiamo inoltre che il movimento forzato della posizione sarà un esponenziale mentre quello della velocità è lineare, entrambi divergenti. \square

1.4.2. Modo dominante. Prendiamo in esame i sistemi con autovalori reali negativi: essi generano modi convergenti; la costante di tempo associata a ciascun autovalore dipende inversamente da esso come $T_i = 1/|\lambda_i|$ (esiste solo per modi convergenti).

Se invece abbiamo autovalori complessi coniugati nella forma (1.4.1) possiamo vedere la costante di tempo come il tempo impiegato dall'ampiezza dell'oscillazione a scendere sotto una certa soglia: concettualmente si parla dell'esponente σ nel modo oscillante, e la costante di tempo può essere definita come $T = 1/|\sigma|$.

In generale, in un sistema di ordine n ci saranno al più n autovalori con associate le rispettive costanti di tempo; la risposta complessiva del sistema (la combinazione lineare dei modi) sarà influenzata dal modo più "lento" (quello con costante di tempo maggiore): tale modo si chiama *modo dominante*, il quale avrà analiticamente l'autovalore associato con parte reale più piccola degli altri.

1.5. Equilibrio di sistemi LTI

Per portare in equilibrio un sistema LTI a tempo continuo bisogna avere una coppia di condizioni iniziali e ingressi costanti (\bar{x}, \bar{u}) tali che il movimento di stato rimanga costante, ovvero $\dot{x}(t) : A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u} = 0$, e l'equazione di uscita segue da (1.1.3) risultando in $\bar{y} = C \cdot \bar{x} + D \cdot \bar{u}$; questa equazione ammette una e una sola soluzione quando A è invertibile:

- Se A è priva di autovalori nulli allora essa è invertibile, e a fronte di qualsiasi ingresso costante troviamo sempre uno e un solo stato di equilibrio; dall'equazione di stato si ottiene $\bar{x} = A^{-1} \cdot B \cdot \bar{u}$.
- Se A non è invertibile almeno un autovalore è nullo e bisogna risolvere $A \cdot \bar{x} = -B \cdot \bar{u}$.

Dalle precedenti considerazioni scriviamo le equazioni di equilibrio del sistema rispetto ai valori iniziali e alle uscite di equilibrio, ammettendo che A sia invertibile:

$$\begin{cases} \bar{x} = A^{-1} \cdot B \cdot \bar{u} \\ \bar{y} = (-C \cdot A^{-1} \cdot B + D) \bar{u} \end{cases}$$

ESEMPIO 1.9. Dall'Esempio 1.8 otteniamo la seguente equazione del sistema (notando che A non è invertibile in questo caso):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \cdot \bar{u}$$

L'equazione ammette soluzione solo per ingresso nullo $\bar{u} = 0$, mentre la prima equazione impone la velocità $\bar{x}_2 = 0$; a questo punto la posizione $\bar{x}_1 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ può assumere qualunque valore reale. \square

1.6. Risposta all'impulso

L'ingresso canonico chiamato impulso è definito come $\text{imp}(t) = \{1 \text{ per } t = 0; 0 \text{ per } t \neq 0\}$ e il suo integrale vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{imp}(t) dt = 1$$

Nella realtà non è possibile avere un ingresso istantaneo: per modellizzare l'impulso si forza nel sistema un ingresso molto ampio per un breve periodo di tempo a partire da $t = 0$.

Noto il movimento generato dall'impulso di un sistema LTI, è possibile calcolare il movimento forzato derivante da qualsiasi altro ingresso in condizioni iniziali nulle.

In generale il movimento forzato dello stato sarà ottenuto da (1.2.2) come:

$$x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot \text{imp}(\tau) d\tau = e^{A \cdot t} \cdot B \int_0^t \text{imp}(\tau) d\tau$$

**Risposta
all'impulso**

$$(1.6.1) \quad = e^{A \cdot t} \cdot B$$

Si ottiene questo risultato osservando che l'impulso vale 1 solo per $\tau = 0$ e per qualunque valore di $\tau \neq 0$ il prodotto con l'impulso che si annulla annulla tutto l'integrale; nota la (1.6.1) possiamo calcolare in generale il movimento forzato del sistema come integrale di convoluzione di (1.2.5) in cui l'argomento contiene il termine (1.6.1) per l'ingresso forzato in esame.

Un sistema si dirà stabile se la risposta all'impulso genera modi convergenti: osservando la risposta all'impulso (1.6.1) come la risposta libera (1.2.4) con condizioni iniziali pari a B , si vorranno ottenere combinazioni lineari di modi convergenti per garantire la stabilità del sistema.

1.7. Stabilità del sistema

1.7.1. Condizioni di stabilità in sistemi a tempo continuo. Prendiamo un sistema LTI a tempo continuo e poniamoci in una condizione di equilibrio: il movimento dello stato si ottiene dalla (1.2.2); perturbiamo ora la condizione iniziale applicando lo stesso ingresso di equilibrio e chiamiamo $\tilde{x}_0 = x(t_0) + \delta$ dove δ è una perturbazione iniziale.

Scriviamo il movimento perturbato come:

$$\tilde{x}(t) = e^{A \cdot t} \tilde{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot u(\tau) d\tau$$

La distanza della perturbazione da $x(t)$ sarà definita da $\delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$, dove possiamo raccogliere l'esponenziale di matrice e notando che si annulla il termine dovuto all'ingresso (abbiamo ipotizzato una condizione di equilibrio) avremo:

**Andamento della
perturbazione**

$$(1.7.1) \quad e^{A \cdot t} (\tilde{x} - x_0) = e^{A \cdot t} \delta$$

Si ottiene questo risultato a prescindere dalle condizioni iniziali.

OSSERVAZIONE 1.6. In un sistema LTI a tempo continuo, presa qualsiasi coppia di movimento e movimento perturbato, la distanza tra i due movimenti è data sempre dalla (1.7.1); da questo deriva il seguente Teorema 1.1.

**Teorema sulla
stabilità del
sistema**

TEOREMA 1.1. *In un sistema LTI un movimento (incluso quello di equilibrio) è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se sono rispettivamente stabili, asintoticamente stabili o instabili tutti i movimenti del sistema.*

OSSERVAZIONE 1.7. Si nota che l'equazione (1.7.1) è l'espressione di un movimento libero (1.2.4), dunque è una combinazione lineare dei modi del sistema: si deduce che l'espressione (1.7.1) sarà limitata, convergente o divergente a seconda dell'andamento di questi modi. Possiamo quindi controllare l'andamento di (1.7.1) per conoscere l'andamento di tutto il sistema, per il Teorema 1.1.

Possiamo usare le condizioni (1.4.1) assieme alla precedente osservazione per ottenere le seguenti considerazioni:

TEOREMA 1.2. *Un sistema LTI della forma (1.1.3) si dice asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della sua matrice di stato (A) hanno parte reale negativa (ovvero quando (1.7.1) converge a zero).*

Teorema dell'asintotica stabilità

TEOREMA 1.3. *Un sistema LTI della forma (1.1.3) si dice instabile se e solo se almeno uno degli autovalori della sua matrice di stato (A) ha parte reale positiva.*

Teorema dell'instabilità

Per autovalori con parte reale nulla, bisogna controllare la diagonalizzabilità della matrice di stato ($n_i = g_i$): se questo si verifica si ottengono solo modi limitati; se la molteplicità geometrica è inferiore a quella algebrica, allora tutti i modi divergeranno (vedi le condizioni a pagina 22). Enunciamo il seguente

TEOREMA 1.4. *In un sistema LTI, per autovalori della matrice di stato tali che $\Re(\lambda_i) = 0$, se vale $n_i = g_i$ si ha un sistema stabile (modi limitati); nel caso in cui $g_i < n_i$ allora il sistema è instabile.*

Riprendiamo due esempi fatti in precedenza per mostrare un'applicazione dei teoremi appena enunciati:

Dall'Esempio 1.7 si ottenevano due autovalori nella forma $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$; per $R \neq 0$ si ottengono sempre autovalori con parte reale negativa: il sistema risulterà asintoticamente stabile; per $R = 0$ si ottengono autovalori complessi coniugati (immaginari puri): il sistema risulterà semplicemente stabile.

Dall'Esempio 1.8 si ottenevano autovalori nulli con molteplicità algebrica maggiore della geometrica: dalla matrice di stato in forma di Jordan si ottiene che il sistema è instabile.

Elenchiamo ora alcune proprietà dei sistemi LTI asintoticamente stabili:

- (1) Un movimento per $t \rightarrow \infty$ non dipende dalle condizioni iniziali $x(t_0)$;
- (2) La risposta (movimento) a un impulso tende ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$;
- (3) La risposta (movimento) a qualsiasi ingresso limitato nel tempo tende ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$;
- (4) Gli stati e le uscite di equilibrio, con ingresso costante nel tempo (\bar{u}), sono unici e pari a \bar{x} e \bar{y} ;
- (5) Il sistema gode della proprietà di *stabilità esterna*: a fronte di ingressi limitati nel tempo, anche le uscite saranno limitate nel tempo.

La proprietà di stabilità esterna è abbreviata come BIBO: bounded input, bounded output

1.7.2. Segno degli autovalori. Sappiamo che gli autovalori della matrice di stato sono i valori per cui vale la Definizione A.9 e risolvono (A.2.1); chiamiamo tale polinomio $\phi(\lambda) = 0$, che in generale ha grado pari all'ordine della matrice da cui deriva (nel nostro caso ha grado pari all'ordine di A).

Possiamo scrivere tale polinomio come

$$(1.7.2) \quad \phi(\lambda) = \phi_0 \lambda^n + \phi_1 \lambda^{n-1} + \dots + \phi_n$$

Studiamo il segno della parte reale delle soluzioni di tale polinomio, osservando i suoi coefficienti; enunciamo su questa base il seguente:

TEOREMA 1.5. *Se il sistema della forma (1.1.3) è asintoticamente stabile, allora i coefficienti del suo polinomio caratteristico ϕ_i , $i \in 0 \dots n$ hanno tutti lo stesso segno.*

COROLLARIO 1.1. *In un sistema di ordine $n \leq 2$, la condizione del Teorema (1.5) diventa necessaria e sufficiente.*

Nel caso di un sistema di ordine maggiore di 2 con segno concorde per tutti gli autovalori della matrice di stato, il sistema potrebbe essere stabile ma bisogna verificarlo col criterio proposto nella sezione successiva.

1.7.3. Criterio di Routh. Enunciamo un criterio che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per stabilire la stabilità asintotica di un sistema; questo criterio si basa sulla seguente *tabella di Routh*, costruita a partire dal polinomio caratteristico nella forma (1.7.2):

$$(1.7.3) \quad \begin{array}{cccccc} \phi_0 & \phi_2 & \phi_4 & \cdots & \phi_{n-1} & 0 \\ \phi_1 & \phi_3 & \phi_5 & \cdots & \phi_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Questa tabella si compila grazie al seguente *algoritmo di Routh* che dalle due righe precedenti (h_i, k_i) ottiene la successiva (ℓ_i) :

$$(1.7.4) \quad \ell_i = -\frac{1}{k_1} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix} \right) = h_{i+1} - \frac{h_1 k_{i+1}}{k_1}$$

Si osserva che in generale la tabella è triangolare, e inoltre l'algoritmo non si può applicare per il caso $k_1 = 0$ per almeno una riga (in tal caso si dice che la (1.7.3) non è ben definita). L'algoritmo termina quando si otterrebbe uno zero nella prima posizione della riga più in basso.

Criterio di Routh

TEOREMA 1.6. *Un sistema LTI della forma (1.1.3) è asintoticamente stabile se e solo se la tabella di Routh (1.7.3) del polinomio caratteristico della matrice di stato (A) del sistema è ben definita, e tutti gli elementi sulla prima colonna della tabella hanno segno concorde.*

COROLLARIO 1.2. *Il numero di variazioni di segno degli elementi sulla prima colonna della tabella (1.7.3) è pari al numero di autovalori con parte reale positiva (i quali generano modi instabili).*

ESEMPIO 1.10. *Sia dato il seguente polinomio caratteristico della matrice di stato di un sistema LTI di ordine 5*

$$\phi(\lambda) = \lambda^5 + 15\lambda^4 + 85\lambda^3 + 225\lambda^2 + 274\lambda + 120$$

✓ *Verificare la stabilità dei movimenti del sistema.*

Il Teorema 1.5 fornisce un indizio sulla possibile stabilità del sistema: usiamo il Teorema 1.6 per sfruttarne la condizione sufficiente; grazie all'algoritmo (1.7.4) compiliamo la seguente tabella:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 85 & 274 & 0 & & & & \\ 15 & 225 & 120 & 0 & 1 & 85 & 274 & 0 \\ 85 - \frac{1 \cdot 225}{15} & 274 - \frac{1 \cdot 120}{15} & 0 - \frac{1 \cdot 0}{15} & 0 & 15 & 225 & 120 & 0 \\ & \frac{15}{15 \cdot 266} & \frac{15}{15 \cdot 0} & \frac{15}{15 \cdot 0} & 70 & 266 & 0 & 0 \\ 225 - \frac{15}{70 \cdot 120} & 120 - \frac{15}{70 \cdot 0} & 0 - \frac{15}{70 \cdot 0} & 0 = & 168 & 120 & 0 & 0 \\ 266 - \frac{70}{168 \cdot 0} & 0 - \frac{70}{168 \cdot 0} & 0 - \frac{70}{168 \cdot 0} & 0 & 216 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{168}{168 \cdot 0} & \frac{168}{168 \cdot 0} & \frac{168}{168 \cdot 0} & 120 & 0 & 0 & 0 \\ 120 - \frac{168}{216} & 0 - \frac{168}{216} & 0 - \frac{168}{216} & 0 & & & & \end{array}$$

Il sistema risulta asintoticamente stabile per il Teorema 1.6 poiché tutti gli elementi della prima colonna hanno segno concorde. \square

ESEMPIO 1.11. Sia dato un sistema LTI con parametri incerti, ovvero gli autovalori sono variabili; è possibile calcolare il polinomio caratteristico rispetto a tali parametri: ✓ si valuti dunque la stabilità del sistema col seguente polinomio caratteristico di stato

$$\phi(\lambda) = \lambda^3 + (2 + \beta)\lambda^2 + (1 + 2\beta)\lambda + \alpha + \beta$$

Grazie al Teorema 1.6 possiamo compilare una tabella di Routh e ottenere su di essa le condizioni perché gli autovalori incerti abbiano segno concorde.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 + 2\beta & 0 & 1 & 1 + 2\beta & 0 \\ 2 + \beta & \alpha + \beta & 0 & 2 + \beta & \alpha + \beta & 0 \\ \hline (1 + 2\beta) - \frac{1 \cdot (\alpha + \beta)}{2 + \beta} & 0 - \frac{1 \cdot 0}{2 + \beta} & 0 & \frac{2(\beta + 1)^2 - \alpha}{\beta + 2} & 0 & 0 \\ (\alpha + \beta) - \frac{(2 + \beta) \cdot 0}{2(\beta + 1)^2 - \alpha} & 0 - \frac{(2 + \beta) \cdot 0}{2(\beta + 1)^2 - \alpha} & 0 & \alpha + \beta & 0 & 0 \\ \hline \beta + 2 & \beta + 2 & & & & \end{array} =$$

Imponiamo che tutti i coefficienti della prima colonna siano maggiori di zero (è presente un 1, che è costante e positivo, esso influenza il segno della colonna):

$$\begin{cases} 2 + \beta > 0 \\ 2(\beta + 1)^2 - \alpha > 0 \\ \alpha + \beta > 0 \end{cases}$$

Le coppie (α, β) che soddisfano tutte queste condizioni generano movimenti asintoticamente stabili per il sistema. Quelle che non le soddisfano generano movimenti instabili. \square

1.8. Sistemi non lineari tempo-invarianti

1.8.1. Linearizzazione. Un sistema si definisce *non lineare* quando una delle equazioni (1.1.3) non è una combinazione degli stati con gli ingressi; il calcolo dei movimenti per questo tipo di sistemi, a partire da condizioni iniziali ben definite e un certo ingresso non è risolvibile in forma chiusa (l'equazione differenziale dello stato avrà almeno una costante indeterminata).

I movimenti di equilibrio di questi sistemi sono tuttavia ottenibili direttamente usando la Definizione 1.4; per sistemi non lineari si cercano nella pratica degli equilibri di interesse attorno ai quali i movimenti sono stabili. Grazie a una trasformazione chiamata linearizzazione, ovvero tramite uno sviluppo di Taylor al primo ordine (lineare) delle matrici (1.1.4) nel punto di equilibrio, si studia la stabilità dei movimenti del sistema.

Si effettua dunque la seguente approssimazione: sia dato un sistema nella forma (1.1.3), e una sua condizione di equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) ; lo sviluppo di Taylor troncato al primo ordine delle equazioni di stato e di uscita vale:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(\bar{x}, \bar{u}, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot (u(t) - \bar{u}) \\ y(t) &= g(\bar{x}, \bar{u}, t) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \cdot (u(t) - \bar{u}) \end{aligned}$$

Se definiamo le quantità $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$ e $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$ per le equazioni di stato, e la quantità $\delta y(t) = y(t) - \bar{y}$ per l'equazione di uscita, le precedenti diventano

**Forma
linearizzata
tempo-invariante**

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}} = \overbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}^A \cdot \delta x(t) + \overbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}^B \cdot \delta u(t) \\ \delta y(t) &= y(t) - \bar{y} = \overbrace{\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}^C \cdot \delta x(t) + \overbrace{\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}^D \cdot \delta u(t) \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

Ritroviamo le equazioni della forma standard (1.1.3); l'approssimazione fatta vale in un intorno appropriato dell'equilibrio. Come per i sistemi lineari, valgono i risultati sulla stabilità asintotica e sul segno degli autovalori della matrice di stato A . In particolare enunciamo i seguenti teoremi:

TEOREMA 1.7. *Lo stato di equilibrio \bar{x} relativo all'ingresso \bar{u} per un sistema non lineare della forma (1.1.3), si dice asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice di stato A del sistema (1.8.1) hanno parte reale negativa.*

TEOREMA 1.8. *Lo stato di equilibrio \bar{x} relativo all'ingresso \bar{u} per un sistema non lineare della forma (1.1.3), si dice instabile se almeno uno degli autovalori della matrice di stato A del sistema (1.8.1) ha parte reale negativa.*

Si nota che entrambi i teoremi sono i corrispettivi dei 1.2 e 1.3, ma per i sistemi non lineari le condizioni poste sono solo sufficienti; nel caso di autovalori nulli non è possibile, a partire da un equilibrio di un sistema linearizzato, determinare la sua stabilità.

1.8.2. Metodo grafico per sistemi non lineari. Tale metodo è applicabile solo per sistemi di ordine molto piccolo, nel nostro caso di ordine 1; questo metodo è una alternativa alla linearizzazione che però coinvolge il disegno della funzione di stato su un grafico costruito in un certo modo.

Consideriamo $\dot{x}(t) = f(t)$ costante con $x \in \mathbb{R}$; rappresentiamo sul riferimento $(\dot{x}(t), x(t))$ l'andamento della derivata della funzione di stato, e osserviamo che:

- I punti in cui la funzione $f(t)$ (la derivata dello stato) si annulla rappresentano gli equilibri dello stato;
- La stabilità degli equilibri individuati è determinata dal segno della funzione $f(t)$:
 - se la funzione decresce a destra e cresce a sinistra (riporta lo stato sul valore di equilibrio) l'equilibrio è asintoticamente stabile;
 - se la funzione cresce o decresce sia a destra che a sinistra, l'equilibrio è stabile semplicemente;
 - se la funzione cresce a destra e decresce a sinistra (allontana lo stato dal valore di equilibrio) l'equilibrio è instabile.

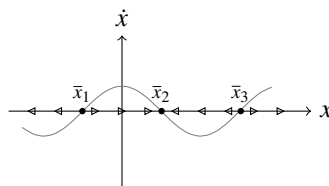


Figura 1.8.1. Funzione di stato analizzata col metodo grafico

ESEMPIO 1.12. *Sia dato il grafico in figura che indica l'andamento dell'equazione di stato in funzione dello stato, in un sistema di ordine 1: ✓ determinare la stabilità degli eventuali equilibri.*

Notiamo che la funzione di stato (una cosinusoide) si annulla in tre punti, che chiameremo in ordine 1, 2 e 3; osservando il segno della funzione (se si trova al di sopra o al di sotto dell'asse orizzontale) giungiamo alle seguenti conclusioni:

- (1) equilibrio instabile;
- (2) equilibrio asintoticamente stabile;
- (3) equilibrio instabile.

□

Sistemi dinamici a tempo discreto

2.1. Modello matematico nel tempo discreto

2.1.1. Processi a tempo discreto. Le considerazioni già fatte per i sistemi lineari a tempo continuo valgono ancora, con degli accorgimenti, per i sistemi a tempo discreto. Questi ultimi presentano la variabile temporale definita in istanti atomici ($k \in \mathbb{Z}$), e la dinamica del sistema evolve per successione di istanti.

La riscrittura del modello matriciale standard per i sistemi a tempo discreto è la seguente:

**Equazioni di un
processo a
tempo discreto**

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) & \text{Equazione di stato} \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) & \text{Equazione di uscita} \end{cases}$$

In generale lo stato ha n dimensioni e l'ingresso m dimensioni, mentre l'uscita p dimensioni, come secondo (1.1.4).

Definiamo i movimenti generati da questa categoria di sistemi, a fronte di condizione iniziale $x_0 = x(k_0)$ e l'andamento dell'ingresso $u(k)$ per $k \geq 0$, iterando l'equazione (2.1.1) fino al k -esimo istante di interesse; l'istante di tempo discreto può riferirsi sia a eventi periodici (ogni minuto, primo di ogni mese) oppure a eventi che non dipendono dallo scorrere del tempo (auto che entra in un parcheggio, temperatura che supera un certo valore)

ESEMPIO 2.1. Definiamo le seguenti variabili:

Le scorte in un magazzino a inizio mese successivo (con k indice del mese attuale) come

$$s(k+1) = a \cdot s(k) + q(k) - v(k)$$

con a indice di deperimento, $q(k)$ la quantità prodotta, $v(k)$ la quantità venduta; l'andamento delle vendite può essere visto come

$$\alpha(k) - \beta(k) \cdot p(k)$$

con $\alpha(k)$ la domanda, $\beta(k)$ il comportamento degli acquirenti, $p(k)$ il prezzo ($\alpha, \beta > 0$); la politica di prezzo è definito da

$$p(k+1) = p(k) + \gamma(k) \cdot (s_0(k) - s(k)) + \delta(k) \cdot v(k)$$

con $\gamma(k)$ le scorte in magazzino, s_0 il valore di riferimento per la quantità da tenere in magazzino, $\delta(k)$ variabile decisionale dell'azienda rispetto alle vendite; vogliamo misurare il profitto mensile definito come

$$g(k) = p(k) \cdot v(k) - \zeta(k) \cdot q(k)$$

con $\zeta(k)$ il costo di produzione.

Adoperiamo come stati le variabili di cui è nota l'espressione all'istante successivo ($k+1$) e come ingressi i seguenti, assegnati:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(k) \\ p(k) \end{bmatrix}; \quad u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(k) \\ \alpha(k) \\ s_0(k) \end{bmatrix}$$

per quanto riguarda a , $\beta(k)$, $\gamma(k)$, $\delta(k)$, $\zeta(k)$ essi sono parametri; infine poniamo l'uscita $y(k) = g(k)$.

Il modello del sistema con queste premesse sarà il seguente:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= ax_1(k) + u_1(k) - u_2(k) + \beta(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \gamma(k)u_3(k) - \gamma(k)x_1(k) + \delta(k)u_2(k) - \delta(k)\beta(k)x_2(k) \\ y(k) &= x_2(k)u_2(k) - x_2^2(k)\beta(k) - \zeta(k)u_1(k) \end{aligned}$$

Da questo modello osserviamo che (come per i sistemi a tempo continuo, analizzando le equazioni in forma standard) il sistema è classificabile come: dinamico (possiede almeno uno stato) del secondo ordine (due stati in totale), ha più ingressi e una uscita (MISO), tempo-variante (i parametri delle equazioni dipendono da k), non lineare (l'equazione di uscita presenta uno stato al quadrato e un prodotto con uno stato), proprio (almeno un ingresso nell'equazione di uscita). \square

Nel prossimo esempio viene proposta la discretizzazione di un sistema a tempo continuo, procedimento che riguarda l'acquisizione di dati dal mondo fisico; introduciamo prima il concetto di interazione tra un sistema a tempo continuo e uno a tempo discreto.

Prendiamo un sistema dinamico a tempo continuo s (vedi figura 2.1.1), dotato di un ingresso $u(t)$ e una uscita $y(t)$;

essa è acquisita a intervalli di tempo regolari da un dispositivo chiamato scheda di acquisizione dati (DAQ), che riporta l'uscita $y(k)$ a un controllore digitale c che stabilisce un valore di ingresso discreto $u(k)$, che infine viene convertito in un valore a tempo continuo $u(t)$ da un componente chiamato *filtro di mantenimento*.

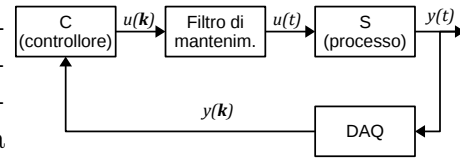


Figura 2.1.1. Modello di sistema con discretizzazione

I sistemi che coinvolgono l'interazione tra una componente analogica (tempo continuo) e una digitale (tempo discreto) sono chiamati cyber-physical system (CPS)

ESEMPIO 2.2. Sia dato un circuito formato da una maglia con induttore e resistore in serie, e sia controllabile il generatore di tensione in ingresso; ✓ scrivere un modello che abbia la corrente nella maglia come uscita.

Chiamiamo la corrente che scorre nella maglia $i(t)$: la tensione sul resistore vale $Ri(t)$ e quella sull'induttore $v_L(t) = \partial i(t) / \partial t$; con un bilancio di tensioni rispetto al generatore controllabile, vale $u(t) = Ri(t) + v_L(t)$. Poniamo $y(t) = i(t)$, come richiesto dall'esempio e scriviamo:

$$\dot{x}(t) = -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

ponendo lo stato $x(t) = i(t)$ (compare la derivata della corrente in $v_L(t)$). Nel passaggio dal mondo analogico a quello digitale discreto c'è l'operazione di *campionamento*, ovvero l'acquisizione di un segnale a intervalli regolari: questi intervalli di tempo sono chiamati *passo* di campionamento (T_s).

Facciamo un'approssimazione a tempo discreto del sistema, considerando per ogni passo di campionamento lo stato del sistema in quell'istante, in cui iniettiamo un ingresso costante fino all'istante successivo; potremo così risolvere il movimento del sistema (per esempio integrando per un passo di campionamento con la (1.2.2)). Partendo da $x(k)$, calcoliamo il movimento del sistema dall'istante successivo $k+1$

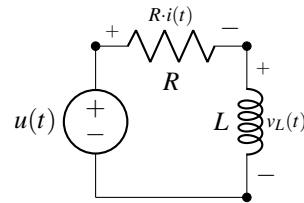


Figura 2.1.2. Modello di circuito per elettrovalvola

come:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= e^{-R/LT_s} x(k_0) + \int_0^{T_s} e^{-R/L(T_s-\tau)} \frac{1}{L} u(k) d\tau \\ &= \underbrace{e^{-R/LT_s}}_a x(k) + \underbrace{\frac{1 - e^{-R/LT_s}}{R}}_b u(k) \end{aligned}$$

Si nota che, essendo il sistema tempo invariante, gli estremi di integrazione possono essere traslati in $0 - T_s$ invece di avere $kT_s - (k+1)T_s$ (la distanza tra istanti successivi è costante) e il valore di ingresso $u(k)$ sarà mantenuto costante tra due istanti successivi. Inoltre essendo il sistema scalare abbiamo già l'autovalore $a = -R/L$. Per quanto riguarda l'equazione di uscita, essa rimane invariata come $y(k) = x(k)$, infatti nella discretizzazione si approssima solo l'operazione di derivazione nelle equazioni di stato. \square

Il metodo appena visto nell'Esempio 2.2 ha dei vantaggi per i sistemi a tempo continuo asintoticamente stabili: con coefficienti scalari, il sistema deve avere $a < 0 \wedge a \in \mathbb{R}$; nel caso dell'Esempio 2.2 abbiamo un coefficiente a reale negativo. Se ora iteriamo l'equazione di stato a tempo discreto, otteniamo:

$$x(k+1) = ax(k) \implies x(0) = 1, x(1) = a, x(2) = a^2, \dots$$

Per avere la convergenza a 0 del movimento così definito deve valere $|a| < 1$; questo approccio garantisce che se abbiamo un sistema a tempo continuo asintoticamente stabile ($a < 0$), anche nel tempo discreto il nostro sistema sarà stabile ($|a| < 1$ sicuramente) e i movimenti convergeranno; questo non vale per qualsiasi metodo di discretizzazione.

Un metodo alternativo consiste nell'usare la formula (A.5.1) approssimando la derivata nel tempo continuo come una differenza finita:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial d} \simeq \frac{x(k+1) - x(k)}{T_s}$$

Questa approssimazione è valida nella misura in cui il passo di campionamento ha dimensione adeguata rispetto alla velocità del sistema.

Sostituendo questa equazione in quella a tempo continuo del sistema possiamo ottenere un modello discretizzato; riprendendo l'Esempio 2.2, otteniamo le stesse equazioni di stato e uscita ma i coefficienti avranno forme differenti:

$$a = 1 - \frac{R}{L}T_s, \quad b = \frac{1}{L}T_s$$

In questo caso scegliendo un T_s troppo elevato si rischia di avere un valore di a per cui l'andamento simulato del sistema è diverso da quello reale.

2.1.2. Forma dei movimenti. Per sistemi lineari a tempo discreto la forma standard è analoga a (1.1.3):

Modello
matriciale per
sistemi LTI a
tempo discreto

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$$

Come condizione iniziale per le successive considerazioni possiamo imporre $k_0 = 0$ (condizione iniziale $x_0 = x(t_0)$), essendo il sistema stazionario; in generale a un certo istante conosciamo il valore dello stato e possiamo calcolare i movimenti a fronte di un certo ingresso. Una forma chiusa per il calcolo del movimento di stato e

uscita è offerta dalla riscrittura della (1.2.2); essa si ricava applicando ricorsivamente l'equazione di stato, dalla quale si ottiene poi l'equazione di uscita:

$$(2.1.3) \quad x(k) = A^k \cdot x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} \cdot B \cdot u(i)$$

**Formula di
Lagrange a
tempo discreto**

L'integrale di convoluzione nel tempo discreto diventa la sommatoria appena mostrata; questo risultato intuitivo si ottiene con l'iterazione dell'equazione di stato; prendendo il caso di $k = 1$, otteniamo da (2.1.2):

$$x(2) = A \cdot x(1) + B \cdot u(1) = A \cdot (A \cdot x(0) + B \cdot u(0)) + B \cdot u(1)$$

da cui la sommatoria nella formula di Lagrange discretizzata.

Distinguiamo dalla (2.1.3) i movimenti libero e forzato:

- movimento libero $x_L(k) = A^k \cdot x_0$: è indipendente dagli ingressi e legato alle condizioni iniziali;
- movimento forzato $x_F(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} \cdot B \cdot u(i)$: è legato agli ingressi.

2.1.3. Sovrapposizione degli effetti. Le equazioni per i sistemi a tempo discreto rimangono lineari, dunque vale la sovrapposizione degli effetti come nel tempo continuo: se abbiamo due condizioni iniziali $x'(0)$ e $x''(0)$, e due andamenti $x'(k)$ e $x''(k)$, posto che l'ingresso $u'''(k) = \alpha u'(k) + \beta u''(k)$ possiamo vedere il movimento dello stato a partire dalle coppie stato-ingresso come combinazione lineare dei movimenti ottenuti separatamente dalle condizioni iniziali e dagli ingressi separatamente:

$$\begin{aligned} x'(k) &= f(x'(0), u'(k)) \\ x''(k) &= f(x''(0), u''(k)) \\ &= \begin{cases} x'''(k) = \alpha x'(k) + \beta x''(k) \\ y'''(k) = \alpha y'(k) + \beta y''(k) \end{cases} \end{aligned}$$

dove $f(x(0), u(k))$ rappresenta la (2.1.3) con condizione iniziale $x(0)$ e ingresso $u(k)$.

Si può facilmente verificare questa proprietà per sostituzione; l'equazione di uscita in forma chiusa, dalla (2.1.3), vale allora:

$$(2.1.4) \quad y(k) = C \cdot A^k \cdot x_0 + C \cdot \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} \cdot B \cdot u(i) + D \cdot u(k)$$

2.2. Comportamento nel tempo discreto

2.2.1. Equilibrio. Un movimento di un sistema a tempo discreto si ottiene iterando l'equazione di stato fino all'istante di interesse. Una coppia di ingressi \bar{x} e uscite \bar{u} è un equilibrio se $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}, k)$; l'equazione di stato infatti restituisce lo stato all'istante successivo e se questo è uguale allo stato attuale, si ha un andamento costante dello stato nel tempo. L'uscita di equilibrio è funzione della coppia \bar{x}, \bar{u} ; in breve:

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} &= g(\bar{x}, \bar{u}) \end{aligned}$$

**Condizione di
equilibrio nel
tempo discreto**

Nel caso di un sistema a coefficienti scalari dovrà valere $\bar{x} = a\bar{x} + b\bar{u}$, da cui $\bar{x} = \frac{b}{1-a}\bar{u}$; esse sono tutte le coppie ingresso-stato di equilibrio per il sistema in esame.

Il modello del sistema nella forma (2.1.1), nelle condizioni di equilibrio (2.2.1), si scriverà come

$$\begin{cases} \bar{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u} \\ \bar{y} = C \cdot \bar{x} + D \cdot \bar{u} \end{cases}$$

Lo stato di equilibrio esiste solo se l'equazione di stato per l'equilibrio ammette una e una sola soluzione; questo si verifica quando $\det(I - A) \neq 0$, e in tal caso possiamo scrivere $\bar{x} = (I - A)^{-1} \cdot B \cdot \bar{u}$ per l'equilibrio dello stato e $\bar{y} = (C \cdot (I - A)^{-1} \cdot B + D) \bar{u}$ per l'equilibrio di uscita, dove la matrice a cui l'uscita è moltiplicata è detta matrice dei *guadagni statici* (è una relazione statica tra ingressi costanti e uscite costanti).

Se $(I - A)$ non fosse invertibile si potrebbero avere nessuna o infinite soluzioni (non nulle), sempre che per un \bar{u} si riesca a trovare \bar{x} di equilibrio; la coppia ingresso-uscita di equilibrio nulla risolve comunque il sistema.

2.2.2. Stabilità. Nei sistemi a tempo discreto possiamo enunciare le seguenti proprietà e definizioni, analoghe a quelle dei sistemi a tempo continuo (non siamo necessariamente nell'ambito dei sistemi lineari):

DEFINIZIONE 2.1. Un movimento $x(k)$ per $k \geq k_0$, generato da un sistema dinamico a partire da $x(k_0) = x_0$ e con ingresso $u(k)$, si dice *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni condizione iniziale perturbata $\tilde{x}(k_0) = \tilde{x}_0$ che sia distante dalla condizione iniziale nominale x_0 di una quantità in norma minore di δ , risulta che la distanza tra la traiettoria nominale $x(k)$ e quella perturbata $\tilde{x}(k)$ rimanga limitata in un intorno minore o uguale a ε per qualunque $k \geq k_0$; chiamiamo $\tilde{x}(k)$ il movimento generato dal sistema a fronte del medesimo ingresso $u(k \geq k_0)$ e condizioni iniziali \tilde{x}_0 . In termini di formula logica deve valere

$$(2.2.2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\forall \tilde{x}_0 (\|\tilde{x}_0 - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq k_0 (\|\tilde{x}(k) - x(k)\| \leq \varepsilon)))$$

DEFINIZIONE 2.2. Un movimento $x(k)$ generato da un sistema a tempo discreto è *instabile* se non soddisfa la Definizione 2.1.

DEFINIZIONE 2.3. Un movimento generato da un sistema a tempo discreto si dice *asintoticamente stabile* se soddisfa la Definizione 2.1 e vale inoltre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - \tilde{x}(k)\| = 0$$

2.3. Rappresentazione equivalente discreta

Preso una matrice di trasformazione T invertibile, definiamo uno stato equivalente $\hat{x}(k)$ come combinazione lineare dello stato originale $x(k)$; vale la seguente relazione tra stato originale ed equivalente:

$$x(k) = T^{-1} \cdot \hat{x}(k) \Leftrightarrow \hat{x}(k) = T \cdot x(k)$$

Possiamo parlare di rappresentazioni equivalenti di sistemi LTI a tempo discreto, in particolare se il sistema di partenza è della forma (2.1.2), con questa trasformazione otteniamo la rappresentazione equivalente:

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot \hat{x}(k) + T \cdot B \cdot u(k) \\ y(k) &= C \cdot T^{-1} \cdot \hat{x}(k) + D \cdot u(k) \end{aligned}$$

2.4. Movimenti nel tempo discreto

2.4.1. Modi e autovalori. Il movimento libero nel tempo discreto di un sistema LTI è definito $x_L(k) = A^k \cdot x_0$ dalla (2.1.3); come nel caso del tempo continuo, sfruttiamo la rappresentazione equivalente (2.3.1) più comoda per calcolare il movimento libero.

Se la matrice di stato è diagonalizzabile esisterà una matrice di trasformazione T_D che rende A simile ad A_D , quest'ultima una matrice diagonale con gli stessi autovalori z_i di A ; tale matrice di trasformazione verifica le seguenti equazioni:

$$A_D = T_D \cdot A \cdot T_D^{-1} \Leftrightarrow A = T_D^{-1} \cdot A_D \cdot T_D$$

Iteriamo la precedente equazione per calcolare A^k dalla matrice diagonale simile, ottenendo:

$$A^k = T_D^{-1} \cdot A_D \cdot \cancel{T_D^{-1}} \cdot \cancel{T_D} \cdot A_D \cdot T_D \dots = T_D^{-1} \cdot A_D^k \cdot T_D$$

dove la potenza di matrice diagonale A_D^k è una matrice diagonale con elementi sulla

diagonale elevati a k : $A_D^k = \begin{bmatrix} z_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & z_n^k \end{bmatrix}$.

Ritornando all'equazione del movimento libero, possiamo ora riscriverla come $x_L(k) = T_D^{-1} \cdot A_D^k \cdot T_D \cdot x_0$; questo movimento libero generico sarà una combinazione lineare dipendente dal valore iniziale degli stati e dalla matrice di trasformazione, e avrà una scrittura del tipo $\alpha_1 z_1^k + \alpha_2 z_2^k + \dots + \alpha_n z_n^k$. Al contrario dei movimenti esponenziali, generati dai sistemi a tempo continuo, nel tempo discreto i movimenti assumono forma polinomiale.

Gli autovalori (della matrice di stato A) z_i con $i \in [1, n]$ si dicono *modi* del sistema a tempo discreto.

2.4.2. Segno degli autovalori. Nel caso di autovalori reali, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

- $z_i \in \mathbb{R}, z_i > 0$:
 - $z_i = 1$: vale $z_i^k = \text{costante} \forall k \in \mathbb{Z}$;
 - $z_i > 1$: vale $z_i^k = \text{polinomio divergente}$;
 - $z_i < 1$: vale $z_i^k = \text{polinomio convergente}$.
- $z_i \in \mathbb{R}, z_i < 0$:
 - $|z_i| = 1$: vale $z_i^k = \text{limitato tra } [-1, 1]$;
 - $|z_i| > 1$: vale $z_i^k = \text{divergente a segni alterni}$;
 - $|z_i| < 1$: vale $z_i^k = \text{convergente a segni alterni}$.

Nel caso di valori complessi coniugati i modi sono sempre $z_{1,2} = (\sigma \pm j\omega)^k$; per la loro analisi adottiamo la rappresentazione polare:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, \quad \phi = \arg(z_i)$$

da cui gli autovalori valgono $z_{1,2} = \rho e^{\pm j\phi}$ e i modi $z_{1,2}^k = \rho^k e^{\pm jk\phi}$; questi modi saranno sempre combinati, nel movimento complessivo, con dei coefficienti α anch'essi complessi coniugati, in generale nella forma $\alpha = \rho_\alpha e^{j\phi_\alpha}$.

La combinazione lineare dei modi associati agli autovalori complessi coniugati è:

$$x_L(k) = \alpha z_1 + \alpha^* z_2 = \rho_\alpha \rho^k e^{j(k\phi + \phi_\alpha)} + \rho_\alpha \rho^k e^{-j(k\phi + \phi_\alpha)}$$

$$(2.4.1) \quad = \rho_\alpha \rho^k \left(e^{j(k\phi + \phi_\alpha)} + e^{-j(k\phi + \phi_\alpha)} \right) \stackrel{\text{Eulero}}{=} \boxed{2\rho_\alpha \rho^k \cos(k\phi + \phi_\alpha)}$$

dove abbiamo usato la (A.5.1) nell'ultima uguaglianza, e i coefficienti in pedice α sono dipendenti dalle condizioni iniziali; la convergenza del movimento è determinata

Con l'apice * si indica il coniugato di un numero complesso, ovvero il corrispettivo con la parte immaginaria di segno opposto

dal segno dominante di ρ^k (in particolare ρ è il modulo dell'autovalore), infatti la funzione coseno è limitata e ρ_α è costante. Come per il caso dell'autovalore reale, si osserva il modulo degli autovalori per determinarne l'andamento generato.

ESEMPIO 2.3. *Sia dato un sistema LTI a tempo discreto con la seguente matrice di stato:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ *Si calcoli il movimento libero del sistema in generale.*

Cominciamo calcolando gli autovalori di A :

$$\det(zI - A) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} z-1 & -1 \\ 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \rightarrow z_{1,2} = 1 \pm j$$

Per questi due autovalori complessi coniugati abbiamo $\rho = \sqrt{2}$ e $\phi = \pi/4$. Il movimento associato alla combinazione lineare di questi due modi sarà nella forma (2.4.1):

$$\rho_\alpha 2 \left(\sqrt{2}\right)^k \cos\left(k\frac{\pi}{4} + \phi_\alpha\right)$$

Una possibile scelta per la matrice di trasformazione, presi autovettori associati a $z_{1,2}$ con base canonica unitaria, è la seguente:

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \rightarrow T_D = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

Il generico movimento libero sarà scritto come:

$$\begin{aligned} x_L(k) &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}}^{T_D^{-1}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} (\sqrt{2}e^{j\pi/4})^k & 0 \\ 0 & (\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^k \end{bmatrix}}^{A_D} \cdot \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}}^{T_D} \cdot x_0 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^k \cdot \begin{bmatrix} \cos(k\pi/4) & -\sin(k\pi/4) \\ \sin(k\pi/4) & \cos(k\pi/4) \end{bmatrix} \cdot x_0 \end{aligned}$$

Da questa scrittura è possibile calcolare qualsiasi movimento del sistema a fronte di condizioni iniziali. \square

Possiamo distinguere gli andamenti dei modi nel tempo discreto studiando il modulo degli autovalori e considerando se sono complessi coniugati (vedi la tabella 2.4.1)

Per concludere il discorso sui modi nel tempo discreto, esaminiamo il caso di una matrice di stato non diagonalizzabile: cercheremo di scriverla nella forma di Jordan (A.3.2), trovando una matrice di trasformazione T_J adeguata. Compariranno dei modi aggiuntivi nella matrice, al di sopra della diagonale principale; si avranno dunque sulla diagonale i modi z_i^k , mentre al di sopra i modi $k^{\eta-1}z_i^{k-\eta+1}$ dove η dipende dalle molteplicità degli autovalori e i è l'indice di colonna nella matrice.

Le proprietà di convergenza di questi nuovi modi sono determinate sempre dal modulo dell'autovalore z (l'esponentiale di z domina sulla potenza di k costante), quindi sono soggetti alle considerazioni espone nella tabella 2.4.1; rispetto ad essa, per $|z_i| = 1$ si hanno modi divergenti, a causa del contributo del coefficiente k .

Insieme \ Modulo	$ z_i < 1$
$z_i \in \mathbb{R}$	$z_i > 0 \rightarrow$ converge asintotico
	$z_i = 0 \rightarrow$ converge in tempo finito
	$z_i < 0 \rightarrow$ converge a segno alterno
$z_i \in \mathbb{C}$	converge come inviluppo di cosinusoide
Insieme \ Modulo	$ z_i > 1$
$z_i \in \mathbb{R}$	$z_i > 1 \rightarrow$ diverge polinomiale
	$z_i < -1 \rightarrow$ diverge polinomiale a segni alterni
$z_i \in \mathbb{C}$	diverge come inviluppo di cosinusoide
Insieme \ Modulo	$ z_i = 1$
$z_i \in \mathbb{R}$	$z_i = 1 \rightarrow$ limitato e costante
	$z_i = -1 \rightarrow$ limitato a segni alterni
$z_i \in \mathbb{C}$	$\Re(z_i) = 0, \Im(z_i) = \pm 1 \rightarrow$ limitato come cosinusoide

Tabella 2.4.1. Classificazione dei movimenti nel tempo discreto

Movimenti nel tempo discreto

2.5. Stabilità del sistema

2.5.1. Condizioni di stabilità in sistemi a tempo discreto. Se prendiamo un movimento $x(k)$ a partire da x_0 e un movimento perturbato $\tilde{x}(k)$ a partire da $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, a parità di ingresso $u(k)$ studiamo il comportamento di $\delta x(k) = \tilde{x}(k) - x(k)$; con l'equazione (2.1.3) otteniamo l'andamento della perturbazione:

$$(2.5.1) \quad A^k(\tilde{x}_0 - x_0) = A^k \delta x_0$$

Questo risultato non dipende dall'ingresso né dalla perturbazione: esso è la risposta libera del sistema alla perturbazione considerata.

OSSERVAZIONE 2.1. In un sistema LTI a tempo discreto, presa qualsiasi coppia di movimento e movimento perturbato, la distanza tra i due movimenti è data sempre dalla (2.5.1); da questo deriva il seguente Teorema 2.1.

TEOREMA 2.1. *In un sistema LTI a tempo dinamico un movimento (incluso quello di equilibrio) è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se sono rispettivamente stabili, asintoticamente stabili o instabili tutti i movimenti del sistema.*

OSSERVAZIONE 2.2. Notiamo che essendo (2.5.1) un movimento libero, questa espressione è combinazione lineare dei modi del sistema e il suo andamento dipende dagli autovalori della matrice di stato. Per il Teorema 2.1 possiamo controllare la stabilità del sistema studiando quella dei suoi movimenti liberi.

Possiamo usare le condizioni nella tabella 2.4.1 assieme alla precedente osservazione per ottenere le seguenti considerazioni:

TEOREMA 2.2. *Un sistema LTI della forma (2.1.2) si dice asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della sua matrice di stato sono in modulo minori di 1 (ovvero (2.5.1) converge a zero).*

TEOREMA 2.3. *Un sistema LTI della forma (2.1.2) si dice instabile se almeno uno degli autovalori della sua matrice di stato è in modulo maggiore di 1.*

Se il modulo degli autovalori è unitario, distinguiamo i seguenti casi per studiare la stabilità del sistema:

- Con A diagonalizzabile, se $\nexists i \in 0 \dots \eta_n : |z_i| > 1$ allora il sistema è stabile semplicemente;

- Con A non diagonalizzabile, il sistema è instabile.

Elenchiamo ora alcune proprietà dei sistemi LTI a tempo discreto asintoticamente stabili:

- (1) Un movimento per $k \rightarrow \infty$ non dipende dalle condizioni iniziali $x(k_0)$;
- (2) La risposta a un impulso tende ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$;
- (3) La risposta a qualunque ingresso limitato nel tempo tende ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$;
- (4) Gli stati e le uscite di equilibrio, con ingresso \bar{u} costante nel tempo, sono univocamente definiti e pari a \bar{x} e \bar{y} ;
- (5) Il sistema gode della proprietà di stabilità esterna.

2.5.2. Criterio di Jury. Il polinomio caratteristico di una matrice permette di trovare i suoi autovalori: se definiamo tale polinomio per i sistemi a tempo discreto come $\phi(z)$, gli autovalori associati si trovano a partire da $\phi(z) = 0$; scrivendo il polinomio nella forma di combinazione lineare di autovalori z_i e coefficienti ϕ_i avremo

$$(2.5.2) \quad \phi(z) = \phi_0 z^n + \phi_1 z^{n-1} + \dots + \phi_n$$

Enunciamo un criterio che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per stabilire la stabilità asintotica di un sistema a tempo discreto; esso si basa sulla seguente *tabella di Jury*, costruita a partire dal polinomio caratteristico della matrice di stato, scritto nella forma (2.5.2):

$$(2.5.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{n-1} & \phi_n & 0 \\ h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_\nu & 0 & 0 \\ \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_{\nu-1} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Questa tabella si compila grazie al seguente *algoritmo di Jury* che dalle righe precedenti (h_i) ottiene la successiva (ℓ_i):

$$(2.5.4) \quad \ell_i = \frac{1}{h_1} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} h_1 & h_{\nu-i+1} \\ h_\nu & h_i \end{bmatrix} \right) \rightarrow h_i - \frac{h_\nu \cdot h_{\nu-i+1}}{h_1}$$

Si osserva che in generale la tabella è triangolare, e inoltre l'algoritmo non si può applicare per il caso $h_1 = 0$ per almeno una riga (in tal caso si dice che la (2.5.3) non è ben definita). L'algoritmo termina quando si otterrebbe uno zero nella prima posizione della riga più in basso.

Criterio di Jury **TEOREMA 2.4.** *Un sistema LTI a tempo discreto della forma (2.1.2) è asintoticamente stabile se e solo se la tabella di Jury (2.5.3) del polinomio caratteristico della matrice di stato del sistema è ben definita, e tutti gli elementi sulla prima colonna della tabella hanno segno concorde.*

ESEMPIO 2.4. *Consideriamo un sistema dinamico a tempo discreto, col seguente polinomio caratteristico:*

$$\phi(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

✓ *Studiare per quali valori di α e β il sistema è stabile.*

Scegliendo di applicare il criterio di Jury, costruiamo la tabella (2.5.3) nel modo seguente:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & \alpha & & \beta & 0 \\ \hline & 1 - \beta^2 & & \alpha(1 - \beta) & & 0 & 0 \\ & 1 - \beta^2 - \frac{\alpha^2(1 - \beta)^2}{1 - \beta^2} & & 0 & & 0 & 0 \end{array}$$

Applicando il Teorema 2.4 cerchiamo i valori dei coefficienti che rendano concordi i segni dei termini sulla prima colonna; otteniamo dunque le seguenti condizioni, osservando che il termine 1 è positivo:

$$\begin{cases} 1 - \beta^2 > 0 \\ 1 - \beta^2 - \frac{\alpha^2(1 - \beta)^2}{1 - \beta^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} = \begin{cases} \beta \in (-1, 1) \\ 1 + \beta \in (-\alpha, \alpha) \end{cases}$$

Per giungere a questa conclusione si è usata la condizione (1) nella (2), studiando il segno del numeratore $-\alpha^2(1 - \beta)^2$. \square

2.6. Sistemi non lineari a tempo discreto

Prendiamo un sistema a tempo discreto stazionario e non lineare, nella forma (2.1.2); per risolvere in forma chiusa il calcolo di un movimento, ci concentriamo sugli equilibri di questi sistemi: cerchiamo una coppia stato-ingresso \bar{x}, \bar{u} tale che valga (2.2.1).

Per studiare la stabilità di questi equilibri, possiamo approssimare il modello del sistema, localmente alla condizione di equilibrio, con lo sviluppo di Taylor al primo ordine delle equazioni del sistema; questa approssimazione lineare si ottiene nel modo seguente:

$$\begin{aligned} f(x(k), u(k)) &\simeq f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x(k) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u(k) - \bar{u}) \\ g(x(k), u(k)) &\simeq g(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x(k) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u(k) - \bar{u}) \end{aligned}$$

Se definiamo le quantità $\delta x(k) = x(k) - \bar{x}$ per l'equazione di stato e $\delta u(k) = u(k) - \bar{u}$ per l'equazione di uscita, le precedenti diventano

$$\begin{aligned} (2.6.1) \quad \delta x(k+1) &= f(x(k), u(k)) - f(\bar{x}, \bar{u}) = \overbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}^A \delta x(k) + \overbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}^B \delta u(k) \\ \delta y(k) &= g(x(k), u(k)) - g(\bar{x}, \bar{u}) = \overbrace{\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}^C \delta x(k) + \overbrace{\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}}^D \delta u(k) \end{aligned}$$

**Forma
linearizzata nel
tempo discreto**

Ritroviamo le equazioni della forma standard nel tempo discreto (2.1.2); l'approssimazione fatta vale in un intorno appropriato dell'equilibrio. Come per i sistemi lineari, valgono i risultati sulla stabilità asintotica e sul modulo degli autovalori della matrice di stato A . In particolare enunciamo i seguenti teoremi:

TEOREMA 2.5. *Lo stato di equilibrio \bar{x} relativo all'ingresso \bar{u} per un sistema non lineare della forma (2.1.2), si dice asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice di stato A del sistema (2.6.1) hanno modulo strettamente minore di 1.*

TEOREMA 2.6. *Lo stato di equilibrio \bar{x} relativo all'ingresso \bar{u} per un sistema non lineare della forma (2.1.2), si dice instabile se almeno uno degli autovalori della matrice di stato A del sistema (2.6.1) ha modulo maggiore di uno.*

Se uno degli autovalori avesse modulo pari a 1, non si potrebbe concludere nulla sulla sua stabilità, con gli strumenti della linearizzazione; si noti che i due teoremi appena enunciati forniscono condizioni solo sufficienti.

ESEMPIO 2.5. Sia dato un sistema non lineare a tempo discreto con la seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1^3(k) + x_2(k)x_3(k) \\x_2(k+1) &= \sin\left(\frac{4}{9}\pi \cdot x_2(k)\right) - \frac{1}{8}x_3(k) \\x_3(k+1) &= \alpha x_3(k) + u(k)\end{aligned}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$; ✓ calcolare l'ingresso di equilibrio e la terza variabile di stato, in funzione del parametro reale ($\bar{u}(\alpha)$ e $\bar{x}_3(\alpha)$), tali che $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/8 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$ sia uno stato di equilibrio.

Facendo un passo indietro, classifichiamo il sistema: esso è un sistema a tempo discreto, non lineare, del 3° ordine, ha un ingresso, stazionario (non abbiamo informazioni sull'uscita nell'ambito dell'esercizio).

Per ottenere le condizioni che determinano l'equilibrio, poniamo ciascuna equazione di stato pari allo stato corrispondente, sfruttando la (2.2.1):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{8} \cdot \bar{x}_3 & \text{(I)} \\ \frac{1}{8} = \sin\left(\frac{4}{9}\pi \cdot \frac{3}{8}\right) - \frac{1}{8} \cdot \bar{x}_3 & \text{(II)} \\ \bar{x}_3 = \alpha \bar{x}_3 + \bar{u}(\alpha) & \text{(III)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_3 = 1 & \text{(I)} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} & \text{(II)} \\ 1 - \alpha = \bar{u}(\alpha) & \text{(III)} \end{cases}$$

dove abbiamo ricavato dalla (I) il valore numerico di \bar{x}_3 , che abbiamo poi usato nella (II) e nella (III); il fatto che dalla (II) si ricavi una identità ci conferma che stiamo usando una condizione di equilibrio dello stato ammissibile; dalla (III) si ricava infine il valore dell'uscita di equilibrio.

✓ Studiare ora le proprietà di stabilità dell'equilibrio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Per approcciare il problema, linearizziamo la matrice di stato intorno all'equilibrio appena ottenuto, e studiamo il modulo degli autovalori corrispondenti:

$$A_L = \begin{bmatrix} 3\bar{x}_1^2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ 0 & 4/9\pi \cos(4/9\pi \bar{x}_2) & -1/8 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & 3/8 \\ 0 & 2\sqrt{3}/9 & -1/8 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

La matrice di stato linearizzata è costituita dalle derivate parziali: l'indice di riga rappresenta le funzioni di stato non lineari, l'indice di colonna lo stato rispetto al quale si deriva parzialmente; tutte le derivate parziali sono valutate in \bar{x} , \bar{u} .

La matrice trovata è diagonale, dunque i suoi autovalori sono i termini sulla diagonale principale; scrivendo in modo numerico abbiamo $z_1 = 0.75$, $z_2 \simeq 1.2$, $z_3 = \alpha$: dato che $|z_2| > 1$, l'equilibrio è instabile (vedi la tabella 2.4.1) comunque scelto α . □

CAPITOLO 3

Funzione di trasferimento

3.1. Definizione

Richiamiamo la scrittura matriciale di un sistema LTI a tempo continuo (1.1.3); possiamo allora cercare la trasformata di Laplace (B.1.1) per ciascuna equazione del sistema:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{x}(t)] &= sX(s) - x(0) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ \mathcal{L}[y(t)] &= C \cdot X(s) + D \cdot U(s)\end{aligned}$$

Dalla trasformata dell'equazione di stato possiamo ricavare il valore di $X(s)$ intervenendo nel modo seguente:

$$(sI - A) \cdot X(s) - (sI - A) \cdot x(0) = B \cdot U(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B \cdot U(s)$$

Considerando il termine $(sI - A)^{-1}$ associato a e^{At} , osserviamo un'analogia coi movimenti dello stato, descritti da (1.2.2): si tratta della stessa equazione, vista nel dominio di Laplace; sostituendo nella trasformata dell'equazione di uscita l'espressione ottenuta per $X(s)$, otteniamo:

$$Y(s) = [C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D] U(s) + C (sI - A)^{-1} x(0)$$

dove il coefficiente di $U(s)$ è la trasformata del movimento forzato, mentre il coefficiente di $x(0)$ è la trasformata del movimento libero dell'uscita; in particolare chiamiamo funzione di trasferimento, e la indichiamo con $G(s)$, il prodotto di convoluzione

**Funzione di
trasferimento**

$$(3.1.1) \quad G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Essa fornisce informazioni sulla dipendenza dell'uscita forzata dall'ingresso.

Dato che la funzione di trasferimento è la componente forzata dell'uscita nel dominio di Laplace, possiamo scrivere l'uscita in funzione di essa:

$$(3.1.2) \quad Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Notiamo che, avendo $Y(s)$ grado p e $U(s)$ grado m , allora $G(s)$ avrà dimensioni $p \times m$; inoltre, se abbiamo un sistema SISO, la funzione di trasferimento è scalare (a 1 dimensione, essendo $p = m = 1$) e vale la scrittura $G(s) = Y(s) / U(s)$.

Per osservare che il significato della (3.1.1) è quello di trasformata della risposta dell'uscita a un impulso (a partire da condizioni iniziali nulle), prendiamo il caso SISO con $u(t) = \text{imp}(t)$: la sua trasformata vale $U(s) = 1$. Allora l'equazione di uscita assumerà la forma $Y(s) = G(s)$, che eguaglia la funzione di trasferimento con la trasformata dell'uscita.

3.2. Proprietà

3.2.1. Struttura della funzione e cancellazioni. Consideriamo di nuovo per semplicità un sistema LTI SISO; scriveremo la sua funzione di trasferimento (con le rispettive dimensioni per ciascuna matrice) come:

$$G(s) = \overset{1 \times n}{C} \cdot \underset{n \times n}{(sI - A)^{-1}} \cdot \overset{n \times 1}{B} + \underset{1 \times 1}{D}$$

Da questa scrittura possiamo ricavare la matrice inversa $(sI - A)^{-1}$ dalla Definizione A.8 come matrice dei complementi algebrici diviso il determinante; quest'ultimo è un polinomio in s di grado al più n che chiamiamo $D(s)$, mentre i complementi algebrici sono determinanti delle sotto-matrici dell'inversa, quindi avranno al più grado $n - 1$. Con queste considerazioni la funzione di trasferimento può essere riscritta come:

$$G(s) = C \cdot \frac{[\Delta_{s_i}]}{\det(sI - A)} \cdot B + D = \frac{1}{D(s)} (C \cdot [\Delta_{s_i}] \cdot B) + D = \frac{N'(s)}{D(s)} + D$$

dove $N'(s)$ è la combinazione lineare derivata dal prodotto della matrice dei coefficienti algebrici con C e B , e D è non nulla.

Se vale $D = 0$ la funzione di trasferimento risulta razionale e *strettamente propria*, dalla precedente osservazione per cui $n(N'(s)) < n(D(s))$; se D è non nulla si ottiene al più una funzione *bi-propria* (numeratore e denominatore hanno stesso grado).

Nel prodotto $C \cdot [\Delta_{s_i}] \cdot B$ si possono verificare delle cancellazioni tra zeri e poli; formalizziamo questa eventualità scrivendo (a meno di un guadagno ρ):

$$G(s) = \rho \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

Se vi fossero cancellazioni tra termini di $N(s)$ e $D(s)$, posto ν il grado del denominatore, varrebbe $\nu < n$; in generale possiamo scrivere la funzione di trasferimento come:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_\nu s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_0}$$

dove abbiamo $\beta_\nu \neq 0 \iff D \neq 0$, ovvero il grado di numeratore e denominatore è uguale solo se la matrice D è non nulla. Ricaviamo da questa scrittura gli zeri come le radici che verificano $N(s) = 0$ e i poli come le radici che verificano $D(s) = 0$.

OSSERVAZIONE 3.1. Il polinomio al denominatore della funzione di trasferimento vale $D(s) = \det(sI - A)$, che è proprio il polinomio caratteristico (A.2.1) della matrice di stato A , se eguagliato a zero per trovarne le radici: allora i poli (le radici del denominatore di $G(s)$) coincidono con alcuni autovalori di A .

Questo è un utile strumento per misurare la stabilità di un sistema, a partire dalla sua funzione di trasferimento: la stabilità asintotica di un sistema infatti dipende dalla parte reale degli autovalori della sua matrice di stato (Definizione 1.7); in un sistema di ordine n , la cui funzione di trasferimento ha un denominatore di ordine n , si ha la certezza che tutti i poli siano tutti gli autovalori della matrice A : se essi hanno parte reale negativa, il sistema risulta asintoticamente stabile.

Avevamo osservato
ne la sezione 1.1.2
che un sistema si
dice strettamente
proprio quando
l'ingresso non
compare
nell'equazione di
uscita; in un
sistema LTI vale
 $D = 0$ e anche la
funzione di
trasferimento è
strettamente
propria

ESEMPIO 3.1. Sia dato un circuito idraulico consistente in una pompa di portata $u(t)$ che, prelevando liquido da un serbatoio a capacità infinita, viene smistato in due serbatoi cilindrici, con due tubi di portata $u(t)/2$. Il livello del liquido nei due serbatoi è indicato con $h_{1,2}(t)$ e la sezione di ciascun serbatoio è indicata con $s_{1,2}$. Si voglia misurare il volume complessivo nei due serbatoi ($y(t) = s_1 h_1(t) + s_2 h_2(t)$). ✓ Scrivere una funzione di trasferimento per questo sistema.

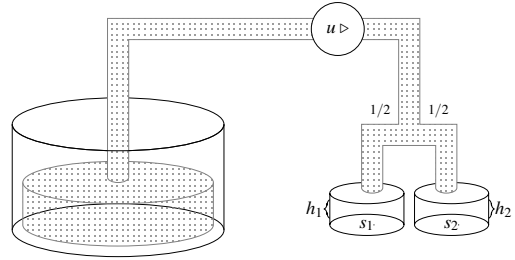


Figura 3.2.1. Circuito idraulico con serbatoi

Innanzitutto scriviamo la variazione del livello di liquido nel tempo (rispetto all' i -esimo serbatoio) come:

$$\dot{h}_i(t) = \frac{u(t)}{2} \cdot \frac{1}{s_i}$$

e scegliamo come stato del sistema il livello istantaneo del liquido nei due serbatoi:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

Per calcolare la funzione di trasferimento, da qui sono possibili due strade:

FORMULA DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Scriviamo il sistema nella forma (1.1.3):

$$\dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^A \cdot x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1/2s_1 \\ 1/2s_2 \end{bmatrix}}^B \cdot u(t)$$

$$y(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix}}^C \cdot x(t) + \overbrace{0}^D$$

Sostituiamo i coefficienti nella (3.1.1):

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1/2s_1 \\ 1/2s_2 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2s_1 \\ 1/2s_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2s_1 \\ 1/2s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1/s & s_2/s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2s_1 \\ 1/2s_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s} = \boxed{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

TRASFORMATI DI LAPLACE DELLE DERIVATE

Scriviamo la trasformata di ciascuna equazione del sistema e sostituiamo nella trasformata dell'equazione di uscita le trasformate delle equazioni di stato:

$$\mathcal{L} \left[\dot{x}_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u(t)}{s_1} \right] \rightarrow sX_1(s) = \frac{U(s)}{2s_1} \rightarrow X_1(s) = \frac{U(s)}{2s \cdot s_1}$$

$$\mathcal{L} \left[\dot{x}_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u(t)}{s_2} \right] \rightarrow sX_2(s) = \frac{U(s)}{2s_2} \rightarrow X_2(s) = \frac{U(s)}{2s \cdot s_2}$$

$$\mathcal{L} [y(t) = s_1 x_1(t) + s_2 x_2(t)] = s_1 X_1(s) + s_2 X_2(s)$$

Consideriamo nulle le condizioni iniziali degli stati, per poter ignorare il termine che comparirebbe nella trasformata della derivata (tale termine non influenza la

Si osserva una cancellazione nella funzione di trasferimento (il grado del denominatore non è 2); il sistema in tal caso si dice *non controllabile*: infatti è impossibile controllare in modo differente i volumi dei due serbatoi

funzione di trasferimento, dato che essa riguarda ingresso e uscita). Sostituendo nella trasformata dell'uscita otteniamo:

$$Y(s) = \cancel{s} \frac{U(s)}{2s \cdot \cancel{s}} + \cancel{s} \frac{U(s)}{2s \cdot \cancel{s}} = \frac{1}{s} U(s)$$

Dal momento che il sistema è strettamente proprio e SISO possiamo ottenere usando (3.1.2):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{1}{s}}$$

□

ESEMPIO 3.2. Sia dato un sistema costituito da un carrello di massa m , in movimento su un piano indefinito con coefficiente di attrito dinamico β , situato in posizione $p(t)$ e spinto da una forza esterna $F(t)$; si voglia misurare la velocità del carrello ($\dot{p}(t)$). ✓ Scrivere una funzione di trasferimento per il sistema.

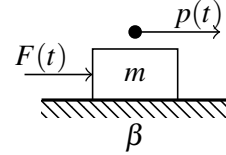


Figura 3.2.2. Carrello su piano con attrito

L'equazione della dinamica del sistema si ottiene come:

$$m\ddot{p}(t) + \beta\dot{p}(t) = F(t)$$

Nel contesto dell'esercizio vale $u(t) = F(t)$, $y(t) = \dot{p}(t)$; scegliamo inoltre gli stati del sistema come $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix}$.

Procediamo trasformando le equazioni di stato (sempre a meno delle condizioni iniziali):

$$\mathcal{L}[\dot{p}(t)] = sP(s)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{p}(t)] = s^2P(s)$$

L'equazione della dinamica del sistema diventa $ms^2P(s) + \beta sP(s) = U(s)$, dove possiamo sostituire $Y(s) = sP(s)$ (ottenuta da $\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[\dot{p}(t)]$); avremo la seguente relazione tra $U(s)$ e $Y(s)$, dalla quale si ottiene l'espressione per la trasformata dell'uscita:

$$msY(s) + \beta Y(s) = U(s) \rightarrow Y(s) = \frac{U(s)}{ms + \beta}$$

Ricaviamo infine la funzione di trasferimento da (3.1.2), osservando che il sistema è SISO:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + \beta}$$

□

OSSERVAZIONE 3.2. Nell'Esempio 3.2 viene dato un sistema del secondo ordine, che possiede infatti due stati, tuttavia la funzione di trasferimento è razionale e propria con denominatore di grado 1: questo è dovuto a una cancellazione provocata dall'uscita, definita come derivata di uno stato. Questo caso ricade sotto il nome di *non osservabilità* e indica l'impossibilità di ricostruire l'andamento di tutti gli stati a partire dall'uscita.

Dal risultato dell'Esempio 3.2 possiamo dedurre che la funzione di trasferimento di un sistema completamente osservabile avrà denominatore di grado massimo (pari al numero di poli); sfruttando questa osservazione, deduciamo che in un sistema completamente osservabile tutti i poli sono anche gli autovalori della matrice di stato: basta osservare la loro parte reale per studiare l'asintotica stabilità.

3.2.2. Trasferimento nei sistemi con ritardo. Consideriamo un sistema dinamico con ritardo in ingresso $\tau_u > 0$, tale che l'ingresso traslato nel tempo valga $u(t) = u'(t - \tau_u)$; la sua trasformata sarà del tipo esponenziale (a causa della traslazione):

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(s) = \mathcal{L}[u'(t - \tau_u)] = e^{-\tau_u s} U'(s)$$

A questo punto ricaviamo anche la trasformata dell'uscita usando (3.1.2):

$$Y(s) = G(s) U(s) = G(s) \cdot e^{-\tau_u s} U'(s)$$

Notiamo che un ritardo comporta la presenza di un coefficiente esponenziale, legato alla traslazione, nella funzione di trasferimento.

Lo stesso ragionamento vale per un ritardo $\tau_y > 0$ in uscita, dove possiamo sostituire l'uscita $Y(s)$ con quella appena ottenuta:

$$Y'(s) = e^{-\tau_y s} Y(s) = e^{-\tau_y s} e^{-\tau_u s} G(s) U'(s) = e^{-(\tau_u + \tau_y)s} G(s) U'(s)$$

Il termine esponenziale dipende nuovamente dai ritardi, tuttavia la funzione di trasferimento non è più razionale a coefficienti reali (l'esponenziale ha comunque la variabile s all'esponente).

Questo non vale
per i sistemi
retro-azionati
(saranno discussi
successivamente)

OSSERVAZIONE 3.3. Dato un sistema LTI con ritardo, supponendo di non avere cancellazioni nella funzione di trasferimento e tutti i poli abbiano parte reale negativa, ovvero il sistema sarà asintoticamente stabile (dall'Osservazione 3.1); si dimostra che, se il sistema interno è asintoticamente stabile, eventuali ritardi su ingressi e uscite non influenzano questa sua proprietà.

3.3. Forme fattorizzate

Per comodità si usa rappresentare le funzioni di trasferimento, in un sistema SISO, secondo delle scritture standard fattorizzate:

$$(3.3.1) \quad G(s) = \frac{\rho \cdot \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{n_i} s + \alpha_{n_i}^2)}{s^g \cdot \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \omega_{n_i} s + \omega_{n_i}^2)}$$

$$(3.3.2) \quad G(s) = \frac{\mu \cdot \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i s}{\alpha_{n_i}} + \frac{s^2}{\alpha_{n_i}^2}\right)}{s^g \cdot \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i s}{\omega_{n_i}} + \frac{s^2}{\omega_{n_i}^2}\right)}$$

Forma di Bode

I termini delle forme fattorizzate hanno il seguente significato:

- la *costante di trasferimento* ρ è uno scalare, esso è il valore iniziale del trasferimento; si ottiene applicando (B.1.7) con ingresso un impulso. Risulta che

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s) = s\rho \cdot s^{(n_N - n_D)}$$

e si osserva che per una funzione di trasferimento in forma standard vale $n_N - n_D = -1$, in tal caso il limite appena calcolato tende a ρ ;

- il *tipo* del sistema g è un intero che indica il numero di poli ($g > 0$) o zeri ($g < 0$) nell'origine; se g è positivo si dice che il sistema presenta degli integratori ideali, poiché l'uscita sarà la trasformata dell'integrale dell'ingresso; se g è negativo si dice che il sistema presenta dei derivatori ideali, poiché l'uscita sarà la trasformata della derivata dell'ingresso;
- i poli p_i e gli zeri z_i cambiati di segno sono scalari non nulli;
- le *pulsazioni naturali* ω_i e α_i delle coppie di poli e zeri complessi coniugati sono scalari strettamente maggiori di 0;

- gli *smorzamenti* ξ_i e ζ_i delle coppie di poli e zeri complessi coniugati sono scalari con modulo strettamente minore di 1 (se in modulo fossero maggiori di 1 non si otterrebbero radici complesse coniugate dalla seconda produttoria);
- il *guadagno statico* μ è uno scalare, esso è il valore finale del trasferimento; si ottiene applicando (B.1.8) con uno segnale costante in ingresso, ad esempio lo scalino $\bar{u} \cdot \text{sca}(t)$ di ampiezza \bar{u} , la cui trasformata è \bar{u}/s . In assenza di poli o zeri nell'origine ($g = 0$) risulta che

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{\bar{u}}{s} = \bar{u} \cdot \mu$$

dove \bar{u} è l'ampiezza dello scalino in ingresso. Otteniamo in effetti il rapporto tra l'ampiezza dello scalino in ingresso (ingresso di equilibrio) e l'ampiezza dell'uscita (di equilibrio);

- le *costanti di tempo* $T_i = 1/p_i$ dei poli e $\tau_i = 1/z_i$ degli zeri sono scalari.

Se rappresentiamo i poli complessi coniugati sul piano di Gauss, appaiono evidenti alcune proprietà riguardo pulsazioni naturali e smorzamenti:

preso un polo stabile, esso avrà (risolvendo le radici) $\Re(p) = -\xi\omega_n$, $\Im(p) = \pm\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$; in particolare ω_n è la distanza dall'origine di ciascun polo della coppia coniugata, mentre il coseno dell'angolo θ che questa distanza forma con l'asse reale è pari a ξ , dunque vale $\theta = \arccos(\xi)$.

Da queste osservazioni segue che, a parità di pulsazione ω_n lo smorzamento ξ è inversamente proporzionale all'angolo θ tra le distanze dei due complessi coniugati.

3.4. Risposta forzata allo scalino

Consideriamo un sistema dinamico nel dominio del tempo, espresso in forma (1.1.3); se abbiamo un ingresso generico $u(t)$ è necessario risolvere un'equazione differenziale ordinaria per ottenere l'uscita $y(t)$. Questi risultati sono riassunti in (1.2.2), che tuttavia non risulta comodo da calcolare; si adotta la seguente strategia:

- (1) Trasformiamo il segnale di ingresso nel dominio di Laplace;
- (2) Calcoliamo la funzione di trasferimento;
- (3) Otteniamo l'uscita nel dominio di Laplace;
- (4) Antitrasformiamo l'uscita per ottenerla nel dominio del tempo.

Useremo l'ingresso canonico a scalino $u(t) = \bar{u} \cdot \text{sca}(t)$ poiché si tratta di un segnale facilmente realizzabile nella pratica in un sistema dinamico; in particolare ci poniamo nelle condizioni di uno scalino unitario in sistemi asintoticamente stabili del I e del II ordine, quindi sistemi con al più due poli (con parte reale negativa) e al più uno zero, e nessun polo è nell'origine.

3.4.1. Valori iniziale e finale della risposta. Calcoliamo il valore finale della risposta allo scalino a partire dalla trasformata di Laplace dell'uscita, usando la funzione di trasferimento:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Applicando (B.1.8) otteniamo (scrivendo nella (3.3.2) la funzione di trasferimento):

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \mu$$

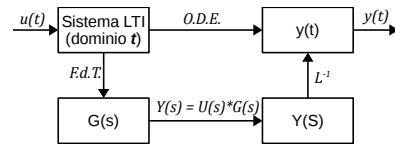


Figura 3.4.1. Equivalenza risposta nel dominio del tempo con dominio di Laplace

Questo vale in assenza di zeri nell'origine, altrimenti si avrebbe un s^{g+1} al numeratore che annulla l'uscita (con uno zero nell'origine $g = -1$).

Calcoliamo il valore iniziale come l'uscita al tempo $t = 0$, usando (B.1.7):

$$y(t \rightarrow 0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s)$$

Questo limite vale ρ se numeratore e denominatore sono di pari grado, altrimenti si annulla.

Possiamo calcolare anche il valore iniziale delle derivate dell'uscita nello stesso modo: supponendo che la funzione di trasferimento sia strettamente propria, allora il valore iniziale della derivata prima vale

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \mathcal{L}[\dot{y}(t)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} s [s \cdot Y(s)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Osserviamo che l'annullamento del limite dipende dal grado relativo (il numeratore è moltiplicato per s): in generale il valore delle prime $n_D - n_N - 1$ derivate è nullo, mentre la successiva vale ρ .

Nel caso di sistemi del I e II ordine c'è un transitorio per la risposta allo scalino, tipicamente una oscillazione convergente; elenchiamo alcuni termini per la nomenclatura e l'analisi di questa risposta:

- Il valore di stato stazionario $y_\infty = \mu \cdot \bar{u}$ è il prodotto del guadagno statico per l'ampiezza dello scalino;
- Il massimo valore che raggiunge l'uscita nel transitorio è y_{MAX} ;
- La *sovraelongazione* $s\% = \frac{y_{\text{MAX}} - y_\infty}{y_\infty}$ è la distanza del picco dal valore asintotico;

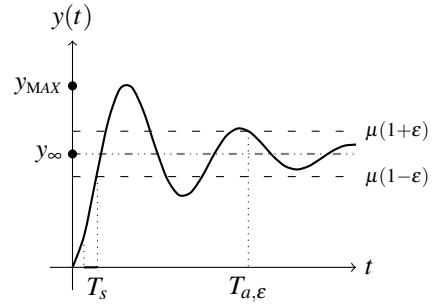


Figura 3.4.2. Risposta allo scalino per sistemi di ordine elevato

- Il *tempo di assestamento* $T_{a,\epsilon}$ è l'istante dopo il quale l'uscita è definitivamente compresa in $(y_\infty + \epsilon, y_\infty - \epsilon)$;
- Il *tempo di salita* $T_s = y^{-1}(0.9y_\infty) - y^{-1}(0.1y_\infty)$ è l'intervallo di tempo nel quale l'uscita raggiunge il valore stazionario y_∞ per la prima volta approssimato tra il 10% e il 90%.

3.4.2. Risposta per sistemi del I ordine. Consideriamo solo il caso di sistemi strettamente propri (una funzione di trasferimento bi-propria genera una risposta dell'uscita allo scalino poco interessante): il numeratore della funzione di trasferimento di un sistema del genere sarà una costante e il denominatore avrà un singolo polo; l'uscita si ottiene da (3.1.2):

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}, \quad Y(s) = \frac{\mu}{s(1 + Ts)}$$

Per calcolare l'uscita nel dominio del tempo, antitrasformiamo l'espressione appena ottenuta; per prima cosa usiamo (B.1.12) per scrivere in modo adeguato tale espressione:

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{1 + Ts} \rightarrow a + aTs + bs = \mu \rightarrow s(aT + b) + a = \mu$$

Si tenga a mente che la trasformata dello scalino vale $\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = 1/s$

$$\begin{cases} a = \mu \\ b = -aT = -\mu T \end{cases}$$

Sostituendo nell'espressione dell'uscita possiamo calcolare la sua antitrasformata:

$$Y(s) = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu T}{1 + Ts} = \mu \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mu (1 - e^{-t/T}) \text{ sca}(t)$$

Le caratteristiche di questa risposta sono le seguenti:

- Valore iniziale nullo al tempo zero ($y(0) = 0$);
- Valore iniziale della derivata prima pari a $\lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 \frac{\mu}{1 + Ts} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\mu}{T}$ (pendenza nella tangente nell'origine);
- Tempo di assestamento in ε pari a $T_{a,\varepsilon} \Rightarrow y(T_{a,\varepsilon}) = \mu(1 - \varepsilon) = \mu(1 - e^{-T_{a,\varepsilon}/T}) \text{ sca}(t) \rightarrow e^{-T_{a,\varepsilon}/T} = \varepsilon \rightarrow \boxed{T_{a,\varepsilon} = -T \ln(\varepsilon)}$.

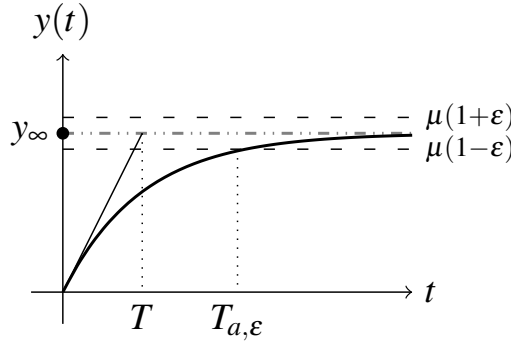


Figura 3.4.3. Risposta allo scalino in sistemi del I ordine

3.4.3. Risposta per sistemi del II ordine. Scriviamo in forma (3.3.2) la funzione di trasferimento, supponendo che $T_1 > T_2$; la funzione di uscita si ricava moltiplicando direttamente per la trasformata dell'ingresso ($1/s$):

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \quad Y(s) = \frac{\mu}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

Utilizziamo il metodo di Heaviside (B.1.9) per ottenere l'antitrasformata dell'uscita:

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{1 + T_1 s} + \frac{c}{1 + T_2 s}$$

$$a = \left. \frac{\mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \right|_{s=0} = \mu$$

$$b = \left. \frac{\mu}{s(1 + T_2 s)} \right|_{s=-1/T_1} = \frac{\mu}{-1/T_1(1 - T_2/T_1)} = \frac{-\mu T_1^2}{T_1 - T_2}$$

$$c = \left. \frac{\mu}{s(1 + T_1 s)} \right|_{s=-1/T_2} = \frac{\mu}{-1/T_2(1 - T_1/T_2)} = \frac{\mu T_1^2}{T_1 - T_2}$$

$$Y(s) = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu T_1^2}{(T_1 - T_2)(1 + T_1 s)} + \frac{\mu T_2^2}{(T_1 - T_2)(1 + T_2 s)}$$

Riscriviamo infine l'espressione dell'uscita per favorire l'antitrasformazione, raccogliendo i termini di secondo grado dei denominatori:

$$Y(s) = \mu \left(\frac{1}{s} - \frac{\mu T_1}{(T_1 - T_2)} \cdot \frac{1}{1/T_1 + s} + \frac{\mu T_2}{(T_1 - T_2)} \cdot \frac{1}{1/T_2 + s} \right)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mu \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \text{sca}(t)$$

OSSERVAZIONE 3.4. Se fosse $T_1 \gg T_2$, il polo associato a T_1 si dice dominante e la risposta si avvicina a quella del primo ordine studiata nella sezione precedente; quando invece $T_1 \sim T_2$, la risposta complessiva risulterà rallentata dalla presenza di un secondo polo rispetto al caso del I ordine.

Calcoliamo ora le derivate nell'origine; se non abbiamo zeri nell'origine, con due poli si avrà la derivata prima nulla e la derivata seconda pari al guadagno statico:

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^2 \mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)s} = 0 \\ \ddot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^3 \mu}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)s} = \frac{\mu}{T_1 T_2} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema (B.1.7).

Nel caso dei poli reali coincidenti avremo $T_1 = T_2 = T$, ovvero la risposta del sistema sarà la più lenta possibile per quanto detto nell'Osservazione 3.4; scriviamo funzione di trasferimento e uscita come:

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + Ts)^2}, \quad Y(s) = \frac{\mu}{s(1 + Ts)^2} = \frac{a}{s} + \frac{b}{1 + Ts} + \frac{c}{(1 + Ts)^2}$$

Scegliamo di usare (B.1.9) per calcolare a , e di ottenere b e c da (B.1.12):

$$\begin{aligned} a &= \left. \frac{\mu}{(1 + Ts)^2} \right|_{s=0} = \mu \\ \mu &= aT^2 s^2 + 2aTs + a + bs(1 + Ts) + cs \\ &= s^2 (sT^2 + bT) + s(2aT + b + c) + a \\ \begin{cases} aT^2 + bT = 0 \\ 2aT + b + c = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b = -\mu T \\ c = -\mu T \end{cases} \end{aligned}$$

Riscriviamo infine l'uscita sostituendo i coefficienti e troviamo la sua antitrasformata:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\mu}{s} - \frac{\mu T}{1 + Ts} - \frac{\mu T}{(1 + Ts)^2} = \mu \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(1/T + s)} - \frac{1}{T(1/T + s)^2} \right) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mu \left(1 - e^{-t/T} - \frac{1}{T} e^{-t/T} \right) \text{sca}(t) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.5. La velocità di risposta, calcolata in maniera analitica tramite le derivate dell'uscita, si ottiene come prima e vale che il tempo di assestamento all'1% è circa $7T$, mentre per il sistema a singolo polo questo valore è circa $5T$.

APPENDICE A

Richiami di Geometria e Algebra Lineare

A.1. Matrici

Richiamiamo le proprietà del prodotto nell'ambito delle matrici; siano date due matrici quadrate di ordine n chiamate $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uno scalare α ; siano inoltre $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ gli elementi alla riga i e colonna j delle rispettive matrici (indicate con la maiuscola corrispondente).

DEFINIZIONE A.1. Il *prodotto per uno scalare* di una matrice, indicato con $\alpha \cdot A$, è pari a

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{1,1} & \cdots & \alpha \cdot a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{n,1} & \cdots & \alpha \cdot a_{n,n} \end{bmatrix}$$

dove $a'_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j}$; il prodotto per uno scalare gode delle stesse proprietà del prodotto tra due scalari.

DEFINIZIONE A.2. Prese $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$, chiamiamo *prodotto righe per colonne* la relazione $A \cdot B = C$, dove gli elementi della matrice C valgono

$$c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}$$

Si osserva che l'elemento $c_{i,j}$ è ottenuto dal prodotto termine a termine della i -esima riga di A con la j -esima colonna di B ; questa operazione non è commutativa.

DEFINIZIONE A.3. Si chiama matrice *trasposta* di A e si indica con A^T la matrice ottenuta scambiando ordinatamente le righe con le colonne di A .

Il prossimo concetto è essenziale per capire la successiva Definizione A.5:

DEFINIZIONE A.4. Data una matrice quadrata A il *complemento algebrico* del suo elemento $a_{i,j}$ è il determinante della sotto-matrice che si ottiene eliminando dalla matrice principale la i -esima riga e la j -esima colonna, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$; esso è indicato con $\Delta_{i,j}$.

Ora possiamo introdurre il concetto di determinante, utilizzato ricorsivamente nella precedente Definizione A.4:

DEFINIZIONE A.5. Il *determinante* di una generica matrice quadrata A di ordine $n > 1$ è pari a

**I teorema di
Laplace**

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (a_{i,j} \cdot \Delta_{i,j}) = \sum_{j=1}^n (a_{i,j} \cdot \Delta_{i,j})$$

o in altri termini il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi di una sua linea (riga o colonna) per i rispettivi complementi algebrici. Se $n = 1$ si ha il caso banale in cui la matrice A ha un solo elemento a e vale $\det(a) = a$.

Inoltre per una matrice con $n = 2$ si ottiene facilmente $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$.

ESERCIZIO A.1. Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

► *Esercizio:*
determinante di
una matrice 3×3

SOLUZIONE A.1. Considero la riga 1, la quale presenta uno zero (semplificando un addendo della somma di complementi algebrici): applicando la Definizione A.5 si ottiene che:

- il primo addendo (relativo all'elemento $a_{1,1} = 1$) si ottiene da

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & \emptyset & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \right) = -2 - 15 = -17;$$

- il secondo addendo vale 0;
- il terzo addendo (relativo all'elemento $a_{1,3} = 2$) si ottiene da

$$\begin{bmatrix} 1 & \emptyset & \boxed{2} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right) = 2(10 + 1) = 22;$$

Il determinante di A sarà $\det(A) = 22 - 17 = \boxed{5}$. □

A seguire alcune proprietà e osservazioni sul determinante di una matrice:

OSSERVAZIONE A.1. Una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante: $\det(A) = \det(A^T)$.

OSSERVAZIONE A.2. Il determinante di un prodotto matrice per scalare è dato da $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \det(A)$.

TEOREMA A.1. Per due matrici quadrate A e B dello stesso ordine vale $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

**Teorema di
Binet**

DEFINIZIONE A.6. Una matrice il cui determinante sia nullo (zero) si dice *singolare*; una matrice singolare non è invertibile.

DEFINIZIONE A.7. Il *rango* di una matrice quadrata è il numero massimo di vettori *linearmente indipendenti* tra righe e colonne; presi n vettori, essi si dicono linearmente indipendenti se $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \neq 0 \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

Vice versa si parla di vettori linearmente *dependenti* se $\exists \alpha_i, i \in 1 \dots n : \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$.

DEFINIZIONE A.8. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ indichiamo con A^{-1} la sua *inversa*, tale che $A \cdot A^{-1} = I$ (questo è valido solo per matrici non singolari, dalla Definizione A.6).

Tale matrice si calcola come $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix}$ dove l'elemento $b_{i,j} =$

$$\frac{\Delta_{j,i}}{\det(A)}.$$

Attenzione agli
indici del
complemento
algebrico Δ : sono
scambiati rispetto
a quelli
dell'elemento b
corrispondente!

TEOREMA A.2. *Data una matrice quadrata A , essa è invertibile se e solo se non è singolare; se A non è singolare allora la sua inversa vale $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$; con $A^* = [a_{i,j}^*]$ si indica la matrice aggiunta di A , ovvero quella il cui elemento di posto $a_{i,j}^*$ corrisponde al complemento algebrico di $a_{j,i}$.*

ESEMPIO A.1. Si vuole invertire la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando la Definizione A.8, controlliamo che A sia invertibile: $\det(A) = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13$ che essendo diverso da zero rende la matrice invertibile; scriviamo dunque la matrice inversa come il prodotto dell'inverso del determinante per la matrice dei complementi algebrici di A (dove per $a_{i,j}$ si prende $\Delta_{j,i}$, si rimanda inoltre alla Definizione A.4):

$$A^{-1} = -\frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

□

► *Esercizio:* ESERCIZIO A.2. Calcolare l'inversa (se esiste) della seguente matrice:
inversa di una
matrice 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE A.2. Controlliamo che la matrice sia invertibile; calcoliamo dunque il determinante utilizzando la seconda riga (contenente uno zero):

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) + 0 + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= -4 \cdot (-3 - 4) - 1 \cdot (6 + 1) = 28 - 7 = 21 \end{aligned}$$

che risulta maggiore di zero e la matrice è invertibile.

Procediamo calcolando l'inversa come il prodotto dell'inverso del determinante per la matrice dei complementi algebrici degli elementi speculari ($a_{i,j} = \Delta_{j,i}$):

Per brevità è stata
usata la scrittura
alternativa $|A|$ per
indicare $\det(A)$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{2,1} & \Delta_{3,1} \\ \Delta_{1,2} & \Delta_{2,2} & \Delta_{3,2} \\ \Delta_{1,3} & \Delta_{2,3} & \Delta_{3,3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} -2 & (-1) - 7 & -1 \\ (-1) 11 & 7 & (-1) - 5 \\ 8 & (-1) 7 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -11 & 7 & 5 \\ 8 & -7 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Seguono ora alcune osservazioni sulle proprietà delle matrici inverse:

OSSERVAZIONE A.3. Per l'operazione di inverso sulle matrici sono dimostrate le seguenti proprietà:

- l'inversa di una matrice inversa è la matrice non invertita $(A^{-1})^{-1} = A$;
- l'inverso del prodotto di uno scalare per una matrice è il prodotto del suo inverso per la matrice inversa $(\alpha \cdot A)^{-1} = 1/\alpha \cdot A^{-1}$;
- l'inverso del prodotto di due matrici è uguale al prodotto delle inverse scambiate di posto $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

OSSERVAZIONE A.4. Sia A una matrice diagonale del tipo $\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$, allora la sua inversa è ancora una matrice diagonale nella forma

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{bmatrix}$$

Si verifica inoltre che, se una matrice è invertibile, risulta che $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A.2. Autovalori e autovettori

DEFINIZIONE A.9. Un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è un *autovalore* per una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se vale la seguente:

$$\exists v \in \mathbb{C}^n : A \cdot v = \lambda \cdot v$$

che può essere riscritta come $(\lambda I - A) \cdot v = 0$ per $v \neq 0$; questo si verifica se e solo se

$$(A.2.1) \quad \det(\lambda I - A) = 0$$

Il (A.2.1), che indichiamo come $\phi(\lambda) = 0$, ha per soluzioni $\lambda_i \in \mathbb{C}$ le quali sono gli autovalori della matrice A .

La molteplicità degli autovalori è minore o uguale all'ordine della matrice A ($i \in 1 \dots n$); chiamiamo il numero di autovalori distinti $\mu_n \in 1 \dots n$.

DEFINIZIONE A.10. La *molteplicità algebrica* di un autovalore λ_i è il numero di volte che esso compare tra gli autovalori di una matrice, e si indica con n_i ; possiamo scrivere le soluzioni di (A.2.1) rispetto alla molteplicità algebrica:

$$\phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{\mu_n} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

Si verifica che il numero μ_n di autovalori distinti deve corrispondere al rango della matrice.

DEFINIZIONE A.11. Un *autovettore* v_i associato all'autovalore λ_i è tale per cui (applicando la Definizione A.9) valga $(\lambda_i I - A) v_i = 0$ posto che $v_i \neq 0$. Gli autovettori associati a un autovalore sono infiniti.

**Polinomio
caratteristico**

► *Esercizio:* autovettori di matrice 2×2 **ESERCIZIO A.3.** Calcolare gli autovalori e un autovettore per ciascuno di essi, per la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE A.3. Per cominciare calcoliamo (A.2.1) in generale (rispetto a λ):

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 5) + 6 = \lambda^2 - 6\lambda + 11 \end{aligned}$$

Le soluzioni del determinante (polinomio caratteristico) sono le complesse coniugate $\lambda_i = 3 \pm j\sqrt{2}$ (con j l'unità immaginaria, tale che $j^2 = -1$); calcoliamo gli autovettori associati a entrambi gli autovalori:

(1) Autovettore v_1 associato a $\lambda_1 = 3 + j\sqrt{2}$:

deve valere $\det(\lambda_1 I - A)v_1 = 0$ ovvero $\begin{bmatrix} 3 + j\sqrt{2} - 1 & -3 \\ 2 & 3 + j\sqrt{2} - 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{bmatrix} = 0$; dal prodotto righe per colonne si ottiene l'equazione $(2 - j\sqrt{2})v_{1,1} - 3v_{2,1} = 0$. Essa può essere risolta scegliendo una condizione per una delle due componenti del vettore; imponiamo $v_{1,1} = 3$: si ottiene $v_{2,1} = 2 + j\sqrt{2}$ e quindi il vettore v_1 avrà le componenti $\boxed{(3, 2 + j\sqrt{2})}$

(2) Autovettore v_2 associato a $\lambda_2 = 3 - j\sqrt{2}$:

essendo gli autovalori complessi coniugati e la matrice di ordine 2, possiamo assumere che il secondo autovettore abbia la seconda componente complessa coniugata rispetto al primo $\boxed{(3, 2 - j\sqrt{2})}$ □

► *Esercizio:* autovettori di matrice 2×2 **ESERCIZIO A.4.** Calcolare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Sol. $\lambda_1=1, \lambda_2=-3, v_1=(-1,2), v_2=(1,2)$

OSSERVAZIONE A.5. Se scriviamo il determinante (Definizione A.5) in termini di autovalori (Definizione A.10) segue che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{\mu_n} (\lambda_i)^{n_i}$$

Per annullare la produttoria deve esistere almeno un $\lambda_i = 0$, per cui una matrice con determinante nullo (singolare) ha almeno un autovalore nullo.

OSSERVAZIONE A.6. Sia A una matrice triangolare (ha solo elementi nulli al di sotto o al di sopra della diagonale principale); allora gli autovalori di A sono esattamente gli elementi sulla diagonale principale ($\lambda_i = a_{i,i}$).

OSSERVAZIONE A.7. Se λ_i è un autovalore di una matrice A allora λ_i^{-1} è un autovalore di A^{-1} (posto che A sia invertibile).

OSSERVAZIONE A.8. la *traccia* della matrice A (la somma degli elementi sulla diagonale principale) è anche pari alla somma dei suoi autovalori (contati con le rispettive molteplicità algebriche):

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \sum_{i=1}^n n_i \lambda_i$$

Definiamo ora alcune proprietà degli autovettori.

DEFINIZIONE A.12. Un autovettore v_i si chiama *autospatio* per il suo autovalore associato λ_i ; la dimensione di tale autospatio è indicata con $g_i \in [1, n_i]$ e si chiama *molteplicità geometrica*, relativa a λ_i . Essa si calcola come $g_i = n - \operatorname{rango}(\lambda_i I - A)$. Per autovalori tutti distinti la loro molteplicità geometrica sarà in ogni caso 1.

ESERCIZIO A.5. Calcolare la molteplicità geometrica degli autovalori della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

► *Esercizio:*
molteplicità
geometrica di
autovalori di
matrice 3×3

SOLUZIONE A.4. Partiamo cercando gli autovalori di A tramite il (A.2.1):

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda(\lambda - 1)) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Il gli autovalori risultano essere $\lambda_1 = 1$ con $n_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ con $n_2 = 1$; calcoliamo quindi la molteplicità geometrica per entrambi gli autovalori:

(1) Per il primo autovalore applichiamo la Definizione A.12:

$$g_1 = 3 - \operatorname{rango} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 - 1 = 2$$

ricordando che per la Definizione A.7 il rango è il numero massimo di righe o colonne linearmente indipendenti; nel caso di A sono al più 1, essendo l'ultima riga e l'ultima colonna costituite da zeri (quindi combinazione lineare di una delle altre righe o colonne per 0) mentre le prima due righe e colonne sono l'una l'opposto dell'altra (quindi combinazione lineare di una delle due per -1).

(2) Per il secondo autovalore, che ha molteplicità algebrica 1, la molteplicità geometrica vale $g_2 = 1$.

In conclusione, abbiamo trovato $g_1 = 1$, $g_2 = 1$

□

A.3. Similitudine e diagonalizzabilità

La seguente definizione realizza una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) tra due matrici:

DEFINIZIONE A.13. Siano A e B matrici quadrate dello stesso ordine; A è detta *simile* a B se esiste una matrice non singolare T tale che $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$.

La matrice di trasformazione T^{-1} ha per colonne autovettori della matrice A : $T^{-1} = [v_1, v_2, \dots, v_{\mu_n}]$ con v_i associato a λ_i per A ; ogni v_i inoltre ha un numero di colonne pari alla molteplicità algebrica n_i del λ_i associato.

TEOREMA A.3. Due matrici simili possiedono lo stesso polinomio caratteristico, quindi gli stessi autovalori.

DEFINIZIONE A.14. Una matrice si dice *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale, ovvero A è diagonalizzabile se

$$\exists T_D : A_D = T_D A T_D^{-1}$$

dove A_D è una matrice diagonale con gli stessi autovalori di A .

OSSERVAZIONE A.9. Si osserva allora che una matrice A è diagonalizzabile se e solo se ha autovalori tutti distinti (la molteplicità algebrica e geometrica dei suoi autovalori coincidono) $\forall i \in 1 \dots n (n_i = g_i)$.

► *Esercizio:*
diagonalizzabilità
di matrice 3×3

ESERCIZIO A.6. Ottenere se la seguente matrice è diagonalizzabile, e in tal caso ottenere la matrice di trasformazione:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE A.5. Per sapere se A sia diagonalizzabile dobbiamo riuscire a ottenere una matrice invertibile T_D che renda A simile a una matrice diagonale; cominciamo quindi usando l'Osservazione A.9 e cerchiamo gli autovalori di A :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

La precedente è una matrice triangolare, dunque il determinante si ottiene come prodotto degli elementi sulla diagonale principale; otteniamo $\lambda_1 = 1$ con $n_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2$ con $n_2 = 1$.

Abbiamo che la $n_2 = 1 = g_2$, rimane da controllare che $g_1 = n_1 = 2$; usando la definizione scriviamo

$$g_1 = 3 - \text{rango}(\lambda_1 I - A) = 3 - \text{rango} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = 3 - 1 = \boxed{2}$$

Possiamo affermare che A è diagonalizzabile, quindi troviamo la matrice di trasformazione T_D cercando gli autospazi associati agli autovalori:

(1) Per $\lambda_1 = 1$ abbiamo $(I - A)v_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \\ v_{3,1} & v_{3,2} \end{bmatrix} = 0$$

Imponendo $v_{3,1} = 0$ possiamo scegliere $v_{1,1} = 0$ e $v_{2,1} \neq 0$ per ottenere due autovettori linearmente indipendenti:

$$v_1 = (1, 0, 0), (0, 1, 0)$$

(2) Per $\lambda_2 = 2$ abbiamo $(2I - A)v_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{1,1} = v_{3,1} & (1^{\text{a}} \text{ riga} \times v_2) \\ v_{2,1} = 0 & (2^{\text{a}} \text{ riga} \times v_2) \end{cases}$$

Una possibile scelta per il secondo autospazio è $v_2 = (1, 0, 1)$.

Infine, scriviamo la matrice di trasformazione inversa, le cui righe sono gli autospazi trovati:

$$T_D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T_D = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e grazie ad essa otteniamo la matrice diagonale A_D simile ad A :

$$A_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

che è proprio la matrice diagonale cercata, con gli autovalori di A sulla diagonale principale. \square

ESERCIZIO A.7. Trova (se esiste) la matrice diagonale simile alla seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

► *Esercizio:*
matrice diagonale
simile a matrice
 2×2

Sol. $A_D = [[3+j\sqrt{2}, 0], [0, 3-j\sqrt{2}]]$

Anche se una matrice non è diagonalizzabile (non vale la Definizione A.9), è possibile metterla comunque in una forma il più simile possibile a una matrice diagonale:

DEFINIZIONE A.15. Una matrice A che non sia diagonalizzabile può comunque essere scritta in una forma diagonale a blocchi, chiamata *forma di Jordan*.

Si prendono tutti gli autovalori di A tali che $g_i < n_i$ e si trovano gli *autovettori generalizzati* associati ai λ_i nel modo seguente:

$$\begin{aligned} v_{i,1} &:= (\lambda_i I - A) v_{i,1} = 0 \\ v_{i,2} &:= (A - \lambda_i I) v_{i,2} = v_{i,1} \\ &\vdots \\ v_{i,\mu_n} &:= (A - \lambda_i I) v_{i,\mu_n} = v_{i,\mu_n-1} \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

**Autovettori
generalizzati**

La matrice di trasformazione si otterrà come $T_J^{-1} = [v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,\mu_n}]$ in cui le colonne sono costituite dagli autovettori generalizzati.

La matrice A in forma di Jordan si scrive come

$$A_J = T_J \cdot A \cdot T_J^{-1} \tag{A.3.2}$$

Forma di Jordan

La matrice in forma di Jordan ha una struttura diagonale a blocchi, ognuno dei quali è sulla diagonale principale e sono tanti quanti gli autovalori distinti; ciascun blocco ha dimensione pari alla molteplicità algebrica dell'autovalore relativo, e ogni coefficiente sulla diagonale del blocco è l'autovalore a cui appartiene il blocco.

Nei blocchi di ordine maggiore di uno (hanno ordine n_i , relativi ad autovalori con $n_i > 1$) sono presenti gli autovalori λ_i sulla diagonale principale, e tutti gli elementi della sopra-diagonale sono pari a 1;

$$A_J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

L'esponenziale di una matrice in forma di Jordan è costituito dall'esponenziale di ogni blocco di Jordan di ordine uno, mentre per i blocchi di ordine maggiore i coefficienti al di sopra della diagonale (quelli sulla diagonale sono l'esponenziale dei coefficienti sulla diagonale) sono pari al termine $t^h/h!$ con $h = i - j$ la distanza dell'elemento $a'_{j,i,j}$ da quello sulla diagonale $a'_{j,i,i}$ all'interno della stessa riga:

Figura A.3.1. Esempio di matrice in forma di Jordan, per $n_1 = 2$, $g_1 = 1$ e $n_2 = g_2 = 1$

$$e^{A_J t} = e^{\lambda_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & te^{\lambda_1} & t^2/2e^{\lambda_1} \\ 0 & e^{\lambda_1} & te^{\lambda_1} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1} \end{bmatrix}$$

dove A_J è una matrice in forma di Jordan con un unico blocco di Jordan relativo a un autovalore λ_1 con $n_i = 3$.

► *Esercizio:*
matrice 3×3 in
forma di Jordan

ESERCIZIO A.8. Trova la matrice in forma di Jordan simile alla seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Sol. $A_J = [[-2, 1, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 4]]$

A.4. Esponenziali di matrici

Possiamo definire la funzione esponenziale di una matrice A rispetto a una variabile t come:

DEFINIZIONE A.16. Un *esponenziale di matrice* è una funzione del tipo $e^{A \cdot t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (A \cdot t)^i = I + A \cdot t + \frac{1}{2} (A \cdot t)^2 + \dots$

Se abbiamo una matrice diagonale $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ allora il suo esponenziale vale $e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$, dove si ha l'esponenziale scalare $e^{\lambda t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (\lambda t)^i$.

Se abbiamo una matrice in forma di Jordan, per i blocchi di Jordan con ordine maggiore di 1 vale $A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \rightarrow e^{A_J \cdot t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$; da un blocco di Jordan 2×2 compare un termine lineare, per dimensione n maggiore compariranno termini di grado $n - 1$.

OSSERVAZIONE A.10. Siano A e B due matrici simili ($B = T \cdot A \cdot T^{-1}$), allora vale $e^{B \cdot t} = T \cdot e^{A \cdot t} \cdot T^{-1}$; questo si verifica applicando la Definizione A.16.

OSSERVAZIONE A.11. Sia A una matrice diagonale o in forma di Jordan, allora si ha che $A \cdot e^{A \cdot t} = e^{A \cdot t} \cdot A$; dato che A è diagonale, anche la sua esponenziale sarà una matrice diagonale e il prodotto di due matrici diagonali è commutativo.

Dalla Osservazione A.10 otteniamo che questa uguaglianza vale in generale per una matrice A qualsiasi; infatti $T_D^{-1} \cdot A_D \cdot T_D \cdot T_D^{-1} \cdot e^{A_D \cdot t} \cdot T_D = T_D^{-1} \cdot A_D \cdot e^{A_D \cdot t} \cdot T_D = A$.

OSSERVAZIONE A.12. Sia A_D una matrice diagonale, allora la derivata nel tempo del suo esponenziale vale $\frac{\partial}{\partial t} e^{A_D \cdot t} = A_D \cdot e^{A_D \cdot t}$; questo risultato proviene dalla derivata degli elementi sulla diagonale di una matrice esponenziale.

Si ottiene di nuovo che questa uguaglianza vale in generale, per qualsiasi matrice A .

A.5. Numeri nel campo complesso

DEFINIZIONE A.17. Un numero complesso nella forma algebrica è scritto come $s = a + jb$, dove $a = \Re(s)$ è la parte reale e $b = \Im(s)$ la parte immaginaria; j è l'unità immaginaria tale che $j^2 = -1$.

Ogni numero complesso possiede un complesso coniugato, che ha la stessa parte reale e la parte immaginaria cambiata di segno ($\bar{s} = a - jb$).

I numeri complessi ammettono anche la rappresentazione in forma trigonometrica (modulo e fase) sul piano di Gauss: $s = \rho (\cos(\phi) + j \sin(\phi))$, dove ρ è la distanza del numero dall'origine e ϕ è l'angolo che questa distanza forma con l'asse orizzontale.

OSSERVAZIONE A.13. Per passare da una rappresentazione algebrica a una trigonometrica si usano le seguenti considerazioni:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \arg(s) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a = 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

TEOREMA A.4. Consideriamo l'esponenziale di un numero complesso; scriveremo: $e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb}$. La formula di Eulero afferma che

$$(A.5.1) \quad e^{jb} = \cos(b) + j \sin(b)$$

**Formula di
Eulero**

La (A.5.1) è molto utile per eseguire il prodotto di numeri complessi, riconducendolo alle proprietà delle potenze.

Strumenti per analisi nel tempo continuo

B.1. Trasformata di Laplace

B.1.1. Definizione.

DEFINIZIONE B.1. Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e definiamo una variabile complessa $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$; se la funzione

Trasformata di Laplace

$$(B.1.1) \quad F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

esiste per qualche valore di s , essa si dice *trasformata di Laplace* di $f(t)$ e si indice come $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

La definizione appena enunciata implica che $f(t)$ sia almeno definita per $t \geq 0$; i contributi della funzione per $t < 0$ saranno nulli. Per questo motivo useremo moltiplicare i segnali di cui calcoleremo (B.1.1) per l'ingresso canonico $sca(t)$, che si annulla proprio per $t < 0$ mentre è costante e unitario per gli altri valori di t .

Inoltre il primo estremo di integrazione di (B.1.1) va inteso come 0^- (avvicinamento da sinistra), ovvero esso comprende i contributi impulsivi della funzione applicati nell'istante $t = 0$.

DEFINIZIONE B.2. Sia $\bar{\sigma} > -\infty$ l'estremo inferiore delle parti reali $\Re(s)$ dei valori s per cui l'integrale (B.1.1) converge; allora la trasformata di Laplace esiste in un semipiano delimitato dalla condizione $\Re(s) > \bar{\sigma}$, per questo motivo $\bar{\sigma}$ si chiama *ascissa di convergenza*.

DEFINIZIONE B.3. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$; se è possibile scrivere

$$(B.1.2) \quad F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con $N(s)$ e $D(s)$ polinomi primi tra loro, si ha una trasformata razionale.

Per questa categoria di trasformate, le radici dei polinomi al numeratore e denominatore si chiamano *singolarità* e si classificano in

$$(B.1.3) \quad \begin{cases} N(s) = 0 & \text{zeri} \\ D(s) = 0 & \text{poli} \end{cases}$$

Quando $f(t) \in \mathbb{R}$ i coefficienti di $N(s)$ e $D(s)$ sono reali e l'ascissa di convergenza è pari alla massima tra le parti reali dei coefficienti dei poli.

DEFINIZIONE B.4. Chiamiamo *formula di antitrasformazione* la funzione inversa della trasformata di Laplace, definita come

Antitrasformata di Laplace

$$(B.1.4) \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

dove agli estremi di integrazione si ha $\sigma > \bar{\sigma}$, $\sigma \in \mathbb{R}$ qualsiasi. La corrispondenza tra trasformata e antitrasformata di Laplace è biunivoca nel caso di funzioni nulle per $t < 0$.

B.1.2. Proprietà.

(I) LINEARITÀ: Prendiamo due funzioni $f(t)$ e $g(t)$, allora $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall \beta \in \mathbb{C}$ vale

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

ovvero la (B.1.2) è una operazione lineare.

(II) TRASLAZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO: Comunque preso un ritardo $\tau > 0$, si consideri la funzione traslata $f(t - \tau)$; la sua trasformata di Laplace vale

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \tau)] &= \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} \cdot e^{s\tau} dt \\ &= e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-s(t-\tau)} d(t - \tau) = \boxed{e^{-s\tau} F(s)} \end{aligned}$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per $e^{-s\tau}$ e infine abbiamo aggiustato il differenziale dt considerando anche il ritardo (costante).

(III) TRASLAZIONE NEL DOMINIO DI LAPLACE: Comunque preso un valore $\alpha \in \mathbb{C}$, la trasformata della funzione $e^{\alpha t} f(t)$ vale:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t(s-\alpha)} dt = \boxed{F(s - \alpha)}.$$

(IV) DERIVAZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO: La trasformata di Laplace della derivata prima di una funzione $f(t)$ rispetto a t , vale:

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_0^{+\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

Questo risultato si ottiene a partire dalla seguente uguaglianza sull'integranda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f(t) e^{-st}) &= \dot{f}(t) e^{-st} - s f(t) e^{-st} \implies \\ \dot{f}(t) e^{-st} &= \frac{\partial}{\partial t} (f(t) e^{-st}) + s f(t) e^{-st} \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} (f(t) e^{-st}) + s f(t) e^{-st} \right) dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (f(t) e^{-st}) dt + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= [f(t) e^{-st}]_0^{+\infty} + sF(s) = \boxed{sF(s) - f(0)} \end{aligned}$$

Questa proprietà può essere usata in catena per ottenere la seguente formula, valida per qualsiasi derivata multipla:

$$(B.1.5) \quad \mathcal{L}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{\partial^{i-1}}{\partial t} f(t) \Big|_{t=0}$$

(V) DERIVAZIONE NEL DOMINIO DI LAPLACE: Supponendo che la trasformata $F(s)$ sia derivabile per ogni s eccetto un numero finito di valori, vale:

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = \boxed{-\frac{\partial}{\partial s} F(s)}$$

Questo risultato si ottiene dalla seguente considerazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} F(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} (f(t) e^{-st}) dt \\ &= -t \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}[t \cdot f(t)] \end{aligned}$$

(VI) INTEGRAZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO: Con l'intuizione che l'integrazione è l'operazione inversa della derivazione, si dimostra che ciò vale anche per le trasformate; presa $f(t)$ integrabile tra 0 e $+\infty$, vale:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^{+\infty} f(t) dt \right] = \boxed{\frac{1}{s} \cdot F(s)}$$

dal fatto che l'operazione di derivazione nel dominio del tempo (IV) si effettua moltiplicando per s (a meno della condizione iniziale).

Questa proprietà è fondamentale nell'analisi in frequenza dei movimenti dei sistemi LTI

(VII) CONVOLUZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO: Prendiamo due segnali $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e facciamo il *prodotto di convoluzione* come

(B.1.6)

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \eta) f_2(\eta) d\eta = f_2(t) * f_1(t)$$

Si dimostra che la trasformata di (B.1.6) vale:

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \boxed{F_1(s) \cdot F_2(s)}$$

(VIII) TEOREMA DEL VALORE INIZIALE: Se la trasformata è razionale nella forma (B.1.2) e vale $n(N(s)) < n(D(s))$ (con $n(P(x))$ il grado del polinomio P nella variabile x), allora vale:

$$(B.1.7) \quad f(0) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot F(s).$$

(IX) TEOREMA DEL VALORE FINALE: Se la trasformata è razionale nella forma (B.1.2) e vale $n(N(s)) < n(D(s))$, e inoltre per ogni suo polo p_i vale $\Re(p_i) < 0$, allora vale:

$$(B.1.8) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s).$$

B.1.3. Trasformate notevoli. L'impulso è un ingresso canonico il cui integrale è non nullo solo nell'istante $t = 0$; la sua trasformata di Laplace vale

$$\mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \text{imp}(t) dt = e^{-s \cdot 0} \int_0^{+\infty} \text{imp}(0) dt = 1$$

Lo **scalino** è un ingresso canonico il cui integrale è nullo per istanti di tempo negativi e costante unitario altrimenti; la sua trasformata di Laplace vale:

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \text{sca}(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

L'**esponenziale** è una funzione ricorrente nei modi dei sistemi LTI, definita strettamente monotona; la sua trasformata di Laplace vale:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot \text{sca}(t)] = \frac{1}{s - \alpha}$$

per la proprietà (III) e per il risultato ottenuto sulla trasformata dello scalino.

La **cosinusoide** è una funzione limitata, tipica dei movimenti associati a modi complessi coniugati; la sua trasformata di Laplace vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t) \cdot \text{sca}(t)] &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \text{sca}(t)\right] \stackrel{\text{(I)}}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}}{2} \text{sca}(t)\right] + \mathcal{L}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{2} \text{sca}(t)\right] \\ &\stackrel{\text{(II)}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s + j\omega} + \frac{1}{s - j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

La **sinusoide**, come la cosinusoide, è una funzione limitata tipica dei movimenti associati a modi complessi coniugati; facciamo le seguenti considerazioni per calcolare la sua trasformata di Laplace:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{sca}(t) = \text{imp}(t) \implies \frac{\partial}{\partial t} (\cos(\omega t) \cdot \text{sca}(t)) = -\omega \sin(\omega t) \cdot \text{sca}(t) + \cos(\omega t) \cdot \text{imp}(t)$$

La trasformata della sinusoide può essere ottenuta usando la (A.5.1), come per la cosinusoide

Dalle precedenti scriviamo (esplicitando la sinusoide) che:

$$\sin(\omega t) \cdot \text{sca}(t) = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} (\cos(\omega t) \cdot \text{sca}(t)) + \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \cdot \text{imp}(t)$$

da cui la trasformata della sinusoide vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t) \cdot \text{sca}(t)] &\stackrel{\text{(I)}}{=} \frac{1}{\omega} \left(\mathcal{L}\left[-\frac{\partial}{\partial t} (\cos(\omega t) \cdot \text{sca}(t))\right] + \mathcal{L}[\cos(\omega t) \cdot \text{imp}(t)] \right) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} -\frac{1}{\omega} \left(\frac{s^2}{s^2 + \omega^2} - 1 \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

dai risultati sulla trasformata della cosinusoide e dell'impulso. Si noti che, anche se la trasformata di una derivata contiene le condizioni iniziali ($f(0)$), la trasformata della cosinusoide è una funzione discontinua di prima specie nell'origine (a causa dello scalino): in questo caso la condizione iniziale $f(0) \rightarrow f(0^-) = 0$ col contributo dello scalino, che vale 0 per $t < 0$.

La **rampa** è un ingresso canonico definito a partire dallo scalino come $\text{ram}(t) = t \cdot \text{sca}(t)$; la sua trasformata di Laplace vale:

$$\mathcal{L}[\text{ram}(t)] = \mathcal{L}[t \cdot \text{sca}(t)] \stackrel{\text{(V)}}{=} -\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}[\text{sca}(t)] = -\frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Un'alternativa per ottenere questo risultato consiste nel vedere la rampa come integrale dello scalino (moltiplicando quindi per $1/s$ la trasformata dello scalino).

La **parabola** è un ingresso canonico monotono che si annulla nell'istante iniziale, definita a partire dallo scalino come $\text{par}(t) = 1/2 t^2 \text{sca}(t)$; la sua trasformata di Laplace vale:

$$\mathcal{L}[\text{par}(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^\infty \text{ram}(t) dt\right] \stackrel{\text{(VI)}}{=} \frac{1}{s} \mathcal{L}[\text{ram}(t)] = \frac{1}{s^3}$$

ESEMPIO B.1. Sia dato il seguente movimento forzato di un sistema dinamico del I ordine, con coefficiente di stato α :

$$f(t) = e^{\alpha t} \cdot \text{sca}(t) * \text{sca}(t)$$

✓ Calcolare la trasformata di Laplace di tale movimento.

Utilizziamo le proprietà di traslazione e di convoluzione per ottenere il seguente risultato:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s - \alpha} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s - \alpha)}$$

✓ Calcolare valore iniziale e finale del movimento $f(t)$.

Essendo $f(t)$ razionale e con più poli che zeri, possiamo applicare il Teorema B.1.7 e il Teorema B.1.8:

$$f(0) \stackrel{\text{(VIII)}}{=} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s}{s(s - \alpha)} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s - \alpha} \rightarrow 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \stackrel{\text{(IX)}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s - \alpha)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s - \alpha} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$$

dove nella seconda uguaglianza si è posto $\alpha < 0$ come da ipotesi del Teorema B.1.8. \square

► *Esercizio:* TRASFORMATTA DI LAPLACE DEI SEGNALI
 trasformata di Laplace

$$t \sin(\omega t) \cdot \text{sca}(t)$$

$$\text{Sol. } 2\omega s / (s^2 + \omega^2)^2$$

$$t \cos(\omega t) \cdot \text{sca}(t)$$

$$\text{Sol. } s^2 - \omega^2 / (s^2 + \omega^2)^2$$

$$e^{\alpha t} \cos(\omega t) \cdot \text{sca}(t)$$

$$\text{Sol. } (s - \sigma) / ((s - \sigma)^2 + \omega^2)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\omega t) \cdot \text{sca}(t)$$

$$\text{Sol. } \omega / ((s - \alpha)^2 + \omega^2)$$

$$te^{\alpha t} \cos(\omega t) \cdot \text{sca}(t)$$

$$\text{Sol. } ((s - \alpha)^2 - \omega^2) / ((s - \alpha)^2 - \omega^2)^2$$

$$te^{\alpha t} \sin(\omega t) \cdot \text{sca}(t)$$

$$\text{Sol. } 2\omega(s - \alpha) / ((s - \alpha)^2 + \omega^2)^2$$

B.1.4. Antitrasformata. Poniamoci nel caso di trasformate razionali (B.1.2), con coefficienti reali; scegliamo $N(s)$ e $D(s)$ per cui $n(N(s)) < n(D(s))$. Nei sistemi LTI, è sempre possibile ricondurre i movimenti a forme razionali come quella in esame; in particolare, utilizzando l'algoritmo per la divisione dei polinomi, è sempre possibile la seguente riscrittura:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n}{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n} \\ &= \frac{\beta_0}{\alpha_0} + \frac{(\beta_1 - \beta_0 \alpha_1) s^n + (\beta_2 - \beta_1 \alpha_2) s^{n-1} + \dots + (\beta_n - \beta_{n-1} \alpha_n)}{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n} \end{aligned}$$

Vale in generale che una funzione razionale può essere scritta come somma di una costante e di una frazione strettamente propria, e grazie alla proprietà (I) essa è ancora una antitrasformata di Laplace.

L'antitrasformata della precedente riscrittura vale

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \cdot \text{imp}(t)$$

dato che l'antitrasformata di una costante è un impulso di ampiezza la costante.

Analizziamo come antitrasformare una funzione che abbia **poli distinti**; si procede scomponendo $F(s)$ in una sommatoria di termini semplici (con denominatore al più di secondo grado) di cui conosciamo l'antitrasformata e dai quali otterremo l'antitrasformata complessiva per linearità.

Si scrive il polinomio al denominatore nel modo seguente:

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s + p_i)$$

con $p_i \in \mathbb{C}$, e la trasformata diventa sviluppabile come

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{s + p_i}$$

dove P_i sono i *residui* che vogliamo calcolare, mentre p_i sono le radici di $D(s)$ (i *poli*).

D'ora in avanti si procede applicando il *metodo di Heaviside*, nel quale si moltiplica per uno dei termini $(s + p_i)$ la funzione sviluppata e la si valuta per $s = -p_i$:

$$(s + p_i) F(s) = \left[(s + p_i) \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{P_j}{s + p_j} \right] + P_i$$

$$(B.1.9) \quad P_i = \frac{N(-p_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (p_i - p_j)} = \frac{N(-p_i)}{\partial/\partial s D(s)|_{s=-p_i}} = [(s + p_i) F(s)]|_{s=-p_i}$$

**Metodo di
Heaviside**

Una volta ricavati i residui con (B.1.9) in corrispondenza di ciascun polo, otteniamo l'antitrasformata come:

$$(B.1.10) \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{s + p_i} \right] = \left(\sum_{i=1}^n P_i \cdot e^{-p_i t} \right) \cdot \text{sca}(t)$$

ESEMPIO B.2. Sia data la seguente trasformata di Laplace di un segnale:

$$F(s) = \frac{s-10}{(s+2)(s+5)}$$

✓ *Trovare la sua antitrasformata.*

Possiamo riscrivere con (B.1.9) la funzione come

$$F(s) = \frac{P_1}{s+2} + \frac{P_2}{s+5}$$

da cui ricaviamo i residui $P_{1,2}$ nel modo seguente:

$$(1) [(s+2)F(s)]|_{s=-2} = \frac{(s-10)}{(s+5)} \Big|_{s=-2} = \frac{-12}{3} = -4 = P_1$$

$$(2) [(s+5)F(s)]|_{s=-5} = \frac{(s-10)}{(s+2)} \Big|_{s=-5} = \frac{-15}{-3} = 5 = P_2$$

Usando (B.1.10) scriviamo l'antitrasformata come:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (-4e^{-2t} + 5e^{-5t}) \cdot \text{sca}(t)$$

□

Nel caso di **poli complessi coniugati**, abbiamo comunque poli distinti, con residui complessi coniugati; prendiamo due poli tali che $s_i = -p_i$ e $s_j = -p_i^*$, allora il residuo $P_j = P_i^*$. Scriviamo la funzione trasformata come combinazione lineare di termini del tipo:

$$F(s) = \frac{P_i}{(s+p_i)} + \frac{P_i^*}{(s+p_i^*)}$$

Quando questa somma viene antitrasformata, si ottiene con (A.5.1) dalla (B.1.10):

$$P_i e^{-p_i t} + P_i^* e^{-p_i^* t}$$

Se esprimiamo i poli $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ e i residui $P_i = |P_i| e^{j\arg(P_i)}$, con calcoli analoghi al caso di poli distinti, otteniamo la scrittura:

$$(B.1.11) \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2|P_i| e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \arg(P_i))$$

ESEMPIO B.3. Sia data la seguente trasformata di Laplace:

$$F(s) = \frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)}$$

✓ *Calcolare la sua antitrasformata.*

Cominciamo calcolando i poli, ricavandoli da $D(s) = 0$; essi valgono rispettivamente $p_1 = -1$, $p_2 = -2+j3$, $p_3 = -2-j3$, con il secondo e il terzo polo le radici complesse coniugate del polinomio $s^2+4s+13$. Ricaviamo ora i residui con il (B.1.9), tenendo conto dei poli complessi coniugati:

$$F(s) = \frac{P_1}{s-p_1} + \frac{P_2}{s-p_2} + \frac{P_2^*}{s-p_2^*} = \frac{P_1}{s+1} + \frac{P_2}{s+2-j3} + \frac{P_2^*}{s+2+j3}$$

Da questa scrittura applichiamo il metodo di Heaviside e otteniamo i residui $P_{1,2,3}$, moltiplicando a turno la trasformata per ciascun denominatore $s-p_i$:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \left. \frac{(s+1) \cdot 100}{(s+1)(s+2-j3)(s+2+j3)} \right|_{s=-1} = \frac{100}{10} = 10; \\
(2) \quad & \left. \frac{(s+2-j3) \cdot 100}{(s+1)(s+2-j3)(s+2+j3)} \right|_{s=-2+j3} = \frac{100}{2(-9-j3)} = \frac{5}{3}(-3+j) \rightarrow \\
& \frac{5}{3}\sqrt{10}e^{j(\arctan(-1/3)+\pi)}; \\
(3) \quad & P_3 = P_2^* = \frac{5}{3}(-3-j) \rightarrow \frac{5}{3}\sqrt{10}e^{j\arctan(1/3)}.
\end{aligned}$$

Possiamo usare le considerazioni fatte per i poli complessi coniugati per affermare (3); sostituendo i residui nella scrittura della trasformata, otteniamo

$$F(s) = \frac{10}{s+1} + \frac{5/3\sqrt{10}e^{j(\arctan(-1/3)+\pi)}}{s+2-j3} + \frac{5/3\sqrt{10}e^{j\arctan(1/3)}}{s+2+j3}$$

dalla quale, usando (B.1.10), si ottiene direttamente

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left(10e^{-t} + 5/3\sqrt{10}e^{j(\arctan(-1/3)+\pi)+(-2+j3)t} + 5/3\sqrt{10}e^{j\arctan(1/3)+(-2-j3)t}\right) \cdot \text{sca}(t)$$

e sfruttando la formula (B.1.11) possiamo infine scrivere

$$f(t) = \left[10e^{-t} + 5/3\sqrt{10}e^{-2t} \cdot 2\cos(3t + \arctan(-1/3) + \pi)\right] \cdot \text{sca}(t)$$

□

Nel caso di **poli multipli** (radici di grado superiore al primo), il metodo di Heaviside risulta inefficace, poiché esso perde dell'informazione sui residui associati ai poli con molteplicità maggiore di 1; esprimiamo la trasformata con poli multipli nella seguente scrittura:

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{\mu} (s+p_i)^{n_i}}$$

con $\mu < n$ rispettivamente il numero di poli distinti minore stretto del grado del denominatore, $\exists i \in 1 \dots \mu : n_i > 1$ la molteplicità del i -esimo polo sia per qualche i maggiore di 1, e valga $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$ (la somma di tutte le molteplicità sia pari al grado del denominatore).

Introduciamo il metodo di *cancellazione del denominatore*, che in questa situazione permette di ottenere comunque ciascun residuo a prescindere dalla molteplicità del suo polo; esso consiste nel moltiplicare per $D(s)$ la trasformata, in forma di somma di residui pesati sui poli, per ottenere la seguente scrittura:

$$(B.1.12) \quad N(s) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{h=1}^{n_i} \left(P_{i,h} \cdot \prod_{i=1}^{\mu} \left[(s+p_i)^{n_i} \cdot \frac{1}{(s+p_i)^h} \right] \right)$$

Da questa uguaglianza si ricavano n equazioni che, risolte in un sistema, forniscono tutti i residui anche in caso di molteplicità ($h > 1$).

ESEMPIO B.4. Sia data la seguente trasformata di Laplace:

$$F(s) = \frac{s+18}{s(s+3)^2}$$

✓ Calcolarne l'antitrasformata.

I poli della trasformata valgono rispettivamente $p_1 = 0$ con $n_1 = 1$ e $p_2 = -3$ con $n_2 = 2$; riscriviamo la trasformata nella combinazione di residui pesati sui poli:

$$F(s) = \frac{P_{1,1}}{s-0} + \frac{P_{2,1}}{s+3} + \frac{P_{2,2}}{(s+3)^2}$$

Otteniamo quindi i residui nei modi seguenti:

- $P_{1,1}$ può essere di nuovo ottenuto con (B.1.9), dato che ha molteplicità unitaria; in tal caso scriviamo:

$$P_{1,1} = \left. \frac{\cancel{s}(s+18)}{\cancel{s}(s+3)^2} \right|_{s=0} = \frac{18}{9} = 2$$

- $P_{2,2}$ può anch'esso essere ottenuto con (B.1.9), dato che moltiplicando per il suo denominatore rimane un polo di primo grado:

$$P_{2,2} = \left. \frac{\cancel{(s+3)^2}(s+18)}{s\cancel{(s+3)^2}} \right|_{s=-3} = \frac{15}{-3} = -5$$

- $P_{2,1}$ deve essere calcolato con (B.1.12), vale a dire:

$$F(s) \doteq \frac{s+18}{s(s+3)^2} = \frac{P_{1,1}}{s} + \frac{P_{2,1}}{s+3} + \frac{P_{2,2}}{(s+3)^2}$$

$$s+18 = P_{1,1}(s+3)^2 + P_{2,1}s(s+3) + P_{2,2}s$$

A questo punto si raccolgono le s per imporre delle condizioni rispetto ai residui e ai valori già noti dal numeratore, a sinistra dell'uguale:

$$s+18 = s^2(P_{1,1} + P_{2,1}) + s(6P_{1,1} + 3P_{2,1} + P_{2,2}) + 9P_{1,1}$$

da cui si nota che $s^2 = 0$ dunque $P_{1,1} + P_{2,1} = 0 \rightarrow P_{1,1} = -P_{2,1}$ e, avendo già calcolato il valore di $P_{1,1}$, segue che $P_{2,1} = -2$.

L'espressione generale della trasformata sarà quindi:

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{-2}{s+3} + \frac{-5}{(s+3)^2}$$

da cui ricaviamo l'antitrasformata

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (2 - 2e^{-3t} - 5te^{-3t}) \cdot \text{sca}(t) = f(t)$$

dove il terzo addendo ($-5te^{-3t}$) è ottenuto come prodotto di un esponenziale per una rampa; infatti $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot \text{ram}(t)] = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$. \square

ESEMPIO B.5. Riprendiamo il testo dell'Esempio B.3; la trasformata assegnata era

$$F(s) = \frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)}$$

Si ricorda che il denominatore della trasformata di una sinusoide è del tipo $1/((s+\alpha)^2 + \omega^2)$, come in questo caso per il secondo e terzo residuo

Riscriviamola nel modo seguente, per poter sfruttare (B.1.12):

$$F(s) = \frac{100}{(s+1)((s+2)^2+9)} = \frac{P_1}{s+1} + \frac{P_2s+P_3}{(s+2)^2+9}$$

Nel secondo addendo abbiamo posto il denominatore pari a una combinazione lineare di residui con grado inferiore di uno rispetto al polo associato; otteniamo dunque i seguenti valori dei residui:

- P_1 si ottiene usando il metodo di Heaviside; come nell'Esempio B.3 (per quanto riguardava $P_{1,1}$), esso vale 10;
- Applicando (B.1.12) otteniamo le condizioni necessarie a calcolare P_2 e P_3 :

$$\begin{aligned} 100 &= P_1 (s^2 + 4s + 13) + P_2 s (s + 1) + P_3 (s + 1) \\ &= s^2 (P_1 + P_2) + s (4P_1 + P_2 + P_3) + 13P_1 + P_3 \end{aligned}$$

Osservando che nel numeratore non compare la variabile s , imponiamo che $100 = 13P_1 + P_3$ da cui, con la conoscenza di $P_1 = 10$, otteniamo sostituendo nella precedente che $P_2 = -30$.

Infine usiamo il coefficiente di s^2 per imporre che $P_1 + P_2 = 0 \rightarrow P_2 = -P_1 = -10$.

La forma generale della trasformata risulta:

$$F(s) = \frac{10}{s+1} + \frac{-10s-30}{(s+2)^2+9} \stackrel{*}{=} \frac{10}{s+1} - 10 \left(\frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{1}{3} \frac{3}{(s+2)^2+9} \right)$$

dove nell'uguaglianza $*$ abbiamo raccolto e separato per ottenere dei termini simili alla trasformata di funzioni trigonometriche; grazie a questo affinamento possiamo scrivere direttamente l'antitrasformata come:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left(10e^{-t} - 10e^{-2t} \cos(3t) - \frac{10}{3}e^{-2t} \sin(3t) \right) \cdot \text{sca}(t)$$

□

Indice analitico

- asintotica stabilità, Teorema, 26
- Autovettori generalizzati, 60
- Binet, teorema, 54
- Bode, forma di, 47
- Eulero, formula di, 62
- Heaviside, metodo di, 68
- impulso, risposta al, 25
- instabilità, Teorema, 26
- Jordan, forma di, 60
- Jury, criterio, 39
- Lagrange, formula, 14
- Lagrange, formula discretizzata, 34
- Laplace, antitrasformata continua, 63
- Laplace, I teorema, 53
- Laplace, trasformata continua, 63
- Linearizzazione, 29
- Linearizzazione nel tempo discreto, 40
- LTI, andamenti asintotici dei modi, 19
- LTI, andamento della perturbazione, 25
- LTI, dimensioni dei coefficiente standard, 11
- LTI, modello equivalente, 17
- LTI, modello matriciale discreto, 33
- LTI, modello matriciale standard, 11
- LTI, sovrapposizione degli effetti, 12
- LTI, stabilità, 12
- Matrice, polinomio caratteristico, 56
- Modo oscillante, 19
- Movimento forzato, 15
- Movimento libero, 15
- Processo a tempo continuo, modello, 8
- Routh, criterio, 27
- stabilità del sistema, Teorema, 25
- tempo discreto, equazioni di processo, 31
- tempo discreto, equilibrio, 34
- tempo discreto, movimenti, 38
- Trasferimento nel tempo continuo, funzione, 43