JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$, $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 2.1

ZADÁNÍ: Uveďte příklad posloupnosti (a_n) (napište předpis pro n-tý člen a načrtněte graf), pro kterou platí:

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot|a_n| = \beta \;\wedge\; \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ je konvergentní}$$

ŘEŠENÍ: Vymyslím posloupnost (a_n): $a_n = \frac{(-1)^n\cdot 4}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Ověřím zda $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot|a_n| = 4$ ✓

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot\underbrace{\left|\frac{(-1)^n\cdot 4}{n}\right|}_{\text{vždy } \frac{4}{n}} = \lim \underbrace{\frac{n}{n}}_{1}\cdot 4 = \underline{\underline{4}}$$

Ověřím zda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní:

Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje, tak $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní též.

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot 4}{n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot 4\cdot\underbrace{|(-1)^n|}_{\text{vždy } 1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n} = \underline{0} \Leftarrow \text{nutná podmínka konvergence splněna}$$

- Použiji limitní srovnávací kritérium
- Zvolím $b_n = \frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\cdot\frac{n}{1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n}\cdot 4 = \underline{4} \in (0;+\infty)$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ je divergentní

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ diverguje, ale o $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ nevíme nic $\Rightarrow$ Liebnizovo kritérium

Liebnizovo kritérium: $c_n = |a_n|$

1) $\frac{4}{n} > 0$ ✓, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $c_{n+1} \leq c_n$ ✓

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n} = 0$ ✓

$$c_{n+1} \leq c_n$$
$$\frac{4}{n+1} \leq \frac{4}{n} \quad /\cdot(n+1)n$$
$$4n \leq 4n+4$$
$$\underline{0 \leq 4} ✓$$

$\overset{\text{Liebniz.}}{\underset{\text{krit.}}{\Longrightarrow}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní a má konečný součet.

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNIT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 2.2

ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda je řada konvergentní či divergentní.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n + \beta^n}{(\alpha+\beta)^n}$$

ŘEŠENÍ: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n + 4^n}{(4+5)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{5^n + 4^n}{9^n} > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n+4^n}{9^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{9^n} \cdot \frac{1+\frac{4^n}{5^n}}{1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{5}{9}\right)^n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1+\overbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^n}^{\to 0}}{1}}_{\to 1} = \underline{0}$$ $\Rightarrow$ nutná podmínka konvergence je splněna

$\Rightarrow$ Použiji limitní podílové kritérium

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}+4^{n+1}}{9^{n+1}} \cdot \frac{9^n}{5^n+4^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n \cdot 5 + 4^n \cdot 4}{\cancel{9^n} \cdot 9} \cdot \frac{\cancel{9^n}}{5^n+4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n \cdot 5 + 4^n \cdot 4}{9 \cdot 5^n + 9 \cdot 4^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{5^n}{5^n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{5 + \overbrace{\frac{4^n \cdot 4}{5^n}}^{\to 0}}{9 + \underbrace{\frac{9\cdot 4^n}{5^n}}_{\to 0}}}_{\to \frac{5}{9}} = \underline{\frac{5}{9} < 1}$$ $\Rightarrow a_n$ je konvergentní

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{9\cdot 4^n}{5^n} = \underbrace{\frac{4^n}{5^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{9}{1}}_{\to 9} = 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní a má konečný součet.

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5;\ \beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 2.3

ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda je řada konvergentní či divergentní

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \beta}{n^{\alpha} + n^{\beta}}$$

ŘEŠENÍ: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5 \cdot 4}{n^5 + n^4}$, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{20}{n^5 + n^4} > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{20}{n^5 + n^4} = \text{"} \frac{20}{+\infty} \text{"} = \underline{0}$$

nutná podmínka konvergence je splněna

- Použiji limitní srovnávací kritérium

- Zvolím $b_n = \frac{1}{n^5} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{20}{n^5 + n^4} \cdot \frac{n^5}{1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{20 n^5}{n^5 + n^4} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{n^5}{n^5}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{20}{1 + \underbrace{\frac{n^4}{n^5}}_{\to 0}}}_{\to 20} = \underline{20} \in (0; +\infty)$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$ je konvergentní

$\Rightarrow \underline{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ je konvergentní a má konečný součet}}$, protože $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ je konvergentní.

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5;\ \beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 2.4

ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda je řada konvergentní či divergentní.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha \cdot n + \beta}$$

ŘEŠENÍ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n+4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{5n+4}$$

n... liché .. $a_n > 0$

n... sudé .. $a_n < 0$

Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje také.

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{5n+4}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5n+4} \cdot \underbrace{\left|(-1)^{n+1}\right|}_{\text{vždy } 1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5n+4} = \underline{0}$$ nutná podmínka konvergence splněna

-Použiji limitní srovnávací kritérium

• Zvolím $b_n = \frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• $$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5n+4} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{5n+4} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{5+\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0}}}_{\to \frac{1}{5}} = \underline{\frac{1}{5}} \in (0, +\infty)$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní!

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverguje, ale o $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ nevíme nic $\rightarrow$ Liebnizovo krit.

Liebnizovo kritérium:

$c_n = |a_n|$

1, $\frac{1}{5n+4} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓

2, $c_{n+1} \leq c_n$ ✓

3, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5n+4} = 0$ ✓

$$c_{n+1} \leq c_n$$

$$\frac{1}{5(n+1)+4} \leq \frac{1}{5n+4} \quad /\cdot (5n+4)(5(n+1)+4)$$

$$5n+4 \leq 5(n+1)+4$$

$$5n+4 \leq 5n+5+4$$

$$\underline{0 \leq 5}$$

$\overset{\text{Liebnib.}}{\underset{\text{krit.}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje relativně a má konečný součet.

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 2.5

ZADÁNÍ: Mějme funkci f. Určete inverzní funkci f^{-1} a načrtněte grafy obou funkcí do jednoho obrázku.

$$f(x) = \sqrt{\alpha - x} - \beta$$

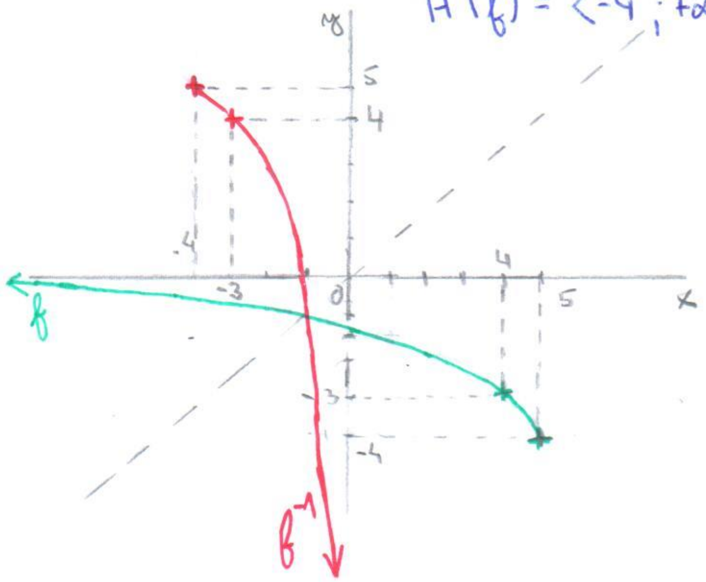
ŘEŠENÍ: $f(x) = \sqrt{5-x} - 4$

$5 - x \geq 0$

$-x \geq -5 \quad / \cdot (-1)$

$x \leq 5 \quad \Rightarrow D(f) = (-\infty; 5\rangle = H(f^{-1})$

$H(f) = \langle -4; +\infty) = D(f^{-1})$



f je ostře klesající na $(-\infty; 5\rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow$ f je prostá na $(-\infty; 5\rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists f^{-1}$

$f: \quad y = \sqrt{5-x} - 4$

$y + 4 = \sqrt{5-x} \quad / \cdot (\cdot)^2$

$(y+4)^2 = 5 - x$

$x = 5 - (y+4)^2$

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}&: y = 5 - (y+4)^2 \\ D(f) &= \langle -4; +\infty) \end{aligned}}$$