鞅

(12/2/2016)

1 条件期望

设 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数. 我们的问题是找一个 $\mathcal{G}$-可测的随机变量 Y, 使得 $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$ 最小, 即用 $\mathcal{G}$-可测随机变量逼近 X, 使均方误差最小.

设 Y 是我们需要的随机变量. 对任意的 $\varepsilon \neq 0$ 和 $\mathcal{G}$-可测的随机变量 $Z \in L^2$, 有

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] \leq \mathbb{E}[(X-Y-\varepsilon Z)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] - 2\varepsilon\mathbb{E}[Z(X-Y)] + \varepsilon^2\mathbb{E}[Z^2].$$

这样, $2\varepsilon\mathbb{E}[Z(X-Y)] \leq \varepsilon^2\mathbb{E}[Z^2]$. 由 ε 的任意性知,

$$\mathbb{E}[ZX] = \mathbb{E}[ZY], \quad \forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}).$$

特别的, 对任意 $B \in \mathcal{G}$,

$$\int_B X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B Y \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

定义 1.1. *设 X 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上随机变量, $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. 设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数. 称随机变量 Y 是 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件数学期望, 记为 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, 若*

(i) Y 是 $\mathcal{G}$-可测的;

(ii) 对任意 $B \in \mathcal{G}$,

$$\int_B X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B Y \mathrm{d}\mathbb{P}. \tag{1.1}$$

当 $X = \mathbf{1}_A$ 时, 我们常常把 $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{G}]$ 写为 $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$.

容易看出, 条件期望在几乎处处意义下是唯一的. 它的存在性可由 Radon-Nikodym 定理保证. 事实上, 定义 $\mathcal{G}$ 上符号测度 $\mu(B) = \int_B X \mathrm{d}\mathbb{P}$, 它关于 $\nu = P_{\mathcal{G}}$ 绝对连续, 于是 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$.

条件期望具有如下的性质:

(i) 若 $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$, 则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

(ii) 数学期望的性质大部分条件期望都具备, 例如: 若 ϕ 是凸函数且 $\mathbb{E}[\phi(X)] < \infty$, 则 $\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}] \geq \phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$.

(iii) 设 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ 是 $\mathcal{G}$ 的两个子 σ-代数, 且 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, 则 $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$.

(iv) 若 X 关于 $\mathcal{G}$ 可测, 则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$. 一般的, 若 $Y \in \mathcal{G}$ 且 XY 可积, 则 $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. 这个性质的证明需要用到下面的单调类定理.

(v) X 与 $\mathcal{G}$ 独立, 当且仅当对任意的 Borel 可测函数 f, 若 $f(X)$ 可积, 则有 $\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)]$.

(vi) 设 X-$\mathcal{G}$-可测, Y 与 $\mathcal{G}$ 独立, 可测函数 ϕ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足 $\mathbb{E}[|\phi(X,Y)|] < \infty$. 令 $\psi(x) = \mathbb{E}[\phi(x,Y)]$, 则 $\mathbb{E}[\phi(X,Y)|\mathcal{G}] = \psi(X)$.

(vii) 设 $\mathcal{G} = \sigma(B_1,\ B_2, \ldots)$, 其中 $\bigcup_{i=1}^\infty B_i = \Omega$, $B_i \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B_i) > 0$, 且当 $i \neq j$ 时, $B_i \bigcap B_j = \emptyset$. 则

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_i}]}{\mathbb{P}(B_i)}\mathbf{1}_{B_i}.$$

事实上, 任意 $B \in \mathcal{G}$ 可以写为 $B = \bigcup_{i\in\Lambda}$, 其中 $\Lambda \subset \{1, 2, \ldots\}$. 这样,

$$\int_B \sum_{i=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_i}]}{\mathbb{P}(B_i)}\mathbf{1}_{B_i}\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{i=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_i}]}{\mathbb{P}(B_i)} \int_B \mathbf{1}_{B_i}\mathrm{d}\mathbb{P}$$
$$= \sum_{i\in\Lambda} \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{B_i}]}{\mathbb{P}(B_i)}\mathbb{P}(B_i) = \int_B X\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

特别的, 当 $\mathcal{G} = \sigma(B)$, $X = \mathbf{1}_A$ 时, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{P}(A|B)\mathbf{1}_A$. 因此, 条件期望可以看作是初等条件概率的推广.

例 1.2. 设离散随机变量 X, Y 联合分布为

$$f(x,y) = \mathbb{P}(X = x,\ Y = x).$$

由 $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y|\sigma(X)]$ 关于 $\sigma(X)$ 可测可知存在函数 ϕ 使得 $\mathbb{E}[Y|X] = \phi(X) = \sum_x \phi(x)\mathbf{1}_{\{X=x\}}$. 对 $A = \{X = x\}$, 由条件期望定义可知,

$$\int_A Y\mathrm{d}P = \int_A \phi(X)\mathrm{d}\mathbb{P} = \phi(x)\mathbb{P}(X = x),$$

从而

$$\phi(x) = \frac{\sum_y yf(x,y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

例 1.3. 设连续型随机变量 X, Y 联合密度函数为 $f(x,y)$, 则 X 密度函数为 $f_X(x) = \int f(x,y)\mathrm{d}y$. 与上面一样, 存在函数 $\phi(x)$ 使得 $\mathbb{E}[Y|X] = \phi(X)$. 这样, 对任意的 *Borel* 集 B, 对 $A = \{X \in B\}$ 应用条件期望定义,

$$\int_A Y\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \phi(X)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B \phi(x)f_X(x)\mathrm{d}x.$$

由

$$\int_A Y\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega Y\mathbf{1}_A\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_B\int_\mathbb{R} yf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

可得

$$\int_B\int_\mathbb{R} yf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_B \phi(x)f_X(x)\mathrm{d}x, \quad \forall B.$$

这样,

$$\phi(x) = \frac{\int_\mathbb{R} yf(x,y)\mathrm{d}y}{f_X(x)}.$$

例 1.4. 设 $\xi_1, \xi_2, \ldots$ 独立同分布, 且 $\mu = \mathbb{E}[\xi_i]$. 记 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. 则对 $m < n$, $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$, 且

$$\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_m] = S_m + \mathbb{E}[\xi_{m+1} + \cdots + \xi_n|\mathcal{F}_m] = S_m + (n-m)\mu,$$

即

$$\mathbb{E}[S_n - n\mu|\mathcal{F}_m] = S_m - m\mu.$$

若进一步的, $\mu = 0$, $\sigma^2 = \mathbb{E}[\xi_i^2] < \infty$, 则

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = S_n^2 + \sigma^2.$$

因此

$$\mathbb{E}[S_n^2 - n\sigma^2|\mathcal{F}_m] = S_m^2 - m\sigma^2.$$

2 定义与例子

设 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上一个滤子, 即对任意的 n, $\mathcal{F}_n$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数, 且对 $m < n$, $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$. 我们称随机过程 $\{M_n\}_{n\geq 0}$ 关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 适应, 若对任意的 n, M_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测.

给定过程 $\{M_n\}$, 定义它的自然滤子 $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(M_0, M_1, \ldots, M_n)$. 显然的, $\{M_n\}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_n^0\}$ 适应的.

定义 2.1. 设 $\{M_n\}_{n\geq 0}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上关于滤子 $\{\mathcal{F}_n\}$ 适应的随机过程. 若

(i) 对 $n \geq 0$, $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$,

(ii) 对任意的 $m < n$,

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_m] \geq M_m \ a.s., \tag{2.1}$$

则称 $\{M_n\}$ 是 $(\{\mathcal{F}_n\}, \mathbb{P})$-下鞅 *(submartingale)*. 若 $\{-M_n\}$ 是下鞅, 则称 $\{M_n\}$ 为上鞅 *(supermartingale)*. 若 $\{M_n\}$ 既是下鞅, 又是上鞅, 即对 $m < n$,

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_m] = M_m \ a.s., \tag{2.2}$$

则称 $\{M_n\}$ 为鞅 *(martingale)*.

容易看到, 若 $\{M_n\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 是鞅 (下鞅, 或上鞅), 则关于它的自然滤子也是鞅 (下鞅, 或上鞅). 如果我们不特别指定滤子, 则鞅 (下鞅, 或上鞅) 通常是在它的自然滤子下定义的. 在给定滤子 $\{\mathcal{F}_n\}$ 和概率 $\mathbb{P}$ 时, 我们通常简单的称 $\{M_n\}$ 为鞅 (下鞅, 或者上鞅).

例 2.2. 设 $X_1, X_2, \ldots$ 是独立同分布随机变量序列, $\mu = \mathbb{E}[X_n]$. 则 $M_n = X_1 + \cdots + M_n - n\mu$ 是鞅. 若 $\mu = 0$, $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_n^2]$, 则 $M_n^2 - n\sigma^2$ 也是鞅.

例 2.3. 设 $\{X_n\}$ 是鞅, 随机变量 H_n 满足 $\mathbb{E}[|H_n|] < \infty$, 且对任意的 n, H_n 关于 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测. 定义

$$M_0 = X_0, \quad M_n = \sum_{k=1}^{n} H_n(X_n - X_{n-1}), \ n \geq 1. \tag{2.3}$$

则 $\{M_n\}$ 也是鞅. 事实上, 由 $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_{n-1} + H_n\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = M_{n-1}. \tag{2.4}$$

若 $\{X_n\}$ 是下鞅, 且 H_n 非负, 则 $\{M_n\}$ 也是下鞅.

3 可选抽样定理

定义 3.1. 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上滤子 $\{\mathcal{F}_n\}$. 设 T 是值于 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的随机变量. 若对任意的 $n \geq 0$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$, 则称 T 为停时.

例 3.2. 固定时间 k 是停时.

例 3.3. 对 *Borel* 可测集 A, $T_A = \inf\{n : X_n \in A\}$ 是停时.

例 3.4. 若 S 和 T 是停时, 则 $S \wedge T$ 与 $S \vee T$ 是停时.

例 3.5. 若 $\{T_n\}$ 是一列停时, 且 $T_n \uparrow T$, 则 T 也是停时.

定理 3.6 (可选抽样定理)**.** 设随机过程 $\{M_n\}$ 满足 $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$. 则 $\{M_n\}$ 是鞅当且仅当对任意的有界停时 T,

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]. \tag{3.1}$$

证明. 取整数 K 使得 $T \leq K$. 设 $X_0 = M_0$, $X_n = M_n - M_{n-1}$. 则

$$M_T = \sum_{n=0}^{K} M_n \mathbf{1}_{\{T=n\}} = \sum_{n=0}^{K} \sum_{m=0}^{n} X_m \mathbf{1}_{\{T=n\}} = \sum_{m=0}^{K} \sum_{n=m}^{K} X_m \mathbf{1}_{\{T=n\}} = \sum_{m=0}^{K} \mathbf{1}_{\{T \geq m\}} X_m.$$

注意到 $\{T \geq m\} = \{T \leq m-1\}^c \in \mathcal{F}_{m-1}$. 由例 2.3 可知 $W_n = \sum_{m=0}^{n} \mathbf{1}_{\{T \geq m\}} X_m$ 是鞅. 从而

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[W_K] = \mathbb{E}[W_0] = \mathbb{E}[M_0].$$

□

类似的, 我们有下面结果.

命题 3.7. 设 $\{M_n\}$ 是下鞅, T 为有界停时, 则 $\mathbb{E}[M_T] \geq \mathbb{E}[M_0]$.

例 3.8. 注意上面定理中停时的有界性不能去掉. 考虑 $\mathbb{Z}$ 上简单随机游走 S_n, 令 $T = \inf\{n : S_n = 1\}$. 则 $T < \infty$ 是停时, 但 $\mathbb{E}[S_T] = 1 \neq 0 = \mathbb{E}[S_0]$.

例 3.9. 设 S_n 是 $\mathbb{Z}$ 上简单随机游走. 对 $c \in \mathbb{Z}$, 定义 $T_c = \inf\{n : S_n = c\}$. 设 $a < 0 < b$, 令 $T = T_a \wedge T_b$, 则对任意的 n, $T \wedge n$ 是有界停时. 由可选抽样定理,

$$\mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$

注意到 $|S_{T\wedge n}| \leq |a| \vee b$, 且当 $n \to \infty$ 时, $S_{T\wedge n} \to S_T$. 由控制收敛定理,

$$\mathbb{E}[S_T] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = 0.$$

应用

$$\mathbb{E}[S_T] = a\mathbb{P}(T = T_a) + b\mathbb{P}(T = T_b)$$

及 $\mathbb{P}(T = T_a) + \mathbb{P}(T = T_b) = 1$ 可得

$$\mathbb{P}(T = T_a) = \frac{b}{b-a}, \quad \mathbb{P}(T = T_b) = \frac{-a}{b-a}.$$

例 3.10. 设 S_n 为 $\mathbb{Z}$ 上简单随机游走, 则 $M_n = S_n^2 - n$ 是鞅. 沿用上例的记号, 我们有 $\mathbb{E}[M_{T\wedge n}] = 0$. 注意到 $S_{T\wedge n}^2$ 有界, 故

$$\mathbb{E}[S_T^2] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge n}^2].$$

由单调收敛定理, $\mathbb{E}[T] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[T\wedge n]$. 从而 $\mathbb{E}[M_T] = \lim_{n\to\infty} M_{T\wedge n} = 0$, 即

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[S_T^2] = a^2\mathbb{P}(T = T_a) + b^2\mathbb{P}(T = T_b) = -ab.$$

从上面的例子可以看到, 若 $\{M_n\}$ 是有界鞅, 则对任意的有限停时 T, $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$.

4 最大值不等式

定理 4.1. 设 $\{M_n\}$ 是非负下鞅. 则对任意的 $\lambda > 0$,

$$\lambda\mathbb{P}\left(\sup_{k\le n} M_k \ge \lambda\right) \le \mathbb{E}\left[M_n \mathbf{1}_{\{\sup_{k\le n} M_k \ge \lambda\}}\right] \le \mathbb{E}[M_n]. \tag{4.1}$$

证明. 令 $T = \inf\{n:\ M_n \ge \lambda\}$, $A_j = \{T = j\}$. 则

$$\mathbb{E}[M_n] \ge \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{\sum_{k\le n} M_k \ge \lambda\}}] = \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{\{T\le n\}}] = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_j}].$$

注意到 $A_j \in \mathcal{F}_j$. 这样,

$$\mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_j}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_j} | \mathcal{F}_j]\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_j]\mathbf{1}_{A_j}] \ge \mathbb{E}[M_j \mathbf{1}_{A_j}] \ge \lambda\mathbb{P}(A_j).$$

上式从 1 到 n 求和,

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A_j}] \ge \lambda \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(A_j) = \lambda\mathbb{P}(\sup_{k\le n} M_k \ge \lambda).$$

□

定理 4.2. 设 $\{M_n\}$ 是鞅或者非负下鞅, 则对任意的 $p \ge 1$ 及 $\lambda > 0$,

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\sum_{k\le n} |M_k| \ge \lambda\right) \le \mathbb{E}\left\{|M_n|^p\right\}. \tag{4.2}$$

对任意的 $p > 1$,

$$\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] \le \mathbb{E}\left[\sum_{k\le n} |M_k|^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right]. \tag{4.3}$$

证明. 由 $|M_n|^p$ 是非负下鞅可得 (4.2).

令 $M^* = \sum_{k\le n} |M_k|$. 固定 $c > 0$, 由 $\lambda\mathbb{P}(M^* \ge \lambda) \le \mathbb{E}[|M_n|\mathbf{1}_{\{M^*\ge\lambda\}}]$ 可知

$$\mathbb{E}\left[(M^*\wedge c)^p\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{M^*\wedge c} p\lambda^{p-1} \mathrm{d}\lambda\right]$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^c p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(M^*\geq\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
&\leq\int_0^c p\lambda^{p-1}\mathbb{E}\left[|M_n|\mathbf{1}_{\{M^*\geq\lambda\}}\right]\mathrm{d}\lambda\\
&=p\mathbb{E}\left[|M_n|\int_0^{M^*\wedge c}\lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda\right]\\
&=\frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|M_n|\left(M^*\wedge c\right)^{p-1}\right].
\end{aligned}
$$

由 Hölder 不等式,

$$
\mathbb{E}\left[(M^*\wedge c)^p\right]\leq\frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}\left[(M^*\wedge c)\,p\right]\right)^{(p-1)/p}\left(\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right]\right)^{1/p}.
$$

从而

$$
\mathbb{E}\left[(M^*\wedge c)^p\right]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}\left[|M_n|^p\right].
$$

令 $c\to\infty$ 即可证明 (4.3). □

例 4.3 (Chernoff 不等式)**.** 设 S_n 是 $\mathbb{Z}$ 上简单随机游走. 对 $\lambda>0$, $e^{\lambda S_n}$ 是非负下鞅. 因此

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}S_k\geq x\right)=\mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}\mathrm{e}^{\lambda S_k}\geq\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\leq\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda S_n}\right].
$$

注意到

$$
\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda S_n}\right]=\left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\right)^n
$$

及

$$
\frac{\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}\leq\mathrm{e}^{\lambda^2/2}.
$$

从而

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}S_k\geq x\right)\leq\exp\left(-\lambda x+\frac{\lambda^2 n}{2}\right)=\exp\left(\frac{n}{2}\left(\lambda-\frac{x}{n}\right)^2-\frac{x^2}{2n}\right).
$$

取 $\lambda=x/n$ 可得

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}S_k\geq x\right)\leq\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n}},
$$

即

$$
\mathbb{P}\left(\sup_{k\leq n}S_k\geq x\sqrt{n}\right)\leq\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.
$$

5 一致可积性

这一节我们考虑当鞅满足什么条件时, 可选抽样定理对任意有限停时成立.

设 $\{M_n\}$ 是鞅, $T<\infty$ 为停时. 记 $T_n=T\wedge n$. 注意到

$$
M_T=M_{T_n}+M_T\mathbf{1}_{\{T>n\}}-M_n\mathbf{1}_{\{T>n\}}.
$$

由 T_n 有界, $\mathbb{E}[M_{T_n}]=\mathbb{E}[M_0]$. 若 $\mathbb{E}[M_T]$ 可积, 由 $\mathbb{P}(T>n)\to 0$ 可知

$$
\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[M_T\mathbf{1}_{\{T>n\}}]=0.
$$

定义 5.1. 称随机变量族 $\{X_\lambda\}$ 一致可积, 若

$$\lim_{R\uparrow\infty}\sup_{\lambda}\mathbb{E}\left[X_\lambda \mathbf{1}_{\{|X_\lambda|>R\}}\right]=0. \tag{5.1}$$

例 5.2. 若 $\{X_\lambda\}$ 可以被可积随机变量 Y 控制, 则 $\{X_\lambda\}$ 一致可积.

例 5.3. 若存在 $p>1$ 使得 $\sup_\lambda \mathbb{E}[|X_\lambda|^p]<\infty$, 则 $\{X_\lambda\}$ 一致可积.

命题 5.4. 设 $\{X_\lambda\}$ 一致可积, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $\mathbb{P}(A)<\delta$, 就有

$$\mathbb{E}\left[|X_\lambda|\mathbf{1}_A\right]<\varepsilon, \quad \forall\lambda.$$

证明. 取 R 充分大, 使得 $\mathbb{E}[X_\lambda \mathbf{1}_{\{|X_\lambda|>R\}}]<\varepsilon/2$. 令 $\delta=\varepsilon/(2R)$. 若 $\mathbb{P}(A)<\delta$, 则

$$\mathbb{E}[|X_\lambda|\mathbf{1}_A]\le \mathbb{E}\left[|X_\lambda|\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\{|X_\lambda|\le R\}}\right]+\mathbb{E}[|X_\lambda|\mathbf{1}_{\{|X_\lambda|>R\}}]<R\mathbb{P}(A)+\varepsilon/2<\varepsilon.$$

$\square$

类似的, 我们可以证明下面命题, 它是控制收敛定理的推广.

命题 5.5. 设 $\{X_n\}$ 一致可积且 $\lim_{n\to\infty}X_n=X$ *a.s.*, 则 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[|X_n-X|\right]=0$. 特别的, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X]$.

由命题 5.4, 我们有如下的可选抽样定理.

定理 5.6. 设 $\{M_n\}$ 是一致可积鞅, $T<\infty$ 为停时. 则 $\mathbb{E}[M_T]=\mathbb{E}[M_0]$.

例 5.7. $\mathbb{Z}$ 上简单随机游走不是一致可积鞅.

例 5.8 (随机调和级数)**.** 设 ξ_1, ξ_2, ... 独立同分布, 且 $\mathbb{P}(\xi_n=1)=\mathbb{P}(\xi_n=-1)=1/2$. 令 $M_0=0$,

$$M_n=\sum_{j=1}^n\frac{\xi_j}{j}.$$

则 $\{M_n\}$ 是鞅, 且

$$\mathbb{E}[M_n^2]=\sum_{j=1}^n\frac{1}{j^2}<\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{j^2}<\infty.$$

从而 $\{M_n\}$ 是一致可积鞅.

6 鞅的收敛定理

定理 6.1. 设 $\{M_n\}$ 是鞅, 若存在 $C<\infty$ 使得对任意的 n, $\mathbb{E}[|M_n|]\le C$, 则存在随机变量 M_∞ 使得 $\lim_{n\to\infty}M_n=M_\infty$ *a.s.*.

证明. 对 $a<b$, 定义

$$\sigma_1=\inf\{n:\ M_n<a\} \qquad \tau_1=\inf\{n>\sigma_1:\ M_n>b\}$$

$$\sigma_{k+1}=\int\{n>\tau_k:\ M_n<a\} \qquad \tau_{k+1}=\inf\{n>\sigma_{k+1}:\ M_n>b\},\quad k\ge 1.$$

对 $n \geq 0$, 若存在 $k \geq 1$ 使得 $\sigma_k \leq n \leq \tau_k$, 定义 $H_n = 1$, 若否, 定义 $H_n = 0$. 显然的, $H_n \in \mathcal{F}_n$. 令

$$W_n = \sum_{j=0}^{n-1} H_j(M_{j+1} - M_j).$$

则 W_n 是鞅, 且

$$W_n \geq (b-a)U_n - |M_n - a|,$$

其中 U_n 为过程 $\{M_k\}$ 在 n 时刻之前上穿区间 $[a,b]$ 的次数. 这样,

$$\mathbb{E}[W_0] = \mathbb{E}[W_n] \geq (b-a)\mathbb{E}[U_n] - \mathbb{E}[|M_n - a|].$$

由 $\mathbb{E}[|M_n - a|] \leq \mathbb{E}[|M_n|] + a \leq C + a$ 可知,

$$\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{2C+a}{b-a}.$$

令 $n \to \infty$ 可知, 过程 $\{M_n\}$ 上穿区间 $[a,b]$ 次数以概率 1 有限. 由 a 和 b 的任意性可知极限 $\lim_{n\to\infty} M_n$ 以概率论 1 存在. □

一般情况下, 由 $M_\infty = \lim_n M_n$ 存在, 我们不能得到 $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0]$.

推论 6.2. 设 $\{M_n\}$ 是一致可积鞅, 则 $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$ 存在, 且 $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0]$.

定理 6.3 (可选抽样定理)**.** 设 $\{M_n\}$ 是一致可积鞅, 则对任意的停时 T, $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$.

例 6.4. 设 $\xi_1, \xi_2, \ldots$ 独立同分布, 且 $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1/2$. 则极限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j}{j}$$

以概率论 1 存在.

例 6.5. 设 $\{X_n\}$ 是可数状态空间 S 上的不可约马氏链, 转移概率为 $p(x,y)$. S 上函数 f 称为在 x 处调和的, 若

$$f(x) = \sum_{y\in S} p(x,y) f(y).$$

固定 $z \in S$, 令 $T = \inf\{j:\ X_j = z\}$. 则函数

$$u(x) = \mathbb{P}(T < \infty | X_0 = x)$$

在 $x \neq z$ 处调和.

设函数 v 满足

$$\begin{aligned} v(z) =& 1, \\ 0 \leq & v(x) \leq 1, \\ v(x) =& \sum_{y\in S} p(x,y)v(y), \quad x \neq z. \end{aligned}$$

则 $M_n = v(X_{T\wedge n})$ 是鞅. 由 v 有界可知 $\{M_n\}$ 一致可积, 从而 $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$ 存在且 $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[M_0] = 1$.

若 X_n 常返, 则 $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, 且 $M_\infty = v(z) = 1$. 在概率 $\mathbb{P}(\cdot | X_0 = x)$ 下, $1 = M_0 = v(x)$. 这样, 上面方程只有常值解.