同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

地址：中国上海市四平路1239号 邮编：200092
1239 SIPING ROAD SHANGHAI CHINA 200092
电话（TEL）：+86 21- 传真（FAX）：+86 21-
网址（WEB）：www.tongji.edu.cn

GFC 方法

1. 改进目标：①本文是对GGM的统计推断. 在构建 T_{ij} 时运用了自回归和bias-correction的技巧，前者将对 Ω 的推断问题转移到了回归残差的推断问题；回归系数估计用Lasso或Danzig selector. ② BH方法的不足：对 t 的选取范围为 $[0,+\infty)$. 当 $p\to+\infty$ 时且 $|H_0|$ 固定，BH方法存在着一个正概率的可能无法控制FDP ③因GFC方法对 t 的选取有了限制 $[0, 2\sqrt{\log p}]$. 一个原因是 $P(\max_{(i,j)\in H_0} |\hat{T}_{ij}| \geq 2\sqrt{\log p}) \to 0$ 若 $\hat{t}$ 无解，令 $\hat{t}=2\sqrt{\log p}$，故 H_1 中的落入 $2\sqrt{\log p}$ 之外的只可能来自 H_1. 另一个原因为 $G(t)\to G_0(t)$ 的速度在 $t>b_p$ 时太慢了，并且在 t 充分大时 $G(t)$ 不是 $G_0(t)$ 的相合估计. ③对于小样本情形利用Bootstrap方法提高精度 ④对于 $\sum_{(i,j)\in H_0} I\{|\hat{T}_{ij}|\geq t\}$ 的估计. 近似为 $2(1-\Phi(t))|H_0|$，估计为(由于稀疏假设)为 $G(t)(p^2-p)/2$

2. 方法步骤. Step 1：计算检验统计量 T_{ij}，$1\leq i<j\leq p$

Step 2：对 $\alpha\in(0,1)$，计算

$$\hat{t}=\inf\left\{0\leq t\leq 2\sqrt{\log p} : \frac{G(t)(p^2-p)/2}{R(t)\vee 1}\leq\alpha\right\}$$

若此式不存在，令 $\hat{t}=2\sqrt{\log p}$，

Step 3：当 $|\hat{T}_{ij}|\geq\hat{t}$ 时，拒绝 H_{ij0}

3. 理论结果：假设一：$X\sim N(\mu,\Sigma)$，设 $\max_{1\leq i\leq p}\sigma_{ii}\leq C_0$，$\max_{1\leq i\leq p}\omega_{ii}\leq C_0$，$\log p=o(n)$

GFC方法中 $FDP=\dfrac{\sum_{(i,j)\in H_0} I\{|\hat{T}_{ij}|\geq\hat{t}\}}{\max(\sum_{1\leq i<j\leq p} I\{|\hat{T}_{ij}|\geq\hat{t}\},1)}$，$FDR=E(FDP)$，记 $q_0=Card(\mathcal{H}_0)$

$q=Card(\mathcal{H})=(q^2-q)/2$，对常数 $\gamma>0$ 和 $1\leq i\leq p$，定义 $\mathcal{A}_i(\gamma)=\{j:1\leq j\leq p, j\neq i, |\omega_{ij}|\geq(\log p)^{-2-\gamma}\}$

定理：设 $p\leq n^r$，对某个 r，假设 $\{Card\{(i,j): 1\leq i<j\leq p \ \frac{|\omega_{ij}|}{\sqrt{\omega_{ii}\omega_{jj}}}\geq 4\sqrt{\log p/n}\}\geq\log\log p$，$q_0\geq cp^2$，对某个 $c>0$，$\hat{\beta}_i$ 满足 $\max_{1\leq i\leq p}|\hat{\beta}_i-\beta_i|_1=O_p(a_{n1})$，$\min\{\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)\max_{1\leq i\leq p}|\hat{\beta}_i-\beta_i|_2$，$\max_{1\leq i\leq p}\sqrt{(\hat{\beta}_i-\beta_i)'\hat{\Sigma}_{-i,-i}(\hat{\beta}_i-\beta_i)}\}=O_p(a_{n2})$，$a_{n1}=o(\frac{1}{\log p})$，$a_{n2}=o((n\log p)^{-\frac{1}{4}})$. 在假设一和 $\max_{1\leq i\leq p}Card(\mathcal{A}_i(\gamma))=O(p^\rho)$ 对某个 $\rho<\frac{1}{2}$，$\gamma>0$. 有依概率收敛结果

$$\lim_{(n,p)\to\infty}\frac{FDR}{\alpha q_0/q}=1, \quad \lim_{(n,p)\to\infty}\frac{FDP}{\alpha q_0/q}$$