JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT

ČÍSLO ÚLOHY: 1.1

ZADÁNÍ: Určete matici X tak, aby platilo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ŘEŠENÍ:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \quad / \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-18} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-18} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 20 = -18$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

$$X = \left(\begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \right) \cdot -\frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot -\frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{X = -\frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} -51 & 39 \\ 28 & 38 \end{bmatrix}}}$$

$$-8 \cdot 2 + 7 \cdot (-5) = -51$$
$$-8 \cdot (-4) + 7 \cdot 1 = 39$$
$$9 \cdot 2 + (-2) \cdot (-5) = 28$$
$$9 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1 = -38$$

(Pomocný výpočet násobení 2 matic výše)

$$\begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT

ČÍSLO ÚLOHY: 1.2

ZADÁNÍ: Napište reálný a komplexní rozklad na kořenové činitele polynomu.

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 15x + 18$$

ŘEŠENÍ: Použijeme Hornerovo schéma

	1	-3	-6	11	15	18	
zkouška -2		-2	10	-8	-6	-18	
	1	-5	4	3	9	0	⇒ -2 je kořen
3		3	-6	-6	-9		
	1	-2	-2	-3	0		⇒ 3 je kořen
3		3	3	3			
	1	1	1	0			⇒ 3 je kořen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Reálný rozklad:

$$p(x) = (x+2)(x-3)^2(x^2+x+1)$$

Komplexní rozklad:

$$p(x) = (x+2)(x-3)^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT

ČÍSLO ÚLOHY: 1.3

ZADÁNÍ: Ukažte, že množina $V=\{[3a+2b, -a+b, 4c-5a, a+c]^T \; a, b, c \in R\}$ je podprostor prostoru R_4. Určete dimenzi podprostoru V a alespoň jednu bázi V.

ŘEŠENÍ: Je V podprostor R_4?

V bude podprostor, když sečtu 2 libovolné prvky a výsledný prvek bude ležet v podprostoru.

$[3a+2b, -a+b, 4c-5a, a+c]^T + [3a+2b, -a+b, 4c-5a, a+c]^T =$

$= [6a+4b, -2a+2b, 8c-10a, 2a+2c]^T \Leftarrow$ vektor leží v podprostoru

V je podprostor R_4

$Dim(V) \leq 3$ (Tipneme dimenzi - max 4 protože R_4, máme 3 neznámé $\Rightarrow$ tipuji 3)

Zvolím si 3 vektory:

1, $a=1$, $b=0$, $c=0$

$v_1 [3, -1, -5, 1]^T$

2, $a=0$, $b=1$, $c=0$

$v_2 [2, 1, 0, 0]^T$

3, $a=0$, $b=0$, $c=1$

$v_3 [0, 0, 4, 1]^T$

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow$ vektory jsou Lineárně Nezávislé.

Generují bázi?

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+2b \\ -a+b \\ 4c-5a \\ a+c \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 3a+2b \\ -1 & 1 & 0 & -a+b \\ -5 & 0 & 4 & 4c-5a \\ 1 & 0 & 1 & a+c \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -a+b \\ 3 & 2 & 0 & 3a+2b \\ 1 & 0 & 1 & a+c \\ -5 & 0 & 4 & 4c-5a \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ 1:5 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 5 & 0 & 5b \\ 0 & 1 & 1 & b+c \\ 0 & -5 & 4 & -5b+4c \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \\ 5 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & b+c \\ 0 & -5 & 4 & -5b+4c \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ -4 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 4 & 4c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = -a + b \Rightarrow \lambda_1 = a$$

$$\lambda_2 = b$$

$$\lambda_3 = c$$

v_1, v_2, v_3 je BÁZE $\qquad \dim(V) = 3$