JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT

ČÍSLO PŘÍKLADU: 2.1

ZADÁNÍ: Pro lineární zobrazení $L: P_3 \to \mathbb{R}_3$ dané předpisem

$$L(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a-b-c, 3a-b, c+d]^T$$

Určete:
- dimenzi a bázi jádra Ker L;
- dimenzi a bázi obrazu Im L;
- matici zobrazení v libovolných bázích.

ŘEŠENÍ: $\forall p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\mathrm{Ker}\,\mathbb{L} = \{\forall p \in P_3 ; L(u) = [0,0,0]^T\}$

$\mathrm{Ker}\,\mathbb{L} = L(p(x)) = [a-b-c, 3a-b, c+d]^T = [0,0,0]^T$

$$\begin{aligned} a - b - c \quad &= 0 \\ 3a - b \quad &= 0 \\ c + d &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} 3a - b \quad &= 0 \Rightarrow a = \tfrac{1}{3} b = -\tfrac{1}{2} p \\ -2b - 3c &= 0 \Rightarrow b = -\tfrac{3}{2} c = \tfrac{3}{2} p \\ c + d &= 0 \Rightarrow c = -d = p \\ & c = p, \; p \in R \end{aligned}$$

$\mathrm{Ker}\,\mathbb{L} = \{-px^3 - 3px^2 + 2px - 2p, \; p \in \mathbb{R}\} = \{p(-x^3 - 3x^2 + 2x - 2), p \in R\}$

báze Ker L je např.: $-x^3 - 3x^2 + 2x - 2$, $\dim \mathrm{Ker}\,\mathbb{L} = 1$

$\mathrm{Im}\,\mathbb{L} = \{\forall x \in R_3 ; \exists p \in P_3, L(p) = x\}$

Báze R_3 (kanonická)

$$\left.\begin{aligned} x^3 &\longrightarrow L(x^3) = [1, 3, 0]^T \\ x^2 &\longrightarrow L(x^2) = [-1, -1, 0]^T \\ x &\longrightarrow L(x) = [-1, 0, 1]^T \\ 1 &\longrightarrow L(1) = [0, 0, 1]^T \end{aligned}\right\} \text{lineárně závislé}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\-1&-1&0\\-1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\sim^{1:2}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&2&0\\0&3&1\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&3&1\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$L(x_3)$, $L(x_2)$ a $L(1)$ jsou lineárně nezávislé, jsou báze.

$\dim \operatorname{Im} \mathbb{L} = 3$

Báze $\operatorname{Im}\mathbb{L}$ je např: $[1,3,0]^T$, $[-1,-1,0]^T$, $[0,0,1]^T$

Zkouška: věta

$$\dim \operatorname{Ker}\mathbb{L} + \dim \operatorname{Im}\mathbb{L} = \dim P_3$$
$$1 + 3 = 4$$

Matice zobrazení v bázi P_3: $p_1 = x^3$, $p_2 = x^2$, $p_3 = x$, $p_4 = 1$ a v bázi R_3: $u_1 = [1,3,0]^T$, $u_2 = [-1,-1,0]^T$, $u_3 = [0,0,1]^T$

$$M = [\,\widehat{L(p_1)} \mid \widehat{L(p_2)} \mid \widehat{L(p_3)} \mid \widehat{L(p_4)}\,]$$

$$k_1\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}}_{L(p_1)}\Bigg|\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}}_{L(p_2)}\Bigg|\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}_{L(p_3)}\Bigg|\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{L(p_4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&-1&0&1&-1&-1&0\\3&-1&0&3&-1&0&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{array}\right]\sim^{/2}\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&-1&0&1&-1&-1&0\\0&2&0&0&2&3&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&-1&0&1&-1&-1&0\\0&1&0&0&1&\frac{3}{2}&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&1&\frac{3}{2}&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{array}\right]\Rightarrow M=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&2&3&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}$$

M

JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT

ČÍSLO PŘÍKLADU: 2.2

ZADÁNÍ: Určete vlastní čísla, vlastní vektory a Jordanův kanonický tvar matice A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & -5 \\ -10 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

ŘEŠENÍ:

• Vlastní čísla: $|A - \lambda I|$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & 7-\lambda & -5 \\ -10 & 10 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(7-\lambda)(-8-\lambda)+0+0-0-(2-\lambda)\cdot -50-0 =$$

$$= -112-14\lambda+72\lambda+9\lambda^2-8\lambda^2-\lambda^3+100-50\lambda = -\lambda^3+\lambda^2+8\lambda-12$$

- musíme zjistit kořeny → použiji Hornerovo schéma

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 1 & 8 & -12 \\ 2 & & -2 & -2 & 12 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array} \rightarrow \text{mohu použít vzorec } D = (-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 6 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$-\lambda^3+\lambda^2+8\lambda-12 = (\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

$$\underline{\underline{\lambda_{1,2} = 2}} \quad \underline{\underline{\lambda_3 = -3}}$$

Vlastní vektory:

$\lambda_{1,2} = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -5 & 0 \\ -10 & 10 & -10 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad h_{1,2} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

↑ 3 stejné vektory ⇒ soustava má ∞ mnoho řešení

$$-x + y - z = 0 \Rightarrow \text{pro } \begin{matrix} y = 1 \\ z = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = 1 \qquad \text{pro } \begin{matrix} y = 0 \\ z = 1 \end{matrix} \Rightarrow x = -1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad h_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 \\ -10 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ 2y - z = 0 \end{matrix} \Rightarrow y = \frac{z}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$h_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

⇒ sestavíme matici T a J:

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$