JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT

ČÍSLO ÚLOHY: 5.5.

ZADÁNÍ: Je dáno zobrazení $L: V \rightarrow U$

a, Ukažte, že zobrazení je lineární

b, Určete bázi a dimenzi jádra Ker L a obrazu Im L

c, Určete matici A lineárního zobrazení L ve standardních bázích $e_1, e_2 \ldots$ prostoru V a $f_1, f_2 \ldots$ prostoru U

d, Určete matici B lineárního zobrazení L v bázích $v_1, v_2 \ldots$ prostoru V a $u_1, u_2 \ldots$ prostoru U

e, Určete T matici přechodu od standardní báze $e_1, e_2 \ldots$ k bázi $v_1, v_2 \ldots$ prostoru V

f, Určete H matici přechodu od standardní báze $f_1, f_2 \ldots$ k bázi $u_1, u_2 \ldots$ prostoru U

g, Ukažte, že $B = H^{-1} \cdot A \cdot T$

Řešte pro zobrazení $L: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$, které je dáno předpisem

$$L([a, b, c]^T) = [a+2b-c, 2a+3b+3c]^T$$

Báze prostoru $V = \mathbb{R}_3$:

$e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$;

$v_1 = [1,2,-1]^T$, $v_2 = [2,-1,1]^T$, $v_3 = [-1,1,2]^T$;

Báze prostoru $U = \mathbb{R}_2$:

$f_1 = [1,0]^T$, $f_2 = [0,1]^T$;

$u_1 = [1,3]^T$, $u_2 = [3,1]^T$.

ŘEŠENÍ: a, $\forall u = [a_1, b_1, c_1]^T \in \mathbb{R}_3$

$\forall v = [a_2, b_2, c_2]^T \in \mathbb{R}_3$

$\forall k \in \mathbb{R}$

I, $L(u+v) = L(u) + L(v)$ ← PLATÍ

$$L(u+v) = L([\overbrace{a_1+a_2}^{a}, \overbrace{b_1+b_2}^{b}, \overbrace{c_1+c_2}^{c}]^T) =$$

$$= [a_1+a_2+2(b_1+b_2) - c_1 + c_2, 2(a_1+a_2) + 3(b_1+b_2) + 3(c_1+c_2)]^T$$

$$L(u) + L(v) = L([a_1, b_1, c_1]^T) + L([a_2, b_2, c_2]^T) =$$

$$= [a_1+2b_1-c_1, 2a_1+3b_1+3c_1]^T + [a_2+2b_2-c_2, 2a_2+3b_2+3c_2]^T =$$

$$= [a_1+2b_1-c_1+a_2+2b_2-c_2, 2a_1+3b_1+3c_1+2a_2+3b_2+3c_2]^T$$

II, $L(k\cdot u) = kL(u)$ → PLATÍ

$\underline{L(k\cdot u)} = L(k\cdot[a_1, b_1, c_1]^T) = L([\overset{a}{\widehat{ka_1}}, \overset{b}{\widehat{kb_1}}, \overset{c}{\widehat{kc_1}}]^T) =$

$= [ka_1 + k2b_1 + kc_1, k2a_1 + k3b_1 + k3c_1]^T =$

$= [k(a_1+2b_1+c_1), k(2a_1+3b_1+3c_1)]^T =$

$= k[a_1+2b_1+c_1, 2a_1+3b_1+3c_1]^T = kL([a_1, b_1, c_1]^T) = \underline{kL(u)}$

Obě podmínky platí ⇒ <u>Zobrazení $\mathbb{L}$ je lineární.</u>

b, $\mathrm{Ker}\,\mathbb{L} = \{\forall u \in \mathbb{R}_3 ; L(u) = [0,0]^T\}$

$L(u) = L([a_1, b_1, c_1]^T) = [a_1 + 2b_1 - c_1, 2a_1 + 3b_1 + 3c_1]^T = [0,0]^T$

Vyřešíme soustavu 2 rovnic pro 3 neznámé:

$a_1 + 2b_1 - c_1 = 0 \Rightarrow a_1 = c_1 - 2b_1 = c_1 - 10c_1 = -9c_1$

$\underline{2a_1 + 3b_1 + 3c_1 = 0}$

$2(c_1 - 2b_1 + 3b_1 + 3c_1 = 0$

$-b_1 + 5c_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 5c_1$ → za $c_1$ lze volit libovolně.

$\mathrm{Ker}\,\mathbb{L} = \{[-9c_1, 5c_1, c_1]^T c_1 \in \mathbb{R}\} = \{+c_1\cdot[-9, 5, 1]^T ; c_1 \in \mathbb{R}\}$

<u>báze Ker L je např.: $[-9, 5, 1]^T$.</u>

<u>dim Ker L je 1.</u>

$\mathrm{Im}\,\mathbb{L} = \{\forall x \in \mathbb{R}_2 ; \exists u \in \mathbb{R}_3, L(u) = x\}$

Báze $\mathbb{R}_3$ (kanonická)

$$\left.\begin{aligned} e_1 = [1, 0, 0]^T &\longrightarrow L(e_1) = [1; 2]^T \\ e_2 = [0; 1, 0]^T &\longrightarrow L(e_2)\ \ [2; 3]^T \\ e_3 = [0; 0, 1]^T &\longrightarrow L(e_3)\ \ [-1; 3]^T \end{aligned}\right\} \text{ Lineárně závislé}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L(e_1)$ a $L(e_2)$ jsou LN, jsou báze

<u>dim Im $\mathbb{L}$ = 2</u>   Báze Im je např.: $[1; 2]^T, [2; 3]^T$.

Zkouška: Věta

$\dim \mathrm{Ker}\,\mathbb{L} + \dim \mathrm{Im}\,\mathbb{L} = \dim \mathbb{R}_3$

$1 + 2 = 3$

c) $A = \left[\hat{L}(e_1) \,\vdots\, \hat{L}(e_2) \,\vdots\, \hat{L}(e_3)\right]$

$L(e_1) = [1,2]^T$ $\Rightarrow$ (dosadili jsme do předpisu L $[a+2b-c,\ 2a+3b+3c]^T$
za $a=1$, $b=0$, $c=0$)
$L(e_2) = [2,3]^T$
$L(e_3) = [-1,3]^T$

$L(e_1) = \hat{L}(e_1)$, $L(e_2) = \hat{L}(e_2)$ a $L(e_3) = \hat{L}(e_3)$, neboť $f_1$ a $f_2$ jsou kanonické báze $R_2$ $\Rightarrow$ obrazy jsou rovnou souřadnice

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}}}$$

$\hat{L}(e_1)$ $L(e_2)$ $L(e_3)$

d) $B = \left[\hat{L}(v_1) \,\vdots\, \hat{L}(v_2) \,\vdots\, \hat{L}(v_3)\right]$

$L(v_1) = [6,5]^T$ $\Rightarrow$ dosadili jsme za $a=1$, $b=2$, $c=-1$ do předpisu L
$L(v_2) = [-1,4]^T$ $(a=2,\ b=-1,\ c=1)$
$L(v_3) = [-1,7]^T$ $(a=-1,\ b=1,\ c=2)$

Počítáme souřadnice:
$k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2 = \hat{L}(v_1) \,\vdots\, \hat{L}(v_2) \,\vdots\, \hat{L}(v_3)$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{array}\right] \overset{-3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -13 & 7 & 10 \end{array}\right] \overset{/(-8)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{10}{8} \end{array}\right] \overset{-3}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{13}{8} & \frac{22}{8} \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & -\frac{7}{8} & -\frac{10}{8} \end{array}\right]$$

$\Leftarrow$ Matice B

$$\underline{\underline{B = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 13 & 22 \\ 13 & -7 & -10 \end{bmatrix}}}$$

e) $T = [\hat{v}_1 | \hat{v}_2 | \hat{v}_3]$

$v_1 = \hat{v}_1 = [1, 2, -1]^T$
$v_2 = \hat{v}_2 = [2, -1, 1]^T$
$v_3 = \hat{v}_3 = [-1, 1, 2]^T$

$$T = \begin{array}{ccc} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

f) $H = [\hat{u}_1 | \hat{u}_2]$

$u_1 = [1, 3]^T = \hat{u}_1$
$u_2 = [3, 1]^T = \hat{u}_2$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot (-3) \sim /:(-8) \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim^{-3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right] \quad \nwarrow H^{-1}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

g) $B = H^{-1} \cdot A \cdot T$

$$B = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 13 & 22 \\ 13 & -7 & -10 \end{bmatrix}$$

B se opravdu rovná $H^{-1} \cdot A \cdot T$.