JMÉNO A PŘÍJMENÍ: LUKÁŠ RUNT

ČÍSLO ÚLOHY: 9.5.1

ZADÁNÍ: Je dán podprostor U prostoru L. Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $U^\perp$ při skalárním násobení (u, v).
$L = \mathbb{R}_5$, U je generován prvky $u_1 = [1,2,-1,3,2]^T$; $u_2 = [-1,2,3,-1,2]^T$;
$u_3 = [1,6,1,6,3]^T$; $u_4 = [1,10,3,8,7]^T$; $(u,v) = u^T v$

ŘEŠENÍ: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$;

$x \perp u_1 \Leftrightarrow (x, u_1) = 0$

$x \perp u_2 \Leftrightarrow (x, u_2) = 0$

$x \perp u_3 \Leftrightarrow (x, u_3) = 0$

$$\begin{matrix} u_1 \to \\ u_2 \to \\ u_3 \to \\ u_4 \to \end{matrix} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 10 & 3 & 8 & 7 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{matrix} \\ +u_1 \\ -u_1 \\ -u_1 \cdot 2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$x_3 = k_1, \; k_1 \in \mathbb{R}$

$x_5 = k_2, \; k_2 \in \mathbb{R}$

$x_4 = 3x_5 = 3k_2$

$x_2 = \frac{-x_3 - x_4 - 2x_5}{2} = -\frac{k_1}{2} - \frac{5k_2}{2}$

$x_1 = -2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2k_1 - 6k_2$

$$U^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2k_1 - 6k_2 \\ -\frac{k_1}{2} - \frac{5k_2}{2} \\ k_1 \\ 3k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} ; \; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$U^{\perp} = \left\{ k_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim U^{\perp} = 2$

Platí: $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim \mathbb{R}_5$

$3 + 2 = 5$ ✓

$$\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -\frac{5}{2} & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & -\frac{5}{2} & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix}$$

báze je např. $v_1 = [-4\ 1\ -2\ 0\ 0]^T$, $v_2 = [-16\ 0\ -5\ 3\ 1]^T$