JMÉNO A PŘIJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$ $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 2.1

ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda má řada konečný součet:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cdot n^5}{(\alpha+1)^n}$$

ŘEŠENÍ: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n \cdot n^5}{(5+1)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{5^n \cdot n^5}{6^n} > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n \cdot n^5}{6^n} = \text{"}\left|\frac{+\infty}{+\infty}\right|\text{"} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{5^n}{6^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{n^5}{1}}_{\to +\infty} = \left|\text{"}0 \cdot +\infty\text{"}\right| =$$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot n^5 = 0$, n^5 roste pomaleji, $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ má větší vliv.

$\left(n^5 \ll \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

- nutná podmínka konvergence je splněna

- Použiji limitní podílové kritérium

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1} \cdot n^5}{(5+1)^{n+1}} \cdot \frac{(5+1)^n}{5^n \cdot n^5} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{5^n} \cdot 5 \cdot \cancel{n^5}}{\cancel{6^n} \cdot 6} \cdot \frac{\cancel{6^n}}{\cancel{5^n} \cdot \cancel{n^5}} = \underline{\underline{\frac{5}{6} < 1}} \Leftarrow \text{konvergentní}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní a má konečný součet.

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha=5;\ \beta=4$

ČÍSLO ÚLOHY: 2.2

ZADÁNÍ: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \beta^{-n} \cdot n^{-n^2} \cdot (1+n)^{n^2}$

ŘEŠENÍ: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 4^{-n} \cdot n^{-n^2} \cdot (1+n)^{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = 4^{-n} \cdot n^{-n^2} \cdot (1+n)^{n^2} > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 4^{-n} \cdot n^{-n^2} \cdot (1+n)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(-n \cdot \ln 4 - n \ln n^n + n \ln (1+n)^n\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \cdot \ln\left(\frac{(1+n)^n}{n^n \cdot 4}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \cdot \ln\left(\left(\frac{1+n}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \cdot \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e} \cdot \frac{1}{4}\right)^n = \text{"}\left|\left(\frac{e}{4}\right)^{+\infty}\right|\text{"} = \underline{0}$$

$\frac{e}{4} \in (0;1)$

nutná podmínka konvergence splněna

- Použiji limitní odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^{-n} \cdot n^{-n^2} \cdot (1+n)^{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(1+n)^{n^2}}{4^n \cdot n^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+n)^n}{4 \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n^n}{n^n}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1 + \underbrace{\ldots}_{0} + \underbrace{\frac{1}{n^n}}_{0}}{4}}_{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{4} < 1}}, \Leftarrow \text{konverguje}$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní a má konečný součet.

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$, $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 2.3

ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda má řada konečný součet:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n + (\alpha+\beta)^n}$$

ŘEŠENÍ: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n+9^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{5^n}{n+9^n} > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{n+9^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{9^n} \cdot \frac{1}{\frac{n}{9^n}+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{5}{9}\right)^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\frac{n}{9^n}}_{\to 0 \ (n \ll 9^n)}+1}}_{\to 1} = \underline{0} \leftarrow \text{nutná podmínka konvergence splněna}$$

- Použiji limitní podílové kritérium

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)+9^{n+1}} \cdot \frac{n+9^n}{5^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{5^n}\cdot 5}{(n+1)+9^n\cdot 9} \cdot \frac{n+9^n}{\cancel{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5(n+9^n)}{(n+1)+9^n\cdot 9} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5n+5\cdot 9^n}{(n+1)+9^n\cdot 9} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{9^n}{9^n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{5+\overbrace{\frac{5n}{9^n}}^{\to 0}}{9+\underbrace{\frac{n+1}{9^n}}_{\to 0}}}_{\to \frac{5}{9}} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}} < 1 \Rightarrow \text{konvergence}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní a má konečný součet.