JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 1.1

ZADÁNÍ: Rozložte racionální funkci R na parciální zlomky: $R(x) = \dfrac{2x^2 + (\beta - 12)\cdot x + 18 + \alpha - 3\cdot\beta}{x^2 - 6x + 9}$

ŘEŠENÍ: $R(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 6x + 9}$

- Ryzí racionální funkce, tedy podíl polynomů $\frac{p(x)}{q(x)}$ takový, že $st(p) < st(q)$.
- Náš podíl polynomů je $st(p) = st(q)$, musíme tedy dělit polynom polynomem, aby jsme dostali $\boxed{st(p) < st(q)}$.

$$(2x^2 - 8x + 11) : (x^2 - 6x + 9) = 2 + \frac{4x - 7}{x^2 - 6x + 9}$$
$$\begin{array}{l} -2x^2 + 12x - 18 \\ \hline \qquad 4x - 7 \end{array}$$

- Musíme $q(x)$ rozložit na kořenové činitele

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3) = (x-3)^2$$

- Rozklad na parciální zlomky

$$\frac{4x - 7}{(x-3)^2} = \frac{A}{(x-3)^2} + \frac{B}{(x-3)} \quad /\cdot (x-3)^2$$
$$4x - 7 = A + Bx - 3B$$

$$x^1: \quad 4 = B \quad \Rightarrow B = 4$$
$$x^0: \quad -7 = A - 3B \quad \Rightarrow A = 3\cdot 4 - 7 = 5$$

$$A = 5 \; ; \; B = 4$$

$$R(x) = 2 + \frac{5}{(x-3)^2} + \frac{4}{x-3}$$

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5$; $\beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 1.2

ZADÁNÍ: Určete nejmenší počet členů posloupnosti (a_n), které je nutné sečíst, aby jejich součet byl větší než c:

$$c = \frac{5 \cdot \alpha \cdot \beta - 1}{6 \cdot \beta} \quad , \quad a_n = \frac{2\alpha}{n^2+4n+3}$$

ŘEŠENÍ: · vypočítáme $c = \frac{5.5.4-1}{6.4} = \frac{33}{8} = 4{,}125$

$$a_n = \frac{10}{n^2+4n+3} \qquad S_n > C$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > C$$

$$n > ?$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{10}{k^2+4k+3} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{5}{k+1} - \frac{5}{k+3}\right] = *$$

Rozklad na parciální zlomky ...

$$k^2 + 4k + 3 = (k+1)(k+3)$$

$$\frac{10}{(k+1)(k+3)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+3} \quad / \cdot (k+1)(k+3)$$

$$10 = Ak + 3A + Bk + B$$

$$k^1: \; 0 = A + B \Rightarrow B = -A \Rightarrow \underline{B = -5}$$

$$k^0: \; 10 = 3A + B$$

$$10 = 3A - A$$

$$10 = 2A \quad /:2$$

$$\underline{5 = A}$$

$$R(x) = \frac{5}{k+1} - \frac{5}{k+3}$$

$$* \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{5}{k+1} - \frac{5}{k+3}\right] = \begin{array}{ll} \left[\frac{5}{2} - \frac{5}{4}\right] & k=1 \\ \left[\frac{5}{3} - 1\right] & k=2 \\ \left[\frac{5}{4} - \frac{5}{6}\right] & k=3 \\ \vdots & \\ \left[\frac{5}{n-1} - \frac{5}{n+1}\right] & \\ \left[\frac{5}{n} - \frac{5}{n+2}\right] & k=n-1 \\ \left[\frac{5}{n+1} - \frac{5}{n+3}\right] & k=n \end{array}$$

$$S_n = \frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3}$$

- Pomocí nerovnice najdeme součet členů a_n, který je větší než c $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n > C$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3} > \frac{33}{8}$$

$$\frac{1}{24} > \frac{5}{n+2} + \frac{5}{n+3} \quad / \cdot 24(n+2)(n+3)$$

$$(n+2)(n+3) > (5n+15+5n+10)\,24$$

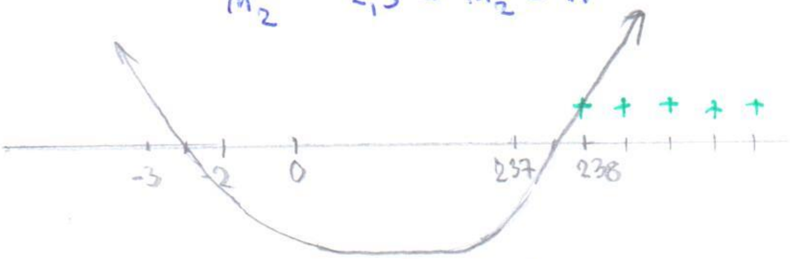
$$n^2+5n+6 > 120n+360+120n+240$$

$$n^2-235n-594 > 0$$

$D = 57601$

$n_1 = 237{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{n = 238}}$

$n_2 = -2{,}5 \Leftarrow n_2 \notin \mathbb{N}$



Zk: $S_{237} = \frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{239} - \frac{5}{240} \doteq 4{,}1249 < C$

$S_{238} = \frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{240} - \frac{5}{241} \doteq 4{,}1251 > C$

ODPOVĚĎ: Nejmenší počet členů posloupnosti (a_n), které je nutné sečíst, aby jejich součet byl větší než c je 238 členů

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT $\alpha = 5;\ \beta = 4$

ČÍSLO ÚLOHY: 1.3

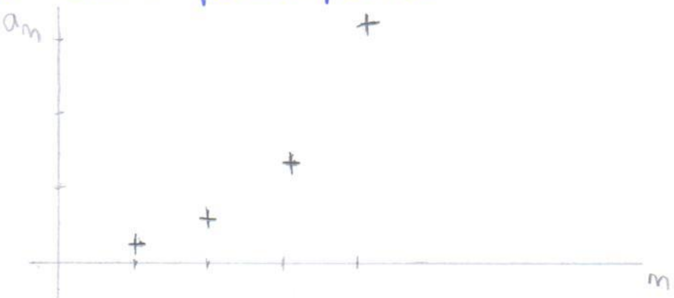
ZADÁNÍ: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní a své rozhodnutí zdůvodněte: $a_n = \frac{\alpha^n}{n+\beta}$

ŘEŠENÍ: (a_n) je monotónní $\Leftrightarrow$ je rostoucí nebo klesající.

$$a_n = \frac{5^n}{n+4}$$

- Vypočítáme prvních pár členů posloupnosti

$$a_1 = \frac{5^1}{1+4} = \frac{5}{5} = 1$$
$$a_2 = \frac{5^2}{6} = 4{,}167$$
$$a_3 = \frac{5^3}{7} = 17{,}857$$
$$a_4 = \frac{5^4}{8} = 78{,}125$$



Zdá se, že posloupnost (a_n) je ostře rostoucí $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n < a_{n+1}$$
$$\frac{5^n}{n+4} < \frac{5^{n+1}}{(n+1)+4}$$
$$\frac{5^n}{n+4} < \frac{5^n \cdot 5}{n+5} \quad / \cdot (n+4)(n+5)$$
$$5^n(n+5) < 5^n \cdot 5(n+4)$$
$$n+5 < 5n+20$$
$$-15 < 4n \quad /:4$$
$$\underline{\underline{-\frac{15}{4} < n}} \quad \Leftarrow \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n > -\frac{15}{4} \Rightarrow$$ potvrzeno, že (a_n) je ostře rostoucí.

Posloupnost (a_n) je rostoucí $\Leftrightarrow$ je monotónní!

ODPOVĚĎ: Posloupnost (a_n) je monotónní!