Appunti di Fondamenti di Automatica

Lorenzo Prosseda, a.a. 2017-2018

Indice

CAPITOLO 1

Sistemi LTI a tempo continuo

1.1. Modello matematico

1.1.1. Problemi di controllo. Un *problema di controllo* consiste nell'imporre un *funzionamento desiderato* a un *processo* assegnato: il processo è dunque l'oggetto del problema di controllo; il funzionamento desiderato è una funzione che mette in relazione le *variabili controllat*e coi loro *segnali di riferimento* (il loro valore desiderato).

Si vuole ottenere una evoluzione del sistema nel tempo per cui le variabili controllate abbiano un valore quanto più possibile vicino al segnale di riferimento.

Di un processo bisogna valutare, oltre all'andamento delle variabili controllate, anche due fonti di errore:

Incertezza: I valori delle variabili controllate non possono essere misurati senza *incertezza*; inoltre nel processo possono intervenire variabili non controllate dall'esterno, chiamate *disturbi*.

Tempo: Le variabili di un problema di controllo sono funzioni del tempo ed esso può essere *continuo* o *discreto*; inoltre un componente del sistema potrebbe variare le proprie caratteristiche nel tempo (*non stazionario*).

Un processo è costituito in generale dai seguenti elementi:

- Uscita: chiamata in generale $y(t) \in \mathbb{R}^p$, è la variabile che viene misurata e vogliamo controllare; l'apice p indica la cardinalità dell'uscita (numero di uscite, sono trattate come un vettore) ed essa è chiamata anche variabile controllata.
- Trasduttore: misura le variabili fisiche dell'uscita, restituendo in retroazione una misura dell'uscita o dei disturbi del processo; esso sarà soggetto a un errore di misura.
- Controllore: sistema che, interagendo col processo, ne controlla le variabili tramite un attuatore; prende in ingresso i valori di misura dei trasduttori e l'andamento desiderato del processo (chiamato *variabile di riferimento* $w(t)$).
- Attuatore: sistema che influenza il processo agendo sulla *variabile manipolabile* $u(t) \in \mathbb{R}^m$ anche detta ingresso del processo; l'apice m indica la cardinalità degli ingressi (come per l'uscita).

Nel corso vedremo spesso l'attuatore "inglobato" nel controllore

- Disturbo: variabili che non possono essere controllate ma possono essere "viste" dal controllore in tempo reale tramite un trasduttore dedicato; si indicano con $d(t) \in \mathbb{R}^{m_d}$ dove l'apice m_d indica la cardinalità dei disturbi (come per ingressi e uscite).

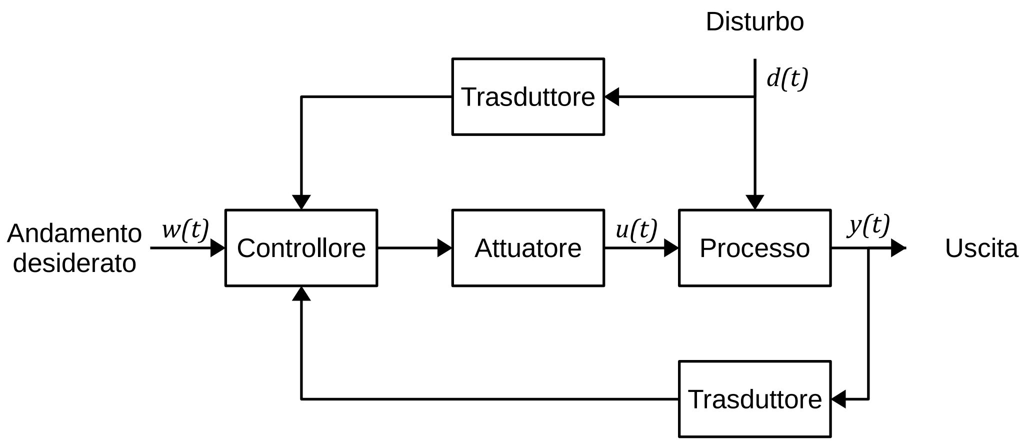

Figura 1.1.1. Anello di controllo in retroazione

Quando $m = p$ il sistema si dice quadrato ed è una minima condizione per ottenere il comportamento desiderato dal sistema, tuttavia non è detto che il numero di ingressi sia sempre pari alle uscite.

In un contesto ideale sarebbe possibile calcolare (tramite un inversione delle sue equazioni) gli ingressi del sistema per ottenere esattamente le uscite desiderate; tuttavia a causa dei disturbi questo non è possibile nel mondo fisico.

Un sistema si dice allora *stabile* quando, accoppiando controllore e processo, l'uscita è stabile nel tempo ed è vicina al valore desiderato anche in presenza dei disturbi.

1.1.2. Processi a tempo continuo. Un processo a tempo continuo presenta una una uscita ($y(t)$) e due possibili ingressi: manipolabili ($u(t)$) e non manipolabili ($d(t)$); un modello per questo sistema è dato dalla Definizione 1.1.

DEFINIZIONE 1.1. Un modello matematico è un insieme di equazioni che descrivono il comportamento del sistema e i legami tra ingressi e uscite.

I sistemi sono classificati tramite caratteristiche dei modelli (delle equazioni) che li rappresentano:

Statico/Dinamico: la presenza del solo ingresso nella funzione di uscita del sistema lo classifica come statico; si dirà invece dinamico se presenta delle variabili di stato (vedi Esempio 1.2).

Lineare: tutte le equazioni del modello sono combinazioni lineari delle variabili di stato e degli ingressi.

Proprio: l'ingresso figura nell'equazione di uscita; altrimenti, se l'ingresso non compare nell'equazione di uscita (la influenza indirettamente) il sistema si dice strettamente proprio.

Stazionario: la variabile tempo non modifica esplicitamente le variabili del sistema (per esempio una variabile che cambia comportamento nel tempo, come un componente che si usura).

SISO/MIMO: sistema con una sola uscita e un solo ingresso o più uscite e più ingressi.

A seguire due esempi riguardanti un sistema statico e uno dinamico:

Per sistemi a *tempo continuo*, trattati in questo capitolo, la variabile tempo è sempre reale ($t \in \mathbb{R}$), ovvero tra due istanti di tempo ne esiste sempre un'altro

Esempio 1.1. Sia dato un resistore di valore R di resistenza, ai cui capi è applicata una tensione $v(t)$ dove $t \in \mathbb{R}$; nel resistore scorrerà una corrente $i(t)$ dipendente dalla tensione applicata. Il modello del processo è il seguente:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Dalla precedente equazione si deduce che, scegliendo di voler misurare la corrente nel resistore, l'uscita sarà $y(t) = i(t)$ mentre l'ingresso sarà $u(t) = v(t)$; inoltre notando che una perturbazione dell'ingresso si ripercuote istantaneamente sull'uscita ($y(t)$ dipende direttamente da $u(t)$) si può classificare il sistema come statico.

Il sistema ha un solo ingresso e una sola uscita, quindi è quadrato e SISO (single input, single output). □

Esempio 1.2. Sia data una serie costituita da un resistore di valore R di resistenza e un condensatore di capacità C; ai capi del circuito è applicata una tensione $v(t)$, che causa una tensione $v_c(t)$ ai capi del condensatore e una corrente $i(t)$ nella serie. Sia $v_c(t)$ la variabile da misurare.

Adottando l'equilibrio delle tensioni possiamo scrivere che la somma delle tensioni su resistore e condensatore è pari alla tensione forzata sulla serie:

$$R \cdot i(t) + v_c(t) = v(t)$$

Nel caso del condensatore, la tensione ai suoi capi è proporzionale alla carica sulle sue armature e alla capacità come $v_c(t) = q(t)/C$, da cui si ottiene derivando

$$\dot{v}_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \frac{\overbrace{\partial q(t)}^{\text{corrente}}}{\partial t} = \frac{i(t)}{C}$$

La corrente nella serie sarà la stessa per il condensatore e il resistore, e può essere ricavata dalla legge di Ohm come tensione sul resistore ($v(t) - v_c(t)$) divisa la sua resistenza

$$i(t) = -\frac{1}{R} v_c(t) + \frac{1}{R} v(t)$$

Sostituendo $i(t)$ nell'espressione di $\dot{v}_c(t)$ si ottiene la seguente

$$\dot{v}_c(t) = -\frac{1}{RC} v_c(t) + \frac{1}{RC} v(t)$$

Scegliendo di voler misurare la tensione ai capi del condensatore si ha che $y(t) = v_c(t)$, l'ingresso sarà la tensione forzata sulla serie $u(t) = v(t)$. Rispetto all'Esempio 1.1, pur conoscendo la tensione $v(t)$ ai capi della serie non è possibile ottenere la tensione $v_c(t)$ ai capi della capacità (sarebbe necessario integrare l'equazione differenziale $\dot{v}_c(t)$, in cui compaiono delle costanti che rappresentano le *condizioni iniziali* del sistema, ignote nel contesto di questo esercizio). La presenza di una grandezza simile in uscita classifica questo sistema come dinamico. □

Definizione 1.2. Si chiamano *variabili di stato* quelle la cui conoscenza all'istante iniziale è necessaria per determinare l'andamento del sistema a seguito di un ingresso; esse sono indicate come $x(t) \in \mathbb{R}^n$ con apice n la cardinalità del sistema.

Per $n > 0$ il sistema si dice dinamico, altrimenti statico.

Le variabili di stato in pratica indeboliscono il legame tra ingresso e uscita; il loro numero determina l'*ordine* del sistema (quello dell'Esercizio 1.2 è del primo ordine); i sistemi fisici in generale hanno infinite variabili di stato.

Una formulazione generale per le equazioni del modello matematico per processi a tempo continuo è la seguente:

Equazioni di un processo a tempo continuo

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \text{Equazione di stato} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & \text{Equazione di uscita} \end{array} \tag{1.1.1}$$

Tornando ai precedenti esempi, i sistemi che descrivono possono essere classificati nel modo seguente:

	Esempio 1.1	Esempio 1.2
Equazioni di stato	$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{R}u(t) \end{cases}$ per $v(t)=u(t)$	$\begin{cases} y(t) = x(t) & \text{per } v_c(t)=x(t) \\ \dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t) & \text{per } v(t)=u(t) \end{cases}$
Caratteristiche	Proprio, statico, stazionario, lineare	Strettamente proprio, dinamico del I ordine, stazionario, lineare

Tabella 1.1.1. Classificazione di due sistemi, esempi 1.1 e 1.2

Nel prossimo esempio si effettuerà una classificazione completa del sistema meccanico di un ammortizzatore MacPherson:

Esempio 1.3. Sia dato un ammortizzatore inserito in una molla: possiamo considerare il sistema (sospensione) come una massa sospesa m (il veicolo) collegata a una molla di coefficiente k (in cui è inclusa anche la rigidità dello pneumatico) e un ammortizzatore con coefficiente di attrito viscoso β. La sospensione in questione è attiva, ovvero è possibile applicare in modo controllato una forza $\vec{F}(t)$ alla massa m (vedi Figura 1.1.2).

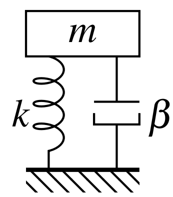

Figura 1.1.2

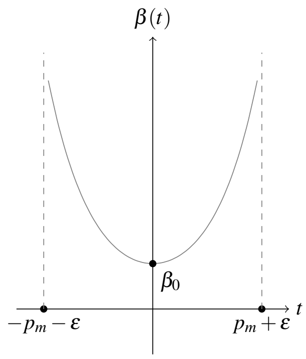

Figura 1.1.3

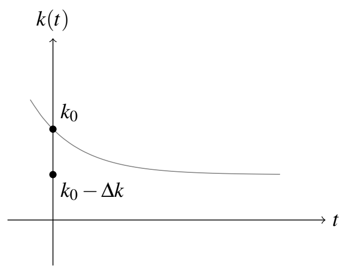

Figura 1.1.4

In condizioni statiche la posizione della massa rispetto al suolo è data da p_k (posizione di riposo della molla); la variabile $\overline{p}_m = p_m(t) - p_k$ è la posizione della massa rispetto alla posizione di riposo p_k.

L'ammortizzatore è dotato di fondo corsa, un limite meccanico all'estensione della molla: il coefficiente β di attrito viscoso dipenderà allora dalla posizione $\overline{p}_m$ della massa (che è anche l'elongazione della molla); possiamo scrivere

$$\beta(\overline{p}_m) : \begin{cases} \beta_0 & \text{se } \overline{p}_m \in [-p_m, p_m] \\ \dfrac{\beta_0 \varepsilon}{\varepsilon - |\overline{p}_m| + |p_k|} & \text{se } \overline{p}_m \in (-p_m - \varepsilon, -p_m) \cup (p_m, p_m + \varepsilon) \end{cases}$$

dove i valori di fondo corsa sono indicati da ε, e β_0 è il valore di attrito viscoso in condizioni statiche: l'espressione ha un coefficiente di attrito viscoso prossimo a β_0 finché non si raggiunge uno dei due asintoti verticali ($-p_m - \varepsilon$ e $p_m + \varepsilon$) dove β tende a diventare infinitamente grande (vedi Figura 1.1.3).

Per quanto riguarda il coefficiente della molla (rigidità della sospensione) esso può variare nel tempo, a causa dell'usura: modellizziamo tale valore con l'espressione

$$k\left(t\right) = k_0 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)\Delta k$$

con k_0 il valore iniziale della molla appena costruita e λ un parametro costante: l'espressione decresce esponenzialmente per $t \to \infty$ da k_0 a $k_0 - \Delta k$ (vedi Figura 1.1.4).

Il modello per questo sistema si può scrivere usando le equazioni di Newton, equilibrando la traslazione verticale della massa:

$$\overbrace{m\ddot{\overline{p}}_m\left(t\right)}^{\text{forza della massa}} + \underbrace{\beta\left(\overline{p}_m\left(t\right)\right)\dot{\overline{p}}_m\left(t\right)}_{\text{forza dell'attrito viscoso}} + \overbrace{k\left(t\right)\overline{p}_m\left(t\right)}^{\text{forza della molla}} = \underbrace{F\left(t\right) - mg}_{\text{forza sospensione}}$$

Per indicare le derivate di $\overline{p}_m$ è stata usata la notazione puntata: ad ogni punto sulla variabile corrisponde un grado di derivazione; quindi $\ddot{\overline{p}}_m\left(t\right)$ è l'accelerazione e $\dot{\overline{p}}_m\left(t\right)$ la velocità

Per scrivere la precedente nella forma generale bisogna individuare le variabili di stato ($\overline{p}_m$ e $\dot{\overline{p}}_m$ pari a x_1 e x_2), gli ingressi ($F\left(t\right)$ pari a $u\left(t\right)$) e i disturbi ($-mg$ nell'espressione della forza sulla sospensione, pari a $d\left(t\right)$); la precedente diventa

$$m\dot{x}_2\left(t\right) + \beta\left(x_1\left(t\right)\right)x_2\left(t\right) + k\left(t\right)x_1\left(t\right) = u\left(t\right) - d\left(t\right)$$

dove posizione (x_1) e velocità (x_2) formano il vettore di variabili di stato; bisogna includere nel modello l'equazione che mette in relazione le due variabili di stato ($\dot{x}_1\left(t\right) = x_2\left(t\right)$) e due funzioni di stato; se vogliamo misurare la posizione della massa imponiamo $x_1\left(t\right)$ in uscita:

$$\begin{aligned}
&f_1\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right) = x_2\left(t\right)\\
&f_2\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right) = \frac{-\beta\left(x_1\left(t\right)\right)}{m}x_2\left(t\right) - \frac{k\left(t\right)}{m}x_1\left(t\right) + \frac{u\left(t\right)}{m} - \frac{d\left(t\right)}{m}\\
&g\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right) = x_1\left(t\right)
\end{aligned}$$

Si osserva che il sistema è dinamico del secondo ordine (2 variabili di stato), non è lineare (la seconda equazione di stato non è lineare), è tempo-variante (non stazionario, il coefficiente della molla $k\left(t\right)$ cambia nel tempo), è SISO (ha un ingresso e una uscita), è strettamente proprio (l'ingresso non figura nell'equazione di uscita). □

Nel prossimo esempio misuriamo il moto di un autoveicolo, tramite i principi della dinamica

Esempio 1.4. Sia dato un autoveicolo in movimento tramite la forza di trazione del motore $F\left(t\right)$ attraverso le ruote, a cui si oppongono la massa m, la forza di inerzia $m\dot{v}\left(t\right)$ e la resistenza aerodinamica $\beta m v^2\left(t\right)$; scrivere un modello che abbia come ingresso la forza di trazione e come uscita la velocità.

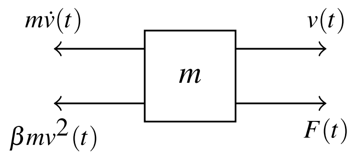

Figura 1.1.5. Modello per autoveicolo in movimento

L'equazione del sistema sarà l'equilibrio della forza di trazione con quelle che vi si oppongono:

$$m\dot{v}\left(t\right) + \beta m v^2\left(t\right) = F\left(t\right)$$

Per scrivere la precedente in modo standard consideriamo che (dalla richiesta dell'esercizio) l'uscita vale $y\left(t\right) = v\left(t\right)$ e l'ingresso vale $u\left(t\right) = F\left(t\right)$; inoltre è presente la derivata della velocità nell'equazione del sistema: si tratta di una variabile di stato ($x(t) = v(t)$).

Dopo queste considerazioni l'equazione diventa

$$m\dot{x}(t) + \beta m x^2(t) = u(t) \text{ da cui segue}$$
$$\dot{x}(t) = -\beta x^2(t) + \frac{u(t)}{m}; \quad y(t) = x(t)$$

Si tratta di un sistema dinamico del primo ordine (una variabile di stato), stazionario (nessuna equazione dipende dal tempo), non lineare (compare un termine al quadrato nell'equazione di stato), strettamente proprio (non compare l'ingresso nell'equazione di uscita), SISO (un ingresso e una uscita).

Se ora immaginiamo di voler misurare anche la posizione del veicolo, dobbiamo introdurre un nuovo stato coerente con quello presente che riguardi la grandezza spazio $p(t)$. Sapendo che $v(t) = \dot{p}(t)$ e ponendo dunque $x_1(t) = p(t)$ e $x_2(t) = v(t)$ si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\beta x_2^2(t) + \dfrac{u(t)}{m} \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \text{(nuovo modello per il sistema)}$$

Rispetto al modello precedente è cambiato l'ordine (secondo) mentre le altre caratteristiche sono immutate. □

Nel prossimo esempio un sistema dinamico di ordine IV:

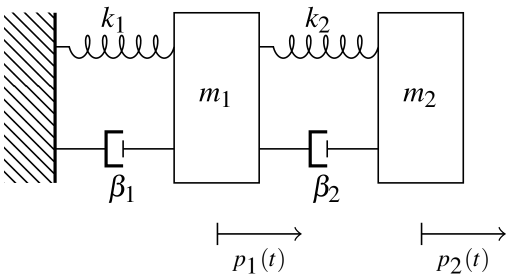

Figura 1.1.6. Sistema di due masse con sospensioni

Esempio 1.5. Sia dato un sistema costituito da due masse m_1 e m_2 ciascuna avente una propria molla di costante k_1 e k_2 e un proprio ammortizzatore di coefficiente di attrito β_1 e β_2; le due masse sono collegate in serie a un vincolo - rispettivamente m_1 è collegata al vincolo e m_2 è collegata a m_1 - e la loro posizione rispetto a quella di riposo è data da $p_1(t)$ e $p_2(t)$; si possa esercitare una forza su ciascuna massa in modo longitudinale rispetto al sistema (rispettivamente $F_1(t)$ e $F_2(t)$). Si scriva un modello per misurare la posizione nel tempo delle due masse.

Usando l'equilibrio delle forze (per una massa alla volta) possiamo scrivere un'equazione tra forza d'inerzia, forza dell'ammortizzatore, forza elastica e forze esercitate dall'altra massa in seguito al suo moto relativo, tutto eguagliato alla forza sulla massa considerata

In questo esempio viene introdotta in modo diretto la notazione vettoriale per le equazioni del sistema

$$m_1\ddot{p}_1(t) + \beta_1\dot{p}_1(t) + k_1 p_1(t) + \beta_2(\dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t)) + k_2(p_1(t) - p_2(t)) = F_1(t)$$
$$m_2\ddot{p}_2(t) + \beta_2(\dot{p}_2(t) - \dot{p}_1(t)) + k_2(p_2(t) + p_1(t)) = F_2(t)$$

Possiamo scrivere il modello nella sua forma standard usando le seguenti considerazioni (sono presentate direttamente le forme matriciali):

$$u(t) : \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}; \qquad y(t) : \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

Ingressi e uscite si ricavano dalla richiesta dell'esercizio, mentre gli stati sono determinati dai termini differenziali: dato che sono due per ciascuna equazione, si avranno 4 stati; inoltre sarà necessario rispettare la scrittura $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$ per ottenere le equazioni standard del sistema:

$$x(t) : \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix}$$

Ora possiamo scrivere le equazioni standard sostituendo nelle equazioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ {}^1\!/_{m_1}\left(-\beta_1 x_2(t) - k_1 x_1(t) - \beta_2(x_2(t) - x_4(t)) - k_2(x_1(t) - x_3(t)) + u(t)\right) \\ x_4(t) \\ {}^1\!/_{m_2}\left(-\beta_2(x_4(t) - x_2(t)) - k_2(x_3(t) - x_1(t)) + u_2(t)\right) \end{bmatrix} \tag{1.1.2}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Si tratta di un sistema dinamico del quarto ordine, lineare (le equazioni di stato e di uscita non hanno termini quadratici), stazionario, MIMO (due ingressi e due uscite), strettamente proprio (nell'equazione di uscita non compare l'ingresso). □

1.1.3. Modello standard per processi LTI. Per i sistemi lineari stazionari (tempo-invarianti), chiamati LTI, la forma matriciale standard del modello è la seguente:

Modello matriciale standard per sistemi LTI

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

I coefficienti A, B, C, D sono matrici di coefficienti ricavati dalle equazioni in forma matriciale "canonica": per esempio osservando le equazioni (1.1.2) dell'Esempio 1.5, si ha che le quattro matrici varranno rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{-\beta_1 - \beta_2}{m_1} & \frac{+k_2}{m_1} & \frac{+\beta_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{\beta_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-\beta_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ {}^1\!/_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & {}^1\!/_{m_2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove la matrice C ha sulle righe le uscite e sulle colonne gli stati (la prima uscita è pari al primo stato e la seconda pari al terzo stato); la matrice D ha sulle righe le uscite e sulle colonne gli ingressi (ed essendo il sistema nell'esempio strettamente proprio, sarà una matrice nulla); la matrice B ha sulle righe gli stati e sulle colonne gli ingressi; la matrice A ha sulle righe e sulle colonne gli stati.

Si noti che un sistema rimane lineare anche se tempo-variante: infatti se uno dei coefficienti matriciali cambia nel tempo, il modello (1.1.3) rimane una combinazione lineare.

In generale, posto che $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, i coefficienti matriciali saranno rispettivamente di dimensione:

Dimensioni dei coefficienti standard per sistemi LTI

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B \in \mathbb{R}^{n \times m},\ C \in \mathbb{R}^{p \times n},\ D \in \mathbb{R}^{p \times m} \tag{1.1.4}$$

Ricapitolando, i coefficienti matriciali sono costituiti come $A = \#_{\text{stati}} \times \#_{\text{stati}}$, $B = \#_{\text{stati}} \times \#_{\text{ingressi}}$, $C = \#_{\text{uscite}} \times \#_{\text{stati}}$, $D = \#_{\text{uscite}} \times \#_{\text{ingressi}}$ dove $\#_i$ è la cardinalità della funzione i al pedice nelle equazioni (1.1.1).

Un sistema particolare (della categoria LTI) che ha il modello (1.1.3) è il *sistema a ritardo di tempo*: i ritardi sono presenti in ogni sistema di controllo e rappresentano dei limiti alle prestazioni del sistema; per modellizzare un ritardo pari a τ secondi si scrive l'uscita influenzata come $y(t) = u(t - \tau)$.

Il sistema con questa uscita rimane lineare e ha una traslazione di $y(t)$ lungo l'asse del tempo; per verificare che un sistema sia lineare non ostante la presenta di disturbi si può studiare usando la *sovrapposizione degli effetti*: se l'ingresso e l'uscita sono combinazioni lineari di due segnali allora il sistema è lineare, ovvero deve valere

Sovrapposizione degli effetti per LTI

$$\begin{aligned} u_{\text{TOT}}(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \\ y_{\text{TOT}}(t) &= \alpha_1 u_1(t-\tau) + \alpha_2 u_2(t-\tau) \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Vale che $u_i(t-\tau) = y_i(t)$ ovvero l'uscita è pari all'ingresso sfasato del ritardo, da cui $y_{\text{TOT}}(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$.

1.2. Comportamento del sistema

1.2.1. Movimenti ed equilibrio. Dato un sistema lineare ad un certo istante iniziale t_0 a cui corrisponde lo stato (condizione) iniziale $x(t_0) = x_0$ e un segnale $u(t)$ per $t \in (t_0, \infty)$, in generale si può dire che:

Definizione 1.3. Il *movimento* di un sistema LTI dinamico sono le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ (rispettivamente dello stato e dell'uscita), a fronte di condizioni iniziali $x(t_0)$ e ingresso $u(t)$ per $t > t_0$.

I movimenti di un sistema non lineare non sono calcolabili in forma chiusa ed è necessario applicare metodi di calcolo numerico. Una classe particolare di movimenti sono gli equilibri:

Definizione 1.4. Gli *equilibri* di un sistema dinamico sono una classe di movimenti per cui il valore dell'ingresso, dello stato e dell'uscita sono costanti nel tempo; in termini di equazioni (1.1.1) si deve avere $\dot{x}(t) = 0$ per ottenere un andamento costante.

Un equilibrio è dunque una coppia di valori $(\overline{u}, \overline{x})$ tali che le equazioni di stato siano tutte nulle ($f(\overline{u}, \overline{x}, t) = 0$) e l'uscita di equilibrio vale $g(\overline{u}, \overline{x}, t) = \overline{y}$.

Uno dei requisiti principali dei sistemi di controllo è la garanzia di stabilità; questo concetto è legato in modo analitico ai movimenti del sistema: si parla infatti di stabilità dei movimenti di un sistema (e non del sistema).

Definizione 1.5. Il movimento dello stato ottenuto a partire da condizioni iniziali $x(t_0)$ e applicando l'ingresso $u(t \geq t_0)$ si dice *stabile* se, comunque preso un ε piccolo a piacere positivo esiste un δ piccolo a piacere positivo tale che, per tutti i valori di $\tilde{x}_0$ (perturbazioni dei valori iniziali) che soddisfano $\|\tilde{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ (condizione iniziale perturbata sufficientemente vicina a quella iniziale nominale) risulti $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon$, dove $\tilde{x}(t)$ è il movimento generato dal sistema con condizione iniziale $\tilde{x}_0$ (valga $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$) e lo stesso ingresso, con $t > t_0$.

Scrivendo la formula logica si ha che la definizione equivale a

Stabilità di un sistema LTI

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, (\forall \tilde{x}_0\, (\|\tilde{x}_0 - x_0\| \leq \delta) \Rightarrow \forall t > t_0\, (\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon)) \tag{1.2.1}$$

La definizione afferma che per ogni $t > t_0$ il segnale perturbato $x(t)$ rimane confinato intorno al movimento nominale per una $\tilde{x}_0$ entro un intorno della condizione iniziale nominale.

Dalla Definizione 1.5 segue la

Definizione 1.6. Un movimento si dice *instabile* se non vale la (1.2.1).

Se anche in presenza di una perturbazione si osserva una convergenza del movimento a quello nominale si parla di

Definizione 1.7. Un movimento si dice *asintoticamente stabile* se soddisfa la Definizione 1.5 e vale

$$\lim_{t\to\infty} \|\tilde{x}(t) - x(t)\| = 0$$

ovvero la perturbazione si smorza nel tempo.

Nei capitoli successivi si vedrà che nel caso di sistemi lineari dinamici tempo-invarianti la stabilità è una proprietà strutturale, ovvero se il sistema ha un movimento stabile allora tutti i suoi movimenti sono stabili (quindi per i sistemi LTI si può anche parlare di stabilità del sistema).

Il prossimo esempio presenta il concetto di equilibrio dei movimenti e di sovrapposizione degli effetti in modo analitico:

Esempio 1.6. Sia dato un circuito costituito da una serie di un resistore di resistenza R e un condensatore di capacità C; è possibile forzare una tensione $v(t)$ ai capi della serie e si vuole misurare la tensione $v_c(t)$ ai capi del condensatore. Studiare la condizione di equilibrio e i movimenti del sistema.

In analogia con l'Esempio 1.2, il modello per questo sistema, posto $v_c(t) = x(t)$, è $\dot{x}(t) = -{}^1\!/_{RC} \cdot x(t) + {}^1\!/_{RC} \cdot u(t)\,;\; y(t) = x(t)$. Applichiamo al circuito una tensione costante $u(t) = \overline{u}$ e controlliamo se si presenta un movimento di equilibrio: dalla Definizione 1.4 segue che dobbiamo cercare $\overline{x}$ tale che $-{}^1\!/_{RC} \cdot \overline{x} + {}^1\!/_{RC} \cdot \overline{u} = 0$; questo si verifica per $\overline{x} = \overline{u}$. Tutte le coppie $(\overline{x}, \overline{u})$ tali che $\overline{x} = \overline{u}$ sono equilibri.

Per capire di che tipo di equilibrio si tratti (stabile, instabile, asintoticamente stabile) si usa di nuovo la Definizione 1.4, assumendo che prendendo un movimento di equilibrio la condizione iniziale sia l'equilibrio stesso: partiamo dunque da $\overline{x} = x(t_0)$ e applichiamo il segnale costante $\overline{u} = u(t > t_0)$ (pari al valore di equilibrio); siccome il sistema è tempo-invariante possiamo considerare il tempo iniziale $t_0 = 0$.

Studiamo in queste condizioni il comportamento di un movimento del sistema a fronte di una perturbazione: ponendo $\tilde{x}(t_0) = \overline{x} + \delta$ scriviamo l'equazione del movimento quando $u(t) = \overline{u}$ come

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-1/RCt} + \left(1 - e^{-1/RCt}\right)\overline{u}$$

Si tratta dell'equazione analitica del movimento dello stato in forma chiusa; notando che compaiono degli esponenziali con esponente sempre minore di zero (il tempo t e i valori di R e C sono positivi) possiamo affermare che la precedente tende per $t \to \infty$ a $\overline{u}$, che è il valore del movimento nominale: il movimento converge a quello nominale in modo asintotico, in particolare (dalla Definizione 1.5)

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| = \left\|\overline{x} - \tilde{x}_0 e^{-1/RCt} - (1 - e^{-1/RCt})\overline{u}\right\|$$

$$\overset{\overline{x}\to\overline{u}}{=} \left\|\cancel{\overline{u}} - \tilde{x}_0 e^{-1/RCt} - \cancel{\overline{u}} + e^{-1/RCt}\overline{u}\right\| = \left\|(\delta \overset{*}{-} \overline{x}) e^{-1/RCt} + e^{-1/RCt}\overline{u}\right\|$$

$$\overset{\overline{u}\to\overline{x}}{=} \left\|\delta e^{-1/RCt} + (\overline{x} - \overline{x})\, e^{-1/RCt}\right\| = \left\|\delta e^{-1/RCt}\right\|$$

Nel passaggio $*$ si è usata la considerazione iniziale per cui $\tilde{x}(t_0) = \overline{x} + \delta = \tilde{x}_0$; si ottiene un'esponenziale decrescente che soddisfa la Definizione 1.7, dunque per questo sistema qualsiasi condizione di equilibrio ha stabilità asintotica. □

1.2.2. Formula di Lagrange. Vogliamo calcolare i movimenti di un sistema lineare: consideriamo prima l'equazione di stato (il movimento dell'uscita si ottiene facilmente dal movimento dello stato):

$$\dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu(\tau)$$

dove si assume che $x(\tau = t_0)$ e $u(\tau > t_0)$. Moltiplicando entrambi i membri per l'esponenziale di matrice $e^{A(t-\tau)}$ si ottiene

Si ricordi che i coefficienti scritti in maiuscolo sono matrici, per le quali valgono specifiche proprietà (consultare l'appendice A)

$$e^{A(t-\tau)}\dot{x}(\tau) - Ae^{A(t-\tau)}x(\tau) = e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)$$

$$e^{A(t-\tau)}\dot{x}(\tau) - Ae^{A(t-\tau)}x(\tau) = \frac{\partial\left(e^{A(t-\tau)}x(\tau)\right)}{\partial\tau}$$

La seconda uguaglianza mette in risalto che al primo membro è presente una derivata di un prodotto: sostituendo una delle due precedenti equazioni nell'altra e integrando entrambi i membri scriviamo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} e^{A(t-\tau)}x(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

Il primo membro può essere ricavato direttamente come $\left[e^{A(t-\tau)}x(\tau)\right]_{t_0}^{t} = x(t) - e^{A(t-t_0)}x(t_0)$; il secondo membro non può essere manipolato nella sua forma generale: la scrittura risultante è la formula di Lagrange:

Formula di Lagrange

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \tag{1.2.2}$$

La (1.2.2) è un integrale di convoluzione che permette di ottenere l'espressione del movimento dello stato di un sistema LTI; essa è la somma di due contributi: un primo contributo chiamato *movimento libero* (dipendente dalla matrice A e dalle condizioni iniziali), e un secondo contributo chiamato *movimento forzato* (dipendente dall'effetto dell'ingresso sul sistema).

Verifichiamo ora la proprietà della sovrapposizione degli effetti nei sistemi LTI sui movimenti del sistema:

OSSERVAZIONE 1.1. Il PSE afferma che, presa una coppia di condizioni iniziali e una di ingressi, il movimento dello stato e dell'uscita del sistema si ottiene come combinazione lineare dei movimenti degli ingressi e degli stati; poniamo per semplicità $t_0 = 0$ e scriviamo in generale le coppie ingresso-stati usando la (1.2.2):

D'ora in avanti si userà la sigla PSE per riferirsi al principio di sovrapposizione degli effetti

$$\begin{cases} x'(t) = e^{At}x'_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu'(\tau)\,d\tau & \text{per } (x'_0,\, u'(t)) \\ x''(t) = e^{At}x''_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu''(\tau)\,d\tau & \text{per } (x''_0,\, u''(t)) \end{cases}$$

a questo punto si prende una terza coppia $(x'''_0,\, u'''(t))$ come combinazione lineare dei movimenti delle due precedenti:

$$\begin{aligned} x'''_0 &= \alpha_1 x'_0 + \alpha_2 x''_0 \\ u'''(t) &= \alpha_1 u'(t) + \alpha_2 u''(t) \end{aligned}$$

dove i coefficienti α_1 e α_2 sono scalari; dalle due precedenti il movimento dello stato sarà (raccogliendo dalla (1.2.2))

$$\boxed{x'''(t) = \alpha_1 x'(t) + \alpha_2 x''(t)}$$

La (1.2.2) permette anche per calcolare l'espressione del movimento di uscita; nel contesto di questa osservazione vale

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

Possiamo dunque calcolare i movimenti dell'uscita rispetto ai movimenti dello stato applicando la precedente e raccogliendo come per il movimento dello stato:

$$\boxed{y'''(t) = \alpha_1 y'(t) + \alpha_2 y''(t)}$$

1.2.3. Movimento libero e forzato. Prendiamo un sistema di ordine uno con a e b scalari: avremo il movimento dello stato $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$; consideriamo il movimento libero ponendo $u(t) = 0$ e supponiamo nota la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, applicando la (1.2.2) scriveremo

Movimento libero

(1.2.3) $$x(t) = e^{at}x_0$$

che è la componente del movimento libero. Questa funzione dipende dal valore di a nel seguente modo

- per $a > 0$ si ha un andamento esponenziale crescente;
- per $a < 0$ si ha un andamento esponenziale decrescente;
- per $a = 0$ si ha un andamento costante.

Considerando il caso $a = 0$, ci chiediamo quanto velocemente il movimento libero converga a zero, ovvero quando $x(t) = \varepsilon x_0$ con $\varepsilon \in (0,1)$ molto piccolo.

Sostituendo si ha $e^{at_\varepsilon}x_0 = x_0\varepsilon \to e^{at_\varepsilon} = \varepsilon \to t\varepsilon = \dfrac{1}{|a|}|\ln(\varepsilon)|$ e ponendo $T = \dfrac{1}{|a|}$ (chiamata *costante di tempo*) scriviamo infine

$$t_\varepsilon = T|\ln(\varepsilon)|$$

Il valore T ci dice quanto velocemente il movimento libero (per moto convergente) converge. Per esempio per $\varepsilon = 5\%$ vale $t_\varepsilon \simeq 3T$.

Nell'automatica si utilizzano gli *ingressi canonici* di un sistema, segnali interessanti dal punto di vista delle prestazioni del sistema e del calcolo del suo comportamento; useremo nel seguito lo scalino ($\mathrm{sca}(t)$)

Analizziamo adesso il movimento forzato, ponendo l'ingresso al valore $u(t) = \overline{u}\cdot \mathrm{sca}(t)$ dove l'ingresso canonico $\mathrm{sca}(t) : \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$ viene moltiplicato per il valore costante $\overline{u}$. Annulliamo le altre condizioni iniziali per studiare solo la parte forzata, ponendo $t_0 = 0$, $\overline{u} > 0$, $x_0 = 0$. Sono ammissibili due procedimenti:

(1) Formula di Lagrange:

Dall'integrale di convoluzione al secondo addendo di (1.2.2) otteniamo (portando le costanti fuori dall'integrale)

$$x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}b\overline{u}\,\mathrm{sca}(\tau)\,d\tau = e^{at}b\overline{u}\int_0^t e^{-a\tau}\mathrm{sca}(\tau)\,d\tau$$

Tra gli estremi di integrazione $\mathrm{sca}(\tau)$ vale 1

Movimento forzato

(1.2.4) $$= e^{at}b\overline{u}\int_0^t e^{-a\tau}d\tau = -\frac{1}{a}e^{at}b\overline{u}\left[e^{-a\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \boxed{-\frac{b}{a}\overline{u}\left(1-e^{at}\right)}$$

Al variare dello scalare a nell'esponenziale si hanno i seguenti andamenti (supponiamo $b \geq 0$):

- per $a > 0$ si ha un andamento esponenziale crescente, tendente a $+\infty$;
- per $a < 0$ si ha un andamento esponenziale decrescente, tendente a $\frac{b}{|a|}\overline{u}$;
- per $a = 0$ si ha un andamento lineare, tendente a $b\overline{u}$; per ottenerlo bisogna fare un passo indietro rispetto alla (1.2.2): se a si annulla infatti vale che $\dot{x}(t) = b\overline{u}$ che è un segnale costante, dunque la primitiva $x(t)$ ha andamento di una retta divergente.

(2) Sovrapposizione degli effetti:

Calcoliamo per prima cosa la condizione di equilibrio del sistema ($\dot{x}(t) = 0$) a fronte di un ingresso costante $\overline{u}$

$$\dot{x}(t) = a\overline{x} + b\overline{u} = 0 \to \boxed{\overline{x} = -\frac{b}{a}\overline{u}} \tag{1.2.5}$$

Interessiamoci al movimento forzato con ingresso a scalino e condizioni iniziali nulle; possiamo scomporre questo ingresso come una somma di contributi: condizione iniziale $\overline{x}$ e $u(t) = \mathrm{sca}(t)$, e condizione iniziale $x_0 - \overline{x}$.
Per il primo contributo, essendo il sistema in equilibrio per ipotesi, il movimento vale $x(t) = \overline{x}$. Per il secondo contributo considero

$$\begin{cases} x_0' = \overline{x}, & u'(t) = \overline{u} \cdot \mathrm{sca}(t) \\ x_0'' = -\overline{x}, & u''(t) = 0 \end{cases}$$

La somma di tali condizioni iniziali e ingressi fornisce il movimento cercato senza usare l'integrale di convoluzione:

$$\begin{cases} x'(t) = \overline{x} & (1) \\ x''(t) = -e^{at}\overline{x} \overset{*}{=} \frac{b}{a}e^{at}\overline{u} & (2) \end{cases}$$

dove la (1) rappresenta il movimento a partire da condizioni iniziali di equilibrio con ingresso di equilibrio, mentre (2) con ingresso nullo e condizione iniziale $-\overline{x}$ è la risposta libera del sistema (nell'uguaglianza $*$ si è sostituita la (1.2.5) a $\overline{x}$).
Il movimento cercato sarà la somma dei due contributi appena calcolati (dalla (1.1.5) usiamo $x_0 = x_0' + x_0''$):

$$x(t) = -\frac{b}{a}\overline{u}\left(1 - e^{at}\right)$$

Otteniamo infine lo stesso risultato dell'integrale di convoluzione.

Osservazione 1.2. Ricapitolando, abbiamo scelto una condizione iniziale e un ingresso per facilitare i calcoli: volendo studiare la condizione iniziale nulla $x_0 = 0$, prendiamo una prima condizione iniziale $x_0' = \overline{x}$ perché in sua presenza il movimento sarà costante pari a $\overline{x}$; siccome la condizione di interesse è quella nulla, prendiamo un secondo movimento con condizione iniziale opposta al primo ($x_0'' - \overline{x}$) tale che la somma dei due si annulli. Infine abbiamo preso due ingressi tali che $u'(t) + u''(t) = u(t)$.

Proviamo nuovamente a calcolare nel caso $a < 0$ il tempo che il movimento forzato impiega a raggiungere un valore stazionario (asintotico) di stato:

$$x(t_\varepsilon) = \overline{x}(1 - \varepsilon) = -\frac{b}{a}\overline{u}(1 - \varepsilon) = -\frac{b}{a}\overline{u}\left(1 - e^{at_\varepsilon}\right)$$

ottenuta dalle (1.2.5) per il secondo membro e (1.2.4) per il terzo. Dall'equazione precedente si ricava

$$t_\varepsilon = \frac{1}{|a|} \left|\ln\left(\varepsilon\right)\right|$$

che è la stessa condizione del (1.2.3); essa implica la presenza di una costante di tempo $T = 1/|a|$ per movimenti convergenti ($a < 0$).

1.3. Rappresentazione equivalente

Rispetto al precedente paragrafo, dobbiamo generalizzare i conti fatti per ottenere i movimenti a coefficienti matriciali (soprattutto per quanto riguarda la matrice A); per affrontare questa generalizzazione introduciamo il seguente concetto di *rappresentazione equivalente*, in sistemi LTI.

Riprendendo l'Esempio 1.5, si era scelto come vettore dello stato posizione e velocità delle due masse; nulla ci vieta di scegliere diversamente lo stato. Prendendo distanza e velocità relative tra le due masse otteniamo:

$$x\left(t\right) = \begin{bmatrix} p_1\left(t\right) \\ \dot{p}_1\left(t\right) \\ p_2\left(t\right) \\ \dot{p}_2\left(t\right) \end{bmatrix} \to \hat{x}\left(t\right) = \begin{bmatrix} p_1\left(t\right) \\ p_1\left(t\right) - p_2\left(t\right) \\ \dot{p}_1\left(t\right) \\ \dot{p}_1\left(t\right) - \dot{p}_2\left(t\right) \end{bmatrix}$$

Si noti che è ammissibile qualsiasi scelta che sia una combinazione lineare degli stati di partenza; in questo specifico caso lo stato equivalente può essere espresso come il prodotto di una matrice di trasformazione per il vettore degli stati:

$$\hat{x}\left(t\right) = T \cdot x\left(t\right) \to \overbrace{\begin{bmatrix} p_1\left(t\right) \\ p_1\left(t\right) - p_2\left(t\right) \\ \dot{p}_1\left(t\right) \\ \dot{p}_1\left(t\right) - \dot{p}_2\left(t\right) \end{bmatrix}}^{\hat{x}(t)} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{T} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} p_1\left(t\right) \\ \dot{p}_1\left(t\right) \\ p_2\left(t\right) \\ \dot{p}_2\left(t\right) \end{bmatrix}}^{x(t)}$$

Perché l'equivalenza sia valida deve verificarsi che T sia una matrice invertibile (nel contesto di questo esempio $\det\left(T\right) = -1$ quindi è invertibile).

Ci chiediamo ora come si possano ottenere le rispettive equazioni della dinamica del sistema: dalla precedente, esplicitando lo stato e supponendo T invertibile si può riscrivere che $x\left(t\right) = T^{-1} \cdot \hat{x}\left(t\right)$.

Partiamo da (1.1.3) e adottiamo le considerazioni appena fatte:

$$\dot{x}\left(t\right) = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right) \to T^{-1}\dot{\hat{x}}\left(t\right) = A \cdot T^{-1}\hat{x}\left(t\right) + Bu\left(t\right)$$

$$\to \dot{\hat{x}}\left(t\right) = T \cdot A \cdot T^{-1}\hat{x}\left(t\right) + T \cdot Bu\left(t\right)$$

L'equazione di uscita sarà di conseguenza

$$y\left(t\right) = C \cdot x\left(t\right) + D \cdot u\left(t\right) \to y\left(t\right) = C \cdot T^{-1}\hat{x}\left(t\right) + Du\left(t\right)$$

Il sistema che si ottiene è LTI della stessa forma di quello originale (1.1.3) ma con i coefficienti matriciali (la cosiddetta rappresentazione del modello) equivalenti che ridefiniscono le equazioni nel modo seguente:

$$\hat{A} = T \cdot A \cdot T^{-1},\ \hat{B} = T \cdot B,\ \hat{C} = C \cdot T^{-1},\ \hat{D} = D$$

Modello equivalente per sistemi LTI

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}\left(t\right) = \hat{A} \cdot \hat{x}\left(t\right) + \hat{B} \cdot u\left(t\right) \\ y\left(t\right) = \hat{C} \cdot \hat{x}\left(t\right) + \hat{D} \cdot u\left(t\right) \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Osservazione 1.3. Per il PSE uno stato è combinazione lineare dello stato precedente e questo vale per tutti i movimenti; fissando condizione iniziale e ingresso si ottiene un movimento la cui rappresentazione equivalente è la combinazione lineare dei movimenti originali secondo la matrice T di trasformazione.

Dall'Osservazione A.10 possiamo risolvere il calcolo dei movimenti di un generico sistema con matrice A quadrata, di cui basta cercare la rappresentazione equivalente più comoda per risolvere le equazioni: se A fosse diagonalizzabile, potremmo adottare una rappresentazione equivalente nella quale $\hat{A}$ è diagonale (quindi composta dai soli autovalori sulla diagonale mentre gli altri elementi sono nulli); questo facilita l'uso della (1.2.2) poiché l'esponenziale di una matrice diagonale si ricava facilmente.

Nelle prossime sezioni vedremo che tutte le proprietà di un sistema LTI dipendono dagli autovalori di A, chiamati *modi* del sistema.

Si nota che qualsiasi movimento dello stato di un sistema LTI è combinazione lineare di un numero piccolo di movimenti possibili, tanti quanti gli autovalori della matrice A della rappresentazione.

1.4. Movimenti generati dai modi

1.4.1. Modi e autovalori. Prendiamo in esame il caso in cui la matrice A da (1.1.3) sia diagonalizzabile (autovalori tutti distinti, vedi Osservazione A.9): gli autovettori della matrice saranno soluzione di $(\lambda_i I - A)\, v_i = 0$, generando una matrice di autospazi per una matrice diagonale di autovalori come

$$A = \overbrace{[v_1,\, v_2,\, \dots v_n]}^{T_\mathrm{D}} \cdot \overbrace{\mathrm{diag}\,\{\lambda_1,\, \lambda_2,\, \dots \lambda_n\}}^{A_\mathrm{D}} \cdot T_\mathrm{D}^{-1}$$

dove T_D è la trasformazione che diagonalizza A in A_D(matrice diagonale con autovalori di A); possiamo riscrivere la relazione tra la matrice e la sua diagonale nei modi seguenti:

$$T_\mathrm{D}^{-1} \cdot A_\mathrm{D} = A \cdot T_\mathrm{D}^{-1} \to A = T_\mathrm{D}^{-1} \cdot A_\mathrm{D} \cdot T_\mathrm{D} \to A_\mathrm{D} = T_\mathrm{D} \cdot A \cdot T_\mathrm{D}^{-1}$$

Se scegliamo un nuovo stato $\hat{x}\,(t) = T_\mathrm{D} \cdot x\,(t)$ ottenuto tramite la matrice di diagonalizzazione, ottengo l'equazione del modello:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}\,(t) = A_\mathrm{D} \cdot x\,(t) + T_\mathrm{D} \cdot Bu\,(t) \\ y\,(t) = C \cdot T_\mathrm{D}^{-1} \cdot \hat{x}\,(t) + D \cdot u\,(t) \end{cases}$$

Notiamo che il nuovo sistema ha per matrice di stato una matrice diagonale (A_D); ponendo la condizione iniziale $\hat{x}_0 = T_\mathrm{D} \cdot x_0$, il movimento libero (poniamo ingresso $u\,(t) = 0$) del sistema si ottiene dalla (1.2.3):

$$\hat{x}\,(t) = e^{A_\mathrm{D} \cdot t} \hat{x}_0$$

dove l'esponenziale di matrice diagonale vale $e^{A_\mathrm{D} \cdot t} = \mathrm{diag}\left\{e^{\lambda_1 t},\, e^{\lambda_2 t},\, \dots e^{\lambda_n t}\right\}$, dove gli autovalori sulla diagonale sono chiamati *modi* del sistema.

Osservazione 1.4. Questa è una generalizzazione del caso scalare studiato nella precedente sezione: la matrice A era composta da un singolo elemento e avevamo ottenuto movimenti della forma e^{at}.

Nel caso vettoriale con matrice A diagonalizzabile, troviamo una matrice di trasformazione T_D che produce un sistema equivalente il cui stato è combinazione degli stati originali, col vantaggio che la sua matrice di stato (A_D) è diagonale; a questo punto analizzando il movimento libero con la (1.2.2) si ottiene necessariamente la combinazione lineare dei modi (espressioni della stessa forma $e^{\lambda_i t}$) del nuovo sistema.

Infine, calcoliamo il movimento libero dello stato del sistema originale, tramite la trasformazione inversa

$$x\,(t) = T_\mathrm{D}^{-1} \cdot \hat{x}\,(t)$$

Possiamo affermare che in sistemi LTI qualsiasi movimento libero del sistema è una combinazione dei suoi modi, che sono al più n. Se la matrice di stato ha coefficienti reali, si ottengono autovalori reali oppure complessi coniugati; i casi possibili sono elencati di seguito (viene sottinteso che per λ_i complessi si abbia una coppia di autovalori complessi coniugati):

Andamenti asintotici dei modi di sistemi LTI

- $\lambda_i \in \mathbb{R}$
  - $\lambda_i < 0$: modo convergenti;
  - $\lambda_i = 0$: modo costanti;
  - $\lambda_i > 0$: modo divergenti.
- $\lambda_i \in \mathbb{C}$
  - $\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) > 0$: modo oscillante divergente;
  - $\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) = 0$: modo oscillante limitato;
  - $\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) < 0$: modo oscillante convergente.

In particolare, per il caso di autovalori complessi coniugati, avremo $\lambda_{i,1} = \sigma_i + j\omega_i$, $\lambda_{i,2} = \sigma_i - j\omega_i$, si dimostra che anche gli autovettori associati sono complessi coniugati e gli esponenziali $e^{\lambda_i t}$ saranno moltiplicati per coefficienti complessi coniugati; otterremo dei termini del tipo:

$$\left(a_i + jb_i\right) e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + \left(a_i - jb_i\right) e^{(\sigma_i - j\omega_i)t}$$

Se chiamiamo il modulo del coefficiente complesso $m_p = |a_i \pm jb_i|$ e la sua fase $\phi_p = \arg\left(a_i \pm jb_i\right)$, possiamo riscrivere la precedente come:

$$m_p e^{j\phi_p} \cdot e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + m_p e^{-j\phi_p} \cdot e^{(\sigma_i - jw_i)t}$$

Modo oscillante

$$= m_p e^{\sigma_i t} \cdot \left(e^{j(\omega_i t + \phi_p)} + e^{-j(\omega_i t - \phi_p)}\right) = \boxed{m_p e^{\sigma_i t} \cdot 2\cos\left(\omega_i t + \phi_p\right)} \tag{1.4.1}$$

dove nella seconda uguaglianza è stata utilizzata la (A.5.1) ottenendo $e^{(\omega_i t \pm \phi_p)} = \cos\left(\omega_i t \pm \phi_p\right) + j\sin\left(\omega_i t \pm \phi_p\right)$. Chiamiamo modo oscillante l'espressione (1.4.1), anche se in modo improprio dato che si tratta della combinazione lineare di due modi (la coppia di complessi coniugati); esso presenta un andamento reale in funzione del tempo.

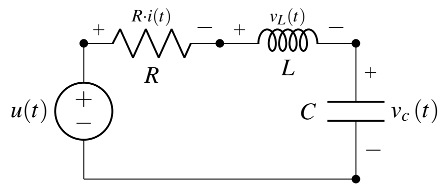

Figura 1.4.1. Circuito RLC con generatore controllato in ingresso

Esempio 1.7. Sia dato un circuito formato da una maglia con la serie di resistore di valore R, condensatore di valore C e induttore di valore L, chiusi su un generatore indipendente di tensione $u(t)$, che è l'ingresso del sistema. Nella serie scorre una corrente $i(t)$ e su condensatore e induttore ci sarà rispettivamente una tensione $v_c(t)$ e $v_L(t)$; si scriva un modello per questo sistema che abbia come uscita la tensione sul condensatore $v_c(t)$ e si analizzi il movimento libero del sistema (senza ingresso) al variare dei parametri costruttivi (R, L, C).

Per i due componenti dinamici (condensatore e induttore) si hanno dalla Fisica le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_c(t) = \frac{i(t)}{C}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} i(t) = \frac{v_L(t)}{L} = \frac{1}{L}\left(u(t) - Ri(t) - v_c(t)\right)$$

Abbiamo sostituito la tensione sull'induttore nella seconda relazione col bilancio delle tensioni sulla maglia, scrivendo $v_L(t)$ in funzione di $v_c(t)$, con $Ri(t)$ la tensione sul resistore.

Scegliamo le variabili di stato per portare le equazioni in forma standard: abbiamo la derivata della tensione sul condensatore nella prima e la derivata della corrente nella seconda, quindi prendiamo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

da cui segue la seguente scrittura per l'equazione di stato (1.1.3):

$$\dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}}^{A} \cdot x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u(t)$$

Scegliamo come condizioni iniziali una certa corrente nel circuito e una certa tensione ai capi della capacità al tempo $t = 0 = t_0$; imponiamo inoltre l'equazione di uscita per ottenere $v_c(t)$:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t_0) \\ v_c(t_0) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

Cerchiamo prima di tutto gli autovalori della matrice di stato A:

$$\begin{vmatrix} \lambda + R/L & 1/L \\ -1/C & \lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \to \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$$

Dovremo studiare i casi distinti in cui gli autovalori saranno reali e i casi in cui saranno complessi coniugati, in dipendenza dal numeratore della frazione sotto radice. Dovendo cercare il movimento libero calcoleremo la funzione $e^{A \cdot t}x_0$, dalla (1.2.3).

AUTOVALORI REALI E DISTINTI ($R^2C > 4L$):

In questo caso vale $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$ dunque avendo autovalori distinti la matrice A è diagonalizzabile; gli autovettori associati a tali autovalori sono:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ L\lambda_2 \end{bmatrix}, \, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ L\lambda_1 \end{bmatrix}$$

da cui otteniamo l'inversa della matrice di trasformazione e possiamo ricavare direttamente T_{D}:

$$T_{\mathrm{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L\lambda_2 & L\lambda_1 \end{bmatrix} \to T_{\mathrm{D}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & -1/L \\ -\lambda_2 & 1/L \end{bmatrix}$$

La matrice di stato sarà dunque simile a una matrice diagonale A_{D} con gli stessi autovalori:

D'ora in avanti si presti molta attenzione al pedice $_D$ alle matrici: le relazioni che seguono sfruttano le proprietà di similitudine e diagonalizzabilità de l'appendice A

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L\lambda_2 & L\lambda_1 \end{bmatrix}}^{T_{\mathrm{D}}^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{A_{\mathrm{D}}} \cdot \overbrace{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & -1/L \\ -\lambda_2 & 1/L \end{bmatrix}}^{T_{\mathrm{D}}}$$

L'esponenziale di questa matrice diagonale vale quanto quello della sua diagonalizzata A_{D} trasformata da T_{D}:

$$e^{A \cdot t} = T_{\mathrm{D}}^{-1} \overbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}}^{e^{A_{\mathrm{D}} t}} \cdot T_{\mathrm{D}}$$

La risposta libera del sistema $x(t) = e^{A \cdot t} x_0$ si riscrive dalle precedenti come:

$$x(t) = T_{\mathrm{D}}^{-1} \cdot e^{A_{\mathrm{D}} t} \cdot T_{\mathrm{D}} \cdot x_0$$
$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \left(\lambda_1 x_{0,1} - {}^1\!/\!_L x_{0,2}\right) e^{\lambda_1 t} + \left(\lambda_2 x_{0,1} + {}^1\!/\!_L x_{0,2}\right) e^{\lambda_2 t} \\ \left(\lambda_1 x_{0,1} - {}^1\!/\!_L x_{0,2}\right) L\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \left(-\lambda_2 x_{0,1} + {}^1\!/\!_L x_{0,2}\right) L\lambda_1 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

La precedente ha due componenti siccome lo stato ha due componenti. I suoi coefficienti sono una combinazione lineare dei coefficienti dello stato iniziale e degli elementi della matrice di trasformazione. Il movimento avrà un andamento sempre convergente: dall'espressione degli autovalori ricavata inizialmente si ricava

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}\right) < 0$$

essendoci posti nel caso $R^2C > 4L$, quindi gli autovalori reali distinti saranno sempre negativi e ogni possibile modo derivante avrà andamento convergente.

Le costanti di tempo di ciascun modo sono $T_i = \dfrac{1}{|\lambda_i|}$.

Autovalori complessi coniugati ($R^2C < 4L$):

I due autovalori saranno pari a $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega \in \mathbb{C} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$; essendo sempre distinti la matrice di stato sarà comunque diagonalizzabile. Gli autovettori di A e le relative matrici di trasformazione sono uguali a quelle ottenute nel caso precedente; in particolare vale

$$\sigma = -\frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{|R^2C - 4L|}{4L^2C}}$$

Anche in questo caso è corretta l'espressione per $x(t) = e^{A \cdot t} x_0$ ottenuta nel caso precedente; per facilitare la scrittura del primo stato, definiamo i seguenti:

$$m_p = \left|\frac{x_{0,1}}{2} - \frac{j}{2\omega}\left(\sigma x_{0,1} - \frac{1}{L} x_{0,2}\right)\right|, \quad \phi_p = \arg\left(\frac{x_{0,1}}{2} - \frac{j}{2\omega}\left(\sigma x_{0,1} - \frac{1}{L} x_{0,2}\right)\right)$$

Dopo aver messo in coordinate polari i coefficienti tramite le due precedenti, si ottiene:

$$x_1(t) = m_p e^{\sigma t} \cdot 2\cos(\omega t + \phi_p)$$

Viene riconfermato il risultato (1.4.1).

Un circuito oscillante analogico, come un risonatore puro, ha applicazioni nel campo dell'elettronica delle telecomunicazioni

L'andamento è decrescente, determinato dall'esponente $\sigma = -R/2L < 0$, dato che le grandezze di resistenza e induttanza sono sempre positive in un sistema reale; la pulsazione ω risulta invece inversamente proporzionale ai valori di resistenza e induttanza: se avessimo un circuito di resistenza $R = 0$ si avrebbe $\omega = \sqrt{1/LC}$, che caratterizza il circuito come risonatore puro.

Autovalori coincidenti ($R^2C = 4L$):

I due autovalori saranno pari a $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = -R/2L$ (si annulla la radice nell'espressione degli autovalori) e in generale, la matrice di stato potrebbe non essere diagonalizzabile: controlliamo che la molteplicità algebrica dell'autovalore λ (pari a 2 in questo caso) e quella geometrica coincidano:

$$g_1 = n - \text{rango}\left(-\frac{R}{2L} I - A\right) = 2 - \text{rango}\left(\begin{bmatrix} -\frac{R}{2L} + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2 - \text{rango}\left(\begin{bmatrix} -\dfrac{R}{2L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{R^2}{4L} & -\dfrac{R}{2L} \end{bmatrix}\right) = 2 - 1 = 1$$

dove nella seconda abbiamo sostituito $C = 4L/R^2$ dalla condizione studiata e il rango è 1 poiché la seconda riga è combinazione lineare della prima per $-R/2$. Essendo $g_1 < n_1$ la matrice di stato non è diagonalizzabile; tuttavia può essere scritta in forma (A.3.2): la matrice A_{J} ottenuta sarà in relazione con A nel modo seguente:

$$A = T_{\text{J}}^{-1} \cdot A_{\text{J}} \cdot T_{\text{J}} \tag{1.4.2}$$

La matrice in forma di Jordan avrà sulla diagonale i due autovalori coincidenti e un 1 in posizione $a_{1,2}$ mentre la matrice di trasformazione si ottiene calcolando (A.3.1):

$$A_{\text{J}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad T_{\text{J}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 L & L(\lambda_1 - 1) \end{bmatrix} \rightarrow T_{\text{J}} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} L(\lambda_1 - 1) & 1 \\ -\lambda_1 L & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo a questo punto ottenere il movimento libero con (1.2.3) applicato al sistema in forma di Jordan, a cui applichiamo la trasformazione (1.4.2):

$$x(t) = T_{\text{J}}^{-1} \cdot e^{A_{\text{J}}t} \cdot T_{\text{J}} \cdot x_0 = e^{At}x_0 \tag{1.4.3}$$

dove si ha che $e^{A_{\text{J}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$.

Osservazione 1.5. Svolgendo il prodotto (1.4.3) otteniamo una risposta libera come combinazione lineare dei modi ottenuti nel caso di autovalori reali distinti, con dei nuovi modi esponenziali (tanti quanti gli autovalori con $g_i < n_i$).

Nel caso di una matrice non diagonalizzabile, gli autovalori con molteplicità algebrica $n_i > 1$ che si ottengono dalla forma di Jordan determinano i seguenti andamenti dei modi:

- $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (modi del tipo $te^{\lambda_i t}$):
  - $\lambda_i > 0$: modo divergente;
  - $\lambda_i = 0$: modo limitato;
  - $\lambda_i < 0$: modo convergente.
- $\lambda_i \in \mathbb{C}$ (autovalori complessi coniugati, modi del tipo $te^{\sigma t}(\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi))$):
  - $\text{Re}(\lambda_i) > 0$: modo divergente (esponenziale);
  - $\text{Re}(\lambda_i) = 0$: modo divergente (lineare);
  - $\text{Re}(\lambda_i) < 0$: modo convergente.

□

$$F(t) \rightarrow \boxed{1/m} \overset{\ddot{p}(t)}{\rightarrow} \boxed{\int_0^t \ddot{p}(t)\,dt + p_0} \overset{\dot{p}(t)}{\rightarrow} \boxed{\int_0^t \dot{p}(t)\,dt + p_0} \rightarrow p(t)$$

Figura 1.4.2. Schema a blocchi del doppio integratore in questo sistema

Esempio 1.8. Consideriamo un carrello di massa m che si muova lungo una superficie priva di attrito con una traiettoria rettilinea; la sua posizione è data da $p(t)$ mentre ad esso è applicata una forza esterna $F(t)$. Scrivere un modello per questo sistema in cui si misuri la posizione e stabilirne l'andamento dei modi.

Il sistema nell'esempio con due autovalori coincidenti nulli appartiene alla categoria dei *doppi integratori*

Si ricava facilmente l'equazione della dinamica del sistema:

$$m \cdot a(t) = F(t)$$

L'ingresso del sistema sarà la forza $(u(t) = F(t))$ e l'uscita da misurare la posizione $(y(t) = p(t))$; come stati scegliamo la posizione $(p(t))$ e la velocità $(\dot{p}(t))$ in modo da poter scrivere in funzione di essi l'accelerazione $(\ddot{p}(t))$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix}$$

Dalla (1.1.3) le equazioni di stato saranno scritte come:

$$\dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix}}^{x(t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}^{B} \cdot \overbrace{F(t)}^{u(t)}$$

Il sistema di questo esempio si chiama appunto doppio integratore poiché presenta due integrazioni in serie dell'ingresso (mostrate in Figura 1.4.2); cerchiamo gli autovalori della matrice di stato per calcolare i movimenti del sistema: essendo una matrice triangolare, gli autovalori sono i coefficienti sulla diagonale principale, ovvero vale:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Si osserva inoltre che A è già in forma (A.3.2); posto $x(t_0) = x_0$, il movimento libero (1.2.3) di questo sistema sarà pari a

$$x(t) = e^{A \cdot t} x_0 = \begin{bmatrix} e^{0t} & te^{0t} \\ 0 & e^{0t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,1} + tx_{0,2} \\ x_{0,2} \end{bmatrix}$$

dove l'esponenziale si calcola in modo diretto per la matrice di stato di ordine 2 in forma di Jordan.

Il movimento ottenuto rappresenta il fatto che in un sistema di questo tipo, in assenza di forze in ingresso e di disturbi come l'attrito (siamo nel caso dell'esempio) la velocità rimarrà costante nel tempo mentre la posizione (integrale della velocità) aumenterà in modo lineare.

Calcoliamo invece il movimento forzato applicando in ingresso uno scalino (forza costante) come $u(t) = \overline{u} \cdot \mathrm{sca}(t)$; la (1.2.4) assume il seguente valore:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ {}^1\!/_m \end{bmatrix} \cdot \overline{u} \cdot \mathrm{sca}(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1-\tau}{m} \overline{u} \cdot \mathrm{sca}(\tau) \\ \frac{1}{m} \overline{u} \cdot \mathrm{sca}(\tau) \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{\overline{u}}{2m} \left[-(t-\tau)\right]_0^t \\ \frac{1}{m} \overline{u} \left[\tau\right]_0^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{u}}{2m} t^2 \\ \frac{1}{m} \overline{u} t \end{bmatrix}$$

I coefficienti risultanti dal movimento forzato sono una riscrittura delle equazioni della dinamica, rispettivamente $a_{1,1} : v(t) = a(t)\, t$, $a_{2,1} : p(t) = \frac{1}{2} a(t)\, t^2$ ponendo $a(t) = \overline{u}/m$. Notiamo inoltre che il movimento forzato della posizione sarà un esponenziale mentre quello della velocità è lineare, entrambi divergenti.

1.4.2. Modo dominante. Prendiamo in esame i sistemi con autovalori reali negativi: essi generano modi convergenti; la costante di tempo associata a ciascun autovalore dipende inversamente da esso come $T_i = 1/\left|\lambda_i\right|$ (esiste solo per modi convergenti).

Se invece abbiamo autovalori complessi coniugati nella forma (1.4.1) possiamo vedere la costante di tempo come il tempo impiegato dall'ampiezza dell'oscillazione a scendere sotto una certa soglia: concettualmente si parla dell'esponente σ nel modo oscillante, e la costante di tempo può essere definita come $T = 1/\left|\sigma\right|$.

In generale, in un sistema di ordine n ci saranno al più n autovalori con associate le rispettive costanti di tempo; la risposta complessiva del sistema (la combinazione lineare dei modi) sarà influenzata dal modo più "lento" (quello con costante di tempo maggiore): tale modo si chiama *modo dominante*, il quale avrà analiticamente l'autovalore associato con parte reale più piccola degli altri.

1.5. Equilibrio di sistemi LTI

Per portare in equilibrio un sistema LTI a tempo continuo bisogna avere una coppia di condizioni iniziali e ingressi costanti $(\overline{x}, \overline{u})$ tali che il movimento di stato rimanga costante, ovvero $\dot{x}(t) \,:\, A\cdot\overline{x} + B\cdot\overline{u} = 0$, e l'equazione di uscita segue da (1.1.3) risultando in $\overline{y} = C\cdot\overline{x} + D\cdot\overline{u}$; questa equazione ammette una e una sola soluzione quando A è invertibile:

- Se A è priva di autovalori nulli allora essa è invertibile, e a fronte di qualsiasi ingresso costante troviamo sempre uno e un solo stato di equilibrio; dall'equazione di stato si ottiene $\overline{x} = A^{-1}\cdot B\cdot\overline{u}$.
- Se A non è invertibile almeno un autovalore è nullo e bisogna risolvere $A\cdot\overline{x} = -B\cdot\overline{u}$.

Dalle precedenti considerazioni scriviamo le equazioni di equilibrio del sistema rispetto ai valori iniziali e alle uscite di equilibrio, ammettendo che A sia invertibile:

$$\begin{cases}\overline{x} = A^{-1}\cdot B\cdot\overline{u}\\ \overline{y} = \left(-C\cdot A^{-1}\cdot B + D\right)\overline{u}\end{cases}$$

Esempio 1.9. Dall'Esempio 1.8 otteniamo la seguente equazione del sistema (notando che A non è invertibile in questo caso):

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0\\ {}^{1}\!/_{m}\end{bmatrix}\cdot\overline{u}$$

L'equazione ammette soluzione solo per ingresso nullo $\overline{u} = 0$, mentre la prima equazione impone la velocità $\overline{x}_2 = 0$; a questo punto la posizione $\overline{x}_1 = \alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ può assumere qualunque valore reale.

1.6. Risposta all'impulso

L'ingresso canonico chiamato impulso è definito come $\operatorname{imp}(t) = \{1 \text{ per } t = 0;\ 0 \text{ per } t \neq 0\}$ e il suo integrale vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{imp}(t)\,dt = 1$$

Nella realtà non è possibile avere un ingresso istantaneo: per modellizzare l'impulso si forza nel sistema un ingresso molto ampio per un breve periodo di tempo a partire da $t = 0$.

Noto il movimento generato dall'impulso di un sistema LTI, è possibile calcolare il movimento forzato derivante da qualsiasi altro ingresso in condizioni iniziali nulle.

In generale il movimento forzato dello stato sarà ottenuto da (1.2.2) come:

$$x_{\mathrm{F}}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot \operatorname{imp}(\tau)\, d\tau = e^{A\cdot t} \cdot B \int_0^t e^{(-A\cdot\tau)} \operatorname{imp}(\tau)\, d\tau$$

Risposta all'impulso

$$= e^{A\cdot t} \cdot B \tag{1.6.1}$$

Si ottiene questo risultato osservando che l'impulso vale 1 solo per $t = 0$ e per questo valore si ha che $e^{(-A\cdot 0)}$ equivale a una matrice identità; nota la (1.6.1) possiamo calcolare in generale il movimento forzato del sistema come integrale di convoluzione di (1.2.4) in cui l'argomento contiene il termine (1.6.1) per l'ingresso forzato in esame.

Un sistema si dirà stabile se la risposta all'impulso genera modi convergenti: osservando la risposta all'impulso (1.6.1) come la risposta libera (1.2.3) con condizioni iniziai pari a B, si vorranno ottenere combinazioni lineari di modi convergenti per garantire la stabilità del sistema.

1.7. Stabilità del sistema

1.7.1. Condizioni di stabilità in sistemi LTI. Prendiamo un sistema LTI a tempo continuo e poniamoci in una condizione di equilibrio: il movimento dello stato si ottiene dalla (1.2.2); perturbiamo ora la condizione iniziale applicando lo stesso ingresso di equilibrio e chiamiamo $\tilde{x}_0 = x(t_0) + \delta$ dove δ è una perturbazione iniziale.

Scriviamo il movimento perturbato come:

$$\tilde{x}(t) = e^{A\cdot t}\tilde{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot u(\tau)\, d\tau$$

La distanza della perturbazione da $x(t)$ sarà definita da $\delta x(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$, dove possiamo raccogliere l'esponenziale di matrice e notando che si annulla il termine dovuto all'ingresso (abbiamo ipotizzato una condizione di equilibrio) avremo:

Andamento della perturbazione

$$e^{A\cdot t}(\tilde{x} - x_0) = e^{A\cdot t}\delta \tag{1.7.1}$$

Si ottiene questo risultato a prescindere dalle condizioni iniziali.

Osservazione 1.6. In un sistema LTI a tempo continuo, presa qualsiasi coppia di movimento e movimento perturbato, la distanza tra i due movimenti è data sempre dalla (1.7.1); da questo deriva il seguente Teorema 1.1.

Teorema sulla stabilità del sistema

Teorema 1.1. *In un sistema LTI un movimento (incluso quello di equilibrio) è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se sono rispettivamente stabili, asintoticamente stabili o instabili tutti i movimenti del sistema.*

Osservazione 1.7. Si nota che l'equazione (1.7.1) è l'espressione di un movimento libero (1.2.3), dunque è una combinazione lineare dei modi del sistema: si deduce che l'espressione (1.7.1) sarà limitata, convergente o divergente a seconda dell'andamento di questi modi. Possiamo quindi controllare l'andamento di (1.7.1) per conoscere l'andamento di tutto il sistema, per il Teorema 1.1.

Possiamo usare le condizioni (1.4.1) assieme alla precedente osservazione per ottenere le seguenti considerazioni:

Teorema dell'asintotica stabilità

TEOREMA 1.2. *Un sistema LTI della forma (1.1.3) si dice asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della sua matrice di stato (A) hanno parte reale negativa (ovvero quando (1.7.1) converge a zero).*

Teorema dell'instabilità

TEOREMA 1.3. *Un sistema LTI della forma (1.1.3) si dice instabile se e solo se almeno uno degli autovalori della sua matrice di stato (A) ha parte reale positiva.*

Per autovalori con parte reale nulla, bisogna controllare la diagonalizzabilità della matrice di stato ($n_i = g_i$): se questo si verifica si ottengono solo modi limitati; se la molteplicità geometrica è inferiore a quella algebrica, allora tutti i modi divergeranno (vedi le condizioni a pagina 22). Enunciamo il seguente

TEOREMA 1.4. *In un sistema LTI, per autovalori della matrice di stato tali che* $Re(\lambda_i) = 0$*, se vale* $n_i = g_i$ *si ha un sistema stabile (modi limitati); nel caso in cui* $g_i < n_i$ *allora il sistema è instabile.*

Riprendiamo due esempi fatti in precedenza per mostrare un'applicazione dei teoremi appena enunciati:

Dall'Esempio 1.7 si ottenevano due autovalori nella forma $\lambda_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\dfrac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$; per $R \neq 0$ si ottengono sempre autovalori con parte reale negativa: il sistema risulterà asintoticamente stabile; per $R = 0$ si ottengono autovalori complessi coniugati (immaginari puri): il sistema risulterà semplicemente stabile.

Dall'Esempio 1.8 si ottenevano autovalori nulli con molteplicità algebrica maggiore della geometrica: dalla matrice di stato in forma di Jordan si ottiene che il sistema è instabile.

Elenchiamo ora alcune proprietà dei sistemi LTI asintoticamente stabili:

(1) Un movimento per $t \to \infty$ non dipende dalle condizioni iniziali $x(t_0)$;
(2) La risposta (movimento) a un impulso tende ad annullarsi per $t \to \infty$;
(3) La risposta (movimento) a qualsiasi ingresso limitato nel tempo tende ad annullarsi per $t \to \infty$;
(4) Gli stati e le uscite di equilibrio, con ingresso costante nel tempo ($\overline{u}$), sono unici e pari a $\overline{x}$ e $\overline{y}$;
(5) Il sistema gode della proprietà di *stabilità esterna*: a fronte di ingressi limitati nel tempo, anche le uscite saranno limitate nel tempo.

La proprietà di stabilità esterna è abbreviata come BIBO: bounded input, bounded output

1.7.2. Segno degli autovalori. Sappiamo che gli autovalori della matrice di stato sono i valori per cui vale la Definizione A.9 e risolvono (A.2.1); chiamiamo tale polinomio $\phi(\lambda) = 0$, che in generale ha grado pari all'ordine della matrice da cui deriva (nel nostro caso ha grado pari all'ordine di A).

Possiamo scrivere tale polinomio come

$$\phi(\lambda) = \phi_0\lambda^n + \phi_1\lambda^{n-1} + \ldots + \phi_n \tag{1.7.2}$$

Studiamo il segno della parte reale delle soluzioni di tale polinomio, osservando i suoi coefficienti; enunciamo su questa base il seguente:

TEOREMA 1.5. *Se il sistema della forma (1.1.3) è asintoticamente stabile, allora i coefficienti del suo polinomio caratteristico* ϕ_i, $i \in 0\ldots n$ *hanno tutti lo stesso segno.*

COROLLARIO 1.1. *In un sistema di ordine* $n \leq 2$*, la condizione del Teorema (1.5) diventa necessaria e sufficiente.*

Nel caso di un sistema di ordine maggiore di 2 con segno concorde per tutti gli autovalori della matrice di stato, il sistema potrebbe essere stabile ma bisogna verificarlo col criterio proposto nella sezione successiva.

1.7.3. Criterio di Routh. Enunciamo un criterio che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per stabilire la stabilità asintotica di un sistema; questo criterio si basa sulla seguente *tabella di Routh*, costruita a partire dal polinomio caratteristico nella forma (1.7.2):

$$\begin{array}{cccccc} \phi_0 & \phi_2 & \phi_4 & \cdots & \phi_{n-1} & 0 \\ \phi_1 & \phi_3 & \phi_5 & \cdots & \phi_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{1.7.3}$$

Questa tabella si compila grazie al seguente *algoritmo di Routh* che dalle due righe precedenti (h_i, k_i) ottiene la successiva (l_i):

$$l_i = -\frac{1}{k_1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix}\right) = h_{i+1} - \frac{h_1 k_{i+1}}{k_1} \tag{1.7.4}$$

Si osserva che essa in generale è triangolare, e inoltre l'algoritmo non si può applicare per il caso $k_1 = 0$ per almeno una riga (in tal caso si dice che la (1.7.3) non è ben definita). L'algoritmo termina quando si otterrebbe uno zero nella prima posizione della riga più in basso.

Criterio di Routh

Teorema 1.6. *Un sistema LTI della forma (1.1.3) è asintoticamente stabile se e solo se la tabella di Routh (1.7.3) del polinomio caratteristico della matrice di stato (A) del sistema è ben definita, e tutti gli elementi sulla prima colonna della tabella hanno segno concorde.*

Corollario 1.2. *Il numero di variazioni di segno degli elementi sulla prima colonna della tabella (1.7.3) è pari al numero di autovalori con parte reale positiva (i quali generano modi instabili).*

Esempio 1.10. Sia dato il seguente polinomio caratteristico della matrice di stato di un sistema LTI di ordine 5

$$\phi(\lambda) = \lambda^5 + 15\lambda^4 + 85\lambda^3 + 225\lambda^2 + 274\lambda + 120$$

Verificare la stabilità dei movimenti del sistema.

Il Teorema 1.5 fornisce un indizio sulla possibile stabilità del sistema: usiamo il Teorema 1.6 per sfruttarne la condizione sufficiente; grazie all'algoritmo (1.7.4) compiliamo la seguente tabella:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 85 & 274 & 0 \\ 15 & 225 & 120 & 0 \\ 85 - \frac{1 \cdot 225}{15} & 274 - \frac{1 \cdot 120}{15} & 0 - \frac{1 \cdot 0}{15} & 0 \\ 225 - \frac{15 \cdot 266}{70} & 120 - \frac{15 \cdot 0}{70} & 0 - \frac{15 \cdot 0}{70} & 0 \\ 266 - \frac{70 \cdot 120}{168} & 0 - \frac{70 \cdot 0}{168} & 0 - \frac{70 \cdot 0}{168} & 0 \\ 120 - \frac{168 \cdot 0}{216} & 0 - \frac{168 \cdot 0}{216} & 0 - \frac{168 \cdot 0}{216} & 0 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 85 & 274 & 0 \\ 15 & 225 & 120 & 0 \\ 70 & 266 & 0 & 0 \\ 168 & 120 & 0 & 0 \\ 216 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Il sistema risulta asintoticamente stabile per il Teorema 1.6 poiché tutti gli elementi della prima colonna hanno segno concorde.

Esempio 1.11. Sia dato un sistema LTI con parametri incerti, ovvero gli autovalori sono variabili; è possibile calcolare il polinomio caratteristico rispetto a tali parametri: si valuti dunque la stabilità del sistema col seguente polinomio caratteristico di stato

$$\phi(\lambda) = \lambda^3 + (2+\beta)\lambda^2 + (1+2\beta)\lambda + \alpha + \beta$$

Grazie al Teorema 1.6 possiamo compilare una tabella di Routh e ottenere su di essa le condizioni perché gli autovalori incerti abbiano segno concorde.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1+2\beta & 0 \\ 2+\beta & \alpha+\beta & 0 \\ \hline (1+2\beta) - \dfrac{1\cdot(\alpha+\beta)}{2+\beta} & 0 - \dfrac{1\cdot 0}{2+\beta} & 0 \\ (\alpha+\beta) - \dfrac{(2+\beta)\cdot 0}{\dfrac{2(\beta+1)^2-\alpha}{\beta+2}} & 0 - \dfrac{(2+\beta)\cdot 0}{\dfrac{2(\beta+1)^2-\alpha}{\beta+2}} & 0 \end{array} = \begin{array}{ccc} 1 & 1+2\beta & 0 \\ 2+\beta & \alpha+\beta & 0 \\ \hline \dfrac{2(\beta+1)^2-\alpha}{\beta+2} & 0 & 0 \\ \alpha+\beta & 0 & 0 \end{array}$$

Imponiamo che tutti i coefficienti della prima colonna siano maggiori di zero (è presente un 1, che è costante e positivo, esso influenza il segno della colonna):

$$\begin{cases} 2+\beta > 0 \\ 2(\beta+1)^2 - \alpha > 0 \\ \alpha+\beta > 0 \end{cases}$$

Le coppie (α, β) che soddisfano tutte queste condizioni generano movimenti asintoticamente stabili per il sistema. Quelle che non le soddisfano generano movimenti instabili.

Indice analitico

APPENDICE A

Richiami di Geometria e Algebra Lineare

A.1. Matrici

Richiamiamo le proprietà del prodotto nell'ambito delle matrici; siano date due matrici quadrate di ordine n chiamate A, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uno scalare α; siano inoltre $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ gli elementi alla riga i e colonna j delle rispettive matrici (indicate con la maiuscola corrispondente).

Definizione A.1. Il *prodotto per uno scalare* di una matrice, indicato con $\alpha \cdot A$, è pari a

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{1,1} & \cdots & \alpha \cdot a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{n,1} & \cdots & \alpha \cdot a_{n,n} \end{bmatrix}$$

dove $a'_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j}$; il prodotto per uno scalare gode delle stesse proprietà del prodotto tra due scalari.

Definizione A.2. Prese $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$, chiamiamo *prodotto righe per colonne* la relazione $A \cdot B = C$, dove gli elementi della matrice C valgono

$$c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,i} + a_{i,2} \cdot b_{2,i} + \ldots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}$$

Si osserva che l'elemento $c_{i,j}$ è ottenuto dal prodotto termine a termine della i-esima riga di A con la j-esima colonna di B; questa operazione non è commutativa.

Definizione A.3. Si chiama matrice *trasposta* di A e si indica con A^{T} la matrice ottenuta scambiando ordinatamente le righe con le colonne di A.

Il prossimo concetto è essenziale per capire la successiva Definizione A.5:

Definizione A.4. Data una matrice quadrata A il *complemento algebrico* del suo elemento $a_{i,j}$ è il determinante della sotto-matrice che si ottiene eliminando dalla matrice principale la i-esima riga e la j-esima colonna, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$; esso è indicato con $\Delta_{i,j}$.

Ora possiamo introdurre il concetto di determinante, utilizzato ricorsivamente nella precedente Definizione A.4:

Definizione A.5. Il *determinante* di una generica matrice quadrata A di ordine $n > 1$ è pari a

I teorema di Laplace

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j} \cdot \Delta_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot \Delta_{i,j})$$

o in altri termini il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi di una sua linea (riga o colonna) per i rispettivi complementi algebrici. Se $n = 1$ si ha il caso banale in cui la matrice A ha un solo elemento a e vale $\det(a) = a$.

Inoltre per una matrice con $n = 2$ si ottiene facilmente $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$.

ESERCIZIO A.1. Calcolare il determinante della seguente matrice:

► *Esercizio: determinante di una matrice* 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE A.1. Considero la riga 1, la quale presenta uno zero (semplificando un addendo della somma di complementi algebrici): applicando la Definizione A.5 si ottiene che:

- il primo addendo (relativo all'elemento $a_{1,1} = 1$) si ottiene da
$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & -1 & 3 \\ \cancel{1} & 5 & 2 \end{bmatrix} \to 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right) = -2 - 15 = -17;$$
- il secondo addendo vale 0;
- il terzo addendo (relativo all'elemento $a_{1,3} = 2$) si ottiene da
$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \boxed{2} \\ 2 & -1 & \cancel{3} \\ 1 & 5 & \cancel{2} \end{bmatrix} \to 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) = 2\,(10 + 1) = 22;$$

Il determinante di A sarà $\det(A) = 22 - 17 = \boxed{5}$. □

A seguire alcune proprietà e osservazioni sul determinante di una matrice:

OSSERVAZIONE A.1. Una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante: $\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}})$.

OSSERVAZIONE A.2. Il determinante di un prodotto matrice per scalare è dato da $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \det(A)$.

Teorema di Binet

TEOREMA A.1. *Per due matrici quadrate A e B dello stesso ordine vale* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

DEFINIZIONE A.6. Una matrice il cui determinante sia nullo (zero) si dice *singolare*; una matrice singolare non è invertibile.

DEFINIZIONE A.7. Il *rango* di una matrice quadrata è il numero massimo di vettori *linearmente indipendenti* tra righe e colonne; presi n vettori, essi si dicono linearmente indipendenti se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \neq 0 \, \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \, \alpha \neq 0$.

Vice versa si parla di vettori linearmente *dipendenti* se $\exists \alpha_i, \, i \in 1 \ldots n \, : \, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$.

DEFINIZIONE A.8. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ indichiamo con A^{-1} la sua *inversa*, tale che $A \cdot A^{-1} = I$ (questo è valido solo per matrici non singolari, dalla Definizione A.6).

Tale matrice si calcola come $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix}$ dove l'elemento $b_{i,j} = \dfrac{\Delta_{j,i}}{\det(A)}$.

Attenzione agli indici del complemento algebrico Δ: sono scambiati rispetto a quelli dell'elemento b corrispondente!

TEOREMA A.2. *Data una matrice quadrata A, essa è invertibile se e solo se non è singolare; se A non è singolare allora la sua inversa vale* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$*; con* $A^* = \left[a^*_{i,,j}\right]$ *si indica la* matrice aggiunta *di A, ovvero quella il cui elemento di posto* $a^*_{i,,j}$ *corrisponde al complemento algebrico di* $a_{j,,i}$.

ESEMPIO A.1. Si vuole invertire la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando la Definizione A.8, controlliamo che A sia invertibile: $\det(A) = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13$ che essendo diverso da zero rende la matrice invertibile; scriviamo dunque la matrice inversa come il prodotto dell'inverso del determinante per la matrice dei complementi algebrici di A (dove per $a_{i,\,j}$ si prende $\Delta_{j,\,i}$, si rimanda inoltre alla Definizione A.4):

$$A^{-1} = -\frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

□

▶ *Esercizio: inversa di una matrice* 3×3

ESERCIZIO A.2. Calcolare l'inversa (se esiste) della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE A.2. Controlliamo che la matrice sia invertibile; calcoliamo dunque il determinante utilizzando la seconda riga (contenente uno zero):

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) + 0 + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= -4 \cdot (-3 - 4) - 1 \cdot (6 + 1) = 28 - 7 = 21 \end{aligned}$$

che risulta maggiore di zero e la matrice è invertibile.

Procediamo calcolando l'inversa come il prodotto dell'inverso del determinante per la matrice dei complementi algebrici degli elementi speculari ($a_{i,\,j} = \Delta_{j,\,i}$):

Per brevità è stata usata la scrittura alternativa $|A|$ per indicare $\det(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{2,1} & \Delta_{3,1} \\ \Delta_{1,2} & \Delta_{2,2} & \Delta_{3,2} \\ \Delta_{1,3} & \Delta_{2,3} & \Delta_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} -2 & (-1) - 7 & -1 \\ (-1)\,11 & 7 & (-1) - 5 \\ 8 & (-1)\,7 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -2 & 7 & -1 \\ -11 & 7 & 5 \\ 8 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

□

Seguono ora alcune osservazioni sulle proprietà delle matrici inverse:

Osservazione A.3. Per l'operazione di inverso sulle matrici sono dimostrate le seguenti proprietà:

- l'inversa di una matrice inversa è la matrice non invertita $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
- l'inverso del prodotto di uno scalare per una matrice è il prodotto del suo inverso per la matrice inversa $(\alpha \cdot A)^{-1} = {}^{1}/_{\alpha} \cdot A^{-1}$;
- l'inverso del prodotto di due matrici è uguale al prodotto delle inverse scambiate di posto $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Osservazione A.4. Sia A una matrice diagonale del tipo $\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$, allora la sua inversa è ancora una matrice diagonale nella forma

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{bmatrix}$$

Si verifica inoltre che, se una matrice è invertibile, risulta che $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

A.2. Autovalori e autovettori

Definizione A.9. Un numero $\lambda \in \mathbb{C}$ è un *autovalore* per una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se vale la seguente:

$$\exists v \in \mathbb{C}^n \;:\; A \cdot v = \lambda \cdot v$$

che può essere riscritta come $(\lambda I - A) \cdot v = 0$ per $v \neq 0$; questo si verifica se e solo se

Polinomio caratteristico

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{A.2.1}$$

Il (A.2.1), che indichiamo come $\phi(\lambda) = 0$, ha per soluzioni $\lambda_i \in \mathbb{C}$ le quali sono gli autovalori della matrice A.

La molteplicità degli autovalori è minore o uguale all'ordine della matrice A ($i \in 1 \ldots n$); chiamiamo il numero di autovalori distinti $\mu_n \in 1 \ldots n$.

Definizione A.10. La *molteplicità algebrica* di un autovalore λ_i è il numero di volte che esso compare tra gli autovalori di una matrice, e si indica con n_i; possiamo scrivere le soluzioni di (A.2.1) rispetto alla molteplicità algebrica:

$$\phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{\mu_n} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

Si verifica che il numero μ_n di autovalori distinti deve corrispondere al rango della matrice.

Definizione A.11. Un *autovettore* v_i associato all'autovalore λ_i è tale per cui (applicando la Definizione A.9) valga $(\lambda_i I - A)\, v_i = 0$ posto che $v_i \neq 0$. Gli autovettori associati a un autovalore sono infiniti.

▶ *Esercizio: autovettori di matrice* 2×2

ESERCIZIO A.3. Calcolare gli autovalori e un autovettore per ciascuno di essi, per la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE A.3. Per cominciare calcoliamo (A.2.1) in generale (rispetto a λ):

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 5) + 6 = \lambda^2 - 6\lambda + 11$$

Le soluzioni del determinante (polinomio caratteristico) sono le complesse coniugate $\lambda_i = 3 \pm j\sqrt{2}$ (con j l'unità immaginaria, tale che $j^2 = -1$); calcoliamo gli autovettori associati a entrambi gli autovalori:

(1) Autovettore v_1 associato a $\lambda_1 = 3 + j\sqrt{2}$:
deve valere $\det(\lambda_1 I - A)\, v_1 = 0$ ovvero $\begin{bmatrix} 3 + j\sqrt{2} - 1 & -3 \\ 2 & 3 + j\sqrt{2} - 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{bmatrix} = 0$; dal prodotto righe per colonne si ottiene l'equazione $\left(2 - j\sqrt{2}\right) v_{1,1} - 3v_{2,1} = 0$. Essa può essere risolta scegliendo una condizione per una delle due componenti del vettore; imponiamo $v_{1,1} = 3$: si ottiene $v_{2,1} = 2 + j\sqrt{2}$ e quindi il vettore v_1 avrà le componenti $\boxed{\left(3,\ 2 + j\sqrt{2}\right)}$

(2) Autovettore v_2 associato a $\lambda_2 = 3 - j\sqrt{2}$:
essendo gli autovalori complessi coniugati e la matrice di ordine 2, possiamo assumere che il secondo autovettore abbia la seconda componente complessa coniugata rispetto al primo $\boxed{\left(3,\ 2 - j\sqrt{2}\right)}$ □

▶ *Esercizio: autovettori di matrice* 2×2

ESERCIZIO A.4. Calcolare autovalori e autovettori della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Sol. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, v_1 = (-1,2), v_2 = (1,2)$

OSSERVAZIONE A.5. Se scriviamo il determinante (Definizione A.5) in termini di autovalori (Definizione A.10) segue che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{\mu_n} (\lambda_i)^{n_i}$$

Per annullare la produttoria deve esistere almeno un $\lambda_i = 0$, per cui una matrice con determinante nullo (singolare) ha almeno un autovalore nullo.

OSSERVAZIONE A.6. Sia A una matrice triangolare (ha solo elementi nulli al di sotto o al di sopra della diagonale principale); allora gli autovalori di A sono esattamente gli elementi sulla diagonale principale ($\lambda_i = a_{i,i}$).

OSSERVAZIONE A.7. Se λ_i è un autovalore di una matrice A allora λ_i^{-1} è un autovalore di A^{-1} (posto che A sia invertibile).

OSSERVAZIONE A.8. la *traccia* della matrice A (la somma degli elementi sulla diagonale principale) è anche pari alla somma dei suoi autovalori (contati con le rispettive molteplicità algebriche):

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\,i} = \sum_{i=1}^{n} n_i \lambda_i$$

Definiamo ora alcune proprietà degli autovettori.

DEFINIZIONE A.12. Un autovettore v_i si chiama *autospazio* per il suo autovalore associato λ_i; la dimensione di tale autospazio è indicata con $g_i \in [1, n_i]$ e si chiama *molteplicità geometrica*, relativa a λ_i. Essa si calcola come $g_i = n - \mathrm{rango}\,(\lambda_i I - A)$

Per autovalori tutti distinti la loro molteplicità geometrica sarà in ogni caso 1.

ESERCIZIO A.5. Calcolare la molteplicità geometrica degli autovalori della seguente matrice:

▶ *Esercizio: molteplicità geometrica di autovalori di matrice* 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE A.4. Partiamo cercando gli autovalori di A tramite il (A.2.1):

$$\det\,(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - 1\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\,(\lambda\,(\lambda - 1)) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 1\right) = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)\,(\lambda - 1)$$

Il gli autovalori risultano essere $\lambda_1 = 1$ con $n_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$ con $n_2 = 1$; calcoliamo quindi la molteplicità geometrica per entrambi gli autovalori:

(1) Per il primo autovalore applichiamo la Definizione A.12:

$$g_1 = 3 - \mathrm{rango}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 - 1 = 2$$

ricordando che per la Definizione A.7 il rango è il numero massimo di righe o colonne linearmente indipendenti; nel caso di A sono al più 1, essendo l'ultima riga e l'ultima colonna costituite da zeri (quindi combinazione lineare di una delle altre righe o colonne per 0) mentre le prima due righe e colonne sono l'una l'opposto dell'altra (quindi combinazione lineare di una delle due per -1).

(2) Per il secondo autovalore, che ha molteplicità algebrica 1, la molteplicità geometrica vale $g_2 = 1$.

In conclusione, abbiamo trovato $g_1 = 1$, $g_2 = 1$ □

A.3. Similitudine e diagonalizzabilità

La seguente definizione realizza una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) tra due matrici:

DEFINIZIONE A.13. Siano A e B matrici quadrate dello stesso ordine; A è detta *simile* a B se esiste una matrice non singolare T tale che $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$.

La matrice di trasformazione T^{-1} ha per colonne autovettori della matrice A: $T^{-1} = [v_1, v_2, \dots, v_{\mu_n}]$ con v_i associato a λ_i per A; ogni v_i inoltre ha un numero di colonne pari alla molteplicità algebrica n_i del λ_i associato.

TEOREMA A.3. *Due matrici simili possiedono lo stesso polinomio caratteristico, quindi gli stessi autovalori.*

DEFINIZIONE A.14. Una matrice si dice *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale, ovvero A è diagonalizzabile se

$$\exists T_{\mathrm{D}} \, : \, A_{\mathrm{D}} = T_{\mathrm{D}} A T_{\mathrm{D}}^{-1}$$

dove A_{D} è una matrice diagonale con gli stessi autovalori di A.

OSSERVAZIONE A.9. Si osserva allora che una matrice A è diagonalizzabile se e solo se ha autovalori tutti distinti (la molteplicità algebrica e geometrica dei suoi autovalori coincidono) $\forall i \in 1 \dots n \, (n_i = g_i)$.

► *Esercizio: diagonalizzabilità di matrice* 3×3

ESERCIZIO A.6. Ottenere se la seguente matrice è diagonalizzabile, e in tal caso ottenere la matrice di trasformazione:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE A.5. Per sapere se A sia diagonalizzabile dobbiamo riuscire a ottenere una matrice invertibile T_{D} che renda A simile a una matrice diagonale; cominciamo quindi usando l'Osservazione A.9 e cerchiamo gli autovalori di A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

La precedente è una matrice triangolare, dunque il determinante si ottiene come prodotto degli elementi sulla diagonale principale; otteniamo $\lambda_1 = 1$ con $n_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2$ con $n_2 = 1$.

Abbiamo che la $n_2 = 1 = g_2$, rimane da controllare che $g_1 = n_1 = 2$; usando la definizione scriviamo

$$g_1 = 3 - \operatorname{rango}(\lambda_1 I - A) = 3 - \operatorname{rango}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 3 - 1 = \boxed{2}$$

Possiamo affermare che A è diagonalizzabile, quindi troviamo la matrice di trasformazione T_{D} cercando gli autospazi associati agli autovalori:

(1) Per $\lambda_1 = 1$ abbiamo $(I - A) v_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \\ v_{3,1} & v_{3,2} \end{bmatrix} = 0$$

Imponendo $v_{3,1} = 0$ possiamo scegliere $v_{1,1} = 0$ e $v_{2,1} \neq 0$ per ottenere due autovettori linearmente indipendenti:

$$v_1 = (1, 0, 0) \, , \, (0, 1, 0)$$

(2) Per $\lambda_2 = 2$ abbiamo $(2I - A)\, v_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{1,1} = v_{3,1} & \text{(1°riga}\times v_2) \\ v_{2,1} = 0 & \text{(2°riga}\times v_2) \end{cases}$$

Una possibile scelta per il secondo autospazio è $v_2 = (1, 0, 1)$.

Infine, scriviamo la matrice di trasformazione inversa, le cui righe sono gli autospazi trovati:

$$T_{\mathrm{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T_{\mathrm{D}} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e grazie ad essa otteniamo la matrice diagonale A_{D} simile ad A:

$$A_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

che è proprio la matrice diagonale cercata, con gli autovalori di A sulla diagonale principale. □

► *Esercizio: matrice diagonale simile a matrice* 2×2

Esercizio A.7. Trova (se esiste) la matrice diagonale simile alla seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Sol. A_{D}=[[3+$j\sqrt{2}$,0], [0,3−$j\sqrt{2}$]]

Anche se una matrice non è diagonalizzabile (non vale la Definizione A.9), è possibile metterla comunque in una forma il più simile possibile a una matrice diagonale:

Definizione A.15. Una matrice A che non sia diagonalizzabile può comunque essere scritta in una forma diagonale a blocchi, chiamata *forma di Jordan*.

Si prendono tutti gli autovalori di A tali che $g_i < n_i$ e si trovano gli *autovettori generalizzati* associati ai λ_i nel modo seguente:

Autovettori generalizzati

$$\begin{aligned} v_{i,\,1} &:= (\lambda_i I - A)\, v_{i,\,1} = 0 \\ v_{i,\,2} &:= (A - \lambda_i I)\, v_{i,\,2} = v_{i,\,1} \\ &\vdots \\ v_{i,\,\mu_n} &:= (A - \lambda_i I)\, v_{i,\,\mu_n} = v_{i,\,\mu_n - 1} \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

La matrice di trasformazione si otterrà come $T_{\mathrm{J}}^{-1} = [v_{i,1},\, v_{i,2},\, \dots v_{i,\,\mu_n}]$ in cui le colonne sono costituite dagli autovettori generalizzati.

La matrice A in forma di Jordan si scrive come

Forma di Jordan

$$A_{\mathrm{J}} = T_{\mathrm{J}} \cdot A \cdot T_{\mathrm{J}}^{-1} \tag{A.3.2}$$

$$A_{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

Figura A.3.1. Esempio di matrice in forma di Jordan, per $n_1 = 2$, $g_1 = 1$ e $n_2 = g_2 = 1$

La matrice in forma di Jordan ha una struttura diagonale a blocchi, ognuno dei quali è sulla diagonale principale e sono tanti quanti gli autovalori distinti; ciascun blocco ha dimensione pari alla molteplicità algebrica dell'autovalore relativo, e ogni coefficiente sulla diagonale del blocco è l'autovalore a cui appartiene il blocco.

Nei blocchi di ordine maggiore di uno (hanno ordine n_i, relativi ad autovalori con $n_i > 1$) sono presenti gli autovalori λ_i sulla diagonale principale, e tutti gli elementi della sopra-diagonale sono pari a 1;

L'esponenziale di una matrice in forma di Jordan è costituito dall'esponenziale di ogni blocco di Jordan di ordine uno, mentre per i blocchi di ordine maggiore i coefficienti al di sopra della diagonale (quelli sulla diagonale sono l'esponenziale dei coefficienti sulla diagonale) sono pari al termine $t^h/h!$ con $h = i - j$ la distanza dell'elemento $a'_{\mathrm{J},i,j}$ da quello sulla diagonale $a'_{\mathrm{J},i,i}$ all'interno della stessa riga:

$$e^{A_{\mathrm{J}}t} = e^{\lambda_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & te^{\lambda_1} & {}^{t^2}\!/_2 e^{\lambda_1} \\ 0 & e^{\lambda_1} & te^{\lambda_1} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1} \end{bmatrix}$$

dove A_{J} è una matrice in forma di Jordan con un unico blocco di Jordan relativo a un autovalore λ_1 con $n_i = 3$.

► *Esercizio: matrice* 3×3 *in forma di Jordan*

Esercizio A.8. Trova la matrice in forma di Jordan simile alla seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Sol. A_{J}=[[−2,1,0], [0,2,0], [0,0,4]]

A.4. Esponenziali di matrici

Possiamo definire la funzione esponenziale di una matrice A rispetto a una variabile t come:

Definizione A.16. Un *esponenziale di matrice* è una funzione del tipo $e^{A\cdot t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (A \cdot t)^i = I + A \cdot t + \frac{1}{2} (A \cdot t)^2 + \dots$

Se abbiamo una matrice diagonale $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ allora il suo esponenziale vale $e^{A\cdot t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$, dove si ha l'esponenziale scalare $e^{\lambda t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (\lambda t)^i$.

Se abbiamo una matrice in forma di Jordan, per i blocchi di Jordan con ordine maggiore di 1 vale $A_{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \to e^{A_{\mathrm{J}}\cdot t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$; da un blocco di Jordan 2×2 compare un termine lineare, per dimensione n maggiore compariranno termini di grado $n - 1$.

Osservazione A.10. Siano A e B due matrici simili ($B = T \cdot A \cdot T^{-1}$), allora vale $e^{B\cdot t} = T \cdot e^{A\cdot t} \cdot T^{-1}$; questo si verifica applicando la Definizione A.16.

Osservazione A.11. Sia A una matrice diagonale o in forma di Jordan, allora si ha che $A \cdot e^{A\cdot t} = e^{A\cdot t} \cdot A$; dato che A è diagonale, anche la sua esponenziale sarà una matrice diagonale e il prodotto di due matrici diagonali è commutativo.

Dalla Osservazione A.10 otteniamo che questa uguaglianza vale in generale per una matrice A qualsiasi; infatti $T_{\mathrm{D}}^{-1} \cdot A_{\mathrm{D}} \cdot T_{\mathrm{D}} \cdot T_{\mathrm{D}}^{-1} \cdot e^{A_{\mathrm{D}}\cdot t} \cdot T_{\mathrm{D}} = T_{\mathrm{D}}^{-1} \cdot A_{\mathrm{D}} \cdot e^{A_{\mathrm{D}}\cdot t} \cdot T_{\mathrm{D}} = A$.

Osservazione A.12. Sia A_{D} una matrice diagonale, allora la derivata nel tempo del suo esponenziale vale $\dfrac{\partial}{\partial t} e^{A_{\mathrm{D}} \cdot t} = A_{\mathrm{D}} \cdot e^{A_{\mathrm{D}} \cdot t}$; questo risultato proviene dalla derivata degli elementi sulla diagonale di una matrice esponenziale.
Si ottiene di nuovo che questa uguaglianza vale in generale, per qualsiasi matrice A.

A.5. Numeri nel campo complesso

Definizione A.17. Un numero complesso nella forma algebrica è scritto come $s = a + jb$, dove $a = \mathrm{Re}\,(s)$ è la parte reale e $b = \mathrm{Im}\,(s)$ la parte immaginaria; j è l'unità immaginaria tale che $j^2 = -1$.
Ogni numero complesso possiede un complesso coniugato, che ha la stessa parte reale e la parte immaginaria cambiata di segno ($\overline{s} = a - jb$).
I numero complessi ammettono anche la rappresentazione in forma trigonometrica (modulo e fase) sul piano di Gauss: $s = \rho\,(\cos(\phi) + j \sin(\phi))$, dove ρ è la distanza del numero dall'origine e ϕ è l'angolo che questa distanza forma con l'asse orizzontale.

Osservazione A.13. Per passare da una rappresentazione algebrica a una trigonometrica si usano le seguenti considerazioni:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \arg(s) \coloneqq \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & a > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & a < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & a = 0 \wedge b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & a = 0 \wedge b < 0 \end{cases}$$

Teorema A.4. *Consideriamo l'esponenziale di un numero complesso; scriveremo: $e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb}$. La formula di Eulero afferma che*

$$e^{jb} = \cos(b) + j \sin(b) \tag{A.5.1}$$

Formula di Eulero

La (A.5.1) è molto utile per eseguire il prodotto di numeri complessi, riconducendolo alle proprietà delle potenze.