Vybrané příklady před druhým průběžným testem

4ST201 Statistika

28. listopadu 2019

Obsah

1 Úvod

Následující příklady byly vybrány jako typové pro účely opakování před druhým průběžným testem.

2 Úlohy

Úloha 1.
V zásilce 100 kusů součástek byl vždy změřen dlouhý rozměr součástky. Průměrná hodnota dlouhého rozměru součástky byla 156 cm, směrodatná odchylka dlouhého rozměru součástky byla 2 cm. Určeme

(i) 95 % oboustranný interval spolehlivosti pro průměr dlouhého rozměru součástky.
(ii) 95 % levostranný interval spolehlivosti pro průměr dlouhého rozměru součástky.
(iii) 95 % pravostranný interval spolehlivosti pro průměr dlouhého rozměru součástky.

Řešení. Víme, že pro $n = 100$ součástek byla jejich průměrná délka $\bar{x} = 156$ cm a směrodatná odchylka $s_x = 2$ cm. Protože $n \gg 30$, lze ve vzorcích pro $100(1-p)$ % i $100(1-p/2)$ % intervalové odhady použít kvantily standardního normálního rozdělení, kde $p = 0{,}05$. Pak je tedy

(i) protože je $P\left(\bar{x} - u_{1-p/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-p/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}}\right) = 1 - p$, dostáváme pro průměrnou délku dlouhého rozměru součástky konkrétní meze

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - u_{1-p/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}}; \bar{x} + u_{1-p/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}} \right\rangle =$$
$$= \left\langle 156 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{2^2}{100}}; 156 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{2^2}{100}} \right\rangle =$$
$$= \langle 155{,}60; 156{,}39\rangle \ \ [\text{cm}].$$

(ii) protože je $P\left(\bar{x} - u_{1-p} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}} \leq \mu\right) = 1 - p$, dostáváme pro průměrnou délku dlouhého rozměru součástky konkrétní meze levostranného intervalu

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - u_{1-p} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}}; \infty \right) =$$
$$= \left\langle 156 - 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{2^2}{100}}; \infty \right) =$$
$$= \langle 155{,}67; \infty) \ \ [\text{cm}].$$

(iii) protože je $P\left(\mu \leq \bar{x} + u_{1-p} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}}\right) = 1 - p$, dostáváme pro průměrnou délku dlouhého rozměru součástky konkrétní meze pravostranného intervalu

$$\mu \in \left(-\infty; \bar{x} + u_{1-p} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}} \right\rangle =$$
$$= \left(-\infty; 156 + 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{2^2}{100}} \right\rangle =$$
$$= (-\infty; 156{,}33\rangle \ \ [\text{cm}].$$

□

Úloha 2.
V zásilce je 80 kusů zboží. Náhodně vybereme osm kusů a postupně je zvážíme. Získané hmotnosti (v kilogramech) jsou

$$8 \quad 8 \quad 9 \quad 7 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 9.$$

Určeme bodový odhad střední hodnoty hmotnosti jednoho kusu zboží a odhad rozptylu hodnoty hmotnosti jednoho kusu zboží. Měly-li dva z vybraných osmi kusů zboží vadu, jaký je bodový odhad populační četnosti zboží s vadou?

Řešení. Zřejmě je nejlepším bodovým odhadem střední hodnoty hmotnosti μ jednoho kusu zboží aritmetický výběrový průměr $\bar{x}$, tedy $\hat{\mu} = \bar{x}$, číselně pak $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{1}{8}(8+8+9+7+6+8+9+9) = 8$ kg.

Obdobně nejlepším bodovým odhadem rozptylu σ^2 hodnoty hmotnosti jednoho kusu zboží je výběrový rozptyl s_x^2, tedy $\hat{\sigma}^2 = s_x^2$, číselně pak $\hat{\sigma}^2 = s_x^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{8-1} \doteq 1{,}14$ kg^2.

Jsou-li dva z osmi vybraných kusů zboží s vadou, je nejlepším bodovým odhadem populační četnosti π zboží s vadou výběrová četnost zboží s vadou, tedy $\hat{\pi} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. □

Úloha 3.
Změřili jsme tělesnou výšku šesti žen a získali jsme následující hodnoty (v centimetrech)

$$163 \quad 175 \quad 177 \quad 165 \quad 171 \quad 174.$$

Předpokládáme, že tělesná výška ženy sleduje normální rozdělení s (populačním) rozptylem 49 cm^2. Určeme

(i) bodový odhad populační střední hodnoty tělesné výšky ženy;
(ii) oboustranný 95% interval spolehlivosti pro populační střední hodnotu tělesné výšky ženy;
(iii) nutný počet žen, jejichž tělesnou výšku bychom museli změřit, abychom snížili přípustnou chybu odhadu[1] populační střední hodnoty tělesné výšky ženy na 1 cm.

Řešení.

(i) Nejlepším bodovým odhadem střední hodnoty tělesné výšky μ ženy je aritmetický výběrový průměr $\bar{x}$, tedy $\hat{\mu} = \bar{x}$, číselně pak $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{1}{6}(163+175+177+165+171+174) \doteq 170{,}83$ cm.
(ii) Protože je $\bar{x} \doteq 170{,}83$ cm, $s_x = \sqrt{49} = 7{,}00$ cm, $n = 6$ a $p = 0{,}05$, s použitím $P\left(\bar{x} - u_{1-p/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-p/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}}\right) = 1 - p$ dostáváme pro populační střední hodnotu tělesné výšky ženy konkrétní meze

$$\begin{aligned} \mu \in & \left\langle \bar{x} - u_{1-p/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}}; \bar{x} + u_{1-p/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}} \right\rangle \doteq \\ \doteq & \left\langle 170{,}83 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{7^2}{6}}; 170{,}83 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{7^2}{6}} \right\rangle \doteq \\ \doteq & \langle 165{,}23; 176{,}43 \rangle \end{aligned}$$

(iii) Víme-li, že přípustná chyba (tedy polovina délky intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu) odhadu populační střední hodnoty tělesné výšky ženy má být maximálně Δ, platí

[1] Jde o poloviční délku intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu.

$$u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n}} \leq \Delta,$$

tedy

$$n \geq \left\lceil \frac{u_{1-\alpha/2}^2 \cdot s_x^2}{\Delta^2} \right\rceil.$$

Číselně pak pro $\Delta = 1{,}00$ cm, $s_x = 7{,}00$ cm a $p = 0{,}05$ dostáváme

$$n \geq \left\lceil \frac{1{,}96 \cdot 7{,}00^2}{1{,}00^2} \right\rceil \doteq \lceil 188{,}2 \rceil = 189.$$

Minimální nutný počet žen, které je třeba změřit tak, že předpokládáme stále stejnou hodnotu variability jejich tělesné výšky a chceme snížit přípustnou chybu odhadu populační střední hodnoty jejich tělesné výšky na 1 cm, je roven 189. □

Úloha 4.
Ředitel tvrdí, že průměrná mzda v jeho firmě je 25000 korun. Chceme ověřit jeho tvrzení, neboť se domníváme, že údaj o průměrné mzdě nadhodnotil. Máme údaje o 49 mzdách, ze který jsme spočítali průměr 23929 korun a výběrovou směrodatnou odchylku 5603 korun. Předpokládáme, že mzdy mají normální rozdělení. Hladinu významnosti volme 0,05.

Řešení. Označme jako μ střední hodnotu celkové průměrné mzdy v dané firmě. Dále víme, že $\bar{x} = 23929$ Kč, $s_x = 5603$ Kč a $\alpha = 0{,}05$. Dle tvrzení ředitele je $\mu = 25000$ Kč, máme však podezření, že tento údaj je nadhodnocený, tedy že reálně je $\mu < 25000$ Kč. Testujme tedy nulovou hypotézu $H_0 : \mu = 25000$ proti alternativní hypotéze $H_1 : \mu < 25000$ pomocí testového kritéria $T = \frac{\bar{x}-\mu}{s_x}\sqrt{n}$.

Za platnosti nulové hypotézy je tedy $\mu = 25000$ a dále $T = \frac{\bar{x}-\mu}{s_x}\sqrt{n} = \frac{23929-25000}{5603}\sqrt{49} \doteq -1{,}338$.

Protože je alternativní hypotéza jednostranná, je kritický obor pro zamítnutí nulové hypotézy $W_\alpha = \{t : t \leq -t_{1-\alpha}(n-1)\}$. Pro $n = 49$ a $\alpha = 0{,}05$ je $t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0{,}95}(48) \doteq 1{,}677$, takže $W_\alpha = W_{0{,}05} = \{t : t \leq -t_{1-\alpha}(n-1)\} = \{t : t \leq -1{,}677\}$[2].

Protože $T \doteq -1{,}338 \notin W_{0{,}05} = \{t : t \leq -1{,}677\}$, nezamítáme nulovou hypotézu o tom, že průměrná mzda ve firmě je rovna 25000 Kč. □

Úloha 5.
V malé nemocnici se za poslední měsíc narodilo 90 dívek a 60 chlapců. Na hladinách významnosti (i) 0,05 a (ii) 0,01 chceme otestovat hypotézu, zda se dívky a chlapci rodí se stejnou pravděpodobností.

[2] Vzhledem k $n > 30$ by bylo možné rovněž použít kvantily standardního normálního rozdělení.

Řešení. Označme symbolem P náhodnou veličinu vracející počet dívek, které se v dané nemocnici narodí za každý měsíc. Pro předchozí měsíc bylo zřejmě $P = \frac{90}{90+50} = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Máme-li testovat, zda se dívky a chlapci rodí se stejnou pravděpodobností, testujeme tak vlastně nulovou hypotézu $H_0 : P = \pi_0 = 0{,}5$ o tom, že pravděpodobnost narození dívky je $P = 0{,}5$ a pravděpoobnost narození chlapce je $1 - P = 1 - \pi_0 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, a to proti alternativní hypotéze $H_1 : P \neq 0{,}5$.

Značme $n = 90 + 60 = 150$ celkový počet narozenýh dětí. Za platnosti nulové hypotézy sleduje náhodná veličina $U = \frac{P-\pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n}$, kterou použijeme jako testové kritérium, standardní normální rozložení. Zřejmě je $U = \frac{P-\pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}\sqrt{n} = \frac{0{,}6-0{,}5}{\sqrt{0{,}5\cdot(1-0{,}5)}}\sqrt{150} \doteq 2{,}449$.

(i) Pro $\alpha = 0{,}05$ je $W_\alpha = W_{0,05} = \{u : |u| \geq u_{1-\alpha/2}\} = \{u : |u| \geq 1{,}960\}$. Protože $U \doteq 2{,}449 \in W_{0,05} = \{u : |u| \geq 1{,}960\}$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 nulovou hypotézu o tom, že dívky a chlapci se rodí se stejnou pravděpodobností.

(ii) Pro $\alpha = 0{,}01$ je $W_\alpha = W_{0,01} = \{u : |u| \geq u_{1-\alpha/2}\} = \{u : |u| \geq 2{,}576\}$. Protože $U \doteq 2{,}449 \notin W_{0,01} = \{u : |u| \geq 2{,}576\}$, nezamítáme na hladině významnosti 0,01 nulovou hypotézu o tom, že dívky a chlapci se rodí se stejnou pravděpodobností.

Snadno nahlédneme, že pro nižší hladinu významnosti je obecně obtížnější zamítnout nulovou hypotézu. U nižší hladiny významnosti totiž tolerujeme nižší pravděpodobnost nastání chyby prvního typu, tj. že bychom nesprávně zamítli nulovou hypotézu, když by ta reálně platila. Proto, aby byla tato pravděpodobnost nastání chyby prvního typu snížena, je obecně obtížnější zamítnout nulovou hypotézu – když totiž není nulová hypotéza zamítnuta (resp. je to obtížnější a možné jen s daty více odporujícími nulové hypotéze), nemůje obecně dojít k chybě prvního typu, ať už jde o nulovou hypotézu odpovídající, či neodpovídající realitě. To je dobře ilustrováno v tomto příkladu. □

Úloha 6.

Bylo vybráno 73 polí stejné kvality. Na 38 z nich se zkoušel nový způsob hnojení, zbývajících 35 bylo ošetřeno původním způsobem. Průměrné výnosy pšenice při novém způsobu hnojení byly 5,4 tun na hektar a výběrový rozptyl byl 0,27. Průměrné výnosy pšenice při původním způsobu hnojení byly 4,7 tun na hektar a výběrový rozptyl byl 0,24. Chceme zjistit, zda nový způsob hnojení má vliv na výnosy pšenice. Hladinu významnosti volme 0,05.

Řešení. Označme průmerný výnos pšenice při původním hnojení pomocí μ_1 a novém hnojení μ_2. Ze zadání víme, že průměrné výnosy byly pro původní typ hnojení $\bar{x}_1 = 4{,}7$ a nový typ hnojení $\bar{x}_2 = 5{,}4$, příslušné rozptyly byly $s^2_{x,1} = 0{,}24$ a $s^2_{x,2} = 0{,}27$, a to pro $n_1 = 35$ a $n_2 = 38$. Testujme nyní nulovou hypotéze $H_0 : \mu_1 = \mu_1$ proti alternativní hypotéze $H_0 : \mu_1 \neq \mu_1$ pomocí testového kritéria $U = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$. Protože je obecně $\hat{\mu}_1 = \bar{x}_1$ a $\hat{\mu}_2 = \bar{x}_2$, zřejmě je

$$U = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s^2_{x,1}}{n_1} + \frac{s^2_{x,2}}{n_2}}} = \frac{4{,}7 - 5{,}4}{\sqrt{\frac{0{,}24}{35} + \frac{0{,}27}{38}}} \doteq -5{,}924.$$

Pro $\alpha = 0{,}05$ je $W_\alpha = W_{0,05} = \{u : |u| \geq u_{1-\alpha/2}\} = \{u : |u| \geq 1{,}960\}$. Protože $|U| \doteq 5{,}924 \in$

$W_{0,05} = \{u : |u| \geq 1{,}960\}$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 nulovou hypotézu o tom, že by průměrné hektarové výnosy pšenice mohly být u obou typů hnojení srovnatelné. ☐

Úloha 7.

Každou ze tří variant testu (A, B a C) napsali vždy čtyři náhodní studenti. Je třeba rozhodnout, zda jsou na základě výsledků v tabulce 1 varianty testu obdobně náročné, předpokládáme-li, že apriorní znalosti všech dvanácti studentů jsou srovnatelné.

		výsledek testu			
		1. student	2. student	3. student	4. student
varianta	A	91	81	74	57
	B	83	72	63	47
	C	71	69	58	40

Tabulka 1: Tabulka s výsledky z jednotlivých variant testů.

Řešení. Příklad je přehledově vyřešen v záložce `vysledky_vs_varianty_testu` přiloženého excelového souboru `vybrane_priklady_pred_druhym_prubeznym_testem.xlsx`. ☐

Úloha 8.

Z průzkumu trhu byla sestavena kontingenční tabulka preference budoucího bydliště dle pohlaví. Výsledky jsou uvedeny níže. Závisí preference budoucího bydliště na pohlaví? Zkoumejme na hladině významnosti 0,05.

		preference budoucího bydliště	
		město	venkov
pohlaví	muž	71	91
	žena	82	56

Řešení. Příklad je přehledově vyřešen v záložce `preferovane_bydliste_vs_pohlavi` přiloženého excelového souboru `vybrane_priklady_pred_druhym_prubeznym_testem.xlsx`. ☐

Úloha 9.

Při 600 hodech hrací kostkou byly zjištěny následující četnosti jednotlivých šesti stran

$$85, \quad 99, \quad 91, \quad 108, \quad 119, \quad 98.$$

Lze na hladině významnosti 0,05 považovat takovou kostku za spravedlivou?

Řešení. Příklad je přehledově vyřešen v záložce `600_hodu_kostkou` přiloženého excelového souboru `vybrane_priklady_pred_druhym_prubeznym_testem.xlsx`. □

Úloha 10.

V přiloženém souboru `vybrane_priklady_pred_druhym_prubeznym_testem.xlsx` jsou v záložce `udrzba_domu_vs_jeho_cena` vždy hodnoty nákladů na údržbu domu (v dolarech) a tržní cena domu (v tisících dolarů).

(i) Modelujme závislost nákladů na údržbu na ceně tržní domu regresní přímkou.

(ii) Zhodnoťme kvalitu modelu pomocí koeficientu determinace.

(iii) Odhadněme střední hodnotu nákladů u domů za 80 tisíc dolarů.

Řešení. Příklad je přehledově vyřešen v záložce `udrzba_domu_vs_jeho_cena` přiloženého excelového souboru `vybrane_priklady_pred_druhym_prubeznym_testem.xlsx`. □