

MMA的应用

四道数学计算

如下

$$\begin{aligned} \text{已知 } L &= \lim_{x \rightarrow 1} \int_1^x \frac{dt}{\ln \frac{x+t}{1+t}} \\ O &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tan \left[\sum_{k=1}^{4n+1} \arctan \left(1 + \frac{2}{k(k+1)} \right) \right] \\ V &= \sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + 6\sqrt{1 + \dots}}}} \\ E &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-e^2 x} - e^{-e^{15} x}}{x} dx \\ \text{求证: } LOVE &= 520. \end{aligned}$$

☞ 分析

- ☞ L: 属于定积分加求极限
- ☞ O: 属于级数加求极限
- ☞ V: 属于连根式, 当然这个是拉马努金恒等式简单变形
- ☞ E: 属于反常积分, 是费曼积分法的形式

下面进行运算

WolframAlpha

In[]:=

```
l = Limit[Integrate[1 / (Log[(x + t) / (1 + t)]), {t, 1, x}], x -> 1]
```

极限 积分 对数

Out[]:= 2

```
(*Limit[Tan[Sum[ArcTan[1+2/(k*(k+1))], {k, 1, 4*n+1}]]/n, n->Infinity]*)
```

极限 正切 求和 反正切 无穷大

(*需要指出的是mma对Limit精度并不高,所以和级数嵌套在结果与效率上常出问题
改进尝试1:Stolz定理*)

```
s[n_] := Sum[ArcTan[1 + 2 / (k * (k + 1))], {k, 1, 4 * n + 1}];
```

求和 反正切

```
del[n_] := Sum[ArcTan[1 + 2 / (k * (k + 1))], {k, 4 * n - 2, 4 * n + 1}];
```

求和 反正切

```
(*Limit[Tan[sum[n]] - Tan[sum[n-1]], n->Infinity] 或
```

极限 正切 正切 无穷大

```
Limit[Tan[sum[n] - sum[n-1]] (1 + Tan[sum[n]] * Tan[sum[n-1]]), n->Infinity]效果仍不好
```

极限 正切 正切 正切 无穷大

*)

```
d1 := Limit[(del[n] - π) * n^2, n->Infinity]
```

极限 无穷大

```
d2 := Limit[Tan[ArcTan[Sum[1 + 2 / (k * (k + 1))], {k, 1, 4 * n + 1}]] / n, n->Infinity]
```

极限 正切 反正切 求和 无穷大

(*凸函数放大*)

```
o = Limit[ $\frac{d1}{n^2}$  (1 + d2 * d2 n^2), n->Infinity]
```

极限 无穷大

Set: 符号 O 被保护.

Out[]:= 4

```
In[ ]:= Solve[3 == Sqrt[1 + 2 Sqrt[1 + 3 v]]]
```

解方程 平方根 平方根

Out[]:= {{v -> 5}}

```
e = Integrate[(E^(-E^2*x) - E^(-E^(15)*x)) / x, {x, 0, Infinity}]
```

[积分] [⋯] [自然常数] [⋯] [自然常数] [无穷大]

... Set: 符号 e 被保护.

Out[]:= 13

```
love := [1_*o_*v_*e_];  
love /@ [1, o, v, e]
```

