JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 1.1

ZADÁNÍ: Určete min A, max A, inf A a sup A množiny

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : |x+\alpha| < 2\beta\}$$

ŘEŠENÍ: $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x+5| < 8\}$

- Nejdříve musím vyřešit absolutní hodnotu.

$$|x+5| \begin{cases} (x+5) \geq 0 & ① \\ (x+5) < 0 & ② \end{cases}$$

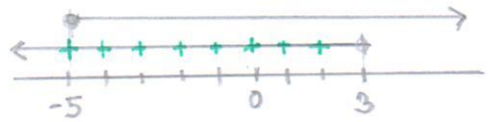
- musím zjistit kdy se $(x+5) = 0$

$$x + 5 = 0$$
$$\underline{x = -5}$$

- zjistil jsem, že při $x = -5$ je $(x+5) = 0$, tedy pro $(-\infty; -5)$ je záporné a pro $(-5; +\infty)$ je kladné.

① Výpočet pro $|x+5|$ je kladná nebo nula (nemění se znaménko)

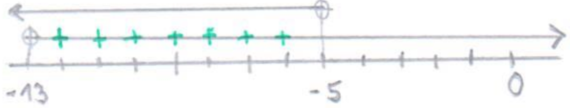
$$x \in \langle -5; +\infty) \quad \wedge \quad (x+5) < 8$$
$$x < 8-5$$
$$\underline{x < 3}$$



$$A_1 = \{-5; -4; \dots; 1; 2\} = \{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x < 3\}$$

② Výpočet pro $|x+5|$ je záporné (mění se znaménko)

$$x \in (-\infty; -5) \quad \wedge \quad -(x+5) < 8$$
$$-x < 8+5$$
$$-x < 13 \quad / \cdot (-1)$$
$$\underline{x > -13}$$



$$A_2 = \{-12; -11; \dots; -7; -6\} = \{x \in \mathbb{Z} : -13 < x < -5\}$$

$$A = A_1 \cup A_2 = \{-12; -11; \dots; 1; 2\} = \{x \in \mathbb{Z} : -13 < x < 3\}$$

- Když známe všechny prvky množiny a můžeme vypsat min. a max.

$\underline{\min A = \inf A = -12}$ $\underline{\max A = \sup A = 2}$

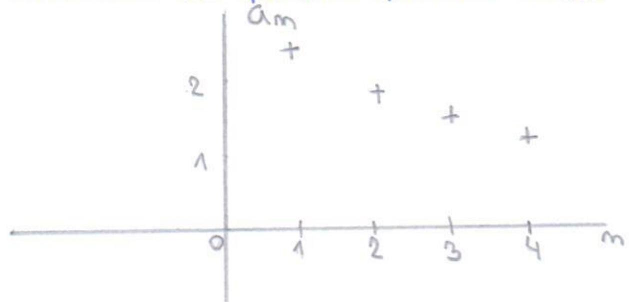
JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 1.2

ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená a své tvrzení zdůvodněte: $a_n = \dfrac{\alpha n + 2}{\beta n - 1}$

ŘEŠENÍ: $a_n = \dfrac{5n+2}{4n-1}$

- Zkusím si posloupnost (a_n) načrtnout



$a_1 = \dfrac{5 \cdot 1 + 2}{4 \cdot 1 - 1} = \dfrac{7}{3}$

$a_2 = \dfrac{5 \cdot 2 + 2}{4 \cdot 2 - 1} = \dfrac{12}{7}$

$a_3 = \dfrac{17}{11}$

$a_4 = \dfrac{22}{15}$

- Zkusíme vyšetřit zda je posloupnost (a_n) monotónní

Zdá se, že posloupnost (a_n) je ostře klesající

Ověření: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_{n+1} < a_n$

$$\frac{5(n+1)+2}{4(n+1)-1} < \frac{5n+2}{4n-1}$$

$$\frac{5n+7}{4n+3} < \frac{5n+2}{4n-1} \quad / \cdot (4n-1)(4n+3)$$

$$\cancel{20n^2} - 5n + 28n - 7 < \cancel{20n^2} + 15n + 8n + 6$$

$$23n - 7 < 23n + 6$$

$\underline{0 < 13}$ ← Pravda, ověřeno že (a_n) je ostře klesající.

Posloupnost (a_n) je ostře klesající, tedy je omezená shora.

$h = a_1 = \dfrac{7}{3}$

Zdá se, že (a_n) je omezená shora číslem $h = \dfrac{7}{3}$

Ověření: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{5n+2}{4n-1} \leq \dfrac{7}{3} \quad / \cdot (4n-1) \cdot 3$

$$15n + 6 \leq 28n - 7$$

$$13 \leq 13n \quad / : 13$$

$\underline{1 \leq n}$ ← pravda

Posloupnost (a_n) je omezená shora $h = \dfrac{7}{3}$.

Zdá se, že (a_n) je omezená zdola číslem $d=0$

Ověření: $\forall n \in N$: $\frac{5n+2}{4n-1} \geq 0 \quad / \cdot (4n-1)$

$$5n+2 \geq 0$$

$$5n \geq -2 \quad / :5$$

$$n \geq -\frac{2}{5} \Rightarrow \text{pravda}$$

Posloupnost (a_n) je omezená zdola $d=0$.

(a_n) je omezená $\Leftrightarrow \exists d, h \in R; \forall n \in N: d \leq a_n \leq h$

$$0 \leq a_n \leq \frac{7}{3}$$

Odpověď: Posloupnost (a_n) je omezená, protože je omezená shora $h=\frac{7}{3}$ a zároveň je omezená zdola $d=0$.

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

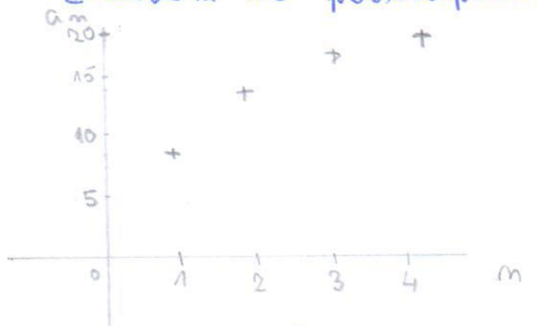
ČÍSLO ÚLOHY: 1.3

ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní a své rozhodnutí zdůvodněte:

$$a_n = -n^2 + (\alpha + \beta)n$$

ŘEŠENÍ: $a_n = -n^2 + 9n$

- Zkusím si posloupnost (a_n) načrtnout



$a_1 = -1^2 + 9.1 = 8$

$a_2 = -2^2 + 9.2 = 14$

$a_3 = 18$

$a_4 = 20$

Zdá se, že (a_n) je rostoucí

Ověření: $\forall n \in N$

$$a_n < a_{n+10}$$

$$-n^2 + 9n < -(n+10)^2 + 9(n+10)$$

$$\cancel{-n^2} + \cancel{9n} < \cancel{-n^2} - 100 + \cancel{9n} + 90$$

$$0 < -100 + 90$$

$$0 < -10 \leftarrow \text{nepravda}$$

Zjistili jsme, že posloupnost (a_n) není rostoucí. Na náčrtku můžeme vidět, že posloupnost (a_n) není klesající.

Posloupnost (a_n) není rostoucí ani klesající, $\Rightarrow$ není monotónní!

- Kdyby jsme si dopočítali člen $a_5 = 20$ a $a_6 = 18$, zjistili bychom, že posloupnost (a_n) není monotónní dříve.

ODPOVĚĎ: Posloupnost (a_n) není monotónní.

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 1.4

ZADÁNÍ: Uveďte příklad posloupnosti (napište předpis pro n-tý člen a načrtněte graf), pro kterou platí

$$\inf(a_n) = -\alpha \wedge (a_n) \text{ je ostře rostoucí} \wedge \sup(a_n) = \beta$$

ŘEŠENÍ: $\inf(a_n) = -5 \wedge (a_n)$ je ostře rostoucí $\wedge \sup(a_n) = 4$

- tzj. (a_n) je omezená shora i zdola a je monotónní

Vymyslím si posloupnost (a_n):

$$\begin{cases} a_n = -5 & \text{pro } n = 1 \\ a_n = 4 - \frac{1}{n} & \text{pro } n \geq 2 \end{cases}$$

Ověřím, že posloupnost (a_n) je ostře rostoucí:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n < a_{n+1}$$

$$4 - \frac{1}{n} < 4 - \frac{1}{n+1} \quad / \cdot n(n+1)$$

$$4n(n+1) - (n+1) < 4n(n+1) - n$$

$$\cancel{4n^2} + 4n - (n+1) < \cancel{4n^2} + 4n - n$$

$$-n - 1 < -n$$

$$\underline{-1 < 0} \leftarrow \text{Pravda}$$

Potvrdilo se, že (a_n) je ostře rostoucí

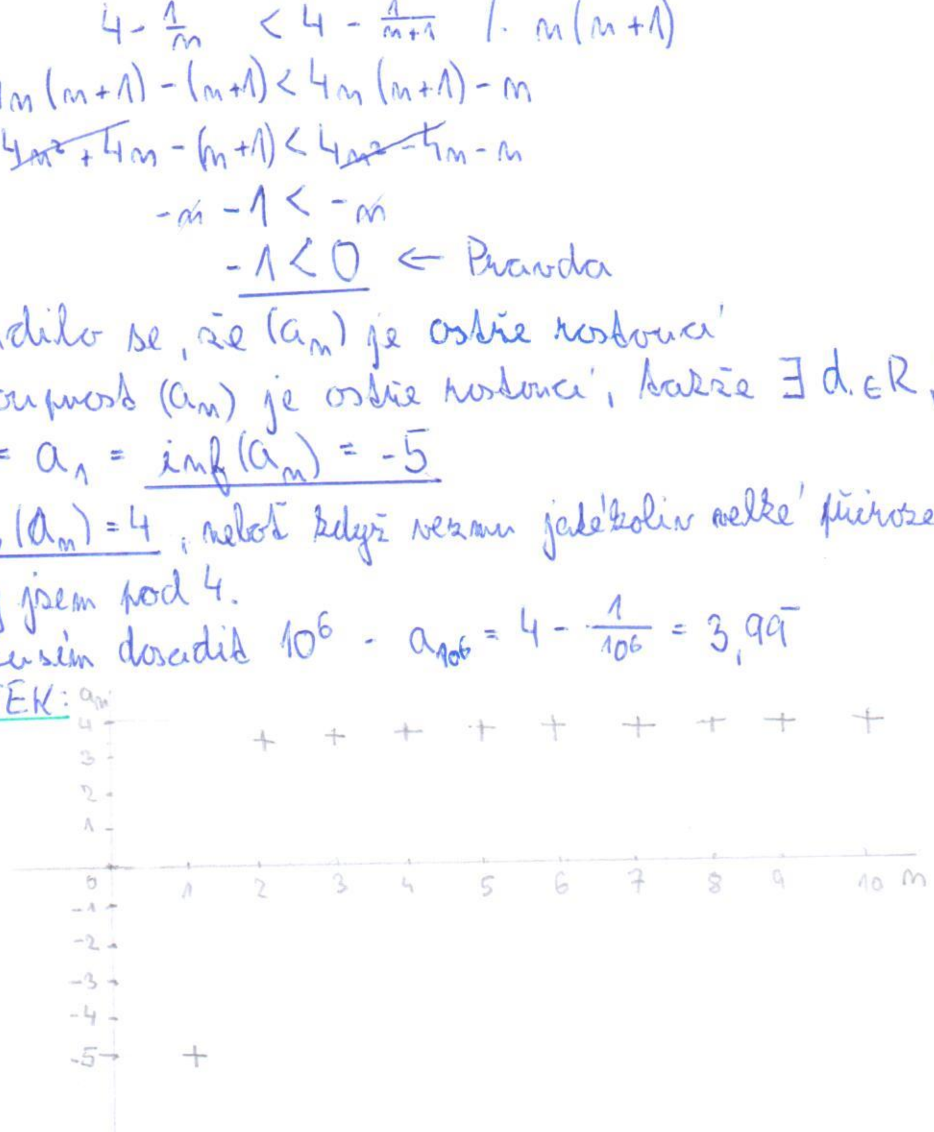
Posloupnost (a_n) je ostře rostoucí, takže $\exists d \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: d \leq a_n$

$$d = a_1 = \underline{\inf(a_n) = -5}$$

$\underline{\sup(a_n) = 4}$, neboť když vezmu jakékoliv velké přirozené číslo, vždy jsem pod 4.

PŘ: Zkusím dosadit 10^6. $a_{10^6} = 4 - \frac{1}{10^6} = 3{,}9\overline{9}$

NÁČRTEK:



JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 1.5

ZADÁNÍ: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^{\alpha} + \beta n + 3}{3n^{\beta} + \alpha n + 2}$$

ŘEŠENÍ: Zkusíme limitu vypočítat pomocí algebry limit

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^5 + 4n + 3}{3n^4 + 5n + 2} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} = \frac{n^5}{n^4} \cdot \frac{2 + \frac{4}{n^4} + \frac{3}{n^5}}{3 + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}}$$

neurčitý výraz

- Vyšel nám neurčitý výraz, a tak jsem vytkl nejrychleji rostoucí člen. Nyní znovu zkusíme vypočítat limitu pomocí algebry limit.

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{n^5}{n^4}}_{n = +\infty} \cdot \frac{2 + \overbrace{\frac{4}{n^4}}^{0} + \overbrace{\frac{3}{n^5}}^{0}}{3 + \underbrace{\frac{5}{n^3}}_{0} + \underbrace{\frac{2}{n^4}}_{0}} = \text{"}+\infty \cdot \frac{2}{3}\text{"} = \underline{\underline{+\infty}}$$

ODPOVĚĎ: $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^5 + 4n + 3}{3n^4 + 5n + 2}$ diverguje k $+\infty$.