Análise do circuito RC: resposta a um degrau

Pedro Fonseca
pf@ua.pt

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro

Introdução

Num circuito RC (como noutros circuitos que integram condensadores ou bobines), a relação entre corrente e tensão não é definida através de uma simples relação de proporção direta, como no caso das resistências, mas através da derivada ou do integral de uma dessas grandezas físicas.

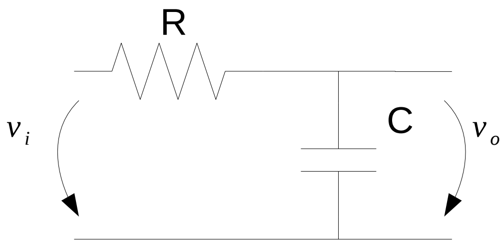

Figura 1: Circuito RC

Neste texto, far-se-á uma análise simples do circuito RC (figura 1) para determinar a resposta a uma função degrau (figura 3). Esta análise permite introduzir o conceito de equação diferencial e qual a sua aplicação em Engenharia, usando o exemplo de um circuito elétrico. O resultado obtido mostra que a resposta do circuito a uma função degrau é uma função do tipo exponencial, o que permite exemplificar (ainda que de uma forma superficial) a relevância da função e^x no campo da Engenharia e das ciências físicas.

Resposta no tempo

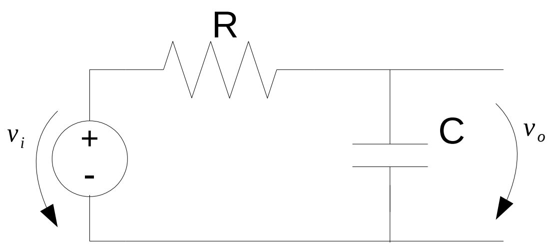

Figura 2: Circuito RC

A análise que se segue do circuito da figura 1, que se repete na figura 2 incluindo agora a fonte de tensão geradora da tensão v_i, tem o objetivo de determinar qual a tensão $v_o(t)$ que ocorre aos terminais do condensador quando é aplicada, do lado esquerdo do circuito, uma determinada tensão $v_i(t)$. A $v_i(t)$ chama-se, normalmente, a *entrada* do circuito e $v_o(t)$ é a *saída*, ou *resposta*, do circuito. Refraseando o objetivo, agora numa linguagem mais comum em Engenharia, pretende-se determinar a resposta $v_o(t)$ do circuito RC da figura 1 à entrada $v_i(t)$.

Expressão geral da relação entrada-saída

Num condensador, a tensão aos seus terminais $v_c(t)$ e a corrente $i_c(t)$ que o atravessa estão relacionadas pela expressão:

$$i_c(t)=C\,v_c'(t) \tag{1}$$

em que *C* é a capacidade do condensador.

Do circuito da figura 1, obtemos para o valor da corrente $i_R(t)$ que atravessa a resistência:

$$i_R(t)=\frac{v_i(t)-v_o(t)}{R} \tag{2}$$

Sabendo que $v_c(t)=v_o(t)$ e que a corrente que percorre a resistência é a corrente que percorre o condensador, $i_R(t)=i_c(t)$, temos:

$$\frac{v_i(t)-v_o(t)}{R}=C\,v_o'(t) \tag{3}$$

ou

$$RC\,v_o'(t)+v_o(t)-v_i(t)=0 \tag{4}$$

A equação (4) descreve assim a relação entre $v_i(t)$ e $v_o(t)$, ou seja, entre a entrada e a saída do circuito RC. Através dela podemos saber qual a tensão que irá aparecer em $v_o(t)$ sempre que impusermos uma tensão à entrada $v_i(t)$ ou, dito de outra forma, qual a resposta do circuito a uma entrada $v_i(t)$.

Aplicação à função degrau u(t)

Para calcular a resposta do circuito RC num caso concreto, iremos considerar que a tensão $v_i(t)$ é inicialmente zero e que, num determinado instante, passa a ter o valor V. Também para simplificar, iremos considerar que tal ocorre no instante $t=0$. Esta variação corresponde, por exemplo, a ligar uma fonte de tensão de valor V aos terminais de entrada v_i no instante $t=0$.

A função "degrau" u é definida por:

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases} \tag{5}$$

e o gráfico da função *u* (figura 3) mostra claramente a razão do seu nome.

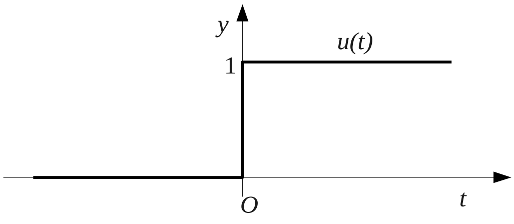

Figura 3: Gráfico da função y=u(t)

Esta função *u* é muito usada em Eng. Eletrónica porque permite representar, analiticamente, eventos como o ligar de uma fonte de tensão ou o actuar de um interruptor no instante $t=0$ [1]. Na figura seguinte, o ato de comutar o interruptor, no instante $t=0$, para ligar a fonte ao circuito no desenho do lado esquerdo, tem o mesmo efeito que, no circuito do lado direito, ter uma fonte de tensão, permanentemente ligada, cuja tensão é dada por $v_s(t)=V\cdot u(t)$; ou seja, uma tensão que é 0, para $t<0$, e que é *V* para $t\geq 0$.

1 Questão: como representar um interruptor que é ligado, por exemplo, no instante *t*=2?...

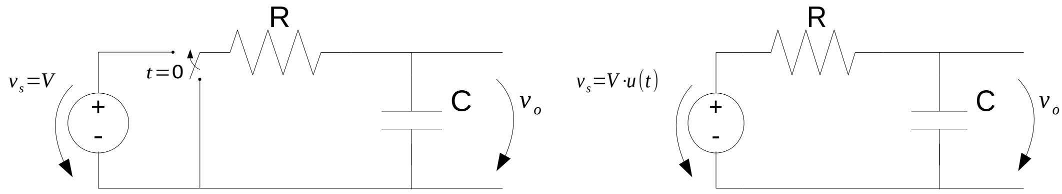

Figura 4: Representações de uma fonte de tensão que é ligada ao circuito no instante t=0

Retomando o circuito da figura 1, vamos considerar que, no instante t=0, o interruptor muda de posição e passa a ligar, ao circuito RC, uma fonte de tensão com uma d.d.p. *V*. Assim sendo, a tensão à entrada $v_i(t)$ pode ser representada por uma função degrau com amplitude *V*, e temos, para $t>0$:

$$RC\,v_o'(t)+v_o(t)-V=0 \tag{6}$$

Esta equação é uma equação diferencial de 1.ª ordem ("1.ª ordem" porque é uma equação que envolve a função e a sua primeira derivada) e define, para os instantes t>0, a resposta do circuito RC a uma d.d.p. *V* aplicada aos seus terminais de entrada. Resolver esta equação é matéria abordada nas disciplinas de Análise Matemática (ou Cálculo) e não será tratada aqui.

Interessa saber que "equação diferencial" é uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente, a função desconhecida e as suas derivadas. Neste caso, a variável independente é t (o tempo) e a função desconhecida é v_o (a tensão de saída do circuito em função do tempo). A *solução de uma equação diferencial* é uma função que verifica essa equação. Isto é, uma função f tal que, se se substituir v_o por f na equação diferencial, obtém-se uma proposição verdadeira (como, por exemplo, 0=0). O conceito é idêntico ao já conhecido em equações algébricas: na equação polinomial $x^2-4=0$, x=2 é uma solução dessa equação porque, se se substituir x por 2, obtém-se uma proposição verdadeira: 0=0. As soluções de equações algébricas são valores (reais ou complexos); as soluções de equações diferenciais são funções.

Sem indicar qual o processo para determinar a solução de uma equação diferencial, pode-se avançar que uma das soluções possíveis para (6) é:

$$v_o(t)=V-V\,e^{-t/RC} \tag{7}$$

Calculando a derivada desta função e substituindo em (6), é fácil verificar que esta função é uma solução da equação diferencial que rege o funcionamento do circuito RC. Assim, a equação (7) representa, para valores de t>0, a resposta do circuito RC a uma função degrau de amplitude *V* aplicada no instante t=0.

Este resultado mostra também a razão pela qual a função exponencial e^{kx} é tão importante em Engenharia (e não só...): é a única função em que a derivada é igual à própria função a menos de uma constante, o que a torna muito prática para resolver equações diferenciais do tipo da equação (6).

O produto *RC* que surge em (7) é denominado a *constante de tempo do circuito*. Curiosamente (ou talvez não...) tem a duração de um tempo (a sua unidade são segundos) e define a rapidez com que o sinal de saída converge para o valor final. Valores elevados de *RC* implicam uma convergência lenta; valores baixos de *RC* significam uma convergência rápida.

Consideremos agora a seguinte função:

$$v_o(t)=V-\frac{V}{2}e^{-t/RC} \tag{8}$$

Derivando esta função e substituindo na equação diferencial do circuito RC, verificamos que ela é também uma solução desta equação diferencial e é, portanto, uma resposta possível para o circuito RC quando a entrada é um degrau de amplitude V. Põe-se agora a questão: como pode o mesmo circuito ter duas resposta diferentes para a mesma entrada? A resposta fica a cargo do leitor... [Sug.: esboçar o gráfico das duas funções. Não esquecer que estas funções representam $v_o(t)$ para t>0.]

Outras abordagens do problema

A análise feita acima emprega apenas, como ferramentas matemáticas, conceitos elementares de álgebra, diferenciação e resolução de equações diferenciais. Numa fase mais avançada do curso, os alunos encontrarão métodos mais avançadas para abordar estes problemas, nomeadamente o recurso a transformadas de Fourier e de Laplace, que são as ferramentas mais utilizadas nestas situações. No entanto, o método exposto aqui tem a vantagem de recorrer apenas a conhecimentos básicos de matemática.

Conclusão

Fez-se a análise do circuito RC para obter a resposta quando a entrada é uma função degrau, $u(t)$, com amplitude *V*. Nesse processo, obteve-se uma equação diferencial, cuja solução corresponde à resposta do circuito a essa entrada. Este exemplo mostra a importância que tem, para quem trabalha com este tipo de circuitos, saber dominar as ferramentas de Cálculo Matemático e, em concreto, os métodos e princípios para a solução de equações diferenciais.

Rev.	**Data**	**Descrição**
54	Dez. 2010	Versão inicial.
102	Nov. 2012	Alteração aos desenhos do circuito. Correções no texto.

Versão atual: 102