

复杂网络中 SAIQRS 传染病模型动力学分析

顾梓玉, 党元辰, 何沛妍, 杨丽新

(陕西科技大学 数学与数据科学学院, 陕西 西安 710021)

摘要:基于动力学理论研究了复杂网络中传染病的传播过程,综合考虑个体在疾病传播过程中的预防行为和自我隔离措施,提出了一类无标度网络上具有警觉行为和隔离行为的 SAIQRS 传染病传播模型;并进一步利用平均场理论得到传播阈值的关系式,系统分析了模型的动力学行为.研究发现,在无标度网络中增大警觉率、隔离率的比例和增强警觉的强度,可以降低传染病的爆发规模.数值仿真结果表明,具有警觉和隔离的行为对疾病的传播速度与传播规模有影响.

关键词:无标度网络;警觉行为;隔离措施;传播阈值

中图分类号:O 193; N 941.3

文献标志码:A

doi:10.13763/j.cnki.jhebnu.nse.202302002

Dynamic Analysis on SAIQRS Epidemic Model in Complex Networks

GU Ziyu, DANG Yuanchen, HE Peiyan, YANG Lixin

(School of Mathematics and Data Science, Shaanxi

University of Science & Technology, Shaanxi Xi'an 710021, China)

Abstract: The process of infectious disease transmission on complex networks is studied based on dynamics theory. Considering individual preventive behavior and self-isolation measures in the process of disease transmission, a SAIQRS infectious disease transmission model with alert behavior and isolation behavior on scale-free networks is proposed. Furthermore, by using the mean field theory, the relation of the propagation threshold is obtained and the dynamic behavior of the model is analyzed systematically. We study the proportion of increasing vigilance rate, the intensity of vigilance and isolation rate and in scale-free networks are studied. Numerical simulation results show that the behaviors of vigilance and isolation have a great impact on the speed and scale of disease transmission.

Key words: scale-free network; vigilance behavior; isolation measures; propagation threshold

传染病不但危害人类身心健康,而且其流行会给人类的生存带来重大灾难,会给社会经济造成巨大的损失^[1].最开始探究的传染病模型都是以仓室模型为主的,其中最经典以及最基本的是 1927 年, Kermack 和 McKendrick 研究在伦敦流行的黑死病时所提出的 SIR 仓室模型和之后在 1932 年提出的 SIS 仓室模型.采用微分方程的方式来构造的传染病动力学传播模型虽然能够描述出许多流行病存在的动力学行为,但是由于这种模型中的所有个体是均匀混合的,因而忽略了个体传染能力的差异性,所以考虑网络的拓扑结构就成为了一个重要的研究内容.由于人与人之间的接触是具有异质性的,所以处于复杂网络中研究传染病的传播动力学更为现实.

收稿日期:2022-03-29; 修回日期:2022-07-09

基金项目:国家自然科学基金(59493300); 教育部博士点基金(9800462)

作者简介:顾梓玉(1997—),女,山西大同人,硕士研究生,研究方向为复杂网络传播动力学.

通信作者:杨丽新(1980—),女,副教授,博士,硕士生导师,研究方向为复杂网络及其应用.E-mail:yanglixin@sust.edu.cn

实际上,学者所提出的 WS 小世界网络模型和 BA 无标度网络模型更加真实地反映出流行病在人群中的传播状况^[2-4].之后研究者以 SIS, SIR 等传染病传播模型为基础模型,分析其不同复杂网络拓扑结构下传播的不同特性^[5-7],如王振国等^[8]对复杂网络中的 SIS 模型进行稳定性分析,给出疾病的传播阈值,分析得到当传播率小于传播阈值时,无病平衡点全局渐近稳定;反之,地方病平衡点全局渐近稳定.在现实生活中,人们会采取对自身的保护来预防被感染,政府也会介入.徐忠朴等^[9]研究个体意识对 SIS 网络传播模型的影响,结果表明不含个体意识的传播网络的一些性质在含个体意识的传染病传播网络也会有所体现;张海峰等^[10]主要研究了个体的自愿接种行为和外界的信息、恐慌以及舆论对个体行为的影响,发现这些行为都会改变传染病的传播;Sahneh 和 Scoglio 等研究在复杂网络传染病的传播动力学时,提出了一类具有警觉状态 A 的传染病传播模型,说明易感者与感染者接触后,会以一定的概率变成感染个体,也可能以一定的概率变成警觉个体,在警觉状态里的个体会采用一系列的预防措施来避免被感染,而这些措施的强度又会影响疾病的传播.在疾病传播过程中,不管是政府要求对染病者的强制隔离还是染病个体的自愿隔离,都会在一定程度上减少染病个体与其他个体的接触,从而降低疾病的传播范围,可以有效地改善疾病的传播阈值.

本文中,笔者在 SIRS 模型的基础上,考虑警觉行为和隔离措施建立 SAIQRS 传播模型.同时借助平均场理论得到传播阈值,利用数值仿真验证理论结果.

1 模型建立

1.1 经典的 SIRS 模型

在无标度网络中,节点表示个体,连边表示个体与个体之间的关系.基于 SIRS 传染病传播模型,在人口总数不变的情况下,网络中度为 k 的节点在 t 时刻处于易感状态、感染状态和恢复状态的密度用 $S_k(t)$, $I_k(t)$, $R_k(t)$ 来表示,并且满足归一化条件

$$S_k(t) + I_k(t) + R_k(t) = 1.$$

通过平均场理论可以得到微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d S_k(t)}{d t} &= -\beta k S_k(t) \Theta(t) + \mu R_k(t), \\ \frac{d I_k(t)}{d t} &= \beta k S_k(t) \Theta(t) - \lambda I_k(t), \\ \frac{d R_k(t)}{d t} &= \lambda I_k(t) - \mu R_k(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 β 为疾病传染率, λ 为治愈率, μ 为恢复者变为易感者的概率,辅助函数 $\Theta(t)$ 实际意义表示 t 时刻任意一个节点与感染节点相连的概率,并且独立于节点的度,表示为

$$\Theta(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k p(k) I_k(t).$$

其中, $\langle k \rangle = \sum_k k p(k)$ 表示网络中节点的平均度, $p(k)$ 表示网络的度分布.

1.2 具有警觉和隔离行为的传染病模型

在 SAIQRS 传染病传播模型中,节点的状态可分为以下几种:易感状态(S)、警觉状态(A)、感染状态(I)、隔离状态(Q)和被移除状态(R).

$$\left. \begin{aligned} \frac{d S_k(t)}{d t} &= -\beta k S_k(t) \Theta(t) - \alpha k S_k(t) \Theta(t) + \mu R_k(t), \\ \frac{d A_k(t)}{d t} &= \alpha k S_k(t) \Theta(t) - \gamma \beta k A_k(t) \Theta(t), \\ \frac{d I_k(t)}{d t} &= \beta k S_k(t) \Theta(t) + \gamma \beta k A_k(t) \Theta(t) - \lambda I_k(t) - \delta I_k(t), \\ \frac{d Q_k(t)}{d t} &= \delta I_k(t) - \eta Q_k(t), \\ \frac{d R_k(t)}{d t} &= \eta Q_k(t) + \lambda I_k(t) - \mu R_k(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, α 为易感个体与感染个体接触后变为警觉个体的概率, $\lambda\beta$ 为警觉个体与感染个体接触后被感染的概率, δ 为感染者被隔离的概率, μ 为从隔离状态恢复为易感状态的概率.

当传染病在系统中趋于稳定时, 有

$$\frac{d S_k(t)}{d t}=0, \frac{d A_k(t)}{d t}=0, \frac{d I_k(t)}{d t}=0, \frac{d Q_k(t)}{d t}=0, \frac{d R_k(t)}{d t}=0. \quad (3)$$

由(3)中第 1 个等式可知

$$-(\beta+\alpha) k S_k(t) \Theta(t)+\mu R_k(t)=0,$$

有

$$-(\beta+\alpha) k S_k(t) \Theta(t)+(\lambda+\delta) I_k(t)=0.$$

即可以得到 $S_k(t)$ 的表达式

$$S_k(t)=\frac{(\lambda+\delta) I_k(t)}{k(\alpha+\beta) \Theta(t)}. \quad (4)$$

同理可以得到

$$A_k(t)=\frac{\alpha(\lambda+\delta) I_k(t)}{\gamma \beta k(\alpha+\beta) \Theta(t)}. \quad (5)$$

$$Q_k(t)=\frac{\delta}{\eta} I_k(t). \quad (6)$$

$$R_k(t)=\frac{\delta+\lambda}{\mu} I_k(t). \quad (7)$$

根据归一化条件

$$S_k(t)+A_k(t)+I_k(t)+Q_k(t)+R_k(t)=1. \quad (8)$$

将(4)–(7)代入(8)可得

$$\frac{(\lambda+\delta)}{(\alpha+\beta) k \Theta(t)} I_k(t)+\frac{\alpha(\lambda+\delta)}{\gamma \beta k(\alpha+\beta) \Theta(t)} I_k(t)+I_k(t)+\frac{\delta}{\eta} I_k(t)+\frac{\lambda+\delta}{\mu} I_k(t)=1.$$

化简等式

$$\left[\frac{(\lambda+\delta)}{(\alpha+\beta) k \Theta(t)}+\frac{\alpha(\lambda+\delta)}{\gamma \beta k(\alpha+\beta) \Theta(t)}+1+\frac{\delta}{\eta}+\frac{\lambda+\delta}{\mu}\right] I_k(t)=1,$$

则可得到关于 $I_k(t)$ 的表达式

$$I_k(t)=\frac{\gamma \beta \mu \eta k(\alpha+\beta) \Theta(t)}{\mu \eta(\lambda+\delta)(\gamma \beta+\alpha)+\gamma \beta k(\alpha+\beta) \Theta(t)(\mu \eta+\mu \delta+\eta \lambda+\eta \delta)}.$$

由此可知自相容的等式

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k p(k) I_k(t) = \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k p(k) \frac{\gamma \beta \mu \eta k(\alpha+\beta) \Theta(t)}{\mu \eta(\lambda+\delta)(\gamma \beta+\alpha)+\gamma \beta k(\alpha+\beta) \Theta(t)(\mu \eta+\mu \delta+\eta \lambda+\eta \delta)}. \end{aligned}$$

由上式可以看出, $\Theta=0$ 是方程的一个解, 把等式右端看成是关于 Θ 变量的函数, 构造辅助函数 $F(\Theta)$, 分析 $\Theta(t)$ 的性质并得到非零解.

$$F(\Theta)=\frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k p(k) \frac{\gamma \beta \mu \eta k(\alpha+\beta) \Theta(t)}{\mu \eta(\lambda+\delta)(\gamma \beta+\alpha)+\gamma \beta k(\alpha+\beta) \Theta(t)(\mu \eta+\mu \delta+\eta \lambda+\eta \delta)}.$$

计算得

$$F'(\Theta)=\frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k p(k) \frac{\gamma \beta \mu^2 \eta^2 k(\alpha+\beta)(\lambda+\delta)(\gamma \beta+\alpha)}{[\mu \eta(\lambda+\delta)(\gamma \beta+\alpha)+\gamma \beta k(\alpha+\beta) \Theta(t)(\mu \eta+\mu \delta+\eta \lambda+\eta \delta)]^2}.$$

为了使 $F(\Theta)$ 有非零解, 须满足下面的不等式:

$$F'(\Theta)|_{\Theta=0} \geq 1,$$

即

$$\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \times \frac{\gamma\beta(\alpha + \beta)}{(\delta + \lambda)(\gamma\beta + \alpha)} \geq 1.$$

定义 $f(\beta)$ 函数

$$f(\beta) = \frac{\gamma\beta(\alpha + \beta)}{(\lambda + \delta)(\gamma\beta + \alpha)} - \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}.$$

$f(\beta) = 0$ 的解就是传播阈值 β_c .

2 数值模拟及分析

为了验证理论结果,借助数值模拟分析 SAIQRS 模型在无标度网络上的传播特性.选取网络的拓扑结构为无标度网络,当传染病在初始时刻传播时,随机选择一个节点作为感染节点,参数取值分别为总节点数 $N=1\ 000$,该网络是根据初始节点数 $m_0=3$ 进一步演化而来的,网络增长时每一个新节点引入的最少连边数为 $m=3$.假设初始网络时 m_0 个节点的连接情况构成完全图,从已有的 m_0 个节点的网络开始,把节点随机放在坐标轴内,采用增长机制与优先连接的机制生成 BA 无标度网络,则生成网络图,网络图中各节点的度的大小分布以及网络图中节点度分布如图 1~4 所示.

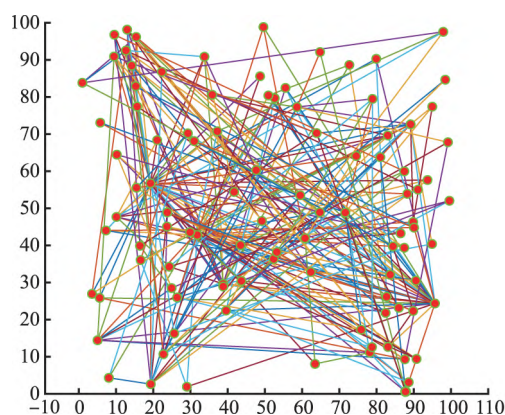


图 1 无标度网络图(部分)

Fig.1 Scale-free Network Diagram (Part)

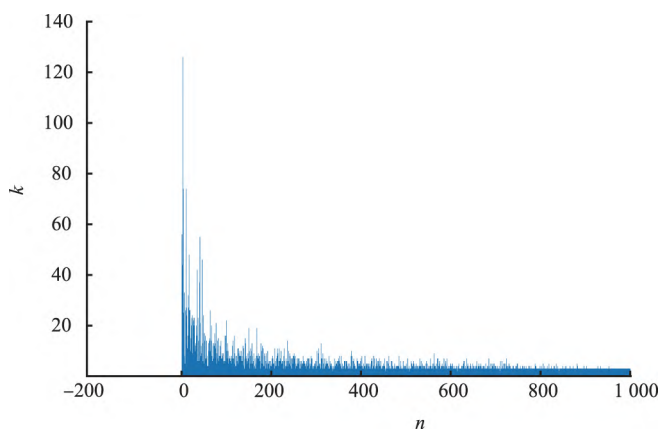


图 2 网络图各节点度的大小分布

Fig.2 The Size Distribution Diagram of Degree of Each Node in Network Diagram

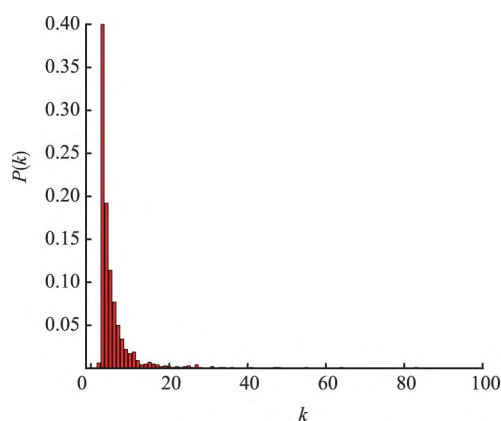


图 3 网络图节点度的概率分布

Fig.3 The Probability Distribution Graph of Node Degree of Network Graph

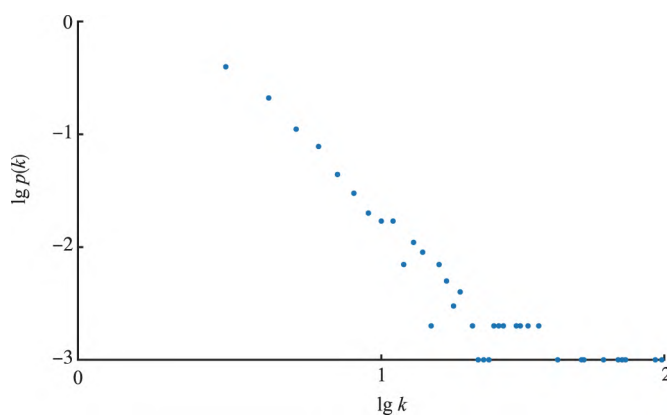
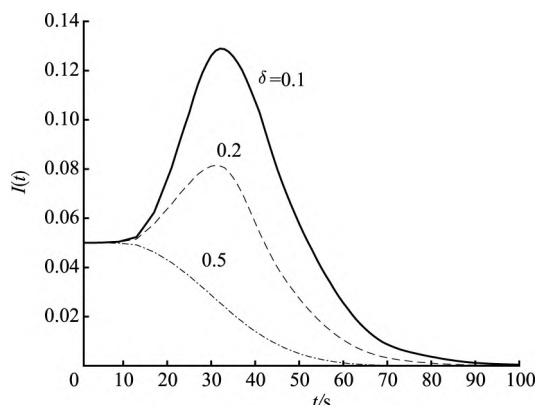
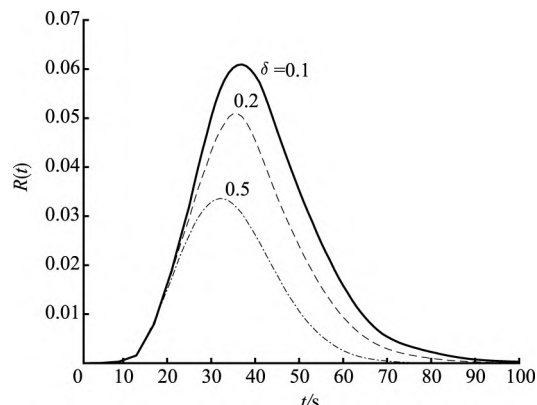


图 4 BA 无标度网络模型的度分布

Fig.4 Degree Distribution $p(k)$ of BA Scale-free Node Network Model($N=1\ 000$)

考虑隔离对传染病传播的影响,实验中 $\delta=0.1, 0.2, 0.5$.实验随机选择一个传播个体得到的感染个体的密度 $I(t)$ 和被移除个体的密度 $R(t)$ 随时间的变化情况分别如图 5,6 所示.

图5 BA网络, $I(t)$ 与 t 的关系Fig.5 BA Network, the Relationship Between $I(t)$ and t 图6 BA网络, $R(t)$ 与 t 的关系Fig.6 BA Network, the Relationship Between $R(t)$ and t

根据图5,6可以得出,其他参数一定时,随着 δ 的增大,传染病的传播速度有所减缓,传染病的扩散峰值也有明显减小,感染个体转化为被移除个体的速度变快,而当 δ 取到一定值时,感染个体及时被隔离,传染病不会暴发.意味着如果能够及时对感染者进行隔离,就会降低传染病的传播速度,那么传染病的传播范围也会变小.

考虑警觉对传染病传播的影响,实验中随机选择一个传播个体得到的感染个体的密度 $I(t)$ 随时间 t 的变化情况如图7所示.可见,4条曲线从上到下分别对应警觉率低、警觉强度小的个体;警觉率低、警觉强度大的个体;警觉率高、警觉强度小的个体;警觉率高、警觉强度大的个体.警觉率越高,个体感染的速度越慢,传染病的传播规模就越小.警觉强度越大,说明 γ 的值就越小,个体采取的防护措施越有效,与感染个体接触的概率小,从而感染速度减缓,导致疾病传播的规模变小,疾病持续的时间变短.最终可以得到警觉率高、警觉强度大的个体抑制传染病扩散的效果更好.

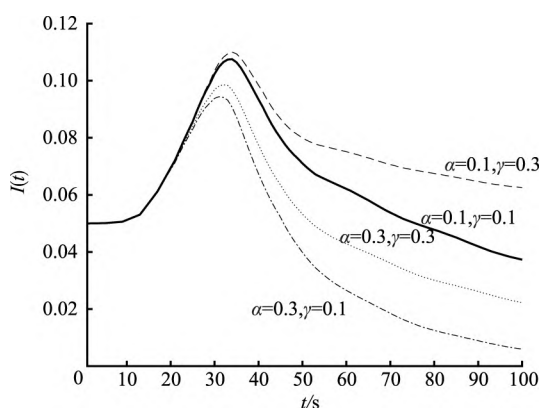
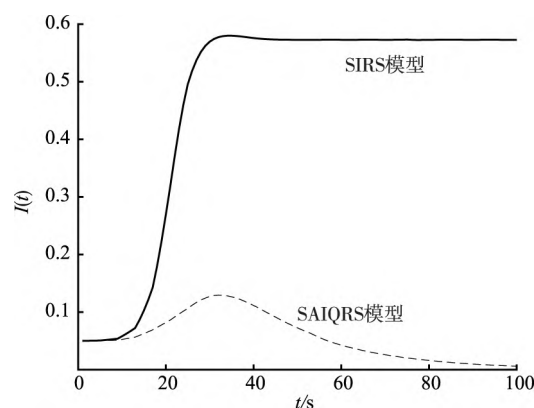
图7 BA网络,考虑警觉, $I(t)$ 与 t 的关系Fig.7 BA Network, Consider Vigilance the Relationship Between $I(t)$ and t 图8 BA网络,感染个体 $I(t)$ 与 t 的关系Fig.8 BA Network, the Relationship Between Infected Individual $I(t)$ and t

图8给出了当参数取定值时,SIRS模型和SAIQRS模型感染个体的密度 $I(t)$ 随时间的变化情况,可以看出具有警觉和隔离措施的传染病传播模型疾病传播速度、传播规模都低于SIRS模型,SIRS模型还可能出现疾病不会消亡的情况.由此可以得出,警觉和隔离行为会极大地抑制疾病的传播.

3 结论

研究了一种具有警觉行为和隔离行为的SAIQRS模型,该模型讨论了2种行为对传染病的影响.通过利用平均场理论得到传播阈值的关系式,分析得出,当具有警觉行为和隔离行为时,传播阈值也会随之增加.结合理论分析和数值模拟结果发现,个体对于传染病传播的警觉率越高警觉强度越大,即采取的预防传染病的

措施效果越明显时,个体被感染的概率就越低;并且提高感染个体的隔离率可大大降低感染个体与健康个体的接触概率,从而减小传染病的传播规模.

人类社会存在着大量可以用复杂网络描述的系统,如交通运输方面的公路网、社会方面的友谊网、自媒体网络的舆论传播等都可以参考上述结果进行研究.

参考文献:

- [1] 马知恩,周一仓,王稳地,等.传染病动力学的数学建模与研究[M].北京:科学出版社,2004.
MA Zhien,ZHOU Yicang,WANG Wendi,et al.Mathematical Modeling and Research on Dynamic of Infections Diseases[M].Beijing,Science Press,2004.
- [2] WATTS D J,STROGATZ S H.Collective Dynamics of 'Small-World' Networks[J].Nature,1998,393(6684):440-442. doi:10.1038/3
- [3] BARABASI A L,ALBERT R.Emergence of Scaling in Random Networks[J].Science,1999,286(5439):509-512. doi:10.1126/science.286.5439.509
- [4] PASTOR-SATORRAS R,VESPIGNANI A.Epidemic Spreading in Scale-free Networks[J].Physical Review Letters,2001,86(14):3200-3203. doi:10.1103/PhysRevLett.86.3200
- [5] LIU Junli,ZHANG Tailei.Epidemic Spreading of an SEIRS Model in Scale-free Networks[J].Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2011,16(8):3375-3384. doi:10.1016/j.cnsns.2010.11
- [6] 张海峰,傅新楚.含有免疫作用的 SIR 传染病模型在复杂网络上的动力学行为[J].上海大学学报,2007,13(2):189-192. doi:10.3969/j.issn.1007-2861.2007.02.018
ZHANG Haifeng,FU Xinchu.Dynamic Behavior of SIR Epidemic Model with Immunity on Complex Networks[J].Journal of Shanghai University,2007,13(2):189-192.
- [7] PEI Weidong,CHEN Zengqiang,YUAN Zhuzhi.A Dynamic Epidemic Control Model on Uncorrelated Complex Networks[J].Chinese Physics B,2008,17(2):373-379. doi:10.1088/1674-1056/17/2/003
- [8] 王振国,刘桂荣.复杂网络中的 SIS 传染病模型的稳定性分析[J].河南科学,2016,34(3):301-304.
WANG Zhenguo,LIU Guirong.Analysis of Stability of an SIS Epidemic Model in Complex Networks[J].Henan Science,2016,34(3):301-304.
- [9] 徐忠朴,李科赞.一类含个体意识的 SIS 网络传播模型分析[J].桂林电子科技大学学报,2014,34(6):503-508. doi:10.3969/j.issn.1673-808x.2014.06.015
XU Zhongpu,LI Kezan.Analysis of an SIS Networks Epidemic Model with Individual Awareness[J].Journal of Guilin University of Electronic Technology,2014,34(6):503-508.
- [10] 张海峰,王阳阳,汪秉宏.行为反应对复杂网络上传染病动力学的影响[J].复杂系统与复杂性科学,2012,9(3):13-21. doi:10.3969/j.issn.1672-3813.2012.03.002
ZHANG Haifeng,WANG Yangyang,WANG Binghong.The Impacts of Behavioral Responses on the Spread of Infectious Disease on Complex Networks[J].Complex Systems and Complexity Science,2012,9(3):13-21.

(责任编辑 刘新喜)