Pravděpodobnost, náhodné veličiny a jejich charakteristiky

—

Supplementum ke cvičení 4ST201 Statistika

Lubomír Štěpánek[1, 2]

[1]Oddělení biomedicínské statistiky
Ústav biofyziky a informatiky
1. lékařská fakulta
Univerzita Karlova, Praha

[2]Katedra biomedicínské informatiky
Fakulta biomedicínského inženýrství
České vysoké učení technické v Praze

11. října 2019

Obsah

Příklad

- Jev A značí, že náhodně vybrané přirozené číslo je dělitelné pěti. Jev B značí, že dané číslo končí nulou. Co znamenají následující jevy?
  - (i) $A \cap B$
  - (ii) $A \cup B$
  - (iii) $\overline{A} \cap B$
  - (iv) $A \cup \overline{B}$

Příklad

- Házíme běžnou šestistěnnou hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že
  (i) při jednom hodu padne šestka?
  (ii) při jednom hodu padne sudé číslo?
  (iii) při dvou hodech padne dvakrát šestka?
  (iv) při dvou hodech nepadne ani jednou šestka?
  (v) při dvou hodech padne alespoň jednou šestka?
  (vi) při dvou hodech padne právě jednou šestka?
  (vii) při dvou hodech padne alespoň jednou sudé číslo?

  Kolikrát musíme minimálně hodit kostkou, aby byla pravděpodobnost, že během těchto hodů padne alespoň jedna šestka, větší než $0{,}95$?

Příklad

- V krabici je $b \in \mathbb{N}$ bílých koulí a $c \in \mathbb{N}$ černých koulí. Z krabice vytáhneme najednou tři koule.
  - S jakou pravděpodobností jsou všechny tři bílé?
  - S jakou pravděpodobností jsou všechny dvě bílé a jedna černá?

Příklad

- Z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ náhodně vybereme dvě čísla x a y. Jaká je pravděpodobnost jevu, že $\frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2}$?

Příklad

- Směs sazenic je tvořena ze $80~\%$ sazenicemi první jakosti a z $20~\%$ sazenicemi druhé jakosti. Sazenice první jakosti vyklíčí s pravděpodobností $0{,}9$, sazenice druhé jakosti vyklíčí s pravděpodobností $0{,}6$. S jakou pravděpodobností vyklíčí náhodně vybraná sazenice ze směsi?

Příklad

- V nákladu 150 pytlů ořechů z Turecka je 5 pytlů se zkaženými ořechy. Podobně v nákladu 250 pytlů z Afghánistánu je 5 pytlů se zkaženými ořechy.
  - S jakou pravděpodobností obsahuje náhodně vybraný pytel zkažené ořechy, pokud oba náklady zkompletujeme do jednoho?
  - S jakou pravděpodobností obsahuje náhodně vybraný pytel zkažené ořechy, pokud nejdříve vybereme náhodně náklad a pak náhodně jeden pytel?

Příklad

- V urně je sedm bílých a tři černé koule. Náhodně vybereme tři koule.
  - S jakou pravděpodobností jsou všechny bílé, pokud jsme je vybírali tak, že byly vždy vraceny zpět do urny po každém tahu?
  - S jakou pravděpodobností jsou všechny bílé, pokud jsme je vybírali tak, že nebyly po jednotlivých tazích vraceny zpět do urny?

Příklad

- V zásilce třiceti žárovek jsou tři vadné.
  - Vybereme-li ze zásilky náhodně pět žárovek, s jakou pravděpodobností mezi nimi nebude žádná vadná?
  - Vybereme-li ze zásilky náhodně pět žárovek, s jakou pravděpodobností mezi nimi bude právě jedna vadná?
  - Kolik žárovek musíme náhodně ze zásilky vyzkoušet, aby pravděpodobnost, že objevíme alespoň jednu vadnou, byla větší než $0{,}7$?

Náhodná veličina

- je popsána číselným (nebo symbolickým) výsledkem náhodného pokusu
  - např. příjem náhodně vybrané domácnosti, doba do poruchy přístroje, počet dětí v rodině, počet porodů za noc v dané porodnici apod.
- náhodné veličiny se obvykle značí velkými písmeny z konce abecedy, tedy X, Y, Z, ..., jejich konkrétní číselné realizace pak malými písmeny x, y, z, ...
  - např. je-li X počet porodů za noc v dané porodnici, pak $x = 6$ značí, že zde došlo k $X = x = 6$ porodům za noc
  - X, Y, Z, ..., mají tedy charakter proměnných, zatímco x, y, z, ..., mají charakter konkrétních čísel (konstant)
- náhodné veličiny mohou být diskrétní, či spojité

Rozdělení náhodné veličiny

- dáno *zákonem rozdělení náhodné veličiny*
    - tj. že náhodná veličina nabude konkrétní hodnoty nebo hodnoty z nějakého intervalu s určitou pravděpodobností
- lze postupně popsat
    - řadou rozdělení
    - distribuční funkcí
    - pravděpodobnostní funkcí, resp. hustotou
    - momentovou funkcí, resp. charakteristickou funkcí
- vhodnými ukazateli jsou pak střední hodnota a variabilita náhodné veličiny

Diskrétní náhodná veličina

- je popsána diskrétním (nespojitým) číselným (nebo symbolickým) výsledkem náhodného pokusu
  - např. počet ok v rámci hodu klasickou šestistěnnou kostkou
- diskrétní náhodná veličina X tedy může nabýt každé z k hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ s pravděpodobnostmi $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_k)$, respektive, pro vhodné $k \in \mathbb{N}$
  - např. pro diskrétní náhodnou veličinu X danou počtem ok v rámci hodu klasickou šestistěnnou kostkou je $k = 6$ a dále je $x_i = i$ a $P(X = x_i) = P(x_i) = \frac{1}{6}$ vždy $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$
- počet možných hodnot k, kterých náhodná veličina může nabývat, je nanejvýš spočetný
- platí tedy

$$\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} P(x_i) = 1$$

Řada rozdělení diskrétní náhodné veličiny

- obvykle dána tabulkou typu

x_1	x_2	$\dots$	x_k
$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\dots$	$P(x_k)$

- pro diskrétní náhodnou veličinu X danou počtem ok v rámci hodu klasickou šestistěnnou kostkou

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny

- je funkce typu $P_X : \mathbb{Z} \to \langle 0, 1 \rangle$, konkrétněji $P_X : x_i \to P(X = x_i)$
- vrací tedy pro hodnotu x_i diskrétní náhodné veličiny X pravděpodobnost $P(X = x_i) = P(x_i)$, že veličina této hodnoty nabude, kde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a $k \in \mathbb{N}$
- stále platí, že

$$\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} P(x_i) = 1$$

- a také

$$P(X \in \{x_i, x_j, \ldots\}) = P(\{x_i, x_j, \ldots\}) = \sum_{\chi \in \{x_i, x_j, \ldots\}} P(\chi)$$

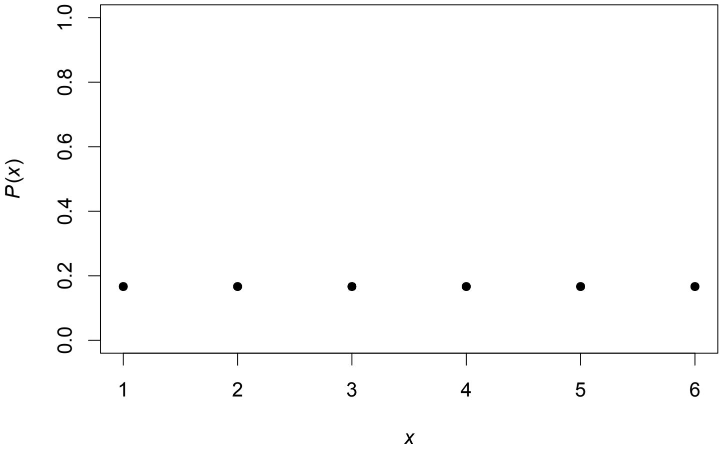
Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny

- pro diskrétní náhodnou veličinu X danou počtem ok v rámci hodu klasickou šestistěnnou kostkou platí

$$P_X(i) = P(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & i \in \{1, 2, 3, \ldots, 6\} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny

- pro diskrétní náhodnou veličinu X danou počtem ok v rámci hodu klasickou šestistěnnou kostkou



Distribuční funkce (diskrétní) náhodné veličiny

- je funkce typu $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, konkrétněji $F_X : x \rightarrow P(X \leq x)$
- vrací tedy pro libovolnou hodnotu $x \in \mathbb{R}$ pravděpodobnost $P(X \leq x)$, s jakou (diskrétní i spojitá) náhodná veličina X nepřevýší reálné číslo x
- píšeme tedy $F_X(x) = P(X \leq x)$

Vlastnosti distribuční funkce (diskrétní) náhodné veličiny

$\forall x \in \mathbb{R}$ je $0 \leq F_X(x) \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$ je $F_X(x) = P(X \leq x)$ a nabývá tedy pouze hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ $\square$

$F_X(x)$ je neklesající funkce

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ je $F_X(a) = P(X \leq a)$ a $F_X(b) = P(X \leq b) = P(X \leq a \cup X \in \langle a, b \rangle) = P(X \leq a) + P(X \in \langle a, b \rangle) > P(X \leq a)$, tedy $F_X(x)$ je neklesající $\square$

Platí, že $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ je $F_X(a) = P(X \leq a)$ a $F_X(b) = P(X \leq b) = P(X \leq a \cup X \in \langle a, b \rangle) = P(X \leq a) + P(X \in \langle a, b \rangle)$, tedy $F_X(b) - F_X(a) = P(X \leq a) + P(X \in \langle a, b \rangle) - P(X \leq a) = P(X \in \langle a, b \rangle)$, tudíž je $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ $\square$

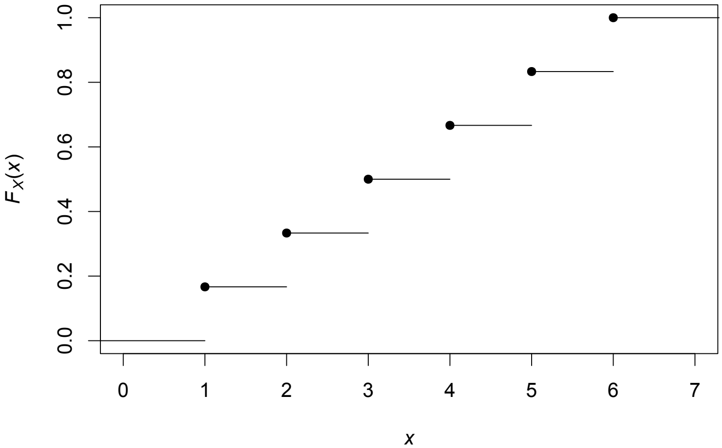
Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny

- pro diskrétní náhodnou veličinu X je také

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall \chi \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} : \chi \leq x} P(X = \chi)$$

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny

- pro diskrétní náhodnou veličinu X danou počtem ok v rámci hodu klasickou šestistěnnou kostkou



Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny

- ať diskrétní náhodná veličina X může nabýt každé z k hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ s pravděpodobnostmi $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_k)$, respektive, pro vhodné $k \in \mathbb{N}$
- pak střední hodnota $\mathbb{E}(X)$ diskrétní náhodné veličiny X je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i)$$

- zřejmě dále platí
  - pro $a, b \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
  - pro libovolné náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_p$ je $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_p) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \ldots + \mathbb{E}(X_p)$
  - pro nezávislé náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_p$ je $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_p) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(X_p)$

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny

- pro diskrétní náhodnou veličinu X danou počtem ok v rámci hodu klasickou šestistěnnou kostkou

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Rozptyl diskrétní náhodné veličiny

- ať diskrétní náhodná veličina X může nabýt každé z k hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_k$ s pravděpodobnostmi $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_k)$, respektive, pro vhodné $k \in \mathbb{N}$
- pak rozptyl $\mathrm{var}(X)$ diskrétní náhodné veličiny X je

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mathbb{E}(X))^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mathbb{E}(X))^2 P(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i)\right)^2\end{aligned}$$

- zřejmě dále platí
  - pro $a, b \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \mathrm{var}(X)$
  - pro nezávislé náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_p$ je $\mathrm{var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_p) = \mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(X_2) + \ldots + \mathrm{var}(X_p)$

Rozptyl diskrétní náhodné veličiny

- pro diskrétní náhodnou veličinu X danou počtem ok v rámci hodu klasickou šestistěnnou kostkou

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mathbb{E}(X))^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \mathbb{E}(X))^2 P(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i)\right)^2 \\
&= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \\
&- \left(\frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)\right)^2 \\
&= \frac{105}{36}
\end{aligned}$$

Alternativní rozdělení

- náhodná veličina X sleduje alternativní rozdělení, tedy $X \sim \mathcal{A}(p)$ s parametrem $0 \leq p \leq 1$, pokud nabývá jen dvou hodnot 0 a 1 s pravděpodobnostmi $P(X = 0) = p - 1$ a $P(X = 1) = p$
- pravděpodobnostní funkce je tedy

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) = \begin{cases} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, & x_i \in \{0, 1\} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

- snadno nahlédneme, že

$$\mathbb{E}(X) = p$$
$$\operatorname{var}(X) = p(1-p)$$

Příklad

- Student odpoví na otázku v testu bodovanou jedním bodem správně s pravděpodobností $p = 0{,}7$. Jaká je očekávaná střední hodnota a rozptyl počtu bodů, které student za takovou otázku získá?

Binomické rozdělení

- předpokládejme, že v každém z $n \in \mathbb{N}$ nezávislých náhodných pokusů[1] může nastat úspěch s pravděpodobností p a neúspěch s pravděpodobností $1 - p$, kde $0 \leq p \leq 1$
- náhodná veličina X vrací počet úspěchů, které během n pokusů nastanou
- pak náhodná veličina X sleduje binomické rozdělení, tedy $X \sim \text{binom}(n, p)$ s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $0 \leq p \leq 1$
- pravděpodobnostní funkce, tedy pravděpodobnost, že během n nezávislých náhodných pokusů nastane úspěch právě x-krát, je

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

[1] všimněme si, že jednotlivé pokusy samy o sobě sledují alternativní rozdělení

Binomické rozdělení

- pokud náhodná veličina X sleduje binomické rozdělení, tedy $X \sim \text{binom}(n, p)$, můžeme odvodit, že

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= np \\ \text{var}(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

Příklad

- Házíme desetkrát klasickou šestistěnnou kostkou. S jakou pravděpodobností padne právě čtyřikrát šestka? S jakou pravděpodobností padne nejvýše dvakrát?

Poissonovo rozdělení

- ať náhodná veličina X sleduje původně binomické rozdělení, tedy $X \sim \text{binom}(n, p)$ s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $0 \leq p \leq 1$
- pak je-li n dostatečně velké ($n > 30$) a p dostatečně malé ($p < 0{,}1$), lze binomické rozdělení aproximovat jednoparametrickým, Poissionovým rozdělením s $\lambda = np$, tedy $X \sim \text{Po}(\lambda)$
- náhodná veličina X sledující Poissonovo rozdělení vrací počet úspěchů, které nastanou během „velkého" počtu n pokusů, přičemž dílčí pravděpodobnost p nastání jednoho každého pokusu je „malá"
- pravděpodobnostní funkce, tedy pravděpodobnost, že během n nezávislých náhodných pokusů nastane úspěch právě x-krát, je

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Poissonovo rozdělení

- pokud náhodná veličina X sleduje Poissonovo rozdělení, tedy $X \sim \text{Po}(\lambda)$, můžeme odvodit, že

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \lambda \\ \operatorname{var}(X) &= \lambda \end{aligned}$$

Příklad

- Ve vybraném periodiku se objevují průměrně čtyři překlepy na každých jeho deset stránek. S jakou pravděpodobností bude na náhodně vybrané stránce periodika
  (i) žádný překlep?
  (ii) jeden překlep?
  (iii) dva překlepy?
  (iv) více než dva překlepy?

Hypergeometrické rozdělení

- předpokládejme, že uvažujeme sestavu N prvků, kde M prvků z nich má určitou vlastnost a $N-M$ prvků tuto vlastnost nemá
- ze sestavy těchto prvků postupně vybereme n prvků bez vracení (!)
- náhodná veličina X, která vrací počet prvků s určitou vlastností mezi n prvky, sleduje hypergeometrické rozdělení, $X \sim \text{hy}(N, M, n)$
- pravděpodobnostní funkce, tedy pravděpodobnost, že mezi n náhodně bez vracení vybranými prvky bude x-krát prvek s určitou vlastností, je

$$P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \max\{n-N+M, 0\} \leq x \leq \min\{M, n\} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Hypergeometrické rozdělení

- pokud náhodná veličina X sleduje hypergeometrické rozdělení, tedy $X \sim \mathrm{hy}(N, M, n)$, můžeme odvodit, že

$$\mathbb{E}(X) = n\frac{M}{N}$$

$$\mathrm{var}(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Příklad

- V sérii po dvě stě kusech je deset zmetků. Při přejímce náhodně vybereme pět kusů a podrobíme je destrukční zkoušce. Pokud není mezi pěti vybranými ani jeden zmetek, sérii přijmeme. S jakou pravděpodobností to nastane?

Literatura

- Hindls, Richard, Stanislava Hronová, Jan Seger a Jakub Fischer. *Statistika pro ekonomy*. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN: 978-80-86946-43-6.
- Marek, Luboš. *Statistika v příkladech*. Praha: Professional Publishing, 2015. ISBN: 978-80-7431-153-6.

Děkuji za pozornost!

lubomir.stepanek@vse.cz
lubomir.stepanek@lf1.cuni.cz
lubomir.stepanek@fbmi.cvut.cz

https://github.com/LStepanek/4ST201_Statistika