



## Adaptive B-H 方法

1. 改进目标：实际上，BH方法控制FDR于水平  $\frac{m_0}{m} \alpha$  以下，在  $m_0 < m$  的情形中，与  $\alpha$  有明显的差异，故可以利用某种方法使得FDR大一些，以至于让Power增大。又因为BH方法的控制水平依赖于  $m_0$  (具体问题)，故采用一种对  $m_0$  的自适应方法是直观的想法，自然的想法为对每一个  $m_0$ ，应用  $\alpha^* = \frac{m}{m_0} \alpha$  的B-H方法即可控制FDR于  $\alpha$  上。但  $m_0$  未知，故本方法的核心问题为对  $m_0$  的估计。

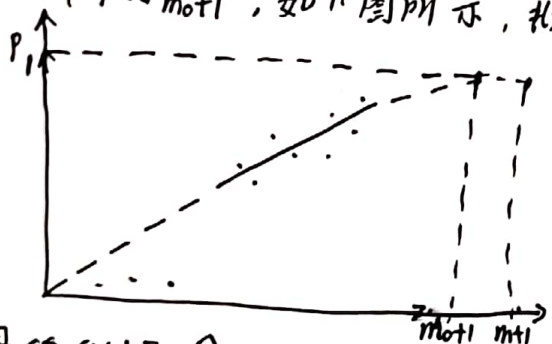
2. 前提：① 检验估计量相互独立。②  $\hat{m}_0 \geq m_0$  a.s.

若②成立， $E(CR | P_{m+1}=p_1, \dots, P_m=p_m) \leq \frac{m_0}{m} \alpha \leq \alpha$ ，将BH方法中  $\frac{\alpha}{m}$  改为  $\frac{\alpha}{\hat{m}_0}$ ，因为  $\frac{\alpha}{m} \leq \frac{\alpha}{\hat{m}_0}$ ，故可预见Power会上升，虽然此时能控制FDR于  $\frac{m_0}{m_0} \alpha$  上，但该方法并不保守取决于  $m_0$  的估计精度若估计得好  $\hat{m}_0 = m_0$ ，则FDR为  $\alpha$ ，不保守。( $m_0 \leq \hat{m}_0 \leq m$ )

3.  $m_0$  的估计。

① 若  $m_0 = m$ ，且检验统计量相互独立，则  $P_i \sim U(0,1)$ ， $i=1, \dots, m$ ，由次序统计量容易求得  $E(P_{(i)}) = \frac{i}{m+1}$ ，即  $P_{(i)}$  与  $i$  应渐近线性，采用均值回归，斜率为  $\frac{1}{m+1}$ ，过点  $(0,0), (m+1,1)$

② 若  $m_0 < m$ ，由于 nonnull 的点一般位于左侧，null 点位于右侧，且 null 的点近乎线性且斜率为  $\frac{1}{m_0+1}$ ，如下图所示，拟合过点  $(m+1,1)$  和最右的几个  $p$  值。若这几个  $p$  值来自 null，



则有  $\beta \approx \beta_0 \Rightarrow \frac{1}{\beta} \approx \frac{1}{\beta_0} = m_0+1$ ，取  $\hat{m}_0 = \lceil \frac{1}{\beta} + 1 \rceil$ ，以确保  $\hat{m}_0 \geq m_0$  成立，故问题转换为需要用几个  $p$  值去估计？(找尽可能多的线性部分)

可知，从  $i=1$  开始，斜率在变大 (nonnull)，第一次估计斜率变小，我们视为线性的端点。

最终估计取  $\hat{m}_0 = \min(\lceil \frac{1}{\beta} + 1 \rceil, m)$  确保  $m_0 \leq \hat{m}_0 \leq m$ ，以便提升Power且控制FDR  
可用  $q$ -value论文中提到的  $\hat{m}_0 = \frac{\# \{P_i \leq \lambda\}}{1-\lambda}$  估计  $m_0$ ，但涉及到  $\lambda$  的估计。

## 4. 方法步骤

Step 1: 计算  $p$  值，并排序

Step 2: 比较  $P_{(i)}$  和  $\frac{\alpha}{\hat{m}_0}$  的大小，若  $P_{(i)} \geq \frac{\alpha}{\hat{m}_0}$ ， $\forall i$ ，则不拒绝任意原假设

Step 3: 计算  $S_2 = \frac{1 - P_{(i)}}{m+1-i}$

Step 4: 从  $i=1$  开始，找到第一次  $S_i < S_{i-1}$ ，停止，令  $\hat{m}_0 = \min(\lceil \frac{1}{S_i} + 1 \rceil, m)$

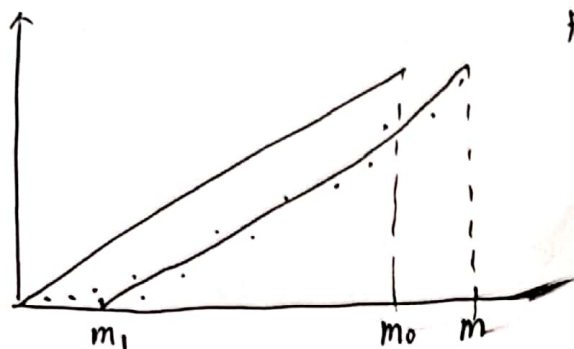
Step 5: 从  $i=m$  开始，找第一次  $P_{(i)} \leq \frac{\alpha}{\hat{m}_0}$ ，拒绝  $H_{(1)}, \dots, H_{(i)}$ 。



同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

地址：中国上海市四平路1239号 邮编：200092  
1239 SIPING ROAD SHANGHAI CHINA 200092  
电话 (TEL)：+86 21- 传真 (FAX)：+86 21-  
网址 (WEB)：www.tongji.edu.cn

5. 图示斜率前面的图错了.



点用多了  $\beta \leq \beta$ , 故  $m_0 \geq m$ .