Úvod do (zejména) diskrétní pravděpodobnosti

—

Supplementum ke cvičení 4ST210 Statistika pro finance

Lubomír Štěpánek[1, 2]

[1]Oddělení biomedicínské statistiky
Ústav biofyziky a informatiky
1. lékařská fakulta
Univerzita Karlova, Praha

[2]Katedra biomedicínské informatiky
Fakulta biomedicínského inženýrství
České vysoké učení technické v Praze

Obsah

Příklad

- Určeme, jak se změní variační koeficient, pokud se všechny hodnoty ve výběru
  (i) zmenší o pět.
  (ii) zvětší dvakrát.

Příklad

- Průměrný počet bodů z testu, který psalo 30 studentů, byl původně 78 a bodový rozptyl byl 81. Jak se změní průměrný počet bodů a bodový rozptyl, pokud si test dopsali ještě další tři studenti a získali postupně 99, 92 a 83 bodů?

Příklad

- V souboru dvaceti evidovaných hodnot je aritmetický průměr roven 110 a výběrový rozptyl 800. Poté bylo zjištěno, že dvě hodnoty byly zaevidovány chybně – místo hodnoty 85 mělo být správně 95 a místo hodnoty 120 mělo být správně 150. Jaká je správná hodnota aritmetického průměru a výběrového rozptylu?

Náhodný pokus (experiment) a náhodný jev

- náhodný pokus (experiment)
  - je děj, jehož výsledek se může při zopakování změnit i při zachování podmínek, závisí tedy na náhodě
  - např. hod kostkou, los z urny
- náhodný jev
  - je výsledek náhodného pokusu
  - obvykle se značí velkými písmeny $A, B, C, \dots, X, Y, Z$
  - pravděpodobnost náhodného jevu A značíme $P(A)$
  - např. na kostce padne pět ok, z urny byla vytažena černá koule
- jistý jev
  - jev, který nastane vždy
  - např. na minci padne hlava, nebo orel
- nemožný jev
  - jev, který nenastane nikdy
  - např. na (laplaceovské) minci padne hrana

Klasická definice pravděpodobnosti

- pravděpodobnost jevu A je rovna podílu počtu případů m, které jsou jevu A příznivé, ku počtu n všech možným případů

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- nutným předpokladem je, že všechny případy mohou nastat stejně často

Příklad

- Jaká je pravděpodobnost jevu A, že na hrací kostce padne číslo větší než 2?

Příklad

- Jaká je pravděpodobnost jevu A, že na hrací kostce padne číslo větší než 2?
- *Řešení.* $P(A) = \frac{|\text{padne 3, 4, 5 nebo 6 ok}|}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\square$

Geometrická definice pravděpodobnosti

- pravděpodobnost jevu A je rovna podílu plochy S odpovídající případům, které jsou jevu A příznivé, ku ploše Ω odpovídající všem možným případům
$$P(A) = \frac{S}{\Omega}$$
- zde již jednotlivé případy nemusí nutně nastat stejně často

Příklad

- Z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ náhodně vybereme dvě čísla x a y. Jaká je pravděpodobnost jevu, že $2y \leq x^2$?

Množinové vztahy množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ je podmnožinou $\mathcal{B}$

Pokud je $\forall\ a \in \mathcal{A} : a \in \mathcal{B}$, pak $\mathcal{A}$ je podmnožinou $\mathcal{B}$, což značíme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Sjednocení množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$

Sjednocení množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ je taková množina $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, že $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\forall\ x : x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$.

Průnik množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$

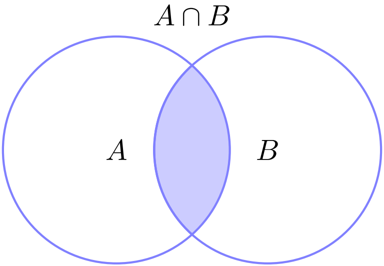
Průnik množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ je taková množina $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, že $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\forall\ x : x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$.

Asymetrický rozdíl množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$

Asymetrický rozdíl množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ je taková množina $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, že $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \{\forall\ x : x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$.

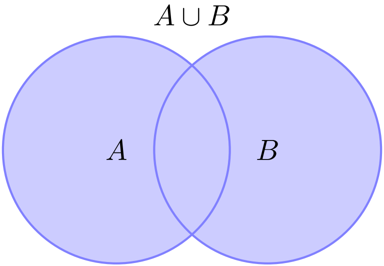
Průnik jevů A a B

- pravděpodobnost, že nastanou oba náhodné jevy A i B, značíme $P(A \cap B)$



Sjednocení jevů A a B

- pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z náhodných jevů A nebo B, značíme $P(A \cup B)$



Vlastnosti pravděpodobnosti

- nechť A a B jsou náhodné jevy, pak platí

$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$0 \leq P(B) \leq 1$$

- dále pokud A je podjevem B, tedy $A \subseteq B$, platí

$$P(A) \leq P(B)$$

- pravděpodobnost nemožného jevu C je rovna

$$P(C) = 0$$

- pravděpodobnost jistého jevu D je rovna

$$P(D) = 1$$

Vlastnosti pravděpodobnosti

- dále vždy platí

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

kde $\bar{A}$ je doplňkový jev k jevu A

- a dále obecně

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sčítání a násobení pravděpodobností

- nechť A a B jsou náhodné jevy
- pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pokud jsou A a B neslučitelné jevy
- a dále $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pokud jsou A a B nezávislé jevy

Příklad

- Je možné, aby dva jevy byly neslučitelné a současně i nezávislé? Zkoumejme.

Podmíněná pravděpodobnost

- nechť A a B jsou náhodné jevy
- pravděpodobnost jevu A podmíněnou jevem B definujeme jako

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- jsou-li jevy A a B nezávislé, snadno nahlédneme, že platí

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Příklad

- Házíme běžnou šestistěnnou hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že
  (i) při jednom hodu padne šestka?
  (ii) při jednom hodu padne sudé číslo?
  (iii) při dvou hodech padne dvakrát šestka?
  (iv) při dvou hodech nepadne ani jednou šestka?
  (v) při dvou hodech padne alespoň jednou šestka?
  (vi) při dvou hodech padne právě jednou šestka?
  (vii) při dvou hodech padne alespoň jednou sudé číslo?

  Kolikrát musíme minimálně hodit kostkou, aby byla pravděpodobnost, že během těchto hodů padne alespoň jedna šestka, větší než $0{,}95$?

Příklad

- Je dána úsečka AB. Náhodně na ní zvolíme dva body X a Y. Jaká je pravděpodobnost, že úsečka XY obsahuje střed úsečky AB?

Příklad

- Adam s Bětkou jedou ve stejném vlaku, v kterém je právě $k \in \mathbb{N}$ kupé vždy o šesti místech. S jakou pravděpodobností budou sedět oba ve stejném kupé, pokud si místa k sezení vybírají zcela náhodně ve chvíli, kdy jsou ještě všechna místa volná? Obecnou pravděpodobnost nakonec ověřme pro $k = 1$.

Příklad

- S jakou pravděpodobností má kvadratická rovnice

$$x^2 + \sqrt{10 - a^2 - b^2} \cdot x + (a^2 + b^2) = 0$$

pro přípustné hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ oba kořeny reálné?

Příklad

- Házíme jedenkrát šipkou na kruhový jednotkový[1] terč, který s jistotou zasáhneme; každý bod terče má stejnou pravděpodobnost zásahu. Pravděpodobnost, že se trefíme do vzdálenosti větší než p od středu terče, je p. Určete p.

[1] Poloměr terče je roven přesně $1{,}0$.

Příklad

- Házíme pětkrát spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že
  - (i) padne právě dvakrát hlava?
  - (ii) padne nejvýše dvakrát hlava?
  - (iii) padne alespoň dvakrát hlava?

Příklad

- Házíme takovou nespravedlivou (biasovanou) šestistěnnou hrací kostkou, že pravděpodobnost padnutí každé stěny je přímo úměrná počtu ok na této stěně. Určeme pravděpodobnost, že padne sudý počet ok.

Příklad

- Jaká je pravděpodobnost toho, že ve skupině n osob mají alespoň dva lidé narozeniny ve stejný den? Předpokládejme, že rok má 365 dní.

Příklad

- Správce má v kapse celkem n klíčů od různých dveří budovy, mezi nimi i jeden klíč k hlavním dveřím. Před hlavními dveřmi postupně tahá klíče z kapsy jeden po druhém a zkouší jimi dveře odemknout. Vyzkoušené klíče zpět do kapsy nevrací. Jaká je pravděpodobnost, že dveře otevře právě až na k-tý pokus? Jaká je pravděpodobnost, že dveře odemkne nejpozději na l-tý po-kus? A jaká je pravděpodobnost, že dveře neodemkne dříve než na m-tý pokus? Diskutujte řešení i vzhledem k přirozeným parametrům n, k, l, m. Změní se nějak pravděpodobnost, pokud budou klíče navlečeny na kroužku a v tomto pořadí je bude správce zkoušet?

Literatura

Hindls, Richard, Stanislava Hronová, Jan Seger a Jakub Fischer. *Statistika pro ekonomy*. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN: 978-80-86946-43-6.

Marek, Luboš. *Statistika v příkladech*. Praha: Professional Publishing, 2015. ISBN: 978-80-7431-153-6.

Děkuji za pozornost!

lubomir.stepanek@vse.cz
lubomir.stepanek@lf1.cuni.cz
lubomir.stepanek@fbmi.cvut.cz