Kombinatorika a pravděpodobnost

1. Úloha (1 bod)
Za tuto úlohu získáte právě jeden bod, pokud správně uvedete hodnotu jednoho z několika neznámých čísel. Mezi těmito čísly je i číslo p. Kdybyste z nich vybírali náhodně, je pravděpodobnost vybraní čísla p rovna přesně p. Pokud jedno z těchto čísel dopředu vyřadíte (různé od p), pak pravděpodobnost, že vyberete číslo p, je větší než $1{,}2(p + p^2)$. Získejte jeden bod.

2. Úloha (1,5 bodu)
Házíme pětkrát spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že a) padne právě dvakrát hlava, b) padne nejvýše dvakrát hlava a c) padne alespoň dvakrát hlava?

3. Úloha (1,5 bodu)
Správce má v kapse celkem n klíčů od různých dveří budovy, mezi nimi i jeden klíč k hlavním dveřím. Před hlavními dveřmi postupně tahá klíče z kapsy jeden po druhém a zkouší jimi dveře odemknout. Vyzkoušené klíče zpět do kapsy nevrací. Jaká je pravděpodobnost, že dveře otevře až na k-tý pokus? Jaká je pravděpodobnost, že dveře odemkne nejpozději na l-tý pokus? A jaká je pravděpodobnost, že dveře neodemkne dříve než na m-tý pokus? Změní se nějak pravděpodobnost, pokud budou klíče navlečeny na kroužku a v tomto pořadí je bude správce zkoušet?

4. Úloha (1,5 bodu)
Kolika způsoby je možné rozdělit zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili mezi osm finalistů (pořadí na nemedailových pozicích nesestavujeme)? V kolika z těchto možností bude finalista ze Srí Lanky bronzový (je v osmici jen jeden)? V kolika z těchto možností bude finalista ze Srí Lanky na kterékoliv medailové pozici?

5. Úloha (1 bod)
Házíme takovou nespravedlivou (biasovanou) šestistěnnou hrací kostkou, že pravděpodobnost padnutí každé stěny je přímo úměrná počtu ok na této stěně. Určete pravděpodobnost, že padne sudý počet ok.

6. Úloha (1 bod)
Určete počet všech nejvýše pěticiferných čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje.

7. Úloha (1 bod)
Na oslavě je celkem n hostů. Při slavnostním přípitku si přiťukává každý s každým, kolik může být slyšet nejvíce ťuknutí?

8. Úloha (2 body)
Deset přátel si pravidelně sedá u stolu na svá místa.

a) Kolika navzájem různými způsoby se mohou u stolu usadit?
b) Předpokládejme nyní, že je stůl kulatý a dva případy, které mohou vzniknout pouhým přesednutím všech přátel o jedno místo doleva či doprava, považujeme za shodné. Kolika různými způsoby se mohou usadit ke stolu nyní?
c) Řešte a) i b) pro případ, že dva přátelé A a B chtějí vždy sedět hned vedle sebe.

9. Úloha (1 bod)
Určete počet všech nejvýše čtyřciferných čísel s různými číslicemi, která jsou sestavena z čísel 0, 2, 4, 6 a 8.

10. Úloha (2,5 body)
Množina $\mathcal{M}$ má mohutnost n, tedy počet jejich prvků je právě n. Určete

a) počet všech tříprvkových podmnožin množiny $\mathcal{M}$.
b) počet všech $(n-2)$-prvkových podmnožin množiny $\mathcal{M}$.
c) počet všech čtyřprvkových podmnožin množiny $\mathcal{M}$, které neobsahují prvek $x \in \mathcal{M}$.
d) počet všech pětiprvkových podmnožin množiny $\mathcal{M}$, které neobsahují prvek $x \in \mathcal{M}$, ale zároveň vždy obsahují prvek $y \in \mathcal{M}$.
e) počet všech podmnožin množiny $\mathcal{M}$ (včetně prázdné podmnožiny).

Vždy stanovte podmínky řešitelnosti zadání.

11. Úloha (2,5 bodu)
Kolika způsoby se může při nástupu seřadit n táborníků do řady? V kolika způsobech stojí táborník A po levici táborníka B? V kolika stojí A po pravici B? V kolika případech stojí táborníci A a B těsně vedle sebe? V kolika případech mezi A a B stojí minimálně jeden další táborník?

12. Úloha (2 body)
Odvoďte součet konečné řady

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

a) pomocí známého vztahu pro součet členů aritmetické posloupnosti,
b) pomocí vhodných vlastností některého kombinačního čísla.
HINT: Uvědomte si např., že počet úhlopříček m-úhelníku je možné spočítat jako součet počtu úhlopříček z prvního vrcholu do dalších $m-1$ vrcholů a počtu úhlopříček z druhého vrcholu do zbylých $m-2$ vrcholů atd. Stejně tak lze ale vyjádřit jako počet spojnic každého vrcholu m-úhelníku s každým jiným.

13. Úloha (2 body)
V košíku je 23 jablek, 21 hrušek a 17 broskví. Adam, matematik, si může z košíku vzít právě šest kusů ovoce tak, aby Bětka, která si bude vybírat po Adamovi vždy jeden kus od každého druhu zbylého ovoce, měla největší možný výběr. Kolik kusů od kterých druhů ovoce si Adam vybral?

14. Úloha (2 body)
Kolika způsoby může nastoupit d dívek a c chlapců do řady tak, aby a) nejdříve zleva stály všechny dívky a pak až chlapci a b) aby mezi žádnými dvěma chlapci nestála dívka?

15. Úloha (2 body)
V soustavě souřadnic Oxy je dán čtverec $1x1$ ohraničený body $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$ a $[1,1]$. V tomto čtverci náhodně vybíráme bod B o souřadnicích x, y. S jakou pravděpodobností je vzdálenost bodu B od pevně daného bodu M větší než $1/3$, jsou-li souřadnice bodu M

a) $M[2/3\,;\ 1/2]$,
b) $M[1;\ 1/2]$.

16. Úloha (2 body)
Kolika způsoby lze přemístit slova ve verši

“One R to rule Them All, One R to find Them!“

tak, abychom pokaždé získali odlišný verš (ne nutně smysluplný), přičemž se nemají promíchat slova první a druhé věty? Co když slova první a druhé věty míchat můžeme?
POZNÁMKA: Jedná se o ódu na statistický jazyk R (http://www.r-project.org/), souvislost s Pánem Prstenů je čistě náhodná.

17. Úloha (2 body)
Určete počet všech přirozených šesticiferných čísel, jejichž ciferný součet je sudý.

18. Úloha (3,5 bodu)
Kolik existuje navzájem různých přirozených čísel,

a) která jsou nejvýše čtyřciferná, nemají ve svém dekadickém zápisu nulu a jejich ciferný součet je 9?
b) která jsou nejvýše čtyřciferná, mají ve svém dekadickém zápisu nejvýše dvě nuly a jejich ciferný součet je 9?
c) která mají ve svém dekadickém zápisu nejvýše dvě nuly a jejich ciferný součet je 9?

19. Úloha (1 bod)
Musí mít nutně v městečku o 1500 obyvatelích dva občané zcela shodné iniciály? Jméno a příjmení začíná jedním z 32 různých znaků.

20. Úloha (9 bodů)
(Kombinatorické „jednohubky“)

a) Kolik různých „slov“ lze vytvořit přeházením písmen ve slově „kombinatorika“?
b) Klenotník má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může vytvořit prsten se třemi kameny?
c) Kolik existuje kvádrů s celočíselnými velikostmi hran, je-li každá hrana ≤ 10? Kolik z těchto kvádrů má právě dvě protilehlé strany čtvercové? Kolik z těchto kvádrů jsou krychle?
d) Kolik nejvíce trojúhelníků může vzniknout, pokud strany trojúhelníků vybíráme z množiny $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$? Kolik z nich je rovnoramenných a kolik z nich je rovnostranných?
e) Vůně parfému vzniká libovolnou kombinací některých z *n* přísad. Každá přísada může, nebo nemusí být do výsledné vůně přidána; pokud je, výslednou vůni ovlivní. Kolik nejvýše různých vůní můžeme získat kombinováním *n* přísad?

21. Úloha (8 bodů)
Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině *n* osob mají alespoň dva lidé narozeniny ve stejný den? Předpokládáme, že rok má 365 dní. Kolik osob musí být minimálně ve skupině, aby byla pravděpodobnost, že mají alespoň dva z nich narozeniny ve stejný den, rovna a) alespoň 0,5, b) alespoň 0,95 c) právě 1,0? Sami se zamyslete nad rozdílem v nutném počtu osob v b) a c), byť jsou pravděpodobnosti jevu téměř shodné – 0,95, tedy „praktická jistota“ a 1,0, „jistota“.

22. Úloha (2 body)
Máme čtyři lístky s čísly 1, 2, 3 a 4 a obdobně očíslované obálky. Lístky jsou náhodně rozděleny do obálek; jaká je pravděpodobnost, že právě ve dvou obálkách jsou lístky se stejnými čísly jako na obálkách? Jaká je pravděpodobnost, že ve všech obálkách jsou lístky s číslem vždy různým, než je na obálce?

23. Úloha (2 body)
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma spravedlivými šestistěnnými kostkami
a) bude součet ok na obou kostkách roven číslu n?
b) bude součet ok na obou kostkách liché číslo?
c) bude součet ok na obou kostkách sudé číslo?
d) se budou počty ok na obou kostkách lišit?

24. Úloha (1 bod)
Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně zvolené číslo od 1 do 40 bude dělitelné čtyřmi nebo pěti?

25. Úloha (2 body)
(de Méré's Problem) Co je pravděpodobnější? Hodit při čtyřech hodech jednou běžnou kostkou alespoň jednu šestku, nebo hodit při dvaceti čtyřech hodech dvěma běžnými kostkami alespoň jednou dvě šestky zároveň na obou kostkách?

26. Úloha (2 body)
Na šachovnici 8×8 jsou náhodně rozestavěny čtyři věže. Jaká je pravděpodobnost, že se žádné dvě navzájem neohrožují?

27. Úloha (1 bod)
V zahradnictví jsme koupili deset cibulek červených tulipánů a pět cibulek černých tulipánů. Zasadili jsme osm náhodně vybraných cibulek. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dvě zasazené cibulky budou od černých tulipánů?

28. Úloha (2 body)
Ve třídě je dohromady lichý počet žáků, chlapců a dívek, zároveň předpokládáme, že jich není méně než 10 ani více než 45. Pravděpodobnost, že ze dvou náhodně vybraných žáků je jedna dívka a jeden chlapec, je stejná jako pravděpodobnost, že tomu tak není. Určete počet žáků ve třídě.

29. Úloha (2 body)
Na maturitním večírku je patnáct hochů a dvanáct dívek. Kolika způsoby je možné vybrat čtyři taneční páry?

30. Úloha (8 bodů)
Kolika způsoby lze zaplatit a) 6 Kč, b) $2n$ Kč jen pomocí jednokorun a padesátníků? Kolika způsoby lze zaplatit c) 20 Kč, d) $2n$ Kč, e) $2n + 1$ Kč jen pomocí dvoukorun a pětikorun?

31. Úloha (3 body)
Kolika různými způsoby lze rozmístit všechny figurky šachové hry na políčka šachovnice?

32. Úloha (1 bod)
Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami bude součet roven osmi?

33. Úloha (5 bodů)
Dřevěnou, červeně natřenou krychli o hraně 4 cm nařežeme na jednotkové krychličky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička
a) má právě jednu červenou stěnu?
b) má právě dvě červené stěny?

c) má právě tři červené stěny?
d) má právě čtyři červené stěny?
e) nemá žádnou červenou stěnu?

34. Úloha (2 body)
Varování: Product Placement! Máme šestnáct lahví limonád, deset z nich je Coca-Cola, zbylých šest je Pepsi. Náhodně vybereme tři lahve. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali právě dvě Coca-Coly a jednu Pepsi?

35. Úloha (1 bod)
Ve třídě je 20 chlapců a 12 dívek. Dva žáci jsou určeni losem jako mluvčí na školní akademii. Jaká je pravděpodobnost, že budou ve dvojici zastoupena obě pohlaví?

36. Úloha (8 bodů)
V ročníku je celkem nk studentů. Chceme je rozdělit do k skupin po n studentech. Kolik různých sestav, tedy rozdělení studentů do k skupin, můžeme získat? Skupiny nejsou nijak číslovány, studenti nemají ve skupinách žádné pořadí, takže sestava dvou skupin čtyř studentů $\{a,\ b\}\{c,\ d\}$ je zcela shodná se sestavou $\{d,\ c\}\{a,\ b\}$. Počet všech navzájem různých rozdělení nk studentů do k skupin po n studentech získáme (označte všechny odpovědi, které jsou správné)

a) spočítáním výrazu
$$\frac{(nk)!}{(n!)^k \cdot k!}.$$
b) vytvořením první skupiny o n studentech ze všech nk studentů, poté vytvořením druhé skupiny o n studentech ze zbylých $nk - n$ studentů, dále vytvořením třetí skupiny o n studentech ze zbylých $nk - 2n$ studentů, atd. až vytvořením k-té skupiny o n studentech ze zbylých n studentů. Pořadí skupin, které nehraje roli, povede k tomu, že jsme jednotlivé shodné sestavy studentů ve skupinách, které jsou akorát různě uspořádané, dostali $k!$-krát.
c) spočítáním výrazu (je-li k sudé)
$$\frac{1}{k!} \cdot \binom{nk}{n\frac{k}{2}} \cdot \left[\prod_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} \binom{n\frac{k}{2} - ni}{n}\right]^2.$$
d) uspořádáním všech nk studentů do řady, přičemž mezi n-tým a $(n+1)$-tým, dále mezi $2n$-tým a $(2n+1)$-tým, atd. až mezi $(k-1)n$-tým a $\big((k-1)n+1\big)$-tým vytvoříme symbolické hranice, čímž vznikne k skupin. To vše zopakujeme celkem $(nk)!$-krát pro všechny možné permutace všech studentů v jedné řadě. Jednotlivé shodné sestavy studentů ve skupinách, které jsou akorát různě uspořádané, dostaneme kvůli tomu, že pořadí skupin vůči sobě nehraje roli, celkem $k!$-krát, a kvůli tomu, že pořadí studentů v žádné skupině nehraje roli, celkem $(n!)^k$-krát.
e) postavením prvního studenta, kterého uvidíme, stranou, dále utvořením k skupin ze zbylých $(nk-1)$ studentů přesně podle možnosti d), čímž vznikne $(k-1)$ skupin o n studentech a jedna skupina o $(n-1)$ studentech. Do poslední skupiny o $(n-1)$ studentech přiřadíme studenta, kterého jsme na začátku postavili stranou a rozdělování se neúčastnil.
f) spočítáním výrazu

$$\frac{1}{k!} \cdot \prod_{i=1}^{k} \binom{n \cdot i}{n}.$$

g) je-li k sudé, pak rozdělením všech nk studentů na dvě poloviny, což lze celkem $\binom{nk}{n\frac{k}{2}}$-krát, dále vytvořením první skupiny o n studentech z první poloviny $nk/2$ studentů, poté vytvořením druhé skupiny o n studentech ze zbylých $(nk/2 - n)$ studentů, dále vytvořením třetí skupiny o n studentech ze zbylých $(nk/2 - 2n)$ studentů, atd. až vytvořením $(k/2)$-té skupiny o n studentech ze zbylých n studentů první poloviny. Totéž provedeme nad druhou polovinou $nk/2$ studentů. Pořadí skupin, které nehraje roli, povede k tomu, že jsme jednotlivé shodné sestavy studentů ve skupinách, které jsou akorát různě uspořádané, dostali $k!$-krát.

h) spočítáním výrazu

$$\frac{(nk-1)!}{(n!)^{k-1} \cdot (n-1)! \cdot (k-1)!}.$$

HINT: Při řešení začněte těmi možnosti, které uvádí opisně slovy způsob, jak získat počet všech navzájem různých rozdělení nk studentů do k skupin po n studentech; pokud uznáte, že jimi popisovaný postup je korektní, je pravděpodobné, že pokud si text přepíšete do podoby matematických formulí a upravíte je, získáte některé z možností zadané přímo vzorcem pro výpočet.

37. Úloha (2 body)

Na vrchol hory vedou čtyři turistické cesty a lanovka. Určete počet způsobů, kterými je možné se dostat

a) na vrchol a zpět;
b) na vrchol a zpět tak, aby zpáteční cesta byla jiná než cesta na vrchol;
c) na vrchol a zpět tak, aby aspoň jednou byla použita lanovka;
d) na vrchol a zpět tak, aby lanovka byla použita právě jednou.

38. Úloha (1 bod)

Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu není nula a ze zbývajících devíti číslic se v něm každá vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z těchto čísel je větších než 9 000? Kolik z nich je menších než 3 000?

39. Úloha (1 bod)

Určete počet všech nejvýše pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z deseti číslic vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z nich je menších než 50 000?

40. Úloha (1 bod)

Určete počet prvků, z nichž lze utvořit

a) 240 dvoučlenných variací;
b) dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací.

41. Úloha (1 bod)

Sportovní utkání neskončilo nerozhodně a žádné z obou družstev nevstřelilo více než dvacet a méně než deset branek. Určete počet možných výsledků.

42. Úloha (1 bod)

Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet tříčlenných variací a) desetkrát; b) o 150. Určete původní počet prvků.

43. Úloha (2 body)

Určete počet všech pěticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 1, 3, 4, 7. Kolik z těchto čísel je

a) dělitelných šesti;
b) větších než 70 134?

44. Úloha (1,5 bodu)

Určete počet prvků tak, aby

a) bylo možno z nich utvořit právě 40 320 permutací;
b) při zvětšení počtu o dva se počet permutací zvětšil 56krát;
c) při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací zmenšil 20krát.

45. Úloha (1,5 bodu)

Představte si, že zapíšete pod sebe všechny možné permutace čísel 1, 2, 3, …, n; vznikne tak obdélníkové schéma, které má n! řádků a n sloupců. Určete součet všech čísel

a) v každém řádku;
b) v každém sloupci.

46. Úloha (2 body)

Regionální letecká společnost rozšířila síť svých letů na několik nových letišť (o více než jedno). Kvůli novým letům musela začít v databázi evidovat o 296 letových tras více (let z A do B považujeme za různý od letu z B do A). Mezi kolika letišti původně společnost létala a kolik nových jich přibrala?

47. Úloha (2 body)

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat

a) trojici políček;
b) trojici políček neležících v témže sloupci;
c) trojici políček neležících v témže sloupci ani v témže řádku;
d) trojici políček, která nejsou všechna téže barvy.

48. Úloha (1,5 bodu)

V rovině je dáno n bodů, z nichž p leží na jedné přímce; kromě nich žádné jiné tři body na téže přímce neleží. Určete, kolik je těmito body určeno a) přímek; b) trojúhelníků; c) kružnic.

49. Úloha (1 bod)

Je dán čtverec $ABCD$ a na každé z jeho stran je $n \geq 3$ vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.

50. Úloha (1,5 bodu)

Určete, kolika způsoby je možné z dvaceti osob vybrat deset, požadujeme-li, aby mezi vybranými

a) nebyl pan A;
b) nebyli zároveň pánové A a B;
c) byl alespoň jeden z pánů A, B.

51. Úloha (2 body)

Určete, který/é z následujících výrazů odpovídá/odpovídají počtu všech možností, jak vytvořit z m mužů a n žen jeden taneční pár.

a) $m \cdot n$
b) $\binom{m+n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2}$

c) $\binom{m+n}{3} - n\binom{m}{2} - m\binom{n}{2} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}$
d) $\binom{(m-1)+(n-1)}{2} - \binom{m-1}{2} - \binom{n-1}{2} + (m-1) + (n-1) + 1$

52. Úloha (1 bod)
Na černá políčka šachovnice 8×8 máme rozmístit 12 bílých a 12 černých pěšců. Určete, kolika způsoby to lze provést.

53. Úloha (1 bod)
Určete počet prvků tak, aby
a) počet čtyřčlenných kombinací z nich vytvořených byl dvacetkrát větší než počet dvoučlenných kombinací;
b) při zvětšení počtu prvků o jeden se počet tříčlenných kombinací zvětšil o 21.

54. Úloha (2 body)
V místnosti je přesně n žárovek, z nichž ale pouze jedna je funkční. Venku před místností je panel s n vypínači, každý z n vypínačů zapíná, resp. vypíná právě jednou žárovku; zda je konkrétní vypínač zapnutý, či vypnutý, je známo. Od panelu není dovnitř do místnosti vůbec vidět, ani zda se v ní svítí. Je tedy nutné vždy zapnout jeden nebo několik vypínačů a pak vstoupit do místnosti, aby bylo zřejmé, zda se v ní svítí (zda jediná funkční žárovka svítí). Kolik nejvýše musíte zkusit vypínačů a kolikrát nejvýše musíte vstoupit do místnosti, abyste s jistotou našli vypínač, který ovládá jedinou funkční žárovku?

55. Úloha (1 bod)
Strany konvexního osmiúhelníku, z nichž žádné dvě nemají stejnou délku, máme obarvit tak, aby dvě byly červené, dvě modré, dvě zelené a dvě žluté. Určete počet způsobů, jimiž to lze provést.

56. Úloha (3 body)
Kolika různými způsoby lze vytvořit náhrdelník z pěti skleněných korálků a ze tří dřevěných korálků? Dva náhrdelníky považujeme za shodné, pokud lze druhý náhrdelník získat pootočením prvního.
HINT: Využijte Burnsideovo lemma.

57. Úloha (6 bodů)
Spočítejte, kolika způsoby je možné obarvit políčka a) šachovnice 3×3 b) šachovnice 4×4 černou a bílou barvou. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením šachovnice.
HINT: Využijte Burnsideovo lemma.

58. Úloha (1 bod)
Určete, kolika různými způsoby se kolem kulatého stolu může posadit pět mužů a pět žen tak, aby žádné dvě ženy neseděly vedle sebe.

59. Úloha (1 bod)
Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se vyskytují pouze cifry 1, 2, 3, 4, 5.

60. Úloha (1 bod)
Určete, kolika způsoby lze k různých prvků rozmístit do r přihrádek.

61. Úloha (1 bod)
Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel 4, 5, 6, 7, 8, 9.

62. Úloha (2 body)
Apolloniovou úlohou se rozumí úloha sestrojit kružnici, která se dotýká tří zadaných kružnic v rovině. Zadané kružnice mohou být ale i kružnice o nulovém poloměru, tedy body, nebo kružnice o nekonečně velkém poloměru, tedy přímky. Příkladem tedy může být sestrojení kružnice, která se dotýká dvou zadaných bodů a jedné kružnice v rovině, nebo která se dotýká jedné zadané přímky, jedné zadané kružnice a jednoho zadaného bodu v rovině. Určete počet všech Apolloniových úloh.

63. Úloha (2 body)
Knihovna má pět regálů, do každého se vejde 20 knih. Určete, kolika způsoby lze do knihovny umístit 20 knih.

64. Úloha (2 body)
Určete počet všech řešení následující rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

v oboru

a) přirozených čísel, tedy pro všechna $i \in \{1,2,\dots,n\}$ je $x_i \in N$.
b) nezáporných celých čísel, tedy pro všechna $i \in \{1,2,\dots,n\}$ je $x_i \in N \cup \{0\}$.

Vždy diskutujte počet řešení vzhledem k parametrům *n* a *m*.

65. Úloha (4 body)
Určete počet všech řešení následující nerovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq m$$

v oboru

a) přirozených čísel, tedy pro všechna $i \in \{1,2,\dots,n\}$ je $x_i \in N$.
b) nezáporných celých čísel, tedy pro všechna $i \in \{1,2,\dots,n\}$ je $x_i \in N \cup \{0\}$.

Vždy diskutujte počet řešení vzhledem k parametrům *n* a *m*.

66. Úloha (2 body)
Určete počet všech řešení následující rovnice

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$$

v oboru $\{-1, 1\}$, tedy pro všechna $i \in \{1,2,\dots,n\}$ je $x_i \in \{-1, 1\}$. Diskutujte počet řešení vzhledem k parametru *n*.

67. Úloha (2 body)
Určete počet všech řešení následující rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = n$$

v oboru přirozených čísel, tedy pro všechna $i \in \{1,2,3,\ldots\}$ je $x_i \in N$. Diskutujte počet řešení vzhledem k parametru *n*.

68. Úloha (3 body)
Určete počet všech řešení následující rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = n$$

v oboru $\{1, 2\}$, tedy pro všechna $i \in \{1,2,3,\ldots\}$ je $x_i \in \{1, 2\}$. Diskutujte počet řešení vzhledem k parametru *n*.

69. Úloha (2 body)
Následující výraz obsahuje na své levé straně celkem *n*-krát symbol -1.

$$\underbrace{-1-1-1-1-\cdots-1}_{n} = 0$$

Doplňte do levé strany výrazu za některé znaménko minus jednu levou „(" a za některý symbol 1 jednu pravou závorku „)" tak, aby platila rovnost. Kolika různými způsoby to lze provést? Diskutujte počet řešení vzhledem k parametru *n*.

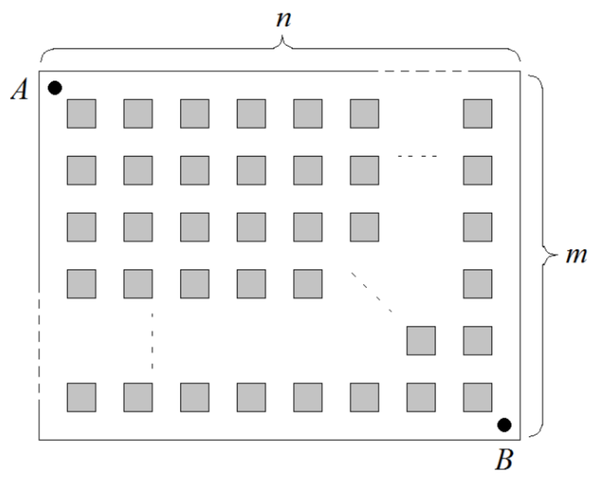
70. Úloha (2 body)
Určete počet všech řešení následující rovnice

$$x \cdot y = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

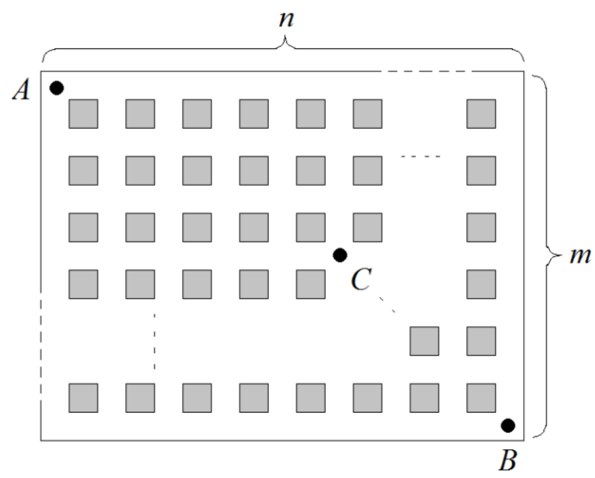
v oboru přirozených čísel, tedy $x \in N$ a $y \in N$. Víme, že pro všechna $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ jsou p_i navzájem po dvou různá prvočísla a α_i jsou přirozené exponenty těchto prvočísel. Diskutujte počet řešení vzhledem k parametru *n*.
POZNÁMKA: Uvědomte si, že vyřešením této úlohy získáme i obecnější závěr – výsledek úlohy je roven počtu všech navzájem různých přirozených dělitelů libovolného přirozeného čísla, vyjádřeného jako součin mocnin prvočísel (ten je dle základní věty aritmetiky pro každé přirozené číslo právě jeden).

71. Úloha (1 bod)
Je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2\ldots A_n$, kde $n \geq 3$. Určete počet všech způsobů, jimiž lze projít všechny jeho vrcholy tak, že začneme v A_1 a skončíme v A_n, postupujeme pouze po jeho stranách nebo úhlopříčkách a každý vrchol projdeme právě jednou.

72. Úloha (1 bod)
Určete celkový počet cest z bodu *A* (vlevo nahoře) do bodu *B* (vpravo dole), pohybujeme-li se v síti pravoúhlých křižovatek, kde se kříží *n* severojižních ulic s *m* západovýchodními ulicemi (viz obr. 1). Postupovat v síti můžeme vždy jen směrem na jih nebo na východ (dolů nebo doprava).



Obr. 1



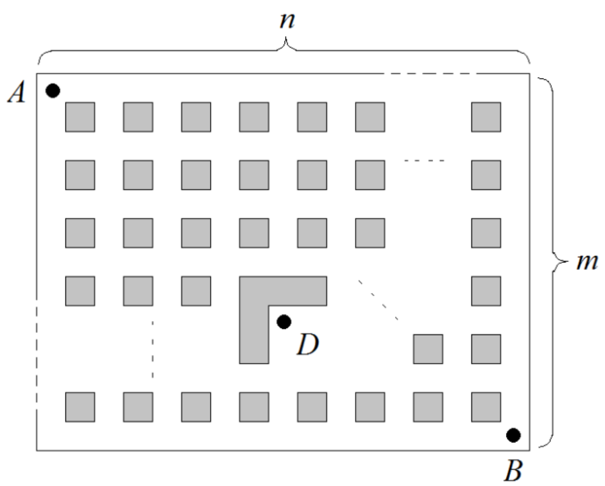
Obr. 2

73. Úloha (1 bod)

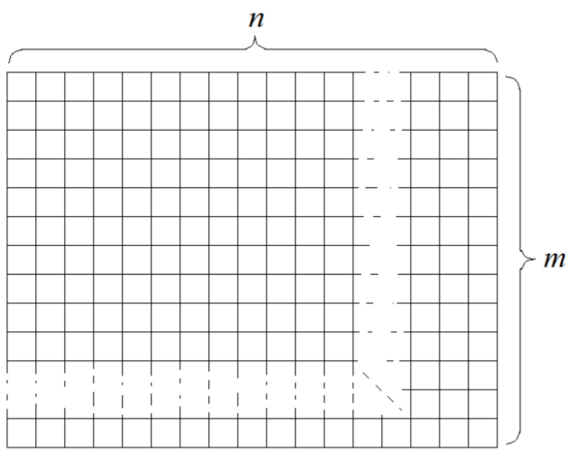
Určete celkový počet cest z bodu A (vlevo nahoře) do bodu B (vpravo dole), které prochází vždy bodem C, pohybujeme-li se v síti pravoúhlých křižovatek, kde se kříží n severojižních ulic s m západovýchodními ulicemi (viz obr. 2). Bod C leží na křižovatce vzdálené od bodu A p ulic na východ a q ulic na jih, $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq m$. Postupovat v síti můžeme vždy jen směrem na jih nebo na východ (dolů nebo doprava).

74. Úloha (2 body)

Určete celkový počet cest z bodu A (vlevo nahoře) do bodu B (vpravo dole), pohybujeme-li se v síti pravoúhlých křižovatek, kde se kříží n severojižních ulic s m západovýchodními ulicemi (viz obr. 3). Postupovat v síti můžeme vždy jen směrem na jih nebo na východ (dolů nebo doprava). Kolem bodu D, který leží na „křižovatce" vzdálené od bodu A r ulic na východ a s ulic na jih, $1 \leq r \leq n-1$, $1 \leq s \leq m-1$, je vytvořen komplex z budov tak, jak je uvedeno na obr. 3. Ten zamezuje přímý průchod na křižovatku, kde leží bod D, z křižovatky o jednu ulici severněji a z křižovatky o jednu ulici západněji.



Obr. 3



Obr. 4

75. Úloha (4 body)

Na obr. 4 je jednotková mřížka o rozměrech $n \times m$. Kolik je na této mřížce celkem čtverců? A kolik je na ní celkově obdélníků? Čtverce i obdélníky mají vrcholy v celočíselných bodech mřížky, mohou mít libovolnou velikost, ale musí celou svou plochou ležet v jednotkové mřížce o dané velikosti.

76. Úloha (3 body)

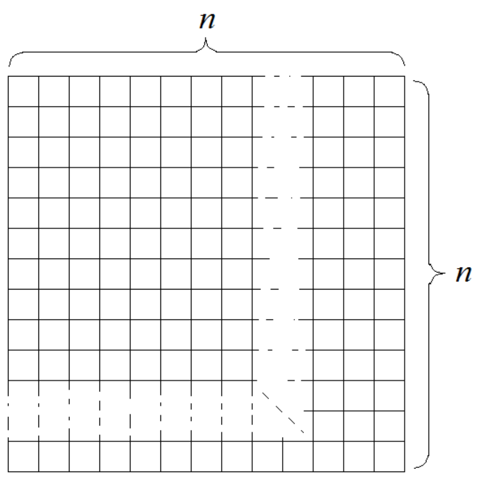
Je všeobecně známo, že součet druhých mocnin prvních n přirozených čísel je možné spočítat jako

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dokažte uvedený vztah

a) matematickou indukcí;

b) dvojím kombinatorickým vyjádřením počtu všech čtverců v jednotkové mřížce $n \times n$, viz obr. 5.



Obr. 5

HINT: Vyjádřete nejdříve počet všech čtverců o libovolné velikosti s vrcholy v celočíselných bodech v jednotkové mřížce jako počet všech čtverců o straně 1 plus počet všech čtverců o straně 2, atd. až plus počet všech čtverců o straně n. Dále ukažte, že počet všech čtverců lze spočítat též jako součet počtů všech čtverců postupně na všech rovnoběžných úhlopříčkách z libovolného celočíselného vrcholu mřížky do libovolného jiného; tento součet lze velmi dobře upravit do součinového tvaru.

77. Úloha (4 body)

Dva sportovní fanoušci se potřebují dostat za tři hodiny na zápas ve vzdálenosti 24 km. Mají jedno jízdní kolo, na kterém může jet v daném okamžiku jen jeden z nich rychlostí 18 km/h, oba mohou jít pěšky rychlostí 6 km/h. Kdyby musel jít jeden z nich celou cestu pěšky, zápas by nestihl, proto je napadlo, že jeden z nich vystartuje na jízdním kole, někde během cesty ho ponechá u krajnice a dál až k místu zápasu bude pokračovat pěšky. Druhý vystartuje pěšky a až potká u cesty jízdní kolo, nasedne na něj a dojede na něm až do místa zápasu. Oba vyšli podle plánu, fanoušek na kole ale s sebou neměl hodinky a neměl tedy žádné ponětí o čase – když mu přišlo, že jede na kole už dlouho (což bylo náhodně kdykoliv během jeho cesty), sesedl z něj, ponechal ho u krajnice a podle plánu pokračoval pěšky. Druhý podle plánu k němu došel a pokračoval na něm až k místu zápasu. Po cestě se žádný z nich nikde zbytečně nezastavoval. Jaká je pravděpodobnost, že

a) fanoušek, který začínal na jízdním kole, dorazí do místa zápasu včas?

b) fanoušek, který vycházel pěšky, dorazí do místa zápasu včas?

c) oba fanoušci dorazí do místa zápasu včas?
d) ani jeden z fanoušků nedorazí do místa zápasu včas?

78. Úloha (2 body)
Zápočtový test měl podobu dvaceti otázek, kdy ke každé byly nabídnuty dvě možné odpovědi a právě jedna z nich byla vždy správná. Student napsal zápočtový test úspěšně, pokud v něm vyplnil alespoň 70 % otázek správně. Za dobře navržený test považujeme takový, kdy pravděpodobnost, že test napíšu úspěšně i tehdy, když budu jen zcela náhodně vybírat odpovědi, je nejvýše 5 %. Rozhodněte, zda je uvedený zápočtový test dobře navržený.

79. Úloha (2 body)
Kolik by bylo třeba různě „procvaknutých" originálních jízdenek do městské dopravy, abyste získali kompletní sadu jízdenek? Jízdenka byla vždy „procvaknuta" na některých třech číslech ve čtverci čísel 1 – 9. Je způsob procvaknutí právě tří čísel z devíti možných optimální k tomu, aby případný černý pasažér musel nasbírat co možná největší nutný počet různě procvaknutých jízdenek? Pokud ne, kolik by bylo vhodné procvakávat čísel z možných devíti, aby byl počet různě procvaknutých jízdenek největší možný?

80. Úloha (2 body)
Házíme třemi dvanáctistěnnými spravedlivými kostkami, očíslovanými vždy od jedné do dvanácti. Jaká je pravděpodobnost, že z čísel padlých na kostkách lze utvořit tři členy aritmetické posloupnosti?

81. Úloha (1,5 bodu)
Házíme kostkou ve tvaru pravidelného
a) dvanáctistěnu, očíslovaného od jedničky do dvanáctky,
b) osmnáctistěnu, očíslovaného od jedničky do osmnáctky.
Jaká je pravděpodobnost, že je na spodní stěně kostky po jejím dopadu na desku stolu jednička?

82. Úloha (1 bod)
V osudí je 200 losů, z nichž 10 vyhrává. Jaká je pravděpodobnost, že získáte alespoň jednu výhru, koupíte-li si a) 10 losů, b) 20 losů?

83. Úloha (1 bod)
Vylosujeme tři čísla z čísel 1, 2, 3, …, 100. Jaká je pravděpodobnost, že tažená čísla se dají uspořádat v aritmetickou posloupnost?

84. Úloha (1 bod)
Na šachovnici postavíme náhodně dvě věže, bílou a černou. Jaká je pravděpodobnost, že se mohou navzájem brát?

85. Úloha (1 bod)
Deset studentů, mezi nimiž je i Adam a Bětka, má ze svého středu vylosovat tříčlennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že Adam nebo Bětka budou mezi vylosovanými?

86. Úloha (1 bod)
Čtyři studenti a šest studentek, mezi nimiž je i Adam a Bětka, mají ze svého středu vylosovat tříčlennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že Adam nebo Bětka budou mezi vylosovanými?

87. Úloha (1 bod)
V dostihu startují čtyři koně. Znalec udává ve sportovní rubrice novin následující pravděpodobnosti na jejich ostré vítězství: 0,50; 0,25; 0,10; 0,10. Je to možné, pokud
a) neuvažujeme tzv. mrtvý dostih, kdy současně zvítězí dva koně,
b) uvažujeme i variantu mrtvého dostihu?

88. Úloha (1 bod)
V utkání Sparta – Slávia v kopané dává znalec vítězství Sparty pravděpodobnost 0,60, vítězství Slávie pravděpodobnost 0,30 a nerozhodnému výsledku pravděpodobnost 0,20. Je to možné?

89. Úloha (2 body)
Máme dvě urny, přičemž obě obsahují bílé a černé kuličky. Dohromady je jich 25. Z každé urny vybereme náhodně (poslepu) jednu kuličku. Pravděpodobnost toho, že jsou obě vybrané kuličky černé, je 0,54. Jaká je pravděpodobnost toho, že jsou obě vybrané kuličky bílé?

90. Úloha (2 body)
Máme tři urny, ve kterých jsou bílé a černé kuličky. Dohromady jich je 25. Z každé urny vybereme náhodně (poslepu) jednu kuličku. Pravděpodobnost toho, že jsou všechny tři vybrané kuličky černé, je 0,54. Jaká je pravděpodobnost toho, že jsou všechny tři vybrané kuličky bílé?

91. Úloha (2 body)
Máme dvě urny, přičemž obě obsahují bílé a černé kuličky. Pravděpodobnost toho, že z každé urny vytáhneme po jedné bílé kuličce, je 0,18. Pravděpodobnost toho, že z obou uren vytáhneme po jedné kuličce, ale různých barev, je 0,54. Při jakém nejmenším počtu kuliček je to možné?

92. Úloha (2 body)
V urně jsou černé a bílé kuličky. Náhodně vybereme z urny dvě kuličky. Pravděpodobnost toho, že jsou obě bílé, je přesně 0,5. Při jakém nejmenším lichém počtu kuliček je to možné?

93. Úloha (3 body)
V třídě hrají kvíz. Pravděpodobnost, že na kvízovou otázku odpoví správně učitel, je 0,8. Pravděpodobnost, že na kvízovou otázku odpoví správně chlapec, je 0,36, a že dívka, je 0, 65. Jaké nejmenší množství žáků může být ve třídě, pokud pravděpodobnost toho, že na otázku odpoví shodně žák i učitel, je 0,56?

94. Úloha (2 body)
V tříčlenné porotě se první dva porotci rozhodují správně s pravděpodobností p, třetí porotce si vždy hází spravedlivou korunou. O výsledném verdiktu vždy rozhoduje většinový názor (shoda alespoň dvou porotců). Jednočlenná porota se rozhoduje správně s pravděpodobností p. Která z obou porot má celkově větší pravděpodobnost, že se rozhodne správně?

95. Úloha (3 body)
V sedmičlenné komisi se prvních šest porotců rozhoduje pro správný výsledek vždy s pravděpodobností q. Sedmý porotce se rozhoduje náhodně na základě hodu spravedlivou mincí. Když to o něm ostatní zjistili, byl z komise vyloučen. Aby ale v komisi byl lichý počet porotců a bylo možné rozhodovat na základě většinového názoru, byla ustanovena nová,

pětičlenná komise. V ní zbyli jen porotci, kteří se pro správný výsledek rozhodnou vždy s pravděpodobností q. Je nová komise spravedlivější?

96. Úloha (4 body)
Ve třídě je 40 žáků. Jednou chyběl jeden žák, čímž se pravděpodobnost, že si žák ve třídě zapomene kružítko, snížila o 0,1. Druhý den opět chyběl jeden žák. Tentokrát se však pravděpodobnost, že si žák ve třídě zapomene kružítko, zmenšila jen o 0,06. Kolik je ve třídě chlapců a kolik děvčat? Všechna děvčata mají shodnou pravděpodobnost, že si kterákoliv z nich zapomene kružítko. Stejně tak chlapci.

97. Úloha (3 body)
Konečný výsledek hokejového zápasu je 12 : 5. Jaká je pravděpodobnost, že soupeř, který nakonec prohrál, někdy během zápasu vedl?

98. Úloha (3 body)
Adam řešil následující úlohu:

Uvažujme sedm zamykatelných pokladniček. Všechny pokladničky zamkneme jejich klíči, klíče pak promícháme a zcela náhodně je vhodíme po jednom postupně do každé pokladničky. Jaká je pravděpodobnost, že když jednu z pokladniček náhodně rozbijeme, postupně pak pomocí vhozených klíčů odemkneme všechny ostatní?

Adam si představil, že k tomu, aby mohl po rozbití první, náhodně vybrané pokladničky, nakonec otevřít všechny ostatní, je třeba, aby v rozbité pokladničce nebyl její vlastní klíč, ale klíč od kterékoliv jiné pokladničky. Pak budeme moci tuto pokladničku odemknout. I v této pokladničce nesmí být klíč od jejího vlastního zámku, ale od některé jiné pokladničky – pak bude možné takovou pokladničku opět otevřít. Takto uvažoval dále, až si představil, že mu zbyly poslední dvě neodemčené pokladničky. Opět je třeba, aby v předposlední, kterou odemyká, nebyl klíč od jejího vlastního zámku, ale od posledního zbývající pokladničky. Vyplynulo mu z toho, že vlastně nezáleží na tom, kterou pokladničku rozbijeme, ale na tom, aby v žádné pokladničce nebyl klíč od jejího vlastního zámku. Pak je možné vždy už pokladničky odemknout, ať již rozbijeme na začátku libovolnou z nich. Pravděpodobnost, se kterou v žádné pokladničce nebude její vlastní klíč, je dle Adama rovna pravděpodobnosti, že do první ze sedmi nevhodíme její klíč (ale libovolný z ostatních šesti), tedy 6/7, že ani do druhé nevhodíme ze bývajících šesti její klíč (ale libovolný z ostatních pěti), tedy 5/6, atd. až do druhé nevhodíme její klíč, ale ten ze dvou, co se k ní nehodí, tedy s pravděpodobností 1/2, a do poslední pokladničky hodíme poslední klíč, který již určitě není od jejího zámku, protože je od zámku předchozí pokladničky. Celková pravděpodobnost, že při náhodném rozbití některé pokladničky nakonec všechny ostatní odemkneme, je tedy dle Adama

$$\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{7}$$

Takto Adam vyřešil úlohu. Je Adamovo řešení správné? Pokud ne, kde je chyba? Jak vypadá hledaná pravděpodobnost?

99. Úloha (3 body)
Od trezoru mají klíče čtyři lidé. Kolik musí být na trezoru zámků a jak musíme mezi tyto čtyři lidi rozdat klíče od zámků, aby žádní dva z nich nemohli sami trezor odemknout, ale aby již libovolní tři trezor odemkli?

100. Úloha (1 bod)
Je dána úsečka *AB*. Náhodně na ní zvolíme dva body *X* a *Y*. Jaká je pravděpodobnost, že úsečka *XY* obsahuje střed úsečky *AB*?

101. Úloha (1 bod)
Bětka měla řešit následující úlohu:

V intervalu $\langle 0,1\rangle$ *zcela náhodně rovnoměrně vybereme dvě čísla* x *a* y*. Určete, s jakou pravděpodobností splňují nerovnost*

$$y \geq 2x\,.$$

Protože příliš nevěděla, jak úlohu vyřešit, ale zadání pochopila, napsala si v Pythonu následující program, který simuloval problém ze zadání:

```
import random

repetitions = 10000
successes = 0

for i in range(1, (repetitions + 1)):
    x = random.random()
    y = random.random()
    if y >= 2 * x:
        successes = successes + 1

print successes / (repetitions + 1.0)
```

Jde o „for-do“ cyklus, který 10 000krát náhodně vybere čísla x a y z intervalu $\langle 0,1\rangle$ a vždy přičte k proměnné „successes“ jedničku, je-li splněna podmínka, že $y \geq 2x$. Odhadem pravděpodobnosti je pak podíl počtu splněné podmínky a počtu všech pokusů, tedy successes/10 000. Bětka nechala program opakovaně běžet a vždy vracel výslednou „pravděpodobnost“ kolem 0,25. Odhadla Bětka hledanou pravděpodobnost správně? Vyřešte úlohu i tradičně.
POZNÁMKA: Sami si můžete zkusit napsat podobný program v jakémkoliv jazyce, nebo využít uvedený kód z Pythonu, stačí ho zkopírovat do online rozhraní Pythonu http://www.codeskulptor.org/. U Pythonu jen pozor na indentaci, u příkazů v těle cyklu/funkce/podmínky vždy vyžaduje čtyři počáteční mezery, viz kód výše.

102. Úloha (1 bod)
V intervalu $\langle -1,1\rangle$ zcela náhodně rovnoměrně vybereme dvě čísla x a y. Určete, s jakou pravděpodobností splňují nerovnost

$$x^2 + y^2 \leq 1\,.$$

103. Úloha (3 body)
Adam s Bětkou hráli následující hru. Nejdříve si náhodně zvolili dvě čísla p a h z intervalu $\langle 0,3\rangle$. Pokud právě jedna z rovnic $x^2 + px + h = 0$ a $x^2 + hx + p = 0$ má oba kořeny reálné, tak vyhrává Adam. V opačném případě vyhrává Bětka. Kdo z nich má větší pravděpodobnost výhry?

104. Úloha (1 bod)

V intervalu $\langle 0, 1\rangle$ zcela náhodně rovnoměrně vybereme dvě čísla x a y. Určete, s jakou pravděpodobností splňují nerovnosti

$$\frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2}.$$

105. Úloha (2 body)

S jakou pravděpodobností má kvadratická rovnice:

$$x^2 + \sqrt{10 - a^2 - b^2} \cdot x + (a^2 + b^2) = 0$$

oba kořeny reálné?

106. Úloha (2 body)

V intervalu $\langle 0, 1\rangle$ zcela náhodně rovnoměrně vybereme dvě čísla x a y. Určete, s jakou pravděpodobností splňují nerovnost

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{x + y}{\sqrt{2}}.$$

107. Úloha (3 body)

Skupina n kamarádů se domluvila, že se sejdou mezi 5:00 a 6:00 odpoledne na přesně smluveném místě. Každý z kamarádů přijde na dané místo náhodně mezi 5:00 až 6:00 a čeká zde deset minut. Pokud se do té doby úplně všichni kamarádi nesejdou, odchází (v případě, že přišel v 5:50, odchází přesně v 6:00). Jaká je pravděpodobnost, že se všech n kamarádů sejde?

108. Úloha (3 body)

a) Řešte následující nerovnost pro n přirozené

$$57\,842\,634\,015\,816\,255\,132 < n! < 57\,842\,634\,015\,816\,256\,575$$

POZNÁMKA: Řešení typu brute force, tedy náhodné zkoušení možností, bude bodováno nejvýše 0,25 body.
HINT: Využijte při řešení nerovnosti poznatky z vět uvedených v následujících zadáních a) a b).

b) Dokažte, že dekadický zápis čísla $n!$ má délku právě $(\lfloor \log_{10} n! \rfloor + 1)$ cifer[1]. Spočítejte si, jak dlouhý je dekadický zápis čísel 10!, 20!, 30!, 40! atd.

c) Dokažte, že dekadický zápis čísla $n!$ je zakončen alespoň $\lfloor n/5 \rfloor$ nulami (Lze dokázat i silnější tvrzení.)

109. Úloha (3 body)

V intervalu $\langle 0, 1\rangle$ zcela náhodně rovnoměrně vybereme dvě čísla x a y. Určete, s jakou pravděpodobností splňují nerovnost

$$(x - y)^2 \geq xy\,.$$

110. Úloha (2,5 bodu)

[1] Symbol $\lfloor n \rfloor$ značí dolní celou část čísla n, tedy nejvyšší celé číslo, které nepřevyšuje n; např. $\lfloor 3{,}8 \rfloor = 3$, $\lfloor 23 \rfloor = 23$ a $\lfloor -4{,}1 \rfloor = -5$.

(Newton – Pepys Problem) Samuel Pepys napsal Isaacovi Newtonovi dlouhý dopis, ve kterém po něm žádal, aby se pokusil určit pravděpodobnosti některých hodů kostkou. Pepys se ptal, který z následujících tří jevů je nejpravděpodobnější.

A) Padne alespoň jedna šestka při současném hodu šesti kostek.
B) Padnou alespoň dvě šestky při současném hodu dvanácti kostek.
C) Padnou alespoň tři šestky při současném hodu osmnácti kostek.

Kostky jsou spravedlivé, nebiasované. Určete pravděpodobnosti všech tří jevů. Úlohu řešte i obecně pro případ

D) Padne alespoň n šestek při současném hodu $6n$ kostek.

111. Úloha (3 body)

Určete, kolika nulami je zakončen dekadický zápis čísla 333!.

112. Úloha (2 body)

V soustavě souřadnic Oxy je dán úhel AVB. Velikost úhlu AVB je 120°. Určete pravděpodobnost, že lomená čára úhlu ABV tvoří křivku grafu nějaké funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

HINT: Uvědomte si, co musí splňovat křivka grafu reálné funkce v soustavě Oxy, aby se skutečně jednalo o funkci.

113. Úloha (3 body)

Házíme n-krát spravedlivou mincí. Jaká je střední hodnota počtu úseků stejných hodů? Úsekem stejných hodů rozumíme sekvenci několika (nebo jen jedné) padnutých hlav, resp. orlů ihned po sobě tak, že sekvence následuje po padnutém orlu, resp. hlavě, nebo je orlem, resp. hlavou ukončena (nebo oboje). V sekvenci {hlava, hlava, hlava, orel, hlava, hlava, orel, orel} jsou tedy celkem čtyři úseky shodných hodů.

114. Úloha (3 body)

Mějme tabulku čokolády o m řádcích a n sloupcích rozlámanou na dílky $1x1$. Dílky postupně odebíráme a ujídáme, přičemž všechny způsoby snězení čokolády jsou stejně pravděpodobné. Najděte pravděpodobnost jevu, že v žádném okamžiku nebudou existovat dva řádky, v nichž by se počet nesnědených dílků lišil o dva a více.