Vysoká škola ekonomická
Fakulta informatiky a statistiky

Sbírka úloh pro účely bakalářských statistických předmětů

—

4ST201 Statistika a 4ST210 Statistika pro finance

Lubomír Štěpánek

Praha 2020

Sbírka úloh pro účely bakalářských statistických předmětů — 4ST201 Statistika a 4ST210 Statistika pro finance

Lubomír Štěpánek

Praha 2020

Slovo autora

Inspiration does exist, but it has to find you working.
— Pablo Picasso

Tato sbírka příkladů by měla podle autorova iniciálního záměru sloužit zejména jako zdroj typových příkladů pro opakování učiva v rámci předmětů 4ST201 Statistika a 4ST210 Statistika pro finance, které jsou dlouhodobě vyučovány a garantovány Katedrou statistiky a pravděpodobnosti Fakulty informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické.

Sbírka je členěna do kapitol podle logických celků odpovídajících přednáškám v rámci obou předmětů. Na začátku každé kapitoly je uvedeno několik řešených příkladů, jež jsou násedovány řadou neřešených úloh určených k vlastnímu procvičování.

Jednotlivé úlohy mají různé autory, obvykle neznámé. Část z úloh pochází z vlastní provenience tvůrce této sbírky příkladů, zbytek je převzat z různých dílčích zdrojů, které ale obvykle samy uvádějí, že i ony již úlohy převzaly. Budiž těmto anonymním původcům úloh vzdán zasloužený hold.

V Praze 25. března 2020 — Lubomír Štěpánek

Obsah

1 Kombinatorika **1**
1.1 Řešené úlohy 1
1.2 Úlohy k vlastnímu procvičení 4

2 Deskriptivní statistika **7**
2.1 Řešené úlohy 7
2.2 Úlohy k vlastnímu procvičení 23

3 Pravděpodobnost jevů **27**
3.1 Řešené úlohy 27
3.2 Úlohy k vlastnímu procvičení 34

4 Diskrétní náhodná veličina a diskrétní rozdělení pravděpodobnosti **37**
4.1 Řešené úlohy 37
4.2 Úlohy k vlastnímu procvičení 41

5 Spojitá náhodná veličina a spojitá rozdělení pravděpodobnosti **43**
5.1 Řešené úlohy 43
5.2 Úlohy k vlastnímu procvičení 47

Reference **49**

1 Kombinatorika

1.1 Řešené úlohy

Úloha 1.1.1 Najděme všechna $x \in \mathbb{N}$ taková, pro která platí

(i)
$$\binom{x}{2} = 10.$$

(ii)
$$\binom{x}{3} = 455.$$

Řešení.

(i) Zřejmě podle vzorce pro kombinační číslo má platit

$$\binom{x}{2} = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = \frac{x \cdot (x-1)}{2} = 10.$$

Odtud již zřejmě $x(x-1) = 20$, tedy $x^2 - x = 20$, neboli $x^2 - x - 20 = 0$. Rovnost je možné vyřešit jako kvadratickou rovnici pomocí diskriminantu $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \{-4; 5\}$, nebo pomocí Vietových vztahů $x_1 + x_2 = 1 \wedge x_1 x_2 = -20$ a „uhádnout“ kořeny, zřejmě $x_{1,2} = \{-4; 5\}$. Očivině může úloze vyhovovat pouze řešení $x = 5$.

Existuje rychlý a trikový přístup, který umožní vyhnout se vyčíslení řešení kvadratické rovnice. Vyjdeme ze vztahu $x(x-1) = 20$. Uvědomíme-li si, že pro řešení nutně platí $x \in \mathbb{N}$, pak je i $(x-1)^2 < x(x-1) < x^2$, neboli $(x-1)^2 < 20 < x^2$ a $(x-1) < \sqrt{20} < x$. Hledáme tedy takové $x \in \mathbb{N}$, které je „o něco málo“ větší než $\sqrt{20} \doteq 4{,}47$, resp. takové $x - 1 \in \mathbb{N}$, které je „o něco málo“ menší než $\sqrt{20} \doteq 4{,}47$. Zřejmě je $x = 5$, resp. $x - 1 = 4$. Dosazením do $\binom{x}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = 10$ ověříme správnost řešení.

(ii) Obdobně jako v předchozí části má platit

$$\binom{x}{3} = \frac{x!}{(x-3)! \cdot 3!} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = 455.$$

Odtud již zřejmě $x(x-1)(x-2) = 6 \cdot 455$, tedy $x^3 - 3x^2 + 2x = 2730$, neboli $x^3 - 3x^2 + 2x - 2730 = 0$. Rovnost je možné vyřešit jako kubickou rovnici, anebo s výhodou následovně.

Pokud řešení existuje, pak pro něj platí $x \in \mathbb{N}$ a dále $(x-2)^3 < x(x-1)(x-2) < x^3$, tedy $(x-2)^3 < 2730 < x^3$, neboli $(x-2)^3 < \sqrt[3]{2730} < x^3$. Hledáme tedy takové $x \in \mathbb{N}$, které je „o něco málo“ větší než $\sqrt[3]{2730} \doteq 13{,}98$, resp. takové $x-2 \in \mathbb{N}$, které je „o něco málo“ menší než $\sqrt[3]{2730} \doteq 13{,}98$. Snadno nahlédneme, že může být buďto $x = 14 > \sqrt[3]{2730} \doteq 13{,}98$ a $x-2 = 12 < \sqrt[3]{2730} \doteq 13{,}98$, anebo $x = 15 > \sqrt[3]{2730} \doteq 13{,}98$ a $x-2 = 13 < \sqrt[3]{2730} \doteq 13{,}98$.

Dosazením obou možných hodnot do výrazu $\binom{x}{3}$ ověříme, že $\binom{14}{3} = 364$ a $\binom{15}{3} = 455$. Řešením je tedy $x = 15$. □

Úloha 1.1.2 Jirka má právě sedm různých triček, čtvery různé kalhoty a pět párů různých bot.

(i) Kolika navzájem různými způsoby může vytvořit svůj outfit?
(ii) Kolik by potřeboval triček, aby měl každý den v roce originální[1] outfit?

Řešení.

(i) Využijeme kombinatorické pravidlo součinu. Ke každému ze sedmi triček si může Jirka vzít libovolné z celkem čtver kalhot, tedy celkem počet možností, jak může kombinovat tričko a kalhoty, je $7 \cdot 4 = 28$. Ke každé možnosti, jak spároval tričko a kalhoty, si ještě postupně může vzít první, druhý, třetí, čtvrtý, nebo pátý pár bot, tedy celkem $(7 \cdot 4) \cdot 5 = 28 \cdot 5 = 140$. Tedy celkový počet možností, jak může Jirka vybrat tričko, kalhoty a pár bot do svého outfitu je 140.
(ii) Označme počet triček t, zřejmě je $t \in \mathbb{N}$. Počet možností, jak může Jirka vybrat outfit z t triček, čtver kalhot a pěti párů bot, je dle předchozí části roven $t \cdot 4 \cdot 5 = 20t$. Pokud má mít každý den v roce unikátní outfit, musí mít možnost složit svůj outfit alespoň 365 způsoby.

Hledáme tedy nejmenší takové $t \in \mathbb{N}$, aby platilo $20t \geq 365$, neboli $t \geq \frac{365}{20} = 18{,}25$, tedy $t = 19$. Jirka tedy potřebuje alespoň devatenáct triček k tomu, aby je dokázal s čtvermi kalhoty a pěti páry bot zkombinovat tak, že bude mít každý den v roce unikátní outfit. □

Úloha 1.1.3 Uvažujme sedm číslic $1, 2, 3, \ldots, 6, 7$.

(i) Kolika navzájem různými způsoby z nich můžeme sestavit trojciferné číslo, pokud se číslice mohou opakovat?
(ii) Kolika navzájem různými způsoby z nich můžeme sestavit trojciferné číslo, pokud se číslice nemohou opakovat?
(iii) Pro kolik takových trojciferných čísel bude platit, že první jejich cifra je menší než druhá a zároveň druhá jejich cifra je menší než třetí?

Řešení.

(i) Mohou-li se cifry na jednotlivých pozicích trojciferného čísla opakovat, pak zřejmě na pozici stovek může být kterákoliv ze sedmi cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$, obdobně na pozici desítek může být kterákoliv ze sedmi cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$

[1] V tom smyslu, aby měl pokaždé jiný outfit než během kteréhokoliv jiného dne v roce.

a nakonec i na pozici jednotek může být kterákoliv ze sedmi cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$. Podle kombinatorického pravidla součinu je tak celkový počet navzájem různých trojciferných čísel sestatených z cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ s jejich možným opakováním roven

$$
\begin{aligned}
|\{1,2,3,\ldots,6,7\}| \times |\{1,2,3,\ldots,6,7\}| \times |\{1,2,3,\ldots,6,7\}| &= 7 \cdot 7 \cdot 7 = \\
&= 7^3 = \\
&= 343.
\end{aligned}
$$

(ii) Nemohou-li se cifry na jednotlivých pozicích trojciferného čísla opakovat, pak zřejmě na pozici stovek může být kterákoliv ze sedmi cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$, na pozici desítek může být kterákoliv ze sedmi cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ kromě té na pozici stovek a nakonec na pozici jednotek může být kterákoliv ze sedmi cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ kromě oněch dvou na pozici stovek a desítek. Tři navzájem různé cifry z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ můžeme vybrat celkem

$$\binom{|\{1,2,3,\ldots,6,7\}|}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

způsoby. Protože jsou vždy číslice navzájem různé, v každém z 35 způsobů je lze ještě vzájemně uspořádat (permutovat). Celkový počet navzájem různých trojciferných čísel sestatených z cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ bez jejich opakování[2] je roven

$$\binom{7}{3} \cdot 3! = 35 \cdot 6 = 210.$$

(iii) Stačí si uvědomit, že kdykoliv z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ vybereme právě tři různé číslice, lze je jednoznačně (a vždy právě jedním způsobem) uspořádat tak, aby první byla menší než druhá a druhá aby byla menší než třetí. Počet trojciferných čísel sestavených z číslic množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ takových, že jejich první cifra je vždy menší než druhá a druhá cifra je menší než třetí, je tak roven počtu způsobů, kolika můžeme vybrat z dané množiny navzájem různé tři číslice. To je možné právě $\binom{7}{3} = 35$ způsoby. □

[2]Porovnáním řešení této a předchozí části získáme celkový počet navzájem různých trojciferných čísel sestatených z cifer $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ tak, že alespoň jedna z cifer je v každém takovém čísle obsažena alespoň dvakrát, ten je tedy roven $343 - 210 = 133$.

To ovšem můžeme nahlédnout i analyticky. Má-li se alespoň jedna z cifer trojciferného čísla opakovat, obsahuje takové číslo dvě různé číslice (a jednu z nich dvakrát), nebo pouze jednu číslici (a to třikrát). Dvě různé číslice můžeme z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ vybrat celkem $\binom{7}{2}$ způsoby, a protože jednu z nich použijeme dvakrát, tedy první, pak druhou, jde o $\binom{7}{2} \cdot 2$ způsobů. Nakonec si ještě uvědomme, že číslice, která je v čísle jen jedenkrát, může být na pozici stovek, desítek, anebo jednotek. Celkově tak můžeme trojciferné číslo s dvěma různými číslicemi, z nichž jedna je obsažena dvakrát, získat $\binom{7}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 21 \cdot 2 \cdot 3 = 126$ způsoby. Trojciferné číslo s jednou číslicí z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ obsaženou třikrát můžeme očividně získat právě 7 způsoby. A zřejmě je skutečně počet trojciferných čísel setavených z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 6, 7\}$ tak, že alespoň jedna jeho cifra se v něm opakuje, roven $126 + 7 = 133$, což jsme odvodili dvěma různými způsoby.

1.2 Úlohy k vlastnímu procvičení

Úloha 1.2.1 Kolika způsoby je možné rozdělit zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili mezi osm finalistů (pořadí na nemedailových pozicích nesestavujeme)? V kolika z těchto možností bude finalista ze Srí Lanky bronzový (je v osmici jen jeden)? V kolika z těchto možností bude finalista ze Srí Lanky na kterékoliv medailové pozici?

Úloha 1.2.2 Určeme počet všech nejvýše pěticiferných čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje.

Úloha 1.2.3 Kolika způsoby se může při nástupu seřadit n táborníků do řady? V kolika způsobech stojí táborník A po levici táborníka B? V kolika stojí A po pravici B? V kolika případech stojí táborníci A a B těsně vedle sebe? V kolika případech mezi A a B stojí minimálně jeden další táborník?

Úloha 1.2.4 Regionální letecká společnost rozšířila síť svých letů na několik nových letišť (o více než jedno). Kvůli novým letům musela začít v databázi evidovat o 296 letových tras více (let z letiště A do letiště B považujeme za různý od letu z letiště B do letiště A). Mezi kolika letišti původně společnost létala a kolik nových jich přibrala?

Úloha 1.2.5 Určete počet všech přirozených šesticiferných čísel, jejichž ciferný součet je sudý.

Úloha 1.2.6 Musí mít nutně v městečku o 1500 obyvatelích dva občané zcela shodné iniciály? Jméno a příjmení začíná jedním z 32 různých znaků.

Úloha 1.2.7 Na maturitním večírku je patnáct hochů a dvanáct dívek. Kolika způsoby je možné vybrat čtyři taneční páry?

Úloha 1.2.8 Určete počet všech navzájem různých řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v oboru přirozených čísel, tedy $\forall i \in \{1, 2, \ldots k\}$ je $x_i \in \mathbb{N}$, vzhledem k parametrům $k \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 1.2.9 Určete počet všech navzájem různých řešení nerovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$$

v oboru

(i) přirozených čísel, tedy $\forall i \in \{1, 2, \ldots k\}$ je $x_i \in \mathbb{N}$
(ii) celých nezáporných čísel, tedy $\forall i \in \{1, 2, \ldots k\}$ je $x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

vzhledem k parametrům $k \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 1.2.10 Sportovní utkání neskončilo nerozhodně a žádné z obou družstev nevstřelilo více než dvacet a méně než deset branek. Určete počet možných výsledků.

Úloha 1.2.11 Hokejové utkání skončilo prohrou domácího týmu 7 : 12 (branek). Kolik navzájem různými možnostmi se mohl zápas vyvíjet[3]? Všechny smysluplné stavy během zápasu (co do počtu branek) jsou následující

$$\begin{pmatrix} 0:0 & 0:1 & 0:2 & \cdots & 0:12 \\ 1:0 & 1:1 & 1:2 & \cdots & 1:12 \\ 2:0 & 2:1 & 2:2 & \cdots & 2:12 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 7:0 & 7:1 & 7:2 & \cdots & 7:12 \end{pmatrix}.$$

[3]Za vývoj zápasu tedy považujeme sekvenci jeho průběžných brankových skóre tak, jak se mohla skóre vyvíjet vždy po padnutí další branky, tedy $[0:0] \to \{[0:1],[1:0]\} \to \{[0:2],[1:1],[2:0]\} \to \cdots \to [7:12]$.

2 Deskriptivní statistika

2.1 Řešené úlohy

Úloha 2.1.1 V tabulce 2.2.1 jsou uvedeny hodnoty osmiprvkového výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_8)^T$. Určete pro daný výběr jeho aritmetický průměr, medián, výběrový rozptyl, výběrovou směrodatnou odchylku, minimum, maximum, variační rozpětí a variační koeficient.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	4	5	2	12	11	8	6	16

Tabulka 2.1.1: Hodnoty výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_8)^T$

Řešení. S použitím známých vzorců a při značení $n = 8$ hodnot pomocí symbolů $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$ dostaneme postupně hodnoty pro aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = 8,$$

medián

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_{(4)} + x_{(5)}\right) = \frac{1}{2}(6+8) = 7,$$

výběrový[4] rozptyl

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 = 22,$$

[4]Kdykoliv jde o *výběr* nebo náhodně vybrané hodnoty, preferujeme k výpočtu (výběrového) rozptylu a směrodatné odchylky vzorce

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Pokud jde naopak o celou *populaci*, preferujeme k výpočtu (populačního) rozptylu a směrodatné ochylky vzorec

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

výběrovou směrodatnou odchylku

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2} = \sqrt{22} \doteq 4{,}69,$$

minimum $x_{\min} = x_{(1)} = 2$, maximum $x_{\max} = x_{(8)} = 16$, variační rozpětí $R = x_{\max} - x_{\min} = x_{(8)} - x_{(1)} = 16 - 2 = 14$ a variační koeficient

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{22}}{8} \doteq 0{,}59.$$

□

Úloha 2.1.2 Na katederní schůzi, kde bylo původně šestnáct lidí, přišlo několik doktorandů pozdě. Jejich příchodem kleslo průměrné IQ v místnosti ze 140 na 137. Průměrné IQ ve skupince pozdě příchozích doktorandů bylo 125. Určete, kolik bylo doktorandů bylo ve skupince pozdě příchozích.

Řešení. Označme neznámý počet doktorandů symbolem k. Dále značme hodnotu IQ pro i-tého doktoranda symbolem d_i, kde $i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ a hodnotu IQ j-tého člena katederní schůze před příchodem doktorandů postupně q_j, kde $j \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$. Pro aritmetický průměr IQ ve skupince doktorandů platí

$$125 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} d_i.$$

Odsud zřejmě je $\sum_{i=1}^{k} d_i = 125k$. Dále vyjádřeme průměrnou hodnotu IQ na katederní schůzi před a po příchodu doktorandů. Před příchodem doktorandů zřejmě pro průměrné IQ v místnosti platilo

$$140 = \frac{1}{16}\sum_{j=1}^{16} q_j,$$

odsud zřejmě je $\sum_{j=1}^{16} q_j = 16 \cdot 140 = 2240$. Po příchodu doktorandů pak pro průměrné IQ v místnosti platilo

$$137 = \frac{1}{16+k}\left(\sum_{j=1}^{16} q_j + \sum_{i=1}^{k} d_i\right).$$

Dosazením za $\sum_{j=1}^{16} q_j = 2240$ a za $\sum_{i=1}^{k} d_i = 125k$ do předchozí rovnosti získáme

$$137 = \frac{1}{16+k}\left(2240 + 125k\right).$$

Odtud již dalšími úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
137 &= \frac{1}{16+k}\,(2240 + 125k)\\
137(16+k) &= 2240 + 125k\\
2192 + 137k &= 2240 + 125k\\
12k &= 48\\
k &= 4.
\end{aligned}$$

Ve skupince pozdě příchozích byli právě čtyři doktorandi. □

Úloha 2.1.3 V souboru deseti čísel je aritmetický průměr roven 12 a rozptyl 4. Do souboru přidáme hodnotu 23. Jak se změní průměr a rozptyl souboru?

Řešení. Značme původní hodnoty postupně $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ a novou, přidanou hodnotu x_{11}. V původním souboru jistě pro aritmetický průměr platilo

$$\bar{x} = 12 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i,$$

odtud $\sum_{i=1}^{10} x_i = 12 \cdot 10 = 120$, a pro výběrový rozptyl (ve výpočetním tvaru) platilo

$$s_x^2 = 4 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - (\bar{x})^2,$$

odsud je

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 10 \cdot \left(s_x^2 + (\bar{x})^2\right) = 10 \cdot (4 + 12^2) = 1480.$$

Pro aritmetický průměr v souboru po přidání jedenácté hodnoty platí

$$\bar{x}_{\text{nový}} = \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + x_{11}\right),$$

odsud po dosazení $\sum_{i=1}^{10} x_i = 120$ a $x_{11} = 23$ je $\bar{x}_{\text{nový}} = \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + x_{11}\right) = \frac{1}{11}(120 + 23) = \frac{143}{11} = 13$.

Pro výběrový rozptyl v souboru po přidání jedenácté hodnoty platí

$$\begin{aligned}
s^2_{x,\text{ nový}} &= \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + x_{11}^2\right) - \left(\frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i + x_{11}\right)\right)^2 =\\
&= \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + x_{11}^2\right) - (\bar{x}_{\text{nový}})^2,
\end{aligned}$$

dosazením za $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1480$, za $\bar{x}_{\text{nový}} = 13$ a za $x_{11} = 23$ je

$$
\begin{aligned}
s^2_{x,\text{ nový}} &= \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + x_{11}^2\right) - (\bar{x}_{\text{nový}})^2 = \\
&= \frac{1}{11}\left(1480 + 23^2\right) - (13)^2 = \\
&= 13\frac{7}{11}.
\end{aligned}
$$

Po přidání jedenácté hodnoty je nový aritmetický průměr souboru roven $\bar{x}_{\text{nový}} = 13$ a výběrový rozptyl je nyní roven $s^2_{x,\text{ nový}} = 13\frac{7}{11}$. □

Úloha 2.1.4 V souboru šestnácti čísel je jejich aritmetických průměr roven 10,3. Jak se změní jejich aritmetický průměr, pokud

(i) zvýšíme každé z čísel o 5,2?
(ii) zvýšíme každé z čísel třikrát?
(iii) zvýšíme polovinu čísel o 7,2 a zbytek čísel zmenšíme o 7,2?
(iv) zvýšíme polovinu čísel o 3,1 a druhou polovinu čísel zmenšíme o 1,1?

Řešení. Označme hodnoty v souboru postupně $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{16}$. Pak dle zadání platí $\bar{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i$.

(i) Pokud zvýšíme každou z šestnácti hodnot o 5,2, nové hodnoty mají $\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ tvar $x_i' = x_i + 5{,}2$. Pro nový aritmetický průměr $\bar{x'}$ pak platí

$$
\begin{aligned}
\bar{x'} &= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i' = \\
&= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i + 5{,}2) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16} x_i + \sum_{i=1}^{16} 5{,}2\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16} x_i + 16 \cdot 5{,}2\right) = \\
&= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i + \frac{1}{16}(16 \cdot 5{,}2) = \\
&= \bar{x} + 5{,}2.
\end{aligned}
$$

Aritmetický průměr čísel v souboru se tak po jejich zvýšení o hodnotu 5,2 zvětší rovněž o hodnotu 5,2.

(ii) Pokud zvýšíme každou z šestnácti hodnot třikrát, nové hodnoty mají $\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ tvar $x_i' = 3x_i$. Pro nový aritmetický průměr $\bar{x'}$ pak platí

$$
\bar{x'} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i'
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(3x_i) = \\
&= 3\cdot\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i = \\
&= 3\bar{x}.
\end{aligned}
$$

Aritmetický průměr čísel v souboru se tak po jejich zvýšení třikrát zvětší rovněž třikrát.

(iii) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že čísla $x_1, x_2, \ldots, x_8$ byla zvetšena o 7,2, zatímco čísla $x_9, x_{10}, \ldots, x_{16}$ byla zmenšena o 7,2. Tedy $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ mají nové hodnoty tvar $x_i' = x_i + 7{,}2$ a $\forall i \in \{9, 10, \ldots, 16\}$ mají nové hodnoty tvar $x_i' = x_i - 7{,}2$. Pro nový aritmetický průměr $\bar{x'}$ pak platí

$$
\begin{aligned}
\bar{x'} &= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i' = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{8}x_i' + \sum_{i=9}^{16}x_i'\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{8}(x_i + 7{,}2) + \sum_{i=9}^{16}(x_i - 7{,}2)\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{8}x_i + \sum_{i=1}^{8}7{,}2 + \sum_{i=9}^{16}x_i - \sum_{i=9}^{16}7{,}2\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{8}x_i + \sum_{i=9}^{16}x_i}_{=\sum_{i=1}^{16}x_i} + 8\cdot 7{,}2 - 8\cdot 7{,}2\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i + 0\right) = \\
&= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i = \\
&= \bar{x}.
\end{aligned}
$$

Aritmetický průměr souboru čísel se po zvýšení poloviny čísel o 7,2 a zmenšení zbytku čísel o 7,2 nezměnil.

(iv) Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že čísla $x_1, x_2, \ldots, x_8$ byla zvetšena o 3,1, zatímco čísla $x_9, x_{10}, \ldots, x_{16}$ byla zmenšena o 1,1. Tedy $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ mají nové hodnoty tvar $x_i' = x_i + 3{,}1$ a $\forall i \in \{9, 10, \ldots, 16\}$

mají nové hodnoty tvar $x_i' = x_i - 1{,}1$. Pro nový aritmetický průměr $\bar{x'}$ pak platí

$$
\begin{aligned}
\bar{x'} &= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i' = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{8} x_i' + \sum_{i=9}^{16} x_i'\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{8}(x_i + 3{,}1) + \sum_{i=9}^{16}(x_i - 1{,}1)\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{8} x_i + \sum_{i=1}^{8} 3{,}1 + \sum_{i=9}^{16} x_i - \sum_{i=9}^{16} 1{,}1\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{8} x_i + \sum_{i=9}^{16} x_i}_{=\sum_{i=1}^{16} x_i} + 8\cdot 3{,}1 - 8\cdot 1{,}1\right) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16} x_i + 16\right) = \\
&= \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i + 1 = \\
&= \bar{x} + 1.
\end{aligned}
$$

Aritmetický průměr souboru čísel se po zvýšení poloviny čísel o 3,1 a zmenšení zbytku čísel o 1,1 zvětšil o jednotku.

Poznámka. Z řešení prvních dvou částí snadno nahlédneme, že pokud jsou původní hodnoty souboru $n \in \mathbb{N}$ čísel zvětšeny vždy q-krát, kde $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a současně zvětšeny vždy o konstantu r, kde $r \in \mathbb{R}$, pak se původní aritmetický průměr souboru $\bar{x}$ změní na nový aritmetický průměr $\bar{x'}$ tak, že $\bar{x'} = q\bar{x} + r$, neboť

$$
\begin{aligned}
\bar{x'} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(qx_i + r) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} qx_i + \sum_{i=1}^{n} r\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(q\sum_{i=1}^{n} x_i + n\cdot r\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n} \cdot n \cdot r = \\
&= q \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + r = \\
&= q\bar{x} + r.
\end{aligned}
$$

□

Úloha 2.1.5

Během čtyř let cena akcie meziročně postupně vzrostla o 8 %, pak o 12 %, poté o 3 % a nakonec klesla o 1 %. Pokud by se během těchto čtyřech let měnila cena akcie meziročně vždy o konstantní procento, o kolik by to bylo?

Řešení. Cena akcie je po čtyřech letech rovna $1{,}08 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}99 \doteq 1{,}233$ násobku původní hodnoty, tedy zvýšila svou hodnotu o 23,3 procent. Předpokládejme, že se meziročně vždy zvýšila cena akcie o p procent, tedy každý ze čtyř roků zvýšila svou hodnotu $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$-krát a za všechny čtyři roky tedy změní svou hodnotu právě $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$-krát. Pak platí, že

$$
\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = 1{,}08 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}99 \doteq 1{,}233,
$$

odsud tedy

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{p}{100}\right) &\doteq \sqrt[4]{1{,}233} \\
\frac{p}{100} &\doteq \sqrt[4]{1{,}233} - 1 \\
p &\doteq 100 \cdot (\sqrt[4]{1{,}233} - 1) \\
p &\doteq 100 \cdot (1{,}054 - 1) \\
p &\doteq 5{,}4.
\end{aligned}
$$

Snadno nahlédneme, že meziroční změna předpokládající konstantní meziroční procento zhodnocení odpovídá geometrickému průměru nad zadanými konkrétními meziročními změnami.

Pokud by se během čtyř let měnila cena akcie meziročně vždy o konstantní procento, bylo by to vždy o 5,4 %. □

Úloha 2.1.6 Ukažme, že pokud se geometrický průměr původního množství $n \in \mathbb{N}$ kladných čísel rovnal $\bar{x}_G$, pak aritmetický průměr logaritmů původních čísel je roven $\log \bar{x}_G$.

Řešení. Pro původní geometrický průměr $\bar{x}_G$ z $n \in \mathbb{N}$ kladných čísel označených $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$
\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}.
$$

Obě strany rovnosti jsou zřejmě nezáporné, jejich zlogaritmováním dostaneme

$$
\begin{aligned}
\log \bar{x}_G &= \log \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}\\
\log \bar{x}_G &= \log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}\\
\log \bar{x}_G &= \frac{1}{n} \cdot \log(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)\\
\log \bar{x}_G &= \frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n),
\end{aligned}
$$

poslední řádek již značí, že logaritmus geometrického průměru kladných čísel je roven aritmetickému průměru logaritmů původních kladných čísel. □

Úloha 2.1.7 Totožná součástka se vyrábí na dvou automatech. Starší z nich vyrobí jeden kus každých 10 minut, nový každých 6 minut.

(i) Jak dlouho trvá v průměru výroba jedné součástky, pokud oba automaty pracují nezávisle na sobě?
(ii) Jak dlouho trvá v průměru výroba jedné součástky, pokud oba automaty pracují na výrobě součástek společně?
(iii) Jak dlouho trvá v průměru výroba jedné součástky, pracuje-li starší automat 5 hodin denně a nový 8 hodin denně?
(iv) Jaká je týdenní produkce součástek, pracují-li oba stroje na maximum, tj. 8 hodin denně, 7 dní v týdnu?

Řešení.

(i) Máme-li spočítat průměrnou dobu, za jakou je oběma automaty pracujícími nezávisle na sobě vyrobena jedna součástka, je třeba předpokládat, že oba automaty pracují dostatečně dlouhou dobu $t > 0$ minut. Díky tomu lze pak zanedbat např. i fakt, že automaty nezačaly pracovat oba ve stejný okamžik. Pak zřejmě platí, že podíl celkové doby práce, po kterou pracují oba automaty, a počtu všech součástek, které vyrobí první i druhý automat vždy za dobu t minut, odpovídá průměrné době výroby jedné součástky.

Celková doba práce obou automatů je $t + t = 2t$ minut. Za dobu t minut vyrobí starší automat právě $\frac{t}{10}$ součástek, za stejnou dobu t minut vyrobí mladší automat právě $\frac{t}{6}$ součástek.

Pro průměrnou dobu $\bar{\tau}$, za jakou je oběma automaty pracujícími nezávisle na sobě vyrobena jedna součástka, platí

$$
\begin{aligned}
\bar{\tau} &= \frac{\text{celkové doba práce obou automatů}}{\text{celkový počet součástek, které vyrobí oba automaty za danou dobu}}\\
&= \frac{2t}{\frac{t}{10} + \frac{t}{6}} =\\
&= \frac{2t}{\frac{3t+5t}{30}} =\\
&= \frac{60t}{8t} =
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \frac{60}{8} = \\ &= 7{,}5 \text{ [minut].}\end{aligned}$$

Všimněme si, že tvar $\bar{\tau} = \frac{2t}{\frac{t}{10}+\frac{t}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{10}+\frac{1}{6}}$ přesně odpovídá situaci, kdy nad hodnotami 6 minut a 10 minut počítáme *harmonický průměr*. Průměrná doba, za jakou je oběma automaty pracujícími nezávisle na sobě vyrobena jedna součástka, tedy odpovídá *harmonickému* průměru obou dob, za které každý z automatů vyrobí jednu součástku sám.

Číselně je průměrná doba, za jakou je oběma automaty pracujícími nezávisle na sobě vyrobena jedna součástka, rovna 7,5 minutám.

Současně si všimněme, že taková průměrná doba odpovídá hodnotě, která leží „někde“ mezi oběma dobami výroby součástky každým z automatů (6 a 10 minut), tedy není ani menší, nebo ani větší než obě dílčí doby.

(ii) Pokud oba automaty pracují společně, stačí si uvědomit, že starší automat, který vyrobí jednu součástku za 10 minut, vyrobí za jednu minutu právě $\frac{1}{10}$ součástky. Obdobně novější automat, který vyrobí jednu součástku za 6 minut, vyrobí za jednu minutu přesně $\frac{1}{6}$ součástky. Oba společně tedy vyrobí za jednu minutu právě $\frac{1}{10}+\frac{1}{6} = \frac{3+5}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ součástky.

Jsou-li za jednu minutu vyrobeno $\frac{4}{15}$ součástky, pak celá jedna součástka je vyrobena za $\frac{1}{4/15} = \frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{6}} = \frac{15}{4} = 3{,}75$ minuty.

Uvědomme si, že v tomto zadání jde vlastně o *úlohu o společné práci*. Pokud budeme předpokládat, že stroje pracují dlouhou dobu na velkém množství součástek, lze hodnotu 3,75 minuty skutečně považovat za průměrnou dobu výroby jedné součástky, pokud oba automaty pracují na výrobě každé ze součástek společně. V takovém případě lze dokonce zanedbat i případné nepřesnosti plynoucí např. z faktu, že oba automaty nemusely začít ve zcela shodný okamžik.

V porovnání s předchozí částí tedy zde nejde (!) o výpočet harmonického průměru, neboť $3{,}75 = \frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{6}} \neq \frac{2}{\frac{1}{10}+\frac{1}{6}} = 7{,}5$.

Současně si všimněme, že taková průměrná doba odpovídá hodnotě, která neleží mezi oběma dobami výroby součástky každým z automatů (6 a 10 minut), ale je dle očekávání díky spolupráci automatů menší než obě dílčí doby, za které by součástku vyrobil každý z automatů sám.

(iii) Zřejmě opět platí, že průměrná doba $\bar{\tau}$ výroby jedné součástky je rovna podílu celkové doby práce, po kterou pracují oba automaty, a počtu všech součástek, které vyrobí první i druhý automat vždy za příslušnou dobu. Starší automat vyrobí za 5 hodin, tedy $5 \cdot 60 = 300$ minut[5] právě $\frac{300}{10} = 30$ součástek, mladší automat pak za 8 hodin, tedy $8 \cdot 60 = 480$ minut vyrobí $\frac{480}{6} = 80$ součástek. Tedy

[5]Převod na minuty není formálně nutný, ale v kontextu úlohy je velmi názorný.

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \frac{\text{celkové doba práce obou automatů}}{\text{celkový počet součástek, které vyrobí oba automaty za danou dobu}}\\ &= \frac{300+480}{\frac{300}{10}+\frac{480}{6}} = \\ &= \frac{780}{30+80} = \\ &= \frac{780}{110} = \\ &= 7{,}09 \text{ [minuty]}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že tvar $\bar{\tau} = \frac{300+480}{\frac{300}{10}+\frac{480}{6}}$ přesně odpovídá situaci, kdy nad hodnotami 6 minut a 10 minut počítáme *vážený harmonický průměr* s vahami 300 a 480 minut, zde odpovídajícími dobám práce jednotlivých automatů denně.

Opět si všimněme, že taková průměrná doba odpovídá hodnotě, která leží „někde“ mezi oběma dobami výroby součástky každým z automatů (6 a 10 minut), tedy není ani menší, nebo ani větší než obě dílčí doby.

(iv) Sedm dní v týdnu po osmi hodinách odpovídá celkem $7 \cdot 8 \cdot 60 = 3360$ minutám. Starší automat vyrobí jednu součástku za 10 minut, tedy za 3360 minut vyrobí právě $\frac{3360}{10} = 336$ součástek, novější automat vyrobí jednu součástku za 6 minut, tedy za 3360 minut vyrobí právě $\frac{3360}{6} = 560$ součástek. Celkem oba automaty tak za sedm dní v týdnu po osmi hodinách vyrobí $336 + 560 = 896$ součástek.

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i následovně. Z první části víme, že jednu součástku vyrobí každý z automatů průměrně za 7,5 minuty. Tedy za 3360 minut první a druhý automat dohromady $\frac{3360}{7{,}5} + \frac{3360}{7{,}5} = 448 + 448 = 896$ součástek. □

Úloha 2.1.8 V souboru hodnot $\boldsymbol{x} = (1, 3, 2, 2, 4, 1, 4, 2, 2, 5, 1, 2)^T$ nalezněme

(i) hodnotu kvantilu $\tilde{x}_{0{,}25}$.
(ii) hodnotu kvantilu $\tilde{x}_{0{,}45}$.
(iii) hodnotu modusu souboru $\boldsymbol{x}$.

Řešení. Vyjdeme z definice p-tého kvantilu pro libovolné $0 \le p \le 1$. Nad souborem $n \in \mathbb{N}$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se p-tý kvantil značí $\tilde{x}_p$ a je definován jako

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} x_{(\lfloor k \rfloor + 1)}, & \text{pro } k = np \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right), & \text{pro } k = np \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

kde $x_{(k)}$ je k-té nejmenší číslo mezi čísly $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tedy nejvyšší celé číslo takové, že nepřevýší x, takže např. $\lfloor 4{,}3 \rfloor = 4$, $\lfloor 1 \rfloor = 1$ a $\lfloor -2{,}8 \rfloor = -3$.

Je vhodné čísla v souboru uspořádat vzestupně. Získáme tak

$$\boldsymbol{x}_{\text{uspořádaný}} = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5)^T,$$

kde j-té nejmenší číslo značme $x_{(j)}$ pro $j \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, takže je např. $x_{(1)} = 1$, $x_{(4)} = 2$, $x_{(6)} = 2$, $x_{(9)} = 3$, $x_{(10)} = 4$ anebo $x_{(12)} = 5$.

Hodnotu modusu souboru $\boldsymbol{x}$ pak nalezneme jednoduše jako tu, která se v souboru $\boldsymbol{x}$ vyskytuje nejčastěji. Modus $\hat{x}$ souboru $\boldsymbol{x}$ je pak taková hodnota, že

$$\hat{x} = \arg\max_{x_i \in \boldsymbol{x}} \{|\{x_i : x_i \in \boldsymbol{x}\}|\} .$$

Praktické je pro dopočítání absolutních četností jednotlivých navzájem různých hodnot v souboru použít místo souboru $\boldsymbol{x}$ raději vzestupně uspořádaný výběr $\boldsymbol{x}_{\text{uspořádaný}}$.

(i) Podle definice p-tého kvantilu hledáme $\tilde{x}_p$ pro $p = 0{,}25$ a soubor $\boldsymbol{x}_{\text{uspořádaný}}$ o $n = 12$ číslech.

Zřejmě součin $k = np = 12 \cdot 0{,}25 = 3 \in \mathbb{N}$, tedy podle definice je

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{0{,}25} &= \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{(np)} + x_{(np+1)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{(3)} + x_{(3+1)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{(3)} + x_{(4)}\right) = \\
&= \frac{1}{2}(1 + 2) = \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(ii) Podle definice p-tého kvantilu hledáme $\tilde{x}_p$ pro $p = 0{,}45$ a soubor $\boldsymbol{x}_{\text{uspořádaný}}$ o $n = 12$ číslech.

Zřejmě součin $k = np = 12 \cdot 0{,}45 = 5{,}4 \notin \mathbb{N}$, tedy podle definice je

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{0{,}45} &= x_{(\lfloor k \rfloor + 1)} = \\
&= x_{(\lfloor np \rfloor + 1)} = \\
&= x_{(\lfloor 5{,}4 \rfloor + 1)} = \\
&= x_{(5+1)} = \\
&= x_{(6)} = \\
&= 2.
\end{aligned}$$

(iii) Modus v souboru $\boldsymbol{x}$ nalezneme jako nejčetnější hodnotu. S výhodou spočítejme absolutní četnosti všech navzájem různých hodnot v souboru $\boldsymbol{x}$ a vyjádřeme je v tabulce 2.1.2.

x_i	1	2	3	4	5
absolutní četnost x_i	3	5	1	2	1

Tabulka 2.1.2: Absolutní četnosti navzájem různých hodnot souboru $\boldsymbol{x}$.

Z tabulky 2.1.2 je zřejmé, že modusem souboru $\boldsymbol{x}$ je hodnota $\hat{x} = 2$, protože jeji absolutní četnost (5) je mezi všemi četnostmi nejvyšší. □

Úloha 2.1.9 Určeme, jak se změní výběrový rozptyl a výběrová směrodatná odchylka, pokud se všechny hodnoty ve výběru

(i) zmenší o pět.
(ii) zvětší dvakrát.

Řešení. Označme hodnoty v souboru postupně $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ pro neznámé $n \in \mathbb{N}$. Pak dle zadání je výběrový rozptyl $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ a vyberová směrodatná odchylka $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, kde $\bar{x}$ je vždy aritmetický průměr z čísel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Prvně připomeňme, že pokud jsou původní hodnoty souboru $n \in \mathbb{N}$ čísel zvětšeny vždy q-krát, kde $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a současně zvětšeny vždy o konstantu r, kde $r \in \mathbb{R}$, pak se původní aritmetický průměr souboru $\bar{x}$ změní na nový aritmetický průměr $\bar{x'}$ tak, že $\bar{x'} = q\bar{x} + r$, neboť

$$
\begin{aligned}
\bar{x'} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(qx_i + r) = \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} qx_i + \sum_{i=1}^{n} r\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(q\sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot r\right) = \\
&= q \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n} \cdot n \cdot r = \\
&= q \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + r = \\
&= q\bar{x} + r.
\end{aligned}
$$

(i) Pokud zmenšíme každou z n hodnot o pět, nové hodnoty mají $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ tvar $x_i' = x_i - 5$, stejně tak podle výše uvedeného má nový aritmetický průměr souboru tvar $\bar{x'} = \bar{x} - 5$. Pro nový vyberový rozptyl $s^2_{x,\,\text{nový}}$ pak platí

$$
\begin{aligned}
s^2_{x,\text{ nový}} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x'_i - \bar{x'})^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}((x_i - 5) - (\bar{x} - 5))^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 5 - \bar{x} + 5)^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \\
&= s^2_x
\end{aligned}
$$

a pro novou výběrovou směrodatnou odchylku platí

$$
\begin{aligned}
s_{x,\text{ nový}} &= \sqrt{s^2_{x,\text{ nový}}} = \\
&= \sqrt{s^2_x} = \\
&= s_x.
\end{aligned}
$$

Pokud tedy zmenšíme každou z n hodnot souboru vždy o pět, výběrový rozptyl ani výběrová směrodatná odchylka se nijak nezmění.

(ii) Pokud zvětšíme každou z n hodnot dvakrát, nové hodnoty mají $\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tvar $x'_i = 2x_i$, stejně tak podle výše uvedeného má nový aritmetický průměr souboru tvar $\bar{x'} = 2\bar{x}$. Pro nový vyběrový rozptyl $s^2_{x,\text{ nový}}$ pak platí

$$
\begin{aligned}
s^2_{x,\text{ nový}} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x'_i - \bar{x'})^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(2x_i - 2\bar{x})^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(2 \cdot (x_i - \bar{x})\right)^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}4 \cdot (x_i - \bar{x})^2 = \\
&= 4 \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \\
&= 4 \cdot s^2_x
\end{aligned}
$$

a pro novou výběrovou směrodatnou odchylku platí

$$
\begin{aligned}
s_{x,\text{ nový}} &= \sqrt{s^2_{x,\text{ nový}}} = \\
&= \sqrt{4 \cdot s^2_x} = \\
&= 2 \cdot s_x.
\end{aligned}
$$

Pokud tedy zvětšíme každou z n hodnot souboru dvakrát, výběrový rozptyl vzroste čtyřikrát a výběrová směrodatná odchylka vzroste dvakrát.

Poznámka. Snadno z předchozích řešení nahlédneme, že pokud jsou původní hodnoty souboru $n \in \mathbb{N}$ čísel zvětšeny vždy q-krát, kde $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a současně zvětšeny vždy o konstantu r, kde $r \in \mathbb{R}$, nové hodnoty mají $\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tvar $x_i' = qx_i + r$ a aritmetický průměr souboru je dle výše uvedeného roven $\bar{x}' = q\bar{x} + r$. Původní výběrový rozptyl souboru s_x^2 změní na nový výběrový rozptyl $s^2_{x,\text{ nový}}$ tak, že $s^2_{x,\text{ nový}} = q^2 s_x^2$, neboť

$$
\begin{aligned}
s^2_{x,\text{ nový}} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i' - \bar{x}')^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}((qx_i + r) - (q\bar{x} + r))^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(qx_i + r - q\bar{x} - r)^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(qx_i - q\bar{x})^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(q \cdot (x_i - \bar{x})\right)^2 = \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} q^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2 = \\
&= q^2 \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \\
&= q^2 s_x^2
\end{aligned}
$$

a původní výběrová směrodatná odchylka souboru s_x změní na novou výběrovou směrodatnou odchylku $s_{x,\text{ nový}}$ tak, že $s_{x,\text{ nový}} = qs_x^2$, neboť

$$
\begin{aligned}
s_{x,\text{ nový}} &= \sqrt{s^2_{x,\text{ nový}}} = \\
&= \sqrt{q^2 \cdot s_x^2} = \\
&= qs_x.
\end{aligned}
$$

□

Úloha 2.1.10 V zemi *Statlandia* žijí dva kouzelníci, jeden vždy mluví pravdu a druhý vždy lže. Mladší z nich nám řekl, že ve všech ovčích stádech *Statlandie* je čtverec průměru počtu ovcí 128,6 a průměr čtverců počtu ovcí 115,4. Starší nám řekl, že je to naopak. Který z nich určitě lhal? Mladší, nebo starší?

Řešení. Buď $\bar{x}$ průměrný počet ovcí na stádo a $\overline{x^2}$ průměrný čtverec počtu ovcí na stádo ve *Statlandii.*

Protože je $s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$, je vždy i $\overline{x^2} - \bar{x}^2 = s_x^2 \geq 0$, a tedy $\overline{x^2} - \bar{x}^2 \geq 0$, čili vždy $\overline{x^2} \geq \bar{x}^2$. Proto musí být průměr čtverců počtu ovcí minimálně tak velký jako čtverec průměru počtu ovcí na stádo.

Zatímco starší kouzelník tvrdí, že čtverec průměru počtu ovcí všech stád je $\bar{x}^2 = 115{,}4$ a průměr čtverců počtu ovcí ve všech stádech je $\overline{x^2} = 128{,}6$, mladší tvrdí opak, tedy že čtverec průměru počtu ovcí všech stád je $\bar{x}^2 = 128{,}6$ a průměr čtverců počtu ovcí ve všech stádech je $\overline{x^2} = 115{,}4$.

Protože je vždy $\overline{x^2} \geq \bar{x}^2$, musela by dle mladšího kouzelníka platit nerovnost $115{,}4 \geq 128{,}6$. Mladší kouzelník tedy lhal. □

Úloha 2.1.11 Obchodní řetězec odebírá určitý výrobek, jehož cena v průběhu roku sezónně kolísá, od dvou stálých dodavatelů A a B. Průměrná cena za celý rok od dodavatele A je 9 Kč, její směrodatná odchylka činí 2 Kč, výrobků od dodavatele A se nakoupilo 1000 kusů. U dodavatele B činí průměrná cena 10 Kč při směrodatné odchylce 1 Kč, nákup od dodavatele B byl 4000 kusů. Určeme

(i) variační koeficient vyjadřující variabilitu kolísání nákupní ceny během roku souhrnně za oba dva dodavatele dohromady.

(ii) zda se na celkové variabilitě nákupní ceny větší měrou podílí průběžné sezónní kolísání cen výrobku u jednotlivých dodavatelů v rámci roku, nebo zda jsou důležitější rozdíly mezi průměrnými cenami jednotlivých dodavatelů.

Řešení. Údaje ze zadání o obou dodavatelích můžeme přehledně shrnout do tabulky 2.1.3.

	dodavatel	
	A	B
i	1	2
průměrná nákupní cena [Kč], $\bar{x}_i$	9	10
počet dodaných kusů, n_i	1000	4000
směrodatná odchylka nákupní ceny [Kč], $s_{x,i}$	2	1
rozptyl nákupní ceny [Kč^2], $s_{x,i}^2$	4	1

Tabulka 2.1.3: Údaje o dodavatelích.

Nadále tak pro dodavatele A značme počet dodaných výrobků $n_1 = 1000$, průměrnou nákupní cenu $\bar{x}_1 = 9$ [Kč], smědodatnou odchylku nákupní ceny $s_{x,1} = 2$ [Kč] a rozptyl nákupní ceny $s_{x,1}^2 = 4$ [Kč^2].

Obdobně pro dodavatele B značme počet dodaných výrobků $n_2 = 4000$, průměrnou nákupní cenu $\bar{x}_2 = 10$ [Kč], smědodatnou odchylku nákupní ceny pak $s_{x,2} = 1$ [Kč] a rozptyl nákupní ceny $s_{x,2}^2 = 1$ [Kč^2].

(i) K výpočtu celkového variačního koeficientu je třeba znát celkovou směrodatnou odchylku nákupní ceny a celkový průměr nákupní ceny, neboť

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}.$$

Celkový průměr nákupní ceny je zřejmě vážený průměr nákupních cen od obou dodavatelů, A a B, kde vahami jsou počty nakoupných kusů, tedy

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{1000 \cdot 9 + 4000 \cdot 10}{1000 + 4000} = 9{,}8 \text{ [Kč]}.$$

Pro výpočet celkové směrodatné odchylky nákupní ceny je vhodné použít vzorec pro rozptyl komponovaný ze sčítance pro vnitroskupinovou a meziskupinovou variabilitu, tedy

$$s_x^2 = \overline{s^2} + s_{\bar{x}}^2 = \underbrace{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i s_{x,i}^2\right)}_{\text{vnitroskupinová variabilita}} + \underbrace{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2\right)}_{\text{meziskupinová variabilita}},$$

kde v našem případě je $k = 2$ pro dva dodavatele A a B a $n = n_1 + n_2$. Spočítejme nejdříve vnitroskupinovou variabilitu, také někdy značenou $\overline{s^2}$,

$$\begin{aligned}
\overline{s^2} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i s_{x,i}^2\right) = \\
&= \frac{1}{n_1 + n_1}\left(\sum_{i=1}^{2} n_i s_{x,i}^2\right) = \\
&= \frac{n_1 s_{x,1}^2 + n_2 s_{x,2}^2}{n_1 + n_1} = \\
&= \frac{1000 \cdot 4 + 4000 \cdot 1}{1000 + 4000} = \\
&= \frac{8000}{5000} = \\
&= \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

Nyní vyčísleme meziskupinovou variabilitu, značenou někdy $s_{\bar{x}}^2$,

$$\begin{aligned}
s_{\bar{x}}^2 &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2\right) = \\
&= \frac{1}{n_1 + n_2}\left(\sum_{i=1}^{2} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2\right) = \\
&= \frac{n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{n_1 + n_2} = \\
&= \frac{1000 \cdot (9{,}0 - 9{,}8)^2 + 4000 \cdot (10{,}0 - 9{,}8)^2}{1000 + 4000} = \\
&= \frac{1000 \cdot (-0{,}8)^2 + 4000 \cdot 0{,}2^2}{5000} = \\
&= \frac{1000 \cdot 0{,}64 + 4000 \cdot 0{,}04}{5000} =
\end{aligned}$$

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{800}{5000} = \\ = \frac{8}{50}.$$

Celkový rozptyl nákupní ceny je tak

$$s_x^2 = \overline{s^2} + s_{\bar{x}}^2 = \frac{8}{5} + \frac{8}{50} = \frac{88}{50} = 1{,}76 \text{ [Kč}^2\text{]}.$$

Nyní při znalosti celkového průměru nákupní ceny $\bar{x} = 9{,}8$ [Kč] a celkového rozptylu nákupní ceny $s_x^2 = 1{,}76$ [Kč^2] již snadno dopočítáme variační koeficient v_x, tedy

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s_x^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1{,}76}}{9{,}80} \doteq 0{,}135.$$

Celkový variační koeficient nákupní ceny za oba dodavatele je tedy asi 0,135. To můžeme intereptovat i tak, že celková směrodatná odchylka nákupní ceny tvoří asi 13,5 % z celkového průměru nákupní ceny.

(ii) zda se na celkové variabilitě nákupní ceny větší měrou podílí průběžné sezónní kolísání cen výrobku u jednotlivých dodavatelů v rámci roku, nebo zda jsou důležitější rozdíly mezi průměrnými cenami jednotlivých dodavatelů.

Zatímco vnitroskupinová variabilita reprezentuje kolísání nákupní ceny kolem své průměrné hodnoty nákupní ceny v rámci každého dodavatele zvlášť, odpovídá tedy sezónnímu kolísání nákupních cen kolem svých průměrů v daném roce, meziskupinová variabilita naopak reflektuje to, jak se nákupní ceny navzájem lišily mezi oběma dodavateli během daného roku.

Protože $\overline{s^2} = \frac{8}{5} \gg \frac{8}{50} = s_{\bar{x}}^2$, je vnitroskupinová variabilita podstatně větší než meziskupinová. Lze tedy předpokládat, že sezónní kolísání nákupních cen v rámci každého dodavatele podstatně více určuje celkovou variabilitu než rozdíly mezi nákupními cenami obou dodavatelů v rámci roku. □

2.2 Úlohy k vlastnímu procvičení

Úloha 2.2.1 V tabulce 2.2.1 jsou uvedeny hodnoty osmiprvkového výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_8)^T$. Určete pro daný výběr jeho aritmetický průměr, medián, výběrový rozptyl, výběrovou směrodatnou odchylku, minimum, maximum, variační rozpětí, variační koeficient, modus, medián, první kvartil a 0,65-tý kvantil.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	11	9	8	13	6	5	3	21

Tabulka 2.2.1: Hodnoty výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_8)^T$.

Úloha 2.2.2 V tabulce 2.2.2 jsou uvedeny hodnoty osmiprvkového výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_8)^T$. Určete pro daný výběr jeho aritmetický průměr, medián, výběrový rozptyl, výběrovou směrodatnou odchylku, minimum, maximum, variační rozpětí, variační koeficient, modus, medián, třetí kvartil a 0,18-tý kvantil.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	12	9	6	14	6	5	2	21

Tabulka 2.2.2: Hodnoty výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_8)^T$

Úloha 2.2.3 Ve třídě 8. A bylo původně 32 žáků a ve třídě 8. B téže základní školy bylo původně 20 žáků. Určitý počet žáků byl z kázeňských důvodů přesunut ze třídy 8. A do třídy 8. B. Díky tomu vzrostl průměrný inteligenční kvocient zbylých žáků v 8. A ze 127 na 128, stejně tak příchodem přesunutých žáků vzrostl průměrný inteligenční kvocient všech žáků (včetně nově přesunutých) ve třídě 8. B ze 114 na 115. Určete, kolik žáků bylo přesunuto ze třídy 8. A do třídy 8. B a jaký byl jejich průměrný inteligenční kvocient.

Úloha 2.2.4 Loď pluje z říčního přístavu k ústí řeky rychlostí $v_1 > 0$, poté se vrací stejnou trasou zpět do přístavu rychlostí $v_2 > 0$. Určete průměrnou rychlost lodi na celkové trase z říčního přístavu k ústí řeky a zpět.

Úloha 2.2.5 Investor se rozhodl pravidelně investovat do určité akcie každý měsíc fixní částku 10 000 Kč po dobu 3 měsíců. Cena jedné akcie byla první měsíc 100 Kč, druhý měsíc 125 Kč a třetí měsíc 80 Kč. Jaká byla průměrná pořizovací cena jedné akcie?

Úloha 2.2.6 Na jisté katedře je věkový profil zaměstnanců takový, že šest z nich patří věkově do dekády $\langle 20, 30)$ let, čtyři z nich do dekády $\langle 30, 40)$ let sedm z nich do dekády $\langle 40, 50)$ let, dva z nich do dekády $\langle 50, 60)$ let a jeden z nich do dekády $\langle 60, 70)$ let. Určete absolutní a relativní četnosti všech dekád na dané katedře, současně určete i jejich kumulativní protějšky.

Úloha 2.2.7 Bezpečnostní agentura má 216 zaměstnanců a skládá se ze dvou dceřiných společností. V první dceřiné společnosti je průměrná měsíční mzda 21 650 Kč a v druhé 24 800 Kč. Průměrná mzda za celý holding je 23 650 Kč. Kolik zaměstnanců pracuje ve druhé dceřiné společnosti?

Úloha 2.2.8 V hudebním tělese je rozložení věku jeho hráčů následující (v letech),

$$22,\ 82,\ 27,\ 43,\ 19,\ 47,\ 41,\ 34,\ 34,\ 42,\ 35,\ 39.$$

Určeme

(i) mediánový věk hudebníků v tělese.
(ii) modální věk hudebníků v tělese.
(iii) první a třetí kvartil věku hudebníků v tělese.

(iv) 80-tý percentil věku hudebníků v tělese.

Úloha 2.2.9 V bytovém komplexu je celkem 78 domácností, z nichž 34 nemá žádné parkovací místo v podzemních garážích, 30 domácností má jedno parkovací místo, 6 domácností má dvě parkovací místa, 5 domácností má tři parkovací místa a 3 domácnosti mají dokonce čtyři parkovací místa. Jaký průměrný počet parkovacích míst připadajících na domácnost? Sestavme tabulku absolutních a relativních četností pro počet parkovacích míst, včetně kumulativních protějšků.

Úloha 2.2.10 První dělník je schopen vyhloubit výkop za 8 hodin, druhý dělník za 6 hodin a třetí dělník pak za 10 hodin.

(i) Za kolik hodin vyhloubí jeden výkop, pokud budou pracovat společně?

(ii) Za kolik průměrně hodin je vyhlouben výkop, pokud pracují všichni tří dělníci a každý pracuje na svých výkopech?

Úloha 2.2.11 Vlivem ekonomických událostí vzrostla průměrná cena letenek v určité oblasti o 10,00 %, zatímco rozptyl ceny těchto letenek vzrostl o 46,41 %. Určeme, jak se změnil variační koeficient ceny těchto letenek.

Úloha 2.2.12 Soubor o šesti hodnotách má průměr 12 a rozptyl $4\frac{2}{3}$. Jak se změní průměr a rozptyl souboru, když do něj přibude hodnota 15?

Úloha 2.2.13 Průměrný počet bodů z testu, který psalo 30 studentů, byl původně 78 a bodový rozptyl byl 81. Jak se změní průměrný počet bodů a bodový rozptyl, pokud si test dopsali ještě další tři studenti a získali postupně 99, 92 a 83 bodů?

Úloha 2.2.14 V souboru dvaceti evidovaných hodnot je aritmetický průměr roven 110 a výběrový rozptyl 800. Poté bylo zjištěno, že dvě hodnoty byly zaevidovány chybně – místo hodnoty 85 mělo být správně 95 a místo hodnoty 120 mělo být správně 150. Jaká je správná hodnota aritmetického průměru a výběrového rozptylu?

Úloha 2.2.15 Průměrná mzda pracovního týmu složeného ze šesti finančních analytiků je 29 456 Kč. Směrodatná odchylka mezd této skupiny je 5 460 Kč. Jak se změnila průměrná mzda a směrodatná odchylka ve skupině, jestliže byl do týmu přijat další člen s nástupním platem 22 000 Kč?

Úloha 2.2.16 V tabulce 2.2.3 jsou uvedeny hodnoty představující meziroční procentuální výnosy amerického podílového fondu SLASX pro roky 1998 až 2002.

rok	1998	1999	2000	2001	2002
výnos [%]	16,2	20,3	9,3	-11,1	-17,0

Tabulka 2.2.3: Meziroční procentuální výnosy podílového fondu SLASX.

Určeme

(i) průměrnou hodnotu výnosu SLASX, použijme aritmetický a geometrický průměr.

(ii) variabilitu výnosů SLASX, použijme výběrový rozptyl a průměr.

Úloha 2.2.17 Ve firmě bylo provedeno šetření týkající se výše mezd. Zjištěné údaje jsou shrnuty v tabulce 2.2.4.

pohlaví	průměrná mzda	počet zaměstnanců	variační koeficient
ženy	25 000	20	0,35
muži	29 000	30	0,25

Tabulka 2.2.4: Údaje o mzdách zaměstnanců ve firmě.

Určeme

(i) průměrnou mzdu ve firmě.
(ii) celkovou směrodatnou odchylku mezd ve firmě.
(iii) celkový variační koeficient mezd ve firmě.

Úloha 2.2.18 Do souboru deseti čísel o průměru 20 a rozptylu 4 byly přidány dvě nové hodnoty tak, že průměr nového souboru o dvanácti číslech je 21 a rozptyl 9. Která dvě čísla byla do souboru přidána?

3 Pravděpodobnost jevů

3.1 Řešené úlohy

Úloha 3.1.1 Házíme běžnou šestistěnnou hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

(i) při jednom hodu padne šestka?
(ii) při jednom hodu padne sudé číslo?
(iii) při dvou hodech padne dvakrát šestka?
(iv) při dvou hodech nepadne ani jednou šestka?
(v) při dvou hodech padne alespoň jednou šestka?
(vi) při dvou hodech padne právě jednou šestka?
(vii) při dvou hodech padne alespoň jednou sudé číslo?

Kolikrát musíme minimálně hodit kostkou, aby byla pravděpodobnost, že během těchto hodů padne alespoň jedna šestka, větší než 0,95?

Řešení. Označme jednotlivé jevy následujícím způsobem. Jev A_1 je, že při jednom hodu kostkou padne šestka, jev A_2 je, že při druhém hodu padne šestka, stejně tak značme $P\left(\overline{A_1}\right)$ jev, že při jednom hodu kostkou nepadne šestka a $P\left(\overline{A_2}\right)$ jev, že šestka nepadne při druhém hodu. Dále ještě značme $P(A_k)$, resp. $P\left(\overline{A_k}\right)$ jev, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ padne, resp. nepadne při k-tém hodu kostkou šestka. Jev B_1 je, že při jednom hodu padne sudé číslo, jev B_2 je, že při druhém hodu padne sudé číslo.

(i) Hledáme pravděpodobnost $P(A_1)$. Zřejmě stačí vyjít z klasické definice pravděpodobnosti, protože na běžné hrací šestistěnné kostce jsou všechny možnosti, tj. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ stejně pravděpodobné.

Můžeme tedy psát

$$P(A_1) = \frac{|\{1\}|}{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|} = \frac{1}{6}.$$

Pravděpodobnost, že při jednom hodu běžnou šestistěnnou kostkou padne šestka, je tedy $\frac{1}{6}$.

(ii) Hledáme pravděpodobnost $P(B_2)$. Opět vyjdeme z klasické definice pravděpodobnosti a pišme

$$P(B_1) = \frac{|\{2, 4, 6\}|}{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Pravděpodobnost, že při jednom hodu běžnou šestistěnnou kostkou padne sudé číslo, je tedy $\frac{1}{2}$.

(iii) Hledáme pravděpodobnost $P(A_1 \cap A_2)$, protože šestka musí padnout v každém ze dvou hodů, tedy v prvním i ve druhém. Protože jsou oba hody danou kostkou na sobě jistě nezávislé, můžeme psát $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Pak už jen upravme

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} \cdot \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Pravděpodobnost, že při dvou hodech běžnou šestistěnnou kostkou padne vždy šestka, je tedy $\frac{1}{36}$.

(iv) Hledáme pravděpodobnost $P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right)$, protože šestka nesmí padnout ani v prvním, ani ve druhé hodu. Protože jsou oba hody danou kostkou na sobě jistě nezávislé, můžeme psát $P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right)$. Pak už jen upravme

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) &= P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) = \\ &= \frac{|\{1,2,3,4,5\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} \cdot \frac{|\{1,2,3,4,5\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \\ &= \frac{25}{36}. \end{aligned}$$

Výsledke bychom obdobně získali i úvahou, že

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) &= P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) = \\ &= (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \\ &= \frac{25}{36}. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že při dvou hodech běžnou šestistěnnou kostkou nepadne ani jednou šestka, je tedy $\frac{25}{36}$.

(v) Má-li šestka během dvou hodů kostkou padnout alespoň jednou, může dojít ke třem různým scénářům: šestka padne v prvním hodu a ve druhém ne, nebo padne ve druhém hodu a v prvním ne, anebo může padnout v obou hodech. Hledáme tedy pravděpodobnost

$$\begin{aligned} P &= P\left((A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2)\right) = \\ &= P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \cap A_2 \cup A_1 \cap A_2\right). \end{aligned}$$

Všechny tři scénáře se navzájem vždy liší alespoň v jednom hodu, jsou tedy nezávislé; současně první a druhý hod v rámci scénáře je na sobě také očividně nezávislý (kostka nemá žádnou historickou paměť na předchozí hod).

Můžeme tedy psát

$$
\begin{aligned}
P &= P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \cap A_2 \cup A_1 \cap A_2\right) = \\
&= P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2) + P(A_1)P(A_2) = \\
&= P(A_1)\left(1 - P(A_2)\right) + \left(1 - P(A_1)\right)P(A_2) + P(A_1)P(A_2) = \\
&= \frac{1}{6}\cdot\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \\
&= \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \\
&= \frac{11}{36}.
\end{aligned}
$$

Úlohu můžeme vyřešit také tak, když si uvědomíme, že k jevu „během dvou hodů kostkou padne alespoň jedna šestka“ je jevem opačným „během dvou hodů kostkou nepadne ani jednou šestka“. Podle druhého výroku tedy zjevně platí rovnost $P = P\left(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}\right)$. Tu můžeme dále upravit

$$
\begin{aligned}
P &= P\left(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}\right) = \\
&= 1 - P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) = \\
&= 1 - P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right) = \\
&= 1 - \left(1 - P(A_1)\right)\cdot\left(1 - P(A_2)\right) = \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \\
&= 1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \\
&= 1 - \frac{25}{36} = \\
&= \frac{11}{36}.
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost, že při dvou hodech běžnou šestistěnnou kostkou padne alespoň jednou šestka, je tedy $\frac{11}{36}$.

(vi) Má-li šestka během dvou hodů kostkou padnout právě jednou, může dojít ke dvěma různým scénářům: šestka padne v prvním hodu a ve druhém ne, nebo padne ve druhém hodu a v prvním ne. Hledáme tedy pravděpodobnost

$$P = P\left(\left(A_1 \cap \overline{A_2}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2\right)\right) = P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \cap A_2\right).$$

Oba scénáře se navzájem vždy liší alespoň v jednom hodu, jsou tedy nezávislé; současně první a druhý hod v rámci scénáře je na sobě také očividně nezávislý.

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} P &= P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \cap A_2\right) = \\ &= P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2) = \\ &= P(A_1)\left(1 - P(A_2)\right) + \left(1 - P(A_1)\right)P(A_2) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \\ &= \frac{10}{36} = \\ &= \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že při dvou hodech běžnou šestistěnnou kostkou padne právě jednou šestka, je tedy $\frac{5}{18}$.

(vii) Má-li sudé číslo během dvou hodů kostkou padnout alespoň jednou, může dojít ke třem různým scénářům: sudé číslo padne v prvním hodu a ve druhém ne, nebo padne ve druhém hodu a v prvním ne, anebo může padnout v obou hodech. Hledáme tedy pravděpodobnost

$$\begin{aligned} P &= P\left((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)\right) = \\ &= P\left(B_1 \cap \overline{B_2} \cup \overline{B_1} \cap B_2 \cup B_1 \cap B_2\right). \end{aligned}$$

Všechny tři scénáře se navzájem vždy liší alespoň v jednom hodu, jsou tedy nezávislé; současně první a druhý hod v rámci scénáře je na sobě také očividně nezávislý.

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} P &= P\left(B_1 \cap \overline{B_2} \cup \overline{B_1} \cap B_2 \cup B_1 \cap B_2\right) = \\ &= P(B_1)P\left(\overline{B_2}\right) + P\left(\overline{B_1}\right)P(B_2) + P(B_1)P(B_2) = \\ &= P(B_1)\left(1 - P(B_2)\right) + \left(1 - P(B_1)\right)P(B_2) + P(B_1)P(B_2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Úlohu můžeme vyřešit také tak, když si uvědomíme, že k jevu „během dvou hodů kostkou padne alespoň jedna sudé číslo“ je jevem opačným „během dvou hodů kostkou nepadne ani jednou sudé číslo“. Podle druhého výroku tedy zjevně platí rovnost $P = P\left(\overline{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}\right)$. Tu můžeme dále upravit

$$\begin{aligned}
P = P\left(\overline{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}\right) &= \\
&= 1 - P\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \\
&= 1 - P\left(\overline{B_1}\right) \cdot P\left(\overline{B_2}\right) = \\
&= 1 - (1 - P(B_1)) \cdot (1 - P(B_2)) = \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\
&= 1 - \frac{1}{4} = \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že při dvou hodech běžnou šestistěnnou kostkou padne alespoň jednou sudé číslo, je tedy $\frac{3}{4}$.

Předpokládeje, že běžnou šestistěnnou kostkou musíme hodit právě k-krát k tomu, aby byla pravděpodobnost, že během těchto hodů padne alespoň jedna šestka, větší než 0,95, kde $k \in \mathbb{N}$ je neznámá. Hledáme tedy takové $k \in \mathbb{N}$, aby platilo

$$P = P(\text{během } k \text{ hodů padne alespoň jedna šestka}) > 0{,}95.$$

Snadno nahlédneme, že k jevu „během k hodů kostkou padne alespoň jednou šestka“ je jevem opačným „během k hodů kostkou nepadne ani jednou šestka“. Toho využijme a vyjádřeme složený jev z druhého výroku. Pokud nemá během k hodů padnout ani jednou šestka, můžeme tento jev podle výše uvedené notace zapsat jakosti $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}$. Jev k němu opačný, tedy $\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}}$, pak odpovídá jevu „během k hodů kostkou padne alespoň jednou šestka“. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}
P = P(\text{během } k \text{ hodů padne alespoň jedna šestka}) &= \\
&= P\left(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}}\right) = \\
&= 1 - P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}\right) > \\
&> 0{,}95.
\end{aligned}$$

Jevy $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k}$, tedy že šestka nepadne v prvním, ve druhém, ..., v k-tém hodu, jsou jistě na sobě nezávislé (neboť kostka nemá historickou paměť). Můžeme tedy psát

$$
\begin{aligned}
P &= P(\text{během } k \text{ hodů padne alespoň jedna šestka}) = \\
&= P\left(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}}\right) = \\
&= 1 - P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}\right) = \\
&= 1 - P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) \cdots P\left(\overline{A_k}\right) = \\
&= 1 - (1 - P(A_1))\,(1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_k)) = \\
&= 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)}_{k \text{ členů}} = \\
&= 1 - \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{5}{6}}_{k \text{ členů}} = \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k > \\
&> 0{,}95.
\end{aligned}
$$

Poslední nerovnost upravme

$$
\begin{aligned}
1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k &> 0{,}95 \\
\left(\frac{5}{6}\right)^k &< 1 - 0{,}95 \\
\left(\frac{5}{6}\right)^k &< 0{,}05 \\
\log\left(\frac{5}{6}\right)^k &< \log 0{,}05 \\
k \cdot \log\left(\frac{5}{6}\right) &< \log 0{,}05,
\end{aligned}
$$

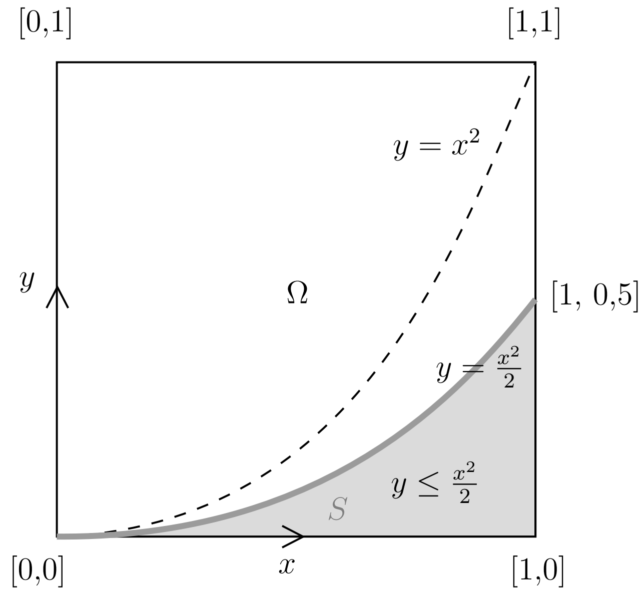
protože je $\left(\frac{5}{6}\right) < 0$, po vydělení obou stran nerovnosti tímto výrazem se změní znaménko nerovnosti,

$$
\begin{aligned}
k \cdot \log\left(\frac{5}{6}\right) &< \log 0{,}05 \\
k &> \frac{\log 0{,}05}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \\
k &\gtrsim 16{,}4 \\
k &\geq 17.
\end{aligned}
$$

Odtud již vidíme, že musíme hodit běžnou šestistěnnou kostkou alespoň 17-krát, aby byla pravděpodobnost, že během těchto hodů padne alespoň jedna šestka, větší než 0,95. □

Úloha 3.1.2 Z intervalu $\langle 0,1\rangle$ náhodně vybereme dvě čísla x a y. Jaká je pravděpodobnost jevu, že $2y \leq x^2$?

Řešení. Předpokládejme, že čísla $x \in \langle 0,1\rangle$ a $y \in \langle 0,1\rangle$ jsou souřadnice bodu v rovině Oxy. Pak geometrickou množinou všech takových bodů v rovině, jejichž souřadnice $[x,y]$ splňují $x \in \langle 0,1\rangle \wedge y \in \langle 0,1\rangle$, je čtverec s vrcholy v bodech $[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]$ v soustavě souřadnic Oxy, viz čtverec Ω na obrázku 3.1.1.



Obrázek 3.1.1: Čtverec s vrcholy v bodech $[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]$ v soustavě souřadnic Oxy.

Hledáme pravděpodobnost, že $2y \leq x^2$, tedy hodnotu výrazu $P\left(2y \leq x^2\right)$ neboli $P\left(2y \leq x^2\right) = P\left(y \leq \frac{x^2}{2}\right)$. Snadno nahlédneme, že body, pro jejichž souřadnice $[x,y]$ platí $y = x^2$, leží na parabole s rovnicí $y \leq x^2$ v soustavě souřadnic Oxy (na obrázku 3.1.1 přerušovaná čára). Naopak body, pro jejichž souřadnice $[x,y]$ platí $y = \frac{x^2}{2}$, leží na parabole s rovnicí $y = \frac{x^2}{2}$ v soustavě souřadnic Oxy (na obrázku 3.1.1 šedá tučná čára). Souřadnice všech bodů, které leží v jednotkovém čtverci s vrcholy $[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]$ a současně je jejich svislá, y-ová souřadnice pod parabolou danou rovnicí $y = \frac{x^2}{2}$, splňují nerovnost $y \leq \frac{x^2}{2}$ (na obrázku 3.1.1 šedá plocha S).

Zajímá nás, s jakou pravděpodobností leží náhodně vybraný bod ve čtverci Ω s vrcholy $[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]$ současně v šedé ploše S. Protože jsou čísla x a y vybírána náhodně, je i bod v rámci čtverce Ω volen zcela náhodně a pravděpodobnost, že padne do šedé oblasti S, je rovna podílu plochy šedé oblasti S a celkové plochy čtverce s vrcholy $[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]$, tedy $P\left(2y \leq x^2\right) = P\left(y \leq \frac{x^2}{2}\right) = \frac{|S|}{|\Omega|}$. Celková plocha jednotkového čtverce s vrcholy $[0,0],[1,0],[0,1],[1,1]$ je zjevně $|\Omega| = 1 \cdot 1 = 1$. Plocha šedé oblasti S je rovna určitému integrálu funkce $y = \frac{x^2}{2}$ v mezích $\langle 0,1\rangle$, tedy

$$|S| = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Nakonec je tedy

$$P\left(2y \leq x^2\right) = P\left(y \leq \frac{x^2}{2}\right) = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}.$$

Vybíráme-li čísla x a y vždy z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ zcela náhodně, pak splňují nerovnost $2y \leq x^2$ s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. $\square$

3.2 Úlohy k vlastnímu procvičení

Úloha 3.2.1 Směs sazenic je tvořena ze 80 % sazenicemi první jakosti a z 20 % sazenicemi druhé jakosti. Sazenice první jakosti vyklíčí s pravděpodobností 0,9, sazenice druhé jakosti vyklíčí s pravděpodobností 0,6. S jakou pravděpodobností vyklíčí náhodně vybraná sazenice ze směsi?

Úloha 3.2.2 Z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ náhodně vybereme dvě čísla x a y. Jaká je pravděpodobnost jevu, že $\frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2}$?

Úloha 3.2.3 V nákladu 150 pytlů ořechů z Turecka je 5 pytlů se zkaženými ořechy. Podobně v nákladu 250 pytlů z Afghánistánu je 5 pytlů se zkaženými ořechy.

(i) S jakou pravděpodobností obsahuje náhodně vybraný pytel zkažené ořechy, pokud oba náklady zkompletujeme do jednoho?
(ii) S jakou pravděpodobností obsahuje náhodně vybraný pytel zkažené ořechy, pokud nejdříve vybereme náhodně náklad a pak náhodně jeden pytel?

Úloha 3.2.4 Je možné, aby dva jevy byly neslučitelné a současně i nezávislé? Zkoumejme.

Úloha 3.2.5 Házíme čtyřmi hracími kostkami. Vypočítejme pravděpodobnost následujících jevů.

(i) Na všech kostkách padnou různá čísla.
(ii) Na dvou kostkách padnou stejná čísla a na dalších dvou jiná různá čísla.
(iii) Na třech kostkách padnou stejná čísla a na další jiné číslo.
(iv) Padnou dvě (různé) dvojice stejných čísel.
(v) Na všech kostkách stejná čísla.
(vi) Padnou alespoň tři stejná čísla.

Úloha 3.2.6 Je dána úsečka AB. Náhodně na ní zvolíme dva body X a Y. Jaká je pravděpodobnost, že úsečka XY obsahuje střed úsečky AB?

Úloha 3.2.7 Ve třídě je dohromady lichý počet žáků, chlapců a dívek, zároveň předpokládáme, že jich není méně než 10 ani více než 45. Pravděpodobnost, že ze dvou náhodně vybraných žáků je jedna dívka a jeden chlapec, je stejná jako pravděpodobnost, že tomu tak není. Určete počet žáků ve třídě.

Úloha 3.2.8 Adam s Bětkou jedou ve stejném vlaku, v kterém je právě $k \in \mathbb{N}$ kupé vždy o šesti místech. S jakou pravděpodobností budou sedět oba ve stejném kupé, pokud si místa k sezení vybírají zcela náhodně ve chvíli, kdy jsou ještě všechna místa volná? Obecnou pravděpodobnost nakonec ověřme pro $k = 1$.

Úloha 3.2.9 S jakou pravděpodobností má kvadratická rovnice

$$x^2 + \sqrt{10 - a^2 - b^2} \cdot x + (a^2 + b^2) = 0$$

pro přípustné hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ oba kořeny reálné?

Úloha 3.2.10 Házíme jedenkrát šipkou na kruhový jednotkový[6] terč, který s jistotou zasáhneme; každý bod terče má stejnou pravděpodobnost zásahu. Pravděpodobnost, že se trefíme do vzdálenosti větší než p od středu terče, je p. Určete p.

Úloha 3.2.11 Házíme pětkrát spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že

(i) padne právě dvakrát hlava?
(ii) padne nejvýše dvakrát hlava?
(iii) padne alespoň dvakrát hlava?

Úloha 3.2.12 Házíme takovou nespravedlivou (biasovanou) šestistěnnou hrací kostkou, že pravděpodobnost padnutí každé stěny je přímo úměrná počtu ok na této stěně. Určeme pravděpodobnost, že padne sudý počet ok.

Úloha 3.2.13 Jaká je pravděpodobnost toho, že ve skupině n osob mají alespoň dva lidé narozeniny ve stejný den? Předpokládejme, že rok má 365 dní.

Úloha 3.2.14 Správce má v kapse celkem n klíčů od různých dveří budovy, mezi nimi i jeden klíč k hlavním dveřím. Před hlavními dveřmi postupně tahá klíče z kapsy jeden po druhém a zkouší jimi dveře odemknout. Vyzkoušené klíče zpět do kapsy nevrací. Jaká je pravděpodobnost, že dveře otevře právě až na k-tý pokus? Jaká je pravděpodobnost, že dveře odemkne nejpozději na l-tý pokus? A jaká je pravděpodobnost, že dveře neodemkne dříve než na m-tý pokus? Diskutujte řešení i vzhledem k přirozeným parametrům n, k, l, m. Změní se nějak pravděpodobnost, pokud budou klíče navlečeny na kroužku a v tomto pořadí je bude správce zkoušet?

Úloha 3.2.15 Hokejové utkání skončilo prohrou domácího týmu $7 : 12$ (branek). S jakou pravděpodobností byl někdy během zápasu stav branek $5 : 3$? Všechny smysluplné možnosti stavu zápasu (co do počtu branek), tj.

$$\begin{pmatrix} 0:0 & 0:1 & 0:2 & \cdots & 0:12 \\ 1:0 & 1:1 & 1:2 & \cdots & 1:12 \\ 2:0 & 2:1 & 2:2 & \cdots & 2:12 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 7:0 & 7:1 & 7:2 & \cdots & 7:12 \end{pmatrix}$$

považujeme za stejně pravděpodobné.

[6] Poloměr terče je roven přesně 1,0.

4 Diskrétní náhodná veličina a diskrétní rozdělení pravděpodobnosti

4.1 Řešené úlohy

Úloha 4.1.1 V urně je deset bílých a třicet černých koulí. S jakou pravděpodobností budou mezi šesti náhodně vytaženými koulemi právě čtyři černé, pokud

(i) každou kouli po vytažení vždy vrátíme zpět do urny?
(ii) koule po vytažení do urny zpět nevracíme?

Řešení. Postupně vyřešme obě části.

(i) Pokud po každém tahu vrátíme kouli zpět do urny, je pravděpodobnost, že bude vytažena černá koule, konstantní během všech šesti tahů, a sice je rovna podílu počtu černých a všech koulí v urně, tedy $p_{\text{černá}} = \frac{30}{30+10} = \frac{3}{4}$. Obdobně pravděpodobnost vytažení bílé koule se díky vracení vytažených koulí vždy zpět do urny nemění a je během všech šesti tahů rovna podílu počtu bílých a všech koulí, tedy $p_{\text{bílá}} = \frac{10}{10+30} = \frac{1}{4}$.

Označme symbolem X náhodnou veličinu vracející počet vytažení černých koulí během šesti tahů z urny s vracením. Zřejmě, protože jednotlivé tahy koulí z urny jsou díky jejich zpětnému vracení do urny na sobě nezávislé, sleduje náhodná veličina X binomické rozdělení s počtem pokusů $n = 6$ a pravděpodobností úspěchu rovnou $p_{\text{černá}} = \frac{3}{4}$, formálně tedy $X \sim \text{binom}(n, p) \sim \text{binom}(n, p_{\text{černá}}) \sim \text{binom}\left(6, \frac{3}{4}\right)$.

Hledáme hodnotu výrazu $P(X = 4)$. Podle definice pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení dostáváme pravděpodobnost pro vytažení právě k černých koulí rovnou

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

kde v našem případě je $k = 4$. Postupně tedy dostáváme

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \binom{n}{k} p_{\text{černá}}^{k} (1 - p_{\text{černá}})^{n-k} \\
P(X = 4) &= \binom{6}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)\right)^{6-4} \\
P(X = 4) &= \binom{6}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
P(X = 4) &\doteq 15 \cdot 0{,}316 \cdot 0{,}0625 \\
P(X = 4) &\doteq 0{,}297.
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost, že mezi šesti nezávislými tahy koulí z dané urny budou právě čtyři černé, uvažujeme-li vždy tažené koule po každém tahu zpět do urny, je tak rovna přibližně 0,297.

(ii) Pokud koule po jejich vytažení z urny nevracíme zpět, jednotlivé tahy již nejsou nezávislé a stejně tak ani pravděpodobnost vytažení černé koule není po každém z tahů shodná.

Označme symbolem Y náhodnou veličinu vracející počet vytažení černých koulí během šesti tahů z urny, ale bez zpětného vracení koulí zpět vždy po jejich vytažení. Zřejmě jednotlivé tahy nejsou nezávislé a náhodná veličina Y sleduje hypergeometrické rozdělení s parametrem $N = 40$ odpovídajícím počtu všech koulí v urně, parametrem $M = 30$ odpovídajícím počtu černých koulí v urně a parametrem $n = 6$ odpovídajícímu počtu tahů z urny bez vracení. Formálně tedy $Y \sim \text{hypergeom}(N, M, n) \sim \text{hypergeom}(40, 30, 6)$.

Hledám hodnotu výrazu $P(Y = 4)$. Podle definice pravděpodobnostní funkce hypergeometrického rozdělení dostáváme pravděpodobnost pro vytažení právě k černých koulí rovnou

$$
P(Y = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},
$$

kde v našem případě je $k = 4$. Postupně tedy dostáváme

$$
\begin{aligned}
P(Y = k) &= \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
P(Y = 4) &= \frac{\binom{30}{4}\binom{10}{2}}{\binom{40}{6}} \\
P(X = 4) &= \frac{27405 \cdot 45}{3838380} \\
P(X = 4) &\doteq 0{,}321.
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost, že mezi šesti tahy koulí z dané urny budou právě čtyři černé, neuvažujeme-li vrácení tažené koule po každém tahu zpět do urny, je tak rovna přibližně 0,321. □

Úloha 4.1.2 V malé nemocnici zaznamenají vždy od pondělí do neděle průměrně 35 porodů.

(i) Kolik porodů můžeme v dané nemocnici očekávat následující den?
(ii) Kolik porodů můžeme v dané nemocnici očekávat během následujících tří dní?
(iii) Jaký je očekávaný rozptyl počtu porodů v dané nemocnici během následujících tří dní?
(iv) S jakou pravděpodobností dojde v dané nemocnici během následujících tří dní právě k 12 porodům?
(v) S jakou pravděpodobností dojde v dané nemocnici během následujícího dne k nejvýše dvěma porodům?
(vi) S jakou pravděpodobností dojde v dané nemocnici během následujícího dne k alespoň jednomu porodu?
(vii) S jakou pravděpodobností dojde v dané nemocnici během následujícího dne právě ke čtyřem, pěti nebo šesti porodům?

Řešení. Označme symbolem X náhodnou veličinu udávající počet porodů za jeden den v dané malé nemocnici. Předpokládejme, že počty porodů mezi jednotlivými dny jsou navzájem nezávislé, pak náhodná veličina X sleduje Poissonovo rozdělení o parametru $\lambda = \frac{35}{7} = 5$ [porodů/den]. Formálně tedy pišme $X \sim \text{poiss}(\lambda) \sim \text{poiss}(5)$. Ještě dodejme, že střední hodnota náhodné veličiny X a její rozptyl jsou pak oba rovny parametru λ, tedy $\mathbb{E}(X) = \text{var}(X) = \lambda = 5$.

(i) Předpokládejme, že počet porodů „následující“ den je zcela nezávislý na všech ostatních dnech. Pak počet porodů, kolik můžeme v dané malé nemocnici očekávat během následujícího dne, je roven střední hodnotě náhodné veličiny X, tedy $\mathbb{E}(X) = \lambda = 5$ [porodů].
(ii) Předpokládejme, že počty porodů během „následujících“ tří dnů jsou zcela nezávislé na všech ostatních dnech a rovněž nezávislé navzájem. Pak označme symbolem Y náhodnou veličinu udávající počet porodů během následujících tří dnů. Zřejmě jde o součet počtu porodů následující, druhý následující a třetí následující den, tedy $Y = X + X + X = 3X$. Protože víme, že součet k veličin sledujících Poissonovo rozdělení vždy o parametru λ rovněž sleduje Poissonovo rozdělení, avšak o parametru $k\lambda$, platí, že $Y = 3X \sim \text{poiss}(3\lambda) \sim \text{poiss}(3 \cdot 5) \sim \text{poiss}(15)$. Stejně tak platí, že $\mathbb{E}(Y) = \text{var}(Y) = 3\lambda = 3 \cdot 5 = 15$. Proto můžeme během následujících tří dní očekávat v dané nemocnici právě $\mathbb{E}(Y) = 15$ porodů.
(iii) Počet očekávaných porodů v dané nemocnici během následujících tří dní je popsán veličinou Y. Proto očekávaný rozptyl počtu porodů během následujících tří dní je roven $\text{var}(Y) = 15$ [porodů].
(iv) Hledáme hodnotu pravděpodobnosti $P(Y = 12)$. Ze vztahu pro pravděpodobnostní funkci Poissonova rozdělení dostáváme

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

kde v našem případě je $k = 12$. Postupně tedy dostáváme

$$
\begin{aligned}
P(Y = k) &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
P(Y = 12) &= \frac{15^{12} e^{-15}}{12!} \\
P(X = 12) &\doteq 0{,}083.
\end{aligned}
$$

Během následujících tří dní tedy v dané nemocnici dojde ke dvanácti porodům s pravděpodobností přibližně 0,083.

(v) Hledáme hodnotu pravděpodobnosti $P(X \leq 2)$, což lze vyjádřit vzhledem k nezávislosti jednotlivých počtů porodů také jako $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$. Ze vztahu pro pravděpodobnostní funkci Poissonova rozdělení víme, že $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ a dostáváme

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
P(Y \leq 2) &= \frac{5^0 e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!} \\
P(X \leq 2) &\doteq 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 \\
P(X \leq 2) &\doteq 0{,}125.
\end{aligned}
$$

Během následujícího dne tedy v dané nemocnici dojde nejvýše ke dvěma porodům s pravděpodobností přibližně 0,125.

(vi) Hledáme hodnotu pravděpodobnosti $P(X \geq 1)$, což lze vyjádřit vzhledem k nezávislosti jednotlivých počtů porodů také jako $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$. Ze vztahu pro pravděpodobnostní funkci Poissonova rozdělení víme, že $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ a dostáváme

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\
P(Y \geq 1) &= 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} \\
P(Y \geq 1) &= 1 - 0{,}0067 \\
P(X \geq 1) &\doteq 0{,}993.
\end{aligned}
$$

Během následujícího dne tedy v dané nemocnici dojde alespoň k jednomu porodu s pravděpodobností přibližně 0,993.

(vii) Hledáme hodnotu pravděpodobnosti $P(X \in \{4,\ 5,\ 6\})$, což lze vyjádřit vzhledem k nezávislosti jednotlivých počtů porodů také jako $P(X \in \{4,\ 5,\ 6\}) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$. Ze vztahu pro pravděpodobnostní funkci Poissonova rozdělení víme, že $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ a dostáváme

$$
\begin{aligned}
P(X \in \{4,\ 5,\ 6\}) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)\\
P(X \in \{4,\ 5,\ 6\}) &= \frac{5^4 e^{-5}}{4!} + \frac{5^5 e^{-5}}{5!} + \frac{5^6 e^{-5}}{6!}\\
P(X \in \{4,\ 5,\ 6\}) &\doteq 0{,}1755 + 0{,}1755 + 0{,}1462\\
P(X \in \{4,\ 5,\ 6\}) &\doteq 0{,}497.
\end{aligned}
$$

Během následujícího dne tedy v dané nemocnici dojde k právě čtyřem, pěti nebo šesti porodům s pravděpodobností přibližně 0,497. □

4.2 Úlohy k vlastnímu procvičení

Úloha 4.2.1 V krabici je $b \in \mathbb{N}$ bílých koulí a $c \in \mathbb{N}$ černých koulí. Z krabice vytáhneme najednou tři koule.

(i) S jakou pravděpodobností jsou všechny tři bílé?
(ii) S jakou pravděpodobností jsou všechny dvě bílé a jedna černá?

Úloha 4.2.2 V urně je sedm bílých a tři černé koule. Náhodně vybereme tři koule.

(i) S jakou pravděpodobností jsou všechny bílé, pokud jsme je vybírali tak, že byly vždy vraceny zpět do urny po každém tahu?
(ii) S jakou pravděpodobností jsou všechny bílé, pokud jsme je vybírali tak, že nebyly po jednotlivých tazích vraceny zpět do urny?

Úloha 4.2.3 Určitá léčba je úspěšná průměrně u 80 % pacientů. S jakou pravděpodobností bude v kohortě deseti pacientů léčba neúspěšná nejvýše u jednoho z pacientů?

Úloha 4.2.4 Házíme desetkrát nespravedlivou (biasovanou) mincí, na které padne hlava s pravděpodobností 0,6.

(i) S jakou pravděpodobností padne ve všech deseti hodech desetkrát hlava?
(ii) S jakou pravděpodobností padne mezi deseti hody právě čtyřikrát hlava?
(iii) S jakou pravděpodobností padne mezi deseti hody alespoň osmkrát hlava?
(iv) Jaký počet padnutí hlavy je mezi deseti hody nejpravděpodobnější?

Úloha 4.2.5 V zásilce třiceti žárovek jsou tři vadné.

(i) Vybereme-li ze zásilky náhodně pět žárovek, s jakou pravděpodobností mezi nimi nebude žádná vadná?
(ii) Vybereme-li ze zásilky náhodně pět žárovek, s jakou pravděpodobností mezi nimi bude právě jedna vadná?
(iii) Kolik žárovek musíme náhodně ze zásilky vyzkoušet, aby pravděpodobnost, že objevíme alespoň jednu vadnou, byla větší než 0,7?

Úloha 4.2.6 Student odpoví na otázku v testu bodovanou jedním bodem správně s pravděpodobností $p = 0{,}7$. Jaká je očekávaná střední hodnota a rozptyl počtu bodů, které student za takovou otázku získá?

Úloha 4.2.7 Házíme desetkrát klasickou šestistěnnou kostkou.

(i) S jakou pravděpodobností padne právě čtyřikrát šestka?
(ii) S jakou pravděpodobností padne šestka nejvýše dvakrát?
(iii) S jakou pravděpodobností padne šestka alespoň třikrát?
(iv) A s jakou pravděpodobností padne šestka právě čtyřikrát, pětkrát nebo šestkrát?

Úloha 4.2.8 Ve vybraném periodiku se objevují průměrně čtyři překlepy na každých jeho deset stránek. S jakou pravděpodobností bude na náhodně vybrané stránce periodika

(i) žádný překlep?
(ii) jeden překlep?
(iii) dva překlepy?
(iv) více než dva překlepy?

Úloha 4.2.9 V sérii po dvě stě kusech je deset zmetků. Při přejímce náhodně vybereme pět kusů a podrobíme je destrukční zkoušce. Pokud není mezi pěti vybranými ani jeden zmetek, sérii přijmeme. S jakou pravděpodobností to nastane?

Úloha 4.2.10 Bětka napsala na tabuli náhodně pět čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Jaká je pravděpodobnost, že

(i) právě dvě čísla z pěti napsaných na tabuli jsou větší než 12, pokud Bětka napsala čísla na tabuli tak, že se mohla opakovat[7]?
(ii) právě dvě čísla z pěti napsaných na tabuli jsou větší než 12, pokud Bětka napsala čísla na tabuli tak, že se opakovat nemohla[8]?
(iii) největší z čísel napsaných na tabuli je alespoň 16, pokud Bětka napsala čísla na tabuli tak, že se mohla opakovat?
(iv) nejmenší z čísel napsaných na tabuli je nejvýše 3, pokud Bětka napsala čísla na tabuli tak, že se opakovat nemohla?
(v) pět čísel, která Bětka napsala na tabuli a postupně je označila x, y, z, u, v, jsou řešením rovnice
$$x + y + z + u + v = 20,$$
pokud se čísla v takové pětici mohla opakovat[9]?

[7] Takže např. pětice čísel 2, 3, 3, 7, 15 se na tabuli mohla objevit.
[8] Takže např. pětice čísel 2, 3, 3, 7, 15 se na tabuli objevit nemohla.
[9] Takže např. pětice čísel $x = 2$, $y = 3$, $z = 3$, $u = 5$, $v = 7$ jsou řešením rovnice.

5 Spojitá náhodná veličina a spojitá rozdělení pravděpodobnosti

5.1 Řešené úlohy

Úloha 5.1.1 Náhodná veličina X sleduje normální rozdělení $\mathcal{N}(20, 4^2)$. Jaká je pravděpodobnost, že nabude hodnoty

(i) menší než 16?
(ii) větší než 20?
(iii) v rozmezí mezi 12 a 28?
(iv) menší než 12 nebo větší než 28?

Řešení. Podle zadání je tedy zřejmě $X \sim \mathcal{N}(20, 4^2)$, tedy i $\mathbb{E}(X) = 20$ a $\operatorname{var}(X) = 4^2$, takže $\sqrt{\operatorname{var}(X)} = \sqrt{4^2} = 4$. Zřejmě tedy platí i $U \equiv \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}} = \frac{X-20}{4} \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$, kde U je náhodná veličina sledující standardní normální rozdělení. Pak je tedy i $P(U \leq u) = F_U(u) = \Phi(u)$.

(i) Hledáme hodnotu výrazu $P(X < 16)$. Postupně upravujme nerovnost uvnitř argumentu výrazu $P(X < 16)$ i s využitím faktu, že $\sqrt{\operatorname{var}(X)} = 4 > 0$ a znaménko nerovnosti se nemění, tedy

$$
\begin{aligned}
P(X < 16) &= P\left(X - \mathbb{E}(X) < 16 - \mathbb{E}(X)\right) = \\
&= P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}} < \frac{16 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}\right) = \\
&= P\left(\underbrace{\frac{X - 20}{4}}_{=U} < \frac{16 - 20}{4}\right) = \\
&= P\left(U < \frac{-4}{4}\right) = \\
&= P\left(U < -1\right) = \\
&= F_U(-1) = \\
&= \Phi(-1) = \\
&= 1 - \Phi(1) \doteq \\
&\doteq 1 - 0{,}841 \doteq \\
&\doteq 0{,}159.
\end{aligned}
$$

Náhodná veličina $X \sim \mathcal{N}(20, 4^2)$ nabude hodnoty menší než 16 s pravděpodobností asi 0,159.

(ii) Hledáme hodnotu výrazu $P(X > 20)$, kterou můžeme také přepsat jako $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20)$. Postupně upravujme nerovnost uvnitř argumentu výrazu $P(X > 20)$ i s využitím faktu, že $\sqrt{\operatorname{var}(X)} = 4 > 0$ a znaménko nerovnosti se nemění, tedy

$$\begin{aligned}
P(X > 20) &= 1 - P(X \leq 20) = \\
&= 1 - P\left(X - \mathbb{E}(X) \leq 20 - \mathbb{E}(X)\right) = \\
&= 1 - P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}} \leq \frac{20 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}\right) = \\
&= 1 - P\left(\frac{X - 20}{4} \leq \frac{20 - 20}{4}\right) = \\
&= 1 - P\left(U \leq \frac{0}{4}\right) = \\
&= 1 - P\left(U \leq 0\right) = \\
&= 1 - F_U(0) = \\
&= 1 - \Phi(0) = \\
&= 1 - 0{,}500 = \\
&= 0{,}500.
\end{aligned}$$

Náhodná veličina $X \sim \mathcal{N}(20, 4^2)$ nabude hodnoty větší než 20 s pravděpodobností 0,5.

(iii) Hledáme hodnotu výrazu $P(12 < X < 28)$, kterou můžeme také přepsat jako $P(12 < X < 28) = P(X < 28) - P(X < 12)$. Postupně upravujme nerovnost uvnitř argumentu výrazu $P(12 < X < 28)$ i s využitím faktu, že $\sqrt{\operatorname{var}(X)} = 4 > 0$ a znaménko nerovnosti se nemění, tedy

$$\begin{aligned}
P(12 < X < 28) &= P(X < 28) - P(X < 12) = \\
&= P\left(X - \mathbb{E}(X) < 28 - \mathbb{E}(X)\right) - \\
&\qquad - P\left(X - \mathbb{E}(X) < 12 - \mathbb{E}(X)\right) = \\
&= P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}} < \frac{28 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}\right) - \\
&\qquad - P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}} < \frac{12 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}\right) = \\
&= P\left(\frac{X - 20}{4} < \frac{28 - 20}{4}\right) - P\left(\frac{X - 20}{4} < \frac{12 - 20}{4}\right) = \\
&= P\left(U < \frac{8}{4}\right) - P\left(U < \frac{-8}{4}\right) = \\
&= P\left(U < 2\right) - P\left(U < -2\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_U(2) - F_U(-2) = \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) = \\
&= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = \\
&= 2\Phi(2) - 1 \doteq \\
&\doteq 2 \cdot 0{,}977 - 1 \doteq \\
&\doteq 0{,}954.
\end{aligned}$$

Náhodná veličina $X \sim \mathcal{N}(20, 4^2)$ nabude hodnoty v rozmezí mezi 12 a 28 s pravděpodobností asi 0,954.

(iv) Hledáme hodnotu výrazu $P(X < 12 \ \vee X > 28)$, což lze též přepsat jako $1 - P(12 < X < 28)$. Protože však z předchozího zadání víme, že $P(12 < X < 28) \doteq 0{,}954$, můžeme ihned psát, že

$$\begin{aligned}
P(X < 12 \ \vee X > 28) &= 1 - P(12 < X < 28) \doteq \\
&\doteq 1 - 0{,}954 \doteq \\
&\doteq 0{,}046.
\end{aligned}$$

Náhodná veličina $X \sim \mathcal{N}(20, 4^2)$ nabude hodnoty menší než 12 nebo větší než 28 s pravděpodobností asi 0,046. □

Úloha 5.1.2 Hmotnost bochníku chleba z jedné konkrétní pekárny sleduje normální rozdělení o střední hodnotě 0,8 kg a směrodatné odchylce 0,1 kg. Určete pravděpodobnost, že náhodně zakoupený bochník chleba z dané pekárny

(i) bude mít hmotnost menší než 0,6 kg.
(ii) bude mít hmotnost větší než 0,9 kg.
(iii) bude mít hmotnost v rozmezí mezi 0,5 kg až 1,1 kg.

Řešení. Označme symbolem X hmotnost náhodně zakoupeného bochníku z dané pekárny. Podle zadání je tedy zřejmě $X \sim \mathcal{N}(0{,}8,\ 0{,}1^2)$. Takže je i $\mathbb{E}(X) = 0{,}8$ a $\mathrm{var}(X) = 0{,}1^2$, tedy $\sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{0{,}1^2} = 0{,}1$. Zřejmě tedy platí i $U \equiv \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} = \frac{X-0{,}8}{0{,}1} \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$, kde U je náhodná veličina sledující standardní normální rozdělení. Pak tedy je rovněž $P(U \leq u) = F_U(u) = \Phi(u)$.

(i) Hledáme hodnotu výrazu $P(X < 0{,}6)$. Postupně upravujme

$$\begin{aligned}
P(X < 0{,}6) &= P\left(X - \mathbb{E}(X) < 0{,}6 - \mathbb{E}(X)\right) = \\
&= P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} < \frac{0{,}6 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}\right) = \\
&= P\left(\frac{X - 0{,}8}{0{,}1} < \frac{0{,}6 - 0{,}8}{0{,}1}\right) = \\
&= P\left(U < \frac{-0{,}2}{0{,}1}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(U < -2\right) = \\
&= F_U(-2) = \\
&= \Phi(-2) = \\
&= 1 - \Phi(2) \doteq \\
&\doteq 1 - 0{,}977 \doteq \\
&\doteq 0{,}023.
\end{aligned}
$$

Hmotnost náhodného bochníku chleba[10] z dané pekárny bude menší než 0,6 kg s pravděpodobností přibližně 0,023.

(ii) Hledáme hodnotu výrazu $P(X > 0{,}9)$, kterou můžeme také přepsat jako $P(X > 0{,}9) = 1 - P(X \leq 0{,}9)$. Postupně upravujme

$$
\begin{aligned}
P(X > 0{,}9) &= 1 - P(X \leq 0{,}9) = \\
&= 1 - P\left(X - \mathbb{E}(X) \leq 0{,}9 - \mathbb{E}(X)\right) = \\
&= 1 - P\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}} \leq \frac{0{,}9 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}\right) = \\
&= 1 - P\left(\frac{X - 0{,}8}{0{,}1} \leq \frac{0{,}9 - 0{,}8}{0{,}1}\right) = \\
&= 1 - P\left(U \leq \frac{0{,}1}{0{,}1}\right) = \\
&= 1 - P\left(U \leq 1\right) = \\
&= 1 - F_U(1) = \\
&= 1 - \Phi(1) \doteq \\
&\doteq 1 - 0{,}841 \doteq \\
&\doteq 0{,}159.
\end{aligned}
$$

Hmotnost náhodného bochníku chleba[11] z dané pekárny bude větší než 0,9 kg s pravděpodobností přibližně 0,159.

(iii) Hledáme hodnotu výrazu $P(0{,}5 < X < 1{,}1)$, kterou můžeme také přepsat jako $P(0{,}5 < X < 1{,}1) = P(X < 1{,}1) - P(X < 0{,}5)$. Postupně upravujme

$$
\begin{aligned}
P(0{,}5 < X < 1{,}1) &= P(X < 1{,}1) - P(X < 0{,}5) = \\
&= P\left(X - \mathbb{E}(X) < 1{,}1 - \mathbb{E}(X)\right) - \\
&\qquad - P\left(X - \mathbb{E}(X) < 0{,}5 - \mathbb{E}(X)\right) =
\end{aligned}
$$

[10] Intuitivně, hmotnost bochníku chleba se pohybuje „někde“ kolem 0,8 kg, proto situace, kdy je jeho hmotnost menší než 0,6 kg, je spíše nepravděpodobná a očekáváme tedy výslednou malou pravděpodobnost (0,023).

[11] Opět intuitivně, hmotnost bochníku chleba se pohybuje „někde“ kolem 0,8 kg, proto situace, kdy je jeho hmotnost větší než 0,9 kg, není tolik pravděpodobná a očekáváme tedy výsledně spíše malou pravděpodobnost (0,159).

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}} < \frac{1{,}1-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}\right) - \\
&\qquad - P\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}} < \frac{0{,}5-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}}\right) = \\
&= P\left(\frac{X-0{,}8}{0{,}1} < \frac{1{,}1-0{,}8}{0{,}1}\right) - P\left(\frac{X-0{,}8}{0{,}1} < \frac{0{,}5-0{,}8}{0{,}1}\right) = \\
&= P\left(U < \frac{0{,}3}{0{,}1}\right) - P\left(U < \frac{-0{,}3}{0{,}1}\right) = \\
&= P\left(U < 3\right) - P\left(U < -3\right) = \\
&= F_U(3) - F_U(-3) = \\
&= \Phi(3) - \Phi(-3) = \\
&= \Phi(3) - (1-\Phi(3)) = \\
&= 2\Phi(3) - 1 \doteq \\
&\doteq 2 \cdot 0{,}998 - 1 \doteq \\
&\doteq 0{,}996.
\end{aligned}
$$

Hmotnost náhodného bochníku chleba[12] z dané pekárny bude v rozmezí 0,5 kg až 1,1 kg s pravděpodobnostní přibližně 0,996. □

5.2 Úlohy k vlastnímu procvičení

Úloha 5.2.1 Značme distribuční funkci standardního normálního rozdělení jako $\Phi(\bullet)$. Pomocí úvahy, tabulek nebo vhodného softwaru

(i) najděte $\Phi(0)$.
(ii) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $\Phi(x) = 0{,}5$.
(iii) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $\Phi(x) = \Phi(-x)$.
(iv) najděte $\Phi(1{,}96)$.
(v) najděte $\Phi(-1{,}96)$.
(vi) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $\Phi(x) = 0{,}025$.
(vii) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $\Phi(x) = 1$.
(viii) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $\Phi(x) \leq 2$.
(ix) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $\Phi(x) = 0$.
(x) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $\Phi(x) = +\infty$.
(xi) najděte $\Phi(+\infty)$.
(xii) najděte $\Phi(-\infty)$.
(xiii) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $\Phi(x) - \Phi(-x) = 0{,}5$.
(xiv) najděte $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $P(|U| \leq x) = 0{,}95$.

[12] Opět, hmotnost bochníku chleba se pohybuje „někde“ kolem 0,8 kg, proto situace, kdy je jeho hmotnost v rozmezí mezi 0,5 kg až 1,1 kg, je velmi pravděpodobná a očekáváme tedy výsledně velkou pravděpodobnost (0,996).

Úloha 5.2.2 Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 10 000 narozenými novorozenci bude

(i) více děvčat než chlapců?
(ii) relativní četnost chlapců bude v mezích od 0,515 do 0,517?

Úloha 5.2.3 Zaměstnanec jezdí do zaměstnání pravidelně tam i zpět metrem. Doba čekání na příjezd soupravy metra se pohybuje rovnoměrně mezi 0 až 3 minutami. Jaká je pravděpodobnost, že celková doba čekání zaměstnance během 23 pracovních dní[13] bude kratší než 80 minut?

Úloha 5.2.4 Hmotnost jednoho mraženého kuřete sleduje normální rozdělení o střední hodnotě 1,20 kg a rozptylu 0,04 kg^2. Adam si jedno takové mražené kuře koupil. Jaká je pravděpodobnost, že

(i) zakoupené kuře má hmotnost menší než 0,80 kg?
(ii) zakoupené kuře má hmotnost větší než 1,40 kg?
(iii) ve čtveřici mražených kuřat, která Adam koupil během příštího nákupu, je nejvýše jedno kuře o hmotnosti menší než 0,80 kg?

[13] Zaměstnanec jede vždy dvakrát denně – do zaměstnání a zpět.

Reference

Následující prameny byly inspirací pro některé úlohy zařazené v této sbírce. Lze je doporučit jako zdroje nepřeberného množství dalších příkladů.

[1] Diana Bílková, Adam Čabla, Tomáš Karel, Elena Makhalova, Ivana Malá, Lukáš Sobíšek a Zdeněk Šulc. *Sbírka řešených příkladů ze statistiky*. 2015. URL: `https://statsbirka.vse.cz/` (cit. 15. 03. 2020).

[2] Petr Hebák. *Počet pravděpodobnosti v příkladech*. Praha: Informatorium, 2010. ISBN: 9788073330774.

[3] Petr Otipka. *Pravděpodobnost a statistika*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2006. ISBN: 80-248-1194-4.

ŠTĚPÁNEK, Lubomír. *Sbírka příkladů pro účely bakalářských statistických předmětů — 4ST201 Statistika a 4ST210 Statistika pro finance.* Praha, 2020. Neoficiální učební pomůcka. Katedra statistika a pravděpodobnosti. Fakulta informatiky a statistiky. Vysoká škola ekonomická.