

# 复杂网络上 SIRS 类疾病传播行为分析<sup>\*</sup>

李光正 史定华<sup>\*\*</sup>

上海大学理学院数学系, 上海 200444

**摘要** 考察复杂网络上具有免疫力失效特性的流行病传播模型, 即 SIRS 模型。利用平均场理论对疾病传播行为进行了理论分析, 并与计算机模拟结果相对照, 证实复杂网络上疾病传播的决定因素是网络的拓扑结构。对无标度网, 由于考虑了节点度的非均匀性, 理论值与模拟值拟合得较好。对小世界网, 由于忽略了重连概率  $p$  的影响, 在阈值附近的理论值和模拟值有一定差距。另外, 发现小世界网络的重连概率  $p$  对疾病蔓延速度有较大的影响, 但不影响平稳状态指标。

**关键词** SIRS 模型 小世界网络 无标度网络 平均场理论 计算机模拟

许多现实系统的拓扑结构都可以用复杂网络表示, 网络的节点代表构成系统的元素, 边代表元素之间的相互作用。传统上用 Erdős 和 Rényi 的随机图模型<sup>[1]</sup>对现实网络进行建模。但实证发现大部分现实网络都是逐渐演化形成的<sup>[2-5]</sup>, 具有一定的组织结构, 随机图模型不能解释这些演化机制。1998 年 Watts 和 Strogatz 提出小世界(small world, SW)网模型<sup>[6]</sup>; 1999 年 Barabási, Albert 和 Jeong 提出无标度(scale-free, SF)网模型<sup>[7]</sup>, 并由其他研究者加以扩充<sup>[4,5]</sup>。这些模型在一定程度上反应了现实网络的自组织形成机制, 极大地促进了复杂网络的研究。

研究复杂网络上疾病传播行为, 对于控制如计算机病毒, 性传播疾病, SARS 和禽流感等的蔓延具有重要意义。按照流行病学<sup>[8]</sup>对人群的划分方法, 我们把网络的节点分成三类: 易感  $S$ (susceptible)、染病  $I$ (infective)、康复  $R$ (recovery),  $t$  时刻 3 类节点的密度分别记为  $s(t)$ ,  $i(t)$ ,  $r(t)$ ,  $s(t)+i(t)+r(t)=1$ 。所谓 SIRS 类疾病(或模型)是指疾病在节点之间的传播规则为: 易感节点如果与染病节点相连, 则以概率  $\beta$  变成染病节点; 染病节点以概率  $\gamma$

康复; 康复节点以概率  $\delta$  失去免疫能力重新变为易感节点, 其中  $\beta, \gamma > 0$ ,  $\lambda = \beta/\gamma$  称为有效传染率。节点之间状态转移过程为:  $S \xrightarrow{\beta} I \xrightarrow{\gamma} R \xrightarrow{\delta} S$ 。

文献[6]首先用模拟方法证实了小世界网能加快疾病传播进程; 文献[9]把小世界网上的疾病传播等价于物理上的逾渗问题, 给出了患病人群规模的概率分布。文献[10—12]用平均场方法分别研究了节点无限的 SF 网上的 SIS 和 SIR 模型, 发现了与经典流行病阈值理论有本质差异的传播阈值为零特性。这是复杂网络众多研究成果中比较突出的一个。文献[13]对度相关的 SF 网, 文献[14]对结构化的 SF 网也得到了类似的结果。当 SF 网规模有限时, 文献[15]得到了非零的传播阈值。文献[16]引进概率母函数方法, 进一步考察了 SF 网上患病人群规模的概率分布。这些工作初步揭示了复杂网络上疾病传播的规律, 为进一步研究奠定了基础。

但上述研究主要集中于 SIS 和 SIR 类疾病的传播阈值和稳态患病节点密度两个指标, 而对 SIRS 类疾病和传染过程的时变情况以及各参数的影响则研究甚少<sup>[17]</sup>。虽然文献[18]首先研究了 SW 网上 SIRS

2005-07-25 收稿, 2005-09-28 收修改稿

\* 国家“八六三”计划资助项目(批准号: 2002AA234021)

\*\* 通讯作者, E-mail: shidh2001@263.net

模型的同步问题，但与我们的研究内容不同。有关传染过程的时变情况也只是最近才有文章<sup>[19,20]</sup>涉及。本文利用平均场理论，考察 SW 和 SF 网上 SIRS 类疾病传播模型，通过计算机模拟，说明理论值与模拟值拟合得较好。对 SW 网，我们发现重连概率  $p$  对疾病蔓延速度有较大的影响，但不影响平稳状态指标，从而说明平均场近似的合理性。

## 1 SW 网上的 SIRS 模型

### 1.1 WS 模型及基本性质

文献[6]提出的 WS 模型算法如下：给定  $N$  个节点的环形规则网络，每一个节点对称地与它最邻近的  $2m$  个节点相连。然后，对网络的每一个节点，把它顺时针的边依概率  $p$  与其他节点重连。特别地， $p=0$  时，网络为初始规则网络，此时网络具有固定常数的群集系数，但平均路径较大； $p=1$  时，网络为随机网络，此时网络群集系数较小，但平均路径也很小。而在  $p$  值的一定区间内，SW 网同时具有小的平均路径和较大的群集系数。按照 WS 模型算法产生的 SW 网，度分布近似 Poisson 分布，从而网络的平均度  $\langle k \rangle = 2m$  可看作节点的特征标度。

### 1.2 传染曲线和传播阈值

根据文献[12]的平均场方法，在 SW 网上 SIRS 模型的演化方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial s(t)}{\partial t} = -\beta\langle k \rangle s(t)i(t) + \delta(1-s(t)-i(t)) \\ \frac{\partial i(t)}{\partial t} = -\gamma i(t) + \beta\langle k \rangle s(t)i(t). \end{cases} \quad (1)$$

我们感兴趣的是染病节点密度  $i(t)$  随时间的变化情况，称为传染曲线。不过方程组(1)的解析解一般不容易得到。然而对 SIS 模型，则退化为 Bernulli 方程，容易得到解析解，类似于文献[19]可讨论时间标度问题，但由于方程中没有  $p$  即使求出也无太大帮助。

现在我们来考虑方程组(1)的稳态情况。令  $\partial s(t)/\partial t = 0, \partial i(t)/\partial t = 0$ ，方程(1)的平衡点为  $(s, i) = (1, 0)$  或  $(\frac{\gamma}{\beta\langle k \rangle}, \frac{(\beta\langle k \rangle - \gamma)\delta}{\beta\langle k \rangle(\gamma + \delta)})$ 。

**情形 1：**  $(s, i) = (1, 0)$ ，这时方程(1)对应的

Jacobi 矩阵为  $J = \begin{bmatrix} -\delta & -\beta\langle k \rangle - \delta \\ 0 & \beta\langle k \rangle - \gamma \end{bmatrix}$ 。当  $|J| = -\delta(\beta\langle k \rangle - \gamma) > 0$ ，迹  $\text{tr}(J) = -\delta + (\beta\langle k \rangle - \gamma) < 0$ ，由解的稳定性判定方法可知  $(s, i) = (1, 0)$  是方程的平稳解。因此当  $\beta < \gamma/\langle k \rangle$  时，系统稳定于解  $(1, 0)$ 。

**情形 2：**  $(s, i) = \left(\frac{\gamma}{\beta\langle k \rangle}, \frac{(\beta\langle k \rangle - \gamma)\delta}{\beta\langle k \rangle(\gamma + \delta)}\right)$ ，对应的

$J = \begin{bmatrix} -\frac{(\beta\langle k \rangle - \gamma)\delta}{\gamma + \delta} - \delta & -(\gamma + \delta) \\ \frac{(\beta\langle k \rangle - \gamma)\delta}{\gamma + \delta} & 0 \end{bmatrix}$ 。当  $|J| > 0$ ，即  $\beta > \gamma/\langle k \rangle$  时， $\text{tr}(J) < 0$ ，上述解是稳定的。

**结论 1：** 小世界网上 SIRS 模型的疾病传播阈值为  $\lambda_c = \langle k \rangle^{-1}$ ，完全取决于网络的拓扑结构。当  $\lambda < \langle k \rangle^{-1}$  时，系统稳定于疾病消失平衡点  $(1, 0)$ ；当  $\lambda > \langle k \rangle^{-1}$  时，系统稳定于地方病状态 (endemic state) 平衡点  $\left(\frac{\gamma}{\beta\langle k \rangle}, \frac{(\beta\langle k \rangle - \gamma)\delta}{\beta\langle k \rangle(\gamma + \delta)}\right)$ ，这时  $i(\infty) = \frac{(\beta\langle k \rangle - \gamma)\delta}{\beta\langle k \rangle(\gamma + \delta)}$ 。

### 1.3 传染曲线的仿真结果

我们取参数为  $N=10^4, m=3, p=0.1$  的小世界网来验证平均场近似的合理性。这时传播阈值  $\lambda_c = (2m)^{-1} = 0.16667$ 。固定参数  $\gamma=0.4, \delta=0.1$ ，令  $\beta$  值依次为  $0.4, 0.2, 0.1, 0.09, 0.08$ ，取 10 个网络现实，每个现实做 10 次传播，然后取平均，模

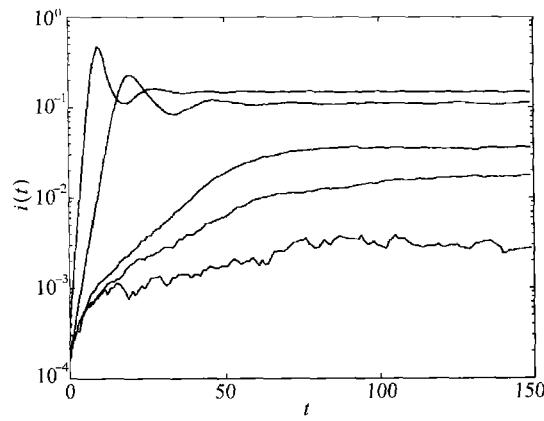


图 1 SW 网模拟结果

从上到下， $\beta$  值依次为  $0.4, 0.2, 0.1, 0.09, 0.08$  的传染曲线

拟结果见图1。模拟的传染曲线  $i(t)$  证实了小世界网存在传播阈值的现象，并且当  $t=150$  时，可以认为已经达到平稳状态，而对应的理论预测值  $i(\infty)$  分别为：0.16667, 0.13333, 0.06667, 0.05185, 0.03333。可见，当有效传染率在远离阈值时，传染曲线的波动性很小，理论值和模拟值非常接近；而在阈值附近时（最下面一条曲线），波动性较大，理论值和模拟值有一定差距。

#### 1.4 重连概率 $p$ 的影响

虽然文献[6]曾指出小世界网能加快疾病传播速度，但并没有说明与  $p$  的关系。平均场方法也忽略了  $p$ ，它是否对平稳状态有影响？这里，我们对固定的网络规模和传染参数考虑不同  $p$  值的影响，模拟证实当  $p$  较小 ( $<0.1$ ) 时，疾病从爆发到地方病状态需要时间比较长，当  $p>0.1$  时， $p$  的变化对传播速度影响甚微，它们总是能够迅速达到地方病状态（见图2）。更为重要的是，我们发现尽管  $p$  对传播速度有一定的影响，但对传染曲线的平稳值几乎没有影响。

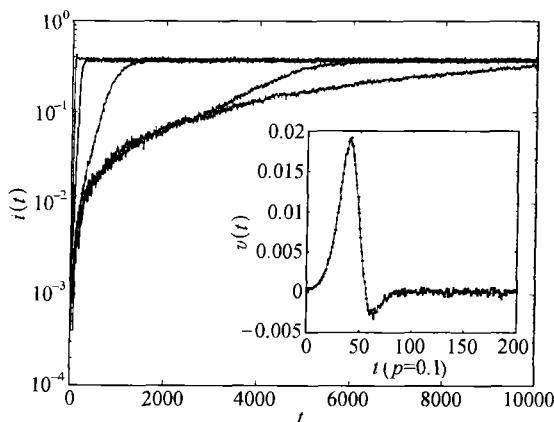


图2 传染曲线

网络规模  $N=10^4$ ，平均度  $\langle k \rangle=6$ ，传染参数  $\beta=\gamma=\delta=0.1$   
从左至右， $p$  依次为 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0

在文章完成后，我们看到文献[20]也模拟研究过加权网的传播速度，即  $v(t)=di(t)/dt$ 。对小世界网，例如  $p=0.1$  的传播速度曲线  $v(t)$ ，见图2中的插图，它反映了传染曲线  $i(t)$ （几乎与  $y$  轴重合的那条曲线，详见图1最上面一条曲线。注意，参数不完全相同）先上升然后迅速下降再趋于平稳的变化特性。

## 2 SF 网上的 SIRS 模型

### 2.1 BA 模型及基本性质

文献[7]提出的BA模型算法如下：(1) 增长性：从  $m_0$  个节点开始，每一时间步增加一个新节点与原有网络中的  $m (\leq m_0)$  个不同节点相连。(2) 择优连接：新节点与网络中的节点  $i$  相连的概率与节点  $i$  的度数  $k_i$  成正比，即  $\prod_i = k_i / \sum_j k_j$ 。经过长时间演化，网络进入标度不变状态，节点度分布： $P(k)=2m^2k^{-3}$ ,  $k \geq m$ ，网络的平均度  $\langle k \rangle=2m$ ，方差  $\langle k^2 \rangle=+\infty$ ，从而 SF 网不具有特征标度。

### 2.2 传播阈值和传染曲线

对 SF 网上的疾病传播过程，由于幂律分布的节点度不具有特征标度，因此必须考虑节点度的非均匀性。用带下标  $k$  表示度为  $k$  的三类节点的相对密度，而整个网络染病节点的比例为  $i(t)=\sum_k i_k(t) p(k)$ 。

根据平均场理论<sup>[12]</sup>，对  $0 < \delta < 1$ ，我们得到如下的演化方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial s_k(t)}{\partial t} = -\beta k s_k(t) \theta(t) + \delta r_k(t) \\ \frac{\partial i_k(t)}{\partial t} = -\gamma i_k(t) + \beta k s_k(t) \theta(t) \\ \frac{\partial r_k(t)}{\partial t} = -\delta r_k(t) + \gamma i_k(t), \end{cases} \quad (2)$$

这里  $\theta(t) = \sum_k k p(k) i_k(t) / \langle k \rangle$  表示  $t$  时刻一条随机边和染病节点相连的概率<sup>[12]</sup>。

令  $\frac{\partial s_k(t)}{\partial t}=0$ ,  $\frac{\partial i_k(t)}{\partial t}=0$ ,  $\frac{\partial r_k(t)}{\partial t}=0$ ，上述方程的平稳解为

$$i_k(\infty) = \frac{\beta k \theta(\infty)}{\gamma \delta + (\gamma + \delta) \beta k \theta(\infty)}, \quad (3)$$

其中  $\theta(\infty)$  满足函数方程

$$\theta(\infty) = \frac{\sum_k \frac{k p(k) \beta k \theta(\infty)}{\gamma \delta + (\gamma + \delta) \beta k \theta(\infty)}}{\langle k \rangle} = f(\theta(\infty)). \quad (4)$$

假定  $f(\theta(\infty))$  连续可微，容易证明它是  $\theta(\infty)$  的严

格单调递增上凸函数。因此，要想得到  $\theta(\infty)$  的非零解，(4)右边必须满足条件  $\frac{d}{d\theta}f(\theta(\infty))|_{\theta(\infty)=0} > 1$ ，由此  $\beta\langle k^2 \rangle / \gamma\langle k \rangle > 1$ ，即要求有效传染率  $\lambda > \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$ 。

**结论1：**SF 网上 SIRS 模型的传播阈值为  $\lambda_c = \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$ ，只依赖于网络的拓扑结构。当  $\lambda > \lambda_c$  时，疾病会大规模爆发成地方病；当  $\lambda < \lambda_c$  时，不需控制疾病就会最终消失。

**结论2：**对标度指数小于等于 3 的无限规模 SF 网（如 BA 模型）上的 SIRS 模型，传播阈值  $\lambda_c = 0$ 。这说明，只要有效传染率  $\lambda$  不为零，疾病总会爆发。

对 BA 模型，(4)式直接积分有

$$\theta(\infty) = \frac{\delta}{m\lambda(\gamma + \delta)} (e^{\frac{1}{m\lambda}} - 1)^{-1}, \quad (5)$$

于是根据(3)和(5)式，地方病状态时染病节点的密度为

$$i(\infty) = \frac{2\delta}{\gamma + \delta} (e^{\frac{1}{m\lambda}} - 1)^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{m\lambda} (e^{\frac{1}{m\lambda}} - 1)^{-1} \right]. \quad (6)$$

### 2.3 传染曲线的仿真结果

在由参数  $N=10^4$ ,  $m_0=m=3$  的 BA 模型所生成的有限规模 SF 网上考虑 SIRS 模型，固定  $\gamma=0.4$ ,  $\delta=0.1$ ，对不同  $\beta$  值传染曲线的模拟结果见图 3。不同  $\beta$  对应的理论值  $i(\infty)$  分别为 0.15917, 0.07485, 0.06639, 0.02392，可见模拟值与理论值拟合得较好。另外根据文献[15]的结果，这个有限规模 SF 网传播阈值  $\lambda_c \approx 0.0724$ ，模拟结果（图 3 最

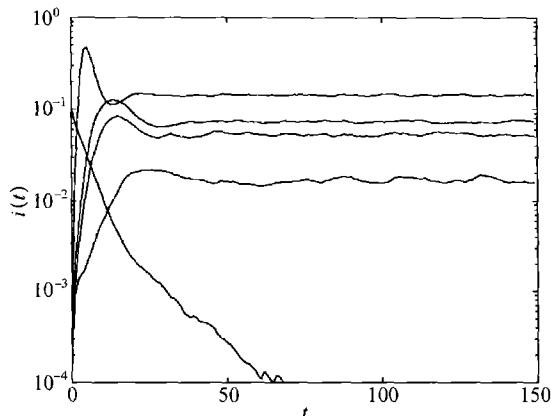


图 3 SF 网的模拟结果

从上到下， $\beta$  值依次为 0.4, 0.1, 0.09, 0.05, 0.0028 的传染曲线

下面一条曲线  $\lambda=0.07$  较好地说明了有限规模 SF 网上传播阈值的存在。然而对较小的  $\lambda$  需要更大规模的网络才能体现无限规模 SF 网上  $\lambda_c=0$  的特性。

### 3 结论

通过理论分析和仿真，我们证实小世界网和无标度网上 SIRS 类疾病的传播阈值完全取决于网络的拓扑结构。由于我们只考虑网络度分布这一个信息，对于网络的其他结构信息，如平均道路长，群集系数和节点度相关性没有考虑，因此  $i(\infty)$  的理论结果和模拟结果有一定差别。这说明，尽管平均场方法体现了传播过程的一部分特征，但需要更先进的方法才能较全面地把握网络上疾病传播的规律。

由于传染病在 SW 和 SF 网上一旦爆发，就能够迅速蔓延并在较短时间内达到地方病状态，这使得疾病的初始控制非常困难或者不可能。因此，在地方病状态下如何制定有效的疾病防控策略显得尤为重要。当节点具有自我调整能力时，如人类个体，节点能够根据环境的变化，自动调整自己的度数，从而改变网络的拓扑结构，最终达到消除地方病的目的。但很多技术网络，如互联网和万维网等，绝大部分节点不具有自我调整能力；而且网络的拓扑结构一旦变动较大，将极大影响这些网络承担的社会功能，因此必须考虑在保持现有网络拓扑结构前提下的疾病防控策略。这是更加有意义的课题，有待于进一步研究。

### 参考文献

- 1 Erdős P, Rényi A. Publ. On the evolution of random graphs. Math Inst Hung Acad Sci, 1960, 5: 17—61
- 2 Kleinberg J, Lawrence S. The structure of the web. Science, 2001, 294: 1849—360
- 3 Liljeros F, Rongling C R, Amaral L A N, et al. The web of human sexual contacts. Nature, 2001, 411: 907—908
- 4 Albert R, Barabási A-L. Statistical mechanics of complex networks. Rev of Modern Phys, 2002, 74: 47—97
- 5 Newman M E J. The Structure and function of complex networks. SIAM Rev, 2003, 45: 167—256
- 6 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature, 1998, 393: 440—442
- 7 Barabási A-L, Albert R, Jeong H. Mean-field theory for scale-free random networks. Physica A, 1999, 272: 173—187
- 8 Anderson R M, May R M. Infectious Diseases of Humans: Dy-

- namics and Control. Oxford: Oxford University Press, 1991
- 9 Newman M E J, Watts D J. Scaling and percolation in the small-world network model. *Phys Rev E*, 1999, 60: 7332—7342
- 10 May R M, Lloyd A L. Infectious dynamics on scale-free networks. *Phys Rev E*, 2002, 64: 066112
- 11 Lloyd A L, May R M. How viruses spread among computers and people. *Science*, 2001, 292: 1316—1317
- 12 Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 3200—3203
- 13 Boguñá M, Pastor-Satorras R. Epidemic spreading in correlated complex networks. *Phys Rev E*, 2002, 66: 047104
- 14 Eguiluz V M, Klemm K. Epidemic threshold in structured scale-free networks. *Phys Rev Lett*, 2001, 89: 108701
- 15 Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics in finite size scale-free networks. *Phys Rev E*, 2002, 65: 035108
- 16 Newman M E J. Spread of epidemic disease on networks. *Phys Rev E*, 2002, 66: 016128
- 17 Dezsó Z, Barabási A-L. Halting viruses in scale-free networks. *Phys Rev E*, 2002, 65: 055103
- 18 Kuperman M, Abramson G. Small world effect in an epidemiological model. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 2909—2912
- 19 Barthélémy M, et al. Velocity and hierarchical spread of epidemic outbreaks in scale-free networks. *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 178701
- 20 Yan G, et al. Epidemic spread in weighted scale-free networks. arXiv: cond-mat/0408049, 2004

## 《中国气候与环境演变》出版

由科技部、中国气象局、中国科学院联合资助编写的《中国气候与环境演变》科学报告已经由科学出版社出版。这是我国一部全面评估中国气候与环境演变基本科学事实、预估未来变化趋势、综合分析其社会经济影响、探寻适应与减缓对策的专著。该报告由国家自然科学基金委员会主任陈宜瑜、中国气象局局长秦大河、科技部副部长李学勇任共同主编。

《中国气候与环境演变》集中反映了地球科学、可持续发展以及环境外交等领域在气候与环境变化科学事实研究、影响分析、以及适应与减缓对策研究方面的最新成果，并对南水北调、三峡工程、青藏铁路建设等重大工程建设与气候和环境变化的关系提出了评估意见。该报告还为我国科学家参与 IPCC 第四次评估报告的编写提供了重要素材。

该报告由上、下两卷组成。上卷以东亚气候与环境变化为背景，对中国的气候、环境演变进行了评估，阐述了中国区域气候与环境变化的基本事实，以及相关的重大变化事件，并对中国气候变化的原因进行了分析。在此基础上，应用气候模式对未来 20, 50, 100 年的中国气候与环境变化趋势进行了预估。下卷则通过气候与环境变化对我国未来可能影响的评估，从生态系统、农业、水资源、重大工程等多方面进行了评述。并从冰冻圈、生态系统、土地退化、工业和交通、服务业、城市与生活等几个方面进行了气候与环境影响的利弊分析，评估了气候变化对我国区域可持续发展的影响，进行了气候变化适应与减缓对策下的社会经济分析，提出了气候变化的适应与减缓对策，并据此提出发展理念、决策机制、健全法制、生态建设和气候变化等方面对策建议。

(供稿：朱海燕)