Úvod do (zejména) diskrétní pravděpodobnosti

—

Supplementum ke cvičení 4ST210 Statistika pro finance

Lubomír Štěpánek[1, 2]

[1]Oddělení biomedicínské statistiky
Ústav biofyziky a informatiky
1. lékařská fakulta
Univerzita Karlova, Praha

[2]Katedra biomedicínské informatiky
Fakulta biomedicínského inženýrství
České vysoké učení technické v Praze

Obsah

Příklad

- Určeme, jak se změní variační koeficient, pokud se všechny hodnoty ve výběru
  - (i) zmenší o pět.
  - (ii) zvětší dvakrát.

Příklad

- Průměrný počet bodů z testu, který psalo 30 studentů, byl původně 78 a bodový rozptyl byl 81. Jak se změní průměrný počet bodů a bodový rozptyl, pokud si test dopsali ještě další tři studenti a získali postupně 99, 92 a 83 bodů?

Příklad

- V souboru dvaceti evidovaných hodnot je aritmetický průměr roven 110 a výběrový rozptyl 800. Poté bylo zjištěno, že dvě hodnoty byly zaevidovány chybně – místo hodnoty 85 mělo být správně 95 a místo hodnoty 120 mělo být správně 150. Jaká je správná hodnota aritmetického průměru a výběrového rozptylu?

Náhodný pokus (experiment) a náhodný jev

- náhodný pokus (experiment)
  - je děj, jehož výsledek se může při zopakování změnit i při zachování podmínek, závisí tedy na náhodě
  - např. hod kostkou, los z urny
- náhodný jev
  - je výsledek náhodného pokusu
  - obvykle se značí velkými písmeny $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$
  - pravděpodobnost náhodného jevu A značíme $P(A)$
  - např. na kostce padne pět ok, z urny byla vytažena černá koule
- jistý jev
  - jev, který nastane vždy
  - např. na minci padne hlava, nebo orel
- nemožný jev
  - jev, který nenastane nikdy
  - např. na (laplaceovské) minci padne hrana

Klasická definice pravděpodobnosti

- pravděpodobnost jevu A je rovna podílu počtu případů m, které jsou jevu A příznivé, ku počtu n všech možným případů

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- nutným předpokladem je, že všechny případy mohou nastat stejně často

Příklad

- Jaká je pravděpodobnost jevu A, že na hrací kostce padne číslo větší než 2?

Příklad

- Jaká je pravděpodobnost jevu A, že na hrací kostce padne číslo větší než 2?
- *Řešení.* $P(A) = \frac{|\text{padne } 3,\ 4,\ 5 \text{ nebo } 6 \text{ ok}|}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ □

Geometrická definice pravděpodobnosti

- pravděpodobnost jevu A je rovna podílu plochy S odpovídající případům, které jsou jevu A příznivé, ku ploše Ω odpovídající všem možným případům

$$P(A) = \frac{S}{\Omega}$$

- zde již jednotlivé případy nemusí nutně nastat stejně často

Příklad

- Z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ náhodně vybereme dvě čísla x a y. Jaká je pravděpodobnost jevu, že $2y \leq x^2$?

Množinové vztahy množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ je podmnožinou $\mathcal{B}$

Pokud je $\forall\ a \in \mathcal{A} : a \in \mathcal{B}$, pak $\mathcal{A}$ je podmnožinou $\mathcal{B}$, což značíme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Sjednocení množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$

Sjednocení množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ je taková množina $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, že $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\forall\ x : x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$.

Průnik množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$

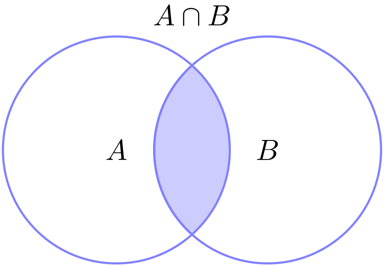
Průnik množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ je taková množina $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, že $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\forall\ x : x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$.

Asymetrický rozdíl množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$

Asymetrický rozdíl množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ je taková množina $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, že $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \{\forall\ x : x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$.

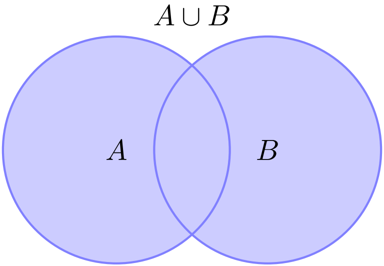
Průnik jevů A a B

- pravděpodobnost, že nastanou oba náhodné jevy A i B, značíme $P(A \cap B)$



Sjednocení jevů A a B

- pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z náhodných jevů A nebo B, značíme $P(A \cup B)$



Vlastnosti pravděpodobnosti

- nechť A a B jsou náhodné jevy, pak platí

$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$0 \leq P(B) \leq 1$$

- dále pokud A je podjevem B, tedy $A \subseteq B$, platí

$$P(A) \leq P(B)$$

- pravděpodobnost nemožného jevu C je rovna

$$P(C) = 0$$

- pravděpodobnost jistého jevu D je rovna

$$P(D) = 1$$

Vlastnosti pravděpodobnosti

- dále vždy platí

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

  kde $\bar{A}$ je doplňkový jev k jevu A
- a dále obecně

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sčítání a násobení pravděpodobností

- nechť A a B jsou náhodné jevy
- pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pokud jsou A a B neslučitelné jevy
- a dále $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pokud jsou A a B nezávislé jevy

Příklad

- Je možné, aby dva jevy byly neslučitelné a současně i nezávislé? Zkoumejme.

Podmíněná pravděpodobnost

- nechť A a B jsou náhodné jevy
- pravděpodobnost jevu A podmíněnou jevem B definujeme jako

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- jsou-li jevy A a B nezávislé, snadno nahlédneme, že platí

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Příklad

- Házíme čtyřmi hracími kostkami. Vypočítejme pravděpodobnost následujících jevů.
  (i) Na všech kostkách padnou různá čísla.
  (ii) Na dvou kostkách padnou stejná čísla a na dalších dvou jiná různá čísla.
  (iii) Na třech kostkách padnou stejná čísla a na další jiné číslo.
  (iv) Padnou dvě (různé) dvojice stejných čísel.
  (v) Na všech kostkách stejná čísla.
  (vi) Padnou alespoň tři stejná čísla.

Příklad

- Je dána úsečka AB. Náhodně na ní zvolíme dva body X a Y. Jaká je pravděpodobnost, že úsečka XY obsahuje střed úsečky AB?

Příklad

- Adam s Bětkou jedou ve stejném vlaku, v kterém je právě $k \in \mathbb{N}$ kupé vždy o šesti místech. S jakou pravděpodobností budou sedět oba ve stejném kupé, pokud si místa k sezení vybírají zcela náhodně ve chvíli, kdy jsou ještě všechna místa volná? Obecnou pravděpodobnost nakonec ověřme pro $k = 1$.

Příklad

- S jakou pravděpodobností má kvadratická rovnice

$$x^2 + \sqrt{10 - a^2 - b^2} \cdot x + (a^2 + b^2) = 0$$

pro přípustné hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ oba kořeny reálné?

Příklad

- Házíme jedenkrát šipkou na kruhový jednotkový[1] terč, který s jistotou zasáhneme; každý bod terče má stejnou pravděpodobnost zásahu. Pravděpodobnost, že se trefíme do vzdálenosti větší než p od středu terče, je p. Určete p.

[1] Poloměr terče je roven přesně $1{,}0$.

Příklad

- Házíme pětkrát spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že
  (i) padne právě dvakrát hlava?
  (ii) padne nejvýše dvakrát hlava?
  (iii) padne alespoň dvakrát hlava?

Příklad

- Házíme takovou nespravedlivou (biasovanou) šestistěnnou hrací kostkou, že pravděpodobnost padnutí každé stěny je přímo úměrná počtu ok na této stěně. Určeme pravděpodobnost, že padne sudý počet ok.

Příklad

- Jaká je pravděpodobnost toho, že ve skupině n osob mají alespoň dva lidé narozeniny ve stejný den? Předpokládejme, že rok má 365 dní.

Příklad

- Správce má v kapse celkem n klíčů od různých dveří budovy, mezi nimi i jeden klíč k hlavním dveřím. Před hlavními dveřmi postupně tahá klíče z kapsy jeden po druhém a zkouší jimi dveře odemknout. Vyzkoušené klíče zpět do kapsy nevrací. Jaká je pravděpodobnost, že dveře otevře právě až na k-tý pokus? Jaká je pravděpodobnost, že dveře odemkne nejpozději na l-tý po-kus? A jaká je pravděpodobnost, že dveře neodemkne dříve než na m-tý pokus? Diskutujte řešení i vzhledem k přirozeným parametrům n, k, l, m. Změní se nějak pravděpodobnost, pokud budou klíče navlečeny na kroužku a v tomto pořadí je bude správce zkoušet?

Literatura

Hindls, Richard, Stanislava Hronová, Jan Seger a Jakub Fischer. *Statistika pro ekonomy*. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN: 978-80-86946-43-6.

Marek, Luboš. *Statistika v příkladech*. Praha: Professional Publishing, 2015. ISBN: 978-80-7431-153-6.

Děkuji za pozornost!

lubomir.stepanek@vse.cz
lubomir.stepanek@lf1.cuni.cz
lubomir.stepanek@fbmi.cvut.cz