JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 3.1

ZADÁNÍ: Najděte všechny body nespojitosti funkce f a určete jejich typ: $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{\beta - x^2}}$

ŘEŠENÍ: $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{4-x^2}}$

$$1-e^{4-x^2} \neq 0$$
$$1 \neq e^{4-x^2}$$
$$\ln 1 \neq (4-x^2)\cdot \ln e$$
$$0 \neq (4-x^2)\cdot 1$$
$$0 \neq 4-x^2$$
$$x^2 \neq 4 \quad / \sqrt{\cdot}$$
$$|x| \neq 2$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

funkce f je spojitá na D(f). Body nespojitosti jsou -2 a 2.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -2-} \frac{1}{1-e^{4-x^2}} = \text{"}\frac{1}{1-1^-}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0+}\text{"} = +\infty \\ &\lim_{x\to -2+} \frac{1}{1-e^{4-x^2}} = \text{"}\frac{1}{1-1^+}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0-}\text{"} = -\infty \end{aligned}\right\} \text{ -2 je nespojitost 2. druhu}$$

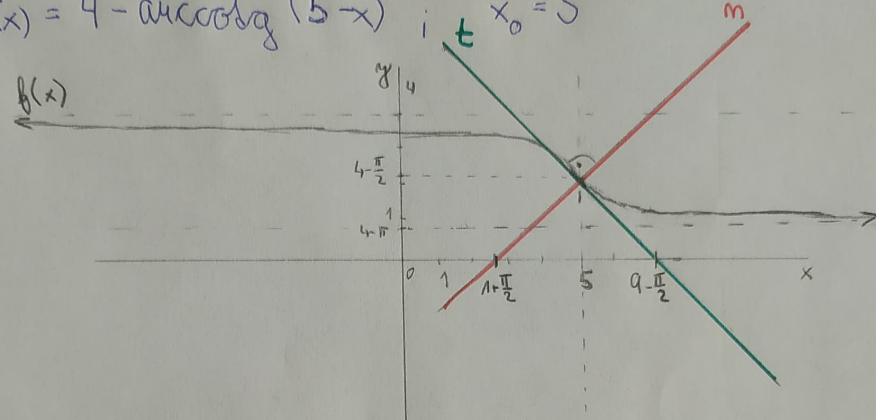
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2-} \frac{1}{1-e^{4-x^2}} = \text{"}\frac{1}{1-1^+}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0-}\text{"} = -\infty \\ &\lim_{x\to 2+} \frac{1}{1-e^{4-x^2}} = \text{"}\frac{1}{1-1^-}\text{"} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty \end{aligned}\right\} \text{ 2 je nespojitost 2. druhu}$$

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$, $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 3.2

ZADÁNÍ: Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě x_0. Do jednoho obrázku načrtněte graf funkce f, nalezenou normálu a tečnu. $f(x) = \beta - \operatorname{arccotg}(\alpha - x)$, $x_0 = \alpha$

ŘEŠENÍ: $f(x) = 4 - \operatorname{arccotg}(5 - x)$; $x_0 = 5$



$$f(x)' = \frac{1}{1+(5-x)^2} \cdot [5-x]' = -\frac{1}{1+(5-x)^2} \qquad f'(5) = -1$$

tečna t:
$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = -1 \cdot (x - 5) + 4 - \frac{\pi}{2}$$
$$\underline{\underline{y = -x + 9 - \frac{\pi}{2}}}$$

normála n:
$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = 1 \cdot (x - 5) + 4 - \frac{\pi}{2}$$
$$\underline{\underline{y = x - 1 - \frac{\pi}{2}}}$$

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha=5$, $\beta=4$

ČÍSLO ÚLOHY: 3.3.

ZADÁNÍ: Určete obor hodnot $H(f)$ funkce f.

$$f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{\alpha}{\beta-x^2}$$

ŘEŠENÍ: $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{5}{4-x^2}$

$4-x^2\neq 0$

$4 \neq x^2 \quad /\sqrt{\ }$

$x\neq \pm 2$

$D(f)=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

f je spojitá na $D(f)$, body nespojitosti jsou -2 a 2.

$$\lim_{x\to -2-}\operatorname{arcctg}\frac{5}{4-x^2}=-\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to -2+}\operatorname{arcctg}\frac{5}{4-x^2}=\frac{2}{\pi}$$

bod nespojitosti I. druhu se skokem $\frac{4}{\pi}$

$$\lim_{x\to 2-}\operatorname{arcctg}\frac{5}{4-x^2}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 2+}\operatorname{arcctg}\frac{5}{4-x^2}=-\frac{2}{\pi}$$

bod nespojitosti I. druhu se skokem $-\frac{4}{\pi}$

$$\lim_{x\to +\infty}\operatorname{arcctg}\frac{5}{4-x^2}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\operatorname{arcctg}\frac{5}{4-x^2}=\operatorname{arcctg}\frac{5}{4}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\operatorname{arcctg}\frac{5}{4-x^2}=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{5}{4-x^2}\right)}\cdot\left[\frac{5}{4-x^2}\right]'=\frac{1}{1+\frac{25}{(4-x^2)^2}}\cdot\frac{10x}{(4-x^2)^2}=\frac{10x}{x^4-8x^2+41}$$

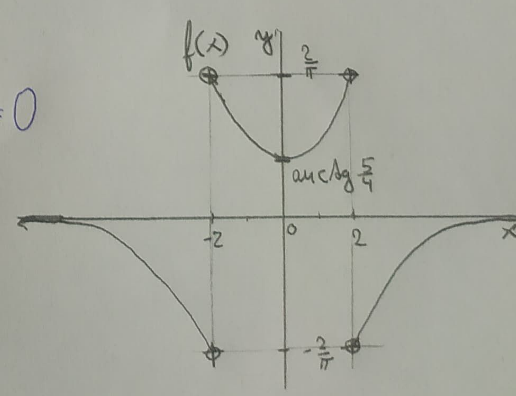
$f'(x)=0$

$\frac{10x}{x^4-8x^2+41}=0 \quad /\cdot(x^4-8x^2+41)$

$10x=0 \quad /:10$

$x=0 \quad \Rightarrow$ Stacionární bod $f'(x)=0$

x	$(-\infty;-2)$	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	↘	↘	OSTRÉ LOK. MINIMUM	↗	↗



$$H(f)=\left(-\frac{2}{\pi};0\right\rangle\cup\left\langle\operatorname{arcctg}\frac{5}{4};\frac{2}{\pi}\right)$$

JMÉNO A PŘIJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 3.4

ZADÁNÍ: Vypočítejte $\int \frac{\alpha^{x-1} + (\alpha+\beta)^{x-2}}{2^x}\,dx$

ŘEŠENÍ: $\int \frac{5^{x-1} + 9^{x-2}}{2^x}\,dx = \int \frac{5^{x-1}}{2^x}\,dx + \int \frac{9^{x-2}}{2^x}\,dx =$

$= \frac{1}{5}\int \frac{5^x}{2^x}\,dx + \frac{1}{81}\int \frac{9^x}{2^x}\,dx = \frac{1}{5}\int \left(\frac{5}{2}\right)^x dx + \frac{1}{81}\int \left(\frac{9}{2}\right)^x dx =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^x}{\log \frac{5}{2}} + \frac{1}{81} \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^x}{\log \frac{9}{2}} + C =$

$= \frac{1}{405} \cdot 2^{-x}\left(\frac{81 \cdot 5^x}{\log \frac{5}{2}} + \frac{5 \cdot 9^x}{\log \frac{9}{2}}\right) + C\,;\ C \in \mathbb{R}$

JMÉNO A PŘIJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5,\ \beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 3.5.

ZADÁNÍ: Vypočítejte: $\int \frac{x^2 - \beta \cdot x - \alpha \cdot \beta}{x^3 + \alpha \cdot x^2} dx$

ŘEŠENÍ: $\int \frac{x^2 - 4x - 20}{x^3 + 5x^2} dx$

- Rozložím racionální funkci na parciální zlomky

$x^3 + 5x^2 = x^2(x+5)$

$$\frac{x^2 - 4x - 20}{x^2(x+5)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x+5)} \quad / \cdot x^2(x+5)$$

$$x^2 - 4x - 20 = A(x+5) + B(x^2 + 5x) + Cx^2$$

$$x^2 - 4x - 20 = (B+C)x^2 + (A+5B)x + 5A$$

$x^2: 1 = B + C \quad \Rightarrow C = 1$

$x^1: -4 = A + 5B \quad \Rightarrow B = -4 - A = 0$

$x^0: -20 = 5A \quad \Rightarrow A = -4$

$$R(x) = \frac{-4}{x^2} + \frac{1}{x+5}$$

$$\int \frac{x^2 - 4x - 20}{x^3 + 5x^2} dx = \int \frac{1}{x+5} dx - 4 \int \frac{1}{x^2} dx =$$

Pomocné výpočty:

$$\int \frac{1}{x+5} dx = \left| \begin{array}{l} y = x+5 \\ \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{y} dy = \ln y + C =$$

$$= \ln|x+5| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$= \underline{\underline{\ln|x+5| + \frac{4}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}}}$$