

# Neparametrické testy

B02907 Informační a komunikační technologie



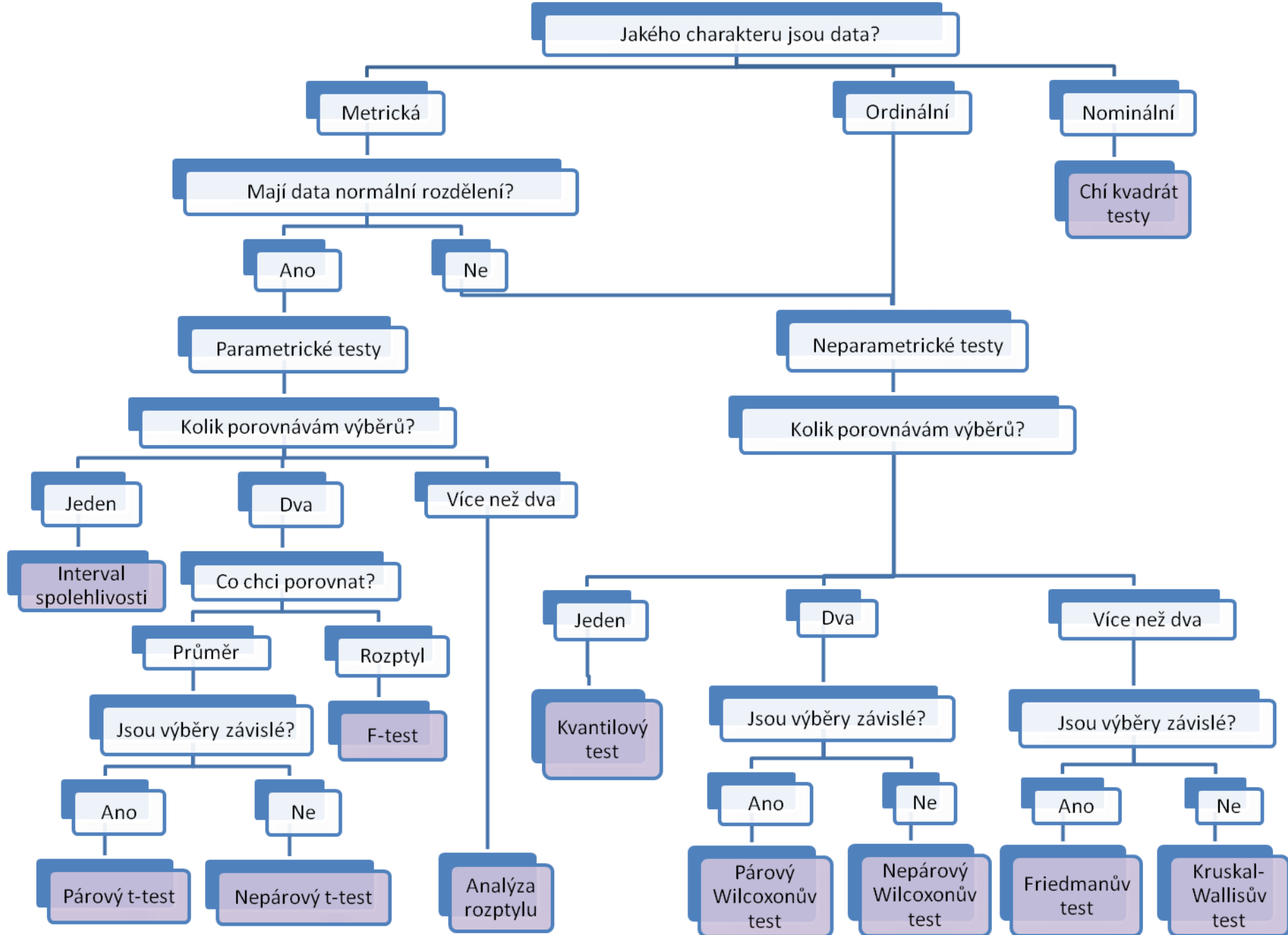
Lubomír Štěpánek,  
Ústav biofyziky a informatiky  
1. LF UK



# Upozornění!

- dole v poznámkách jsou u většiny snímků rozšiřující a vysvětlující komentáře
- u některých statistických metod budete odkazováni na statistické tabulky, které jsou volně přístupné online na adrese <http://new.euromise.org/czech/tajne/ucebnice/html/html/node15.html>
- (obvykle bude ještě na příslušném snímku odkaz zopakován; autor vynaložil značné úsilí, aby se symbolika v prezentacích shodovala se symbolikou v tabulkách, proto by neměla být orientace v tabulkách problémem)
- z předložených prezentací se můžete učit, můžete je kopírovat či jinak měnit, ale bez dovození autora/autorů je nesmíte použít do svých publikací ☺
- předložené prezentace nejsou bezchybnou statistickou kuchařkou, proto ne zcela doporučuji se na ně ve svých pracích odkazovat, nebo je dokonce citovat ☺
- pokud se budu sám odkazovat na vhodnou literaturu, myslím tím nejspíše následující dvě knihy:
  - Zvára: Biostatistika. Karolinum, Praha 1988
  - Zvárová et al.: Biomedicínská statistika I. Základy statistiky pro biomedicínské obory
- dotazy a konzultace možné a vlastně i doporučeny

(Lubomír Štěpánek, stepanek.lub@seznam.cz)



# Neparametrické testy hypotéz

(pro metrická data s jiným než normálním  
rozdělením a pro ordinální data)

# Jak myslí neparametrický test

- máme dva výběry, alespoň jeden nemá normální data
- o jeho rozdělení nic nevíme
- nutné určit pořadí prvků seřazených vzestupně
- test zkoumá, jak moc jsou pořadí obou výběrů „promíchaná“ – čím méně, tím odlišnější data

Tělesná výška/cm	Celkové pořadí	Tělesná výška/cm	Celkové pořadí
153	4	188	7
191	8	148	3
176	5	134	1
184	6	147	2

Tělesná výška/cm	Celkové pořadí	Tělesná výška/cm	Celkové pořadí
134	1	176	5
147	2	184	6
148	3	188	7
153	4	191	8

# Parametrické vs. neparametrické testy

## parametrické testy

- neurčité rozdělení, nemusí být normální
- v hypotéze pouze rozdílnost rozdělení
- rozdělení není normální, takže je obtížné určit hladinu významnosti

## neparametrické testy

- vyžadujeme normálnost dat (šikmost, špičatost)
- v hypotéze porovnávaná charakteristika (průměr X rozptyl)
- můžeme vypočítat hladinu významnosti (díky normálnosti dat)

# Neparametrický test hypotézy

- máme-li dva (ev. více) výběry, z nichž alespoň jeden nevykazuje normální rozdělení (data metrická), nebo máme-li ordinální data
- máme-li formulovanou hypotézu
- máme-li ke každému prvku přiřazenu hodnotu celkového pořadí (!)
- → můžeme provést tzv. neparametrický test hypotézy

# Kvantilový, mediánový a znaménkový test

- pro jeden výběr s jiným než normálním rozdělením, metrické hodnoty seřazené vzestupně podle velikosti, nebo přímo data ordinální
- kvantilový test
  - $H_0$ :  $k$ -tý kvantil výběru =  $c$  (= konst.),  $H_1$ :  $k$ -tý kvantil výběru  $\neq c$  ( $0 < k < 1$ ;  $\min < c < \max$  výběru)
  - test je založen na testové statistice  $Z$

$$Z = \frac{m - nk}{\sqrt{nk(1-k)}}$$

- $m$  je počet hodnot, které jsou menší než  $c$
  - je-li  $|Z| \geq z_{1-\alpha/2}$ , zamítáme nulovou hypotézu, jinak ji přijímáme
  - např. „ $H_0$ : 95% percentil výšky osmnáctiletých chlapců je 185 cm“
- mediánový test
  - jako kvantilový pro  $k=0,5$
- znaménkový test – modifikace mediánového
  - místo hodnot znaku máme rozdíly těchto hodnot oproti předchozí hodnotě, např. „změna teploty před a po podání léku“, „změna tlaku krve před a po léčbě“ atd.
  - $H_0$ : medián=0,  $H_1$ : medián $\neq$ 0



# Wilcoxonův nepárový test (Mann-Whitney test)

- dva nezávislé výběry, alespoň jeden má jiné než normální rozdělení – obdoba nepárového t-testu
- $H_0$ : rozdělení obou výběrů je shodné,  $H_1$ : rozdělení obou výběrů je odlišné
- $H_0$  např. „rozdělení bolestivosti u výběru s horním a dolním zkříženým syndromem je stejné“ atd.
- provedeme celkové pořadí, poté součty  $S_1$  a  $S_2$  pořadí prvního a druhého výběru, dále spočítáme:

$$U_i = S_i - \frac{n_i(n_i + 1)}{2} \quad \text{pro } i \in \{1, 2\}$$

- $H_0$  přijímáme, pokud  $\min(U_1, U_2) < \text{kritická hodnota}(n_1, n_2, \alpha)$
- kritickou hodnotu nalezneme v tabulkách

# Wilcoxonův párový test

- dva závislé výběry, alespoň jeden má jiné než normální rozdělení – obdoba párového t-testu
- $H_0$ : medián rozdílů je nulový,  $H_1$ : medián rozdílů je nenulový
- $H_0$  např. „mediány počtu T buněk při remisi a relapsu Hodgkinovy choroby jsou stejné“
- spočítáme rozdíl obou hodnot každého prvku, absolutní hodnoty rozdílů celkově seřadíme a doplníme znaménko
- sečteme hodnotu všech kladných pořadí – pokud je tento součet menší než kritická hodnota( $n_1, n_2, \alpha$ ), zamítáme nulovou hypotézu  $H_0$
- kritickou hodnotu nalezneme v tabulkách

# Kruskal-Wallisův test

- **několik nezávislých** výběrů, alespoň jeden má nenormální rozdělení dat – obdoba nepárového Wilcoxonova testu
- $H_0$ : všechny výběry mají stejné spojité rozdělení,  $H_1$ : alespoň jedna dvojice výběrů nemá shodné rozdělení
- určíme celkové pořadí každého prvku v rámci sloučení všech  $k$  výběrů, pro  $i$ -tý výběr pak sečteme pořadí jeho prvků  $T_i$
- spočítáme testovou statistiku  $Q$

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

- $H_0$  zamítáme, pokud  $Q \geq \chi_{1-\alpha}^2(df)$ , tuto hodnotu nalezneme v tabulkách,  $df = k-1$

# Kruskal-Wallisův test

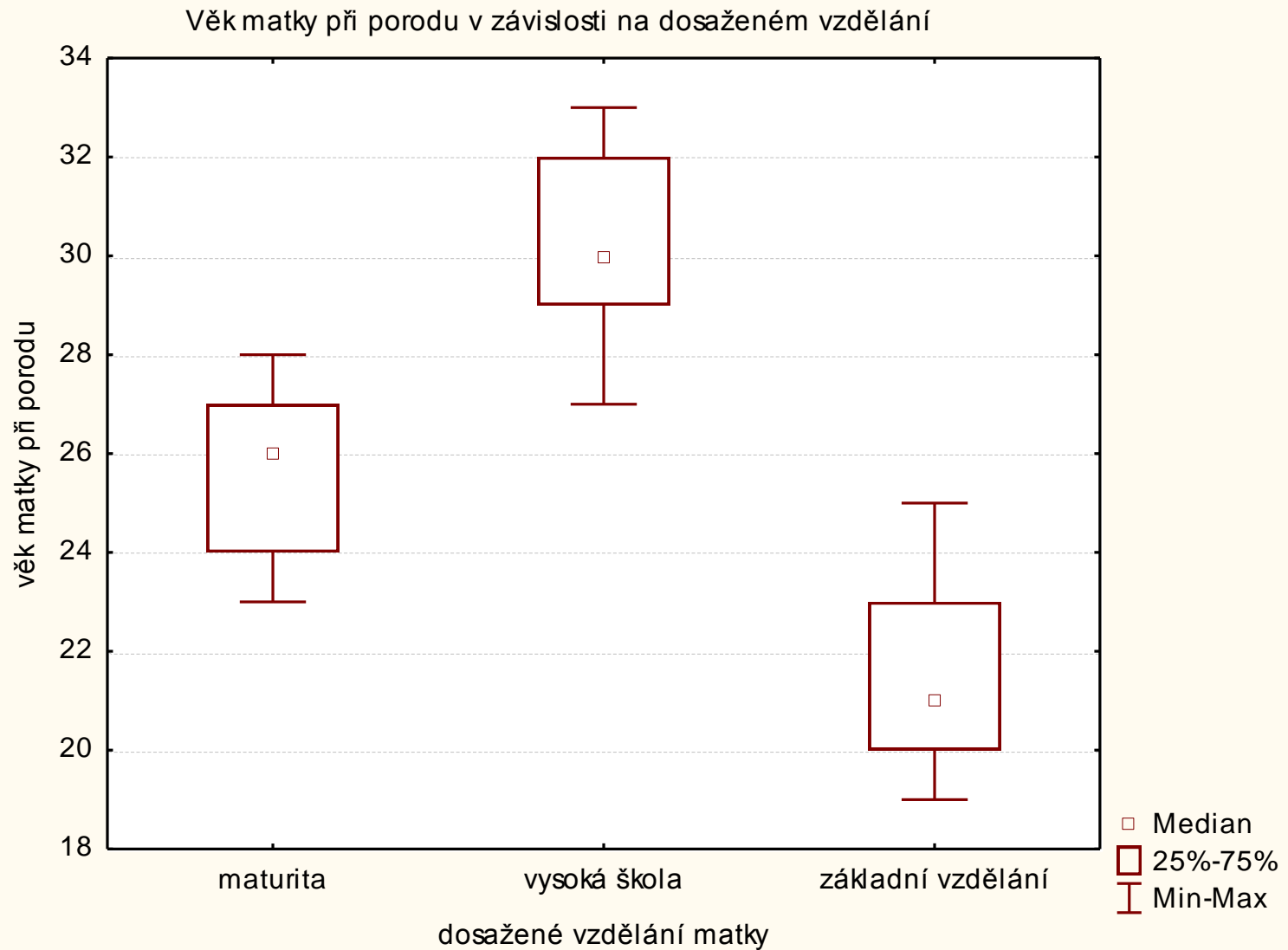
- vzestupné pořadí matek (dle věku při porodu):
- 19, 20, 21, 23, 23, 24, 25, 26, 27, 27, 28, 29, 30, 32, 33

vzdělání matky:	základní vzdělání	maturita	vysoká škola
věk matky při porodu:	19	23	27
	21	24	29
	20	27	33
	23	26	32
	25	28	30

# Kruskal-Wallisův test

Depend.: věk matky při porodu	Multiple Comparisons p values (2-tailed); věk matky při porodu Independent (grouping) variable: dosažené vzdělání Kruskal-Wallis test: $H(2, N=15) = 10,63297$ p = 0,00343		
	maturita R:7,8000	vysoká škola R:12,700	základní vzdělání R:3,5000
	maturita	0,24960	0,38532
	vysoká škola	0,24960	0,00343
	základní vzdělání	0,38532	0,00343

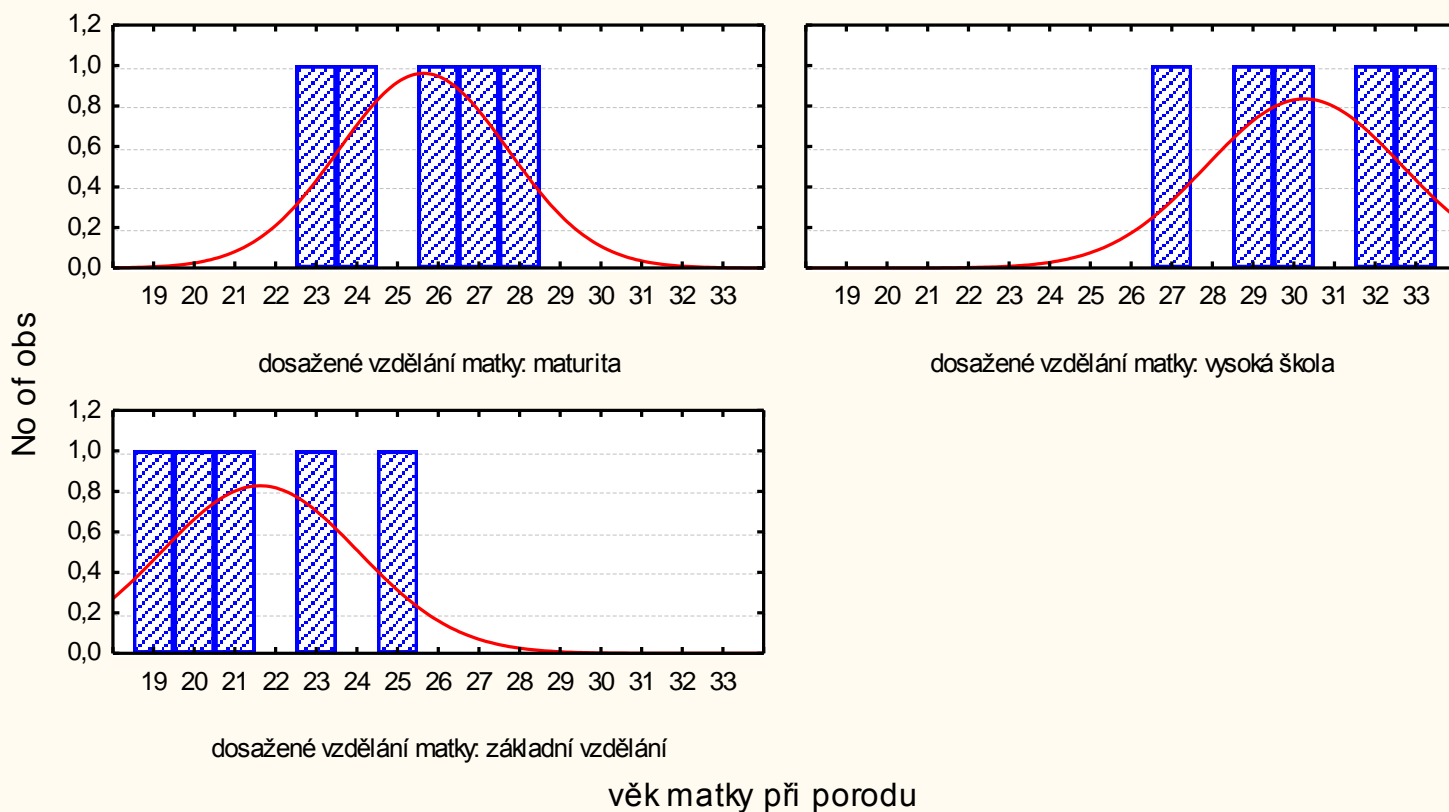
# Kruskal-Wallisův test



# Kruskal-Wallisův test

Categorized Histogram  
Variable: věk matky při porodu

dosažené vzdělání matky: maturita věk matky při porodu =  $5 * 1 * \text{normal}(x; 25,6; 2,0736)$   
dosažené vzdělání matky: vysoká škola věk matky při porodu =  $5 * 1 * \text{normal}(x; 30,2; 2,3875)$   
dosažené vzdělání matky: základní vzdělání věk matky při porodu =  $5 * 1 * \text{normal}(x; 21,6; 2,4083)$



# Friedmanův test

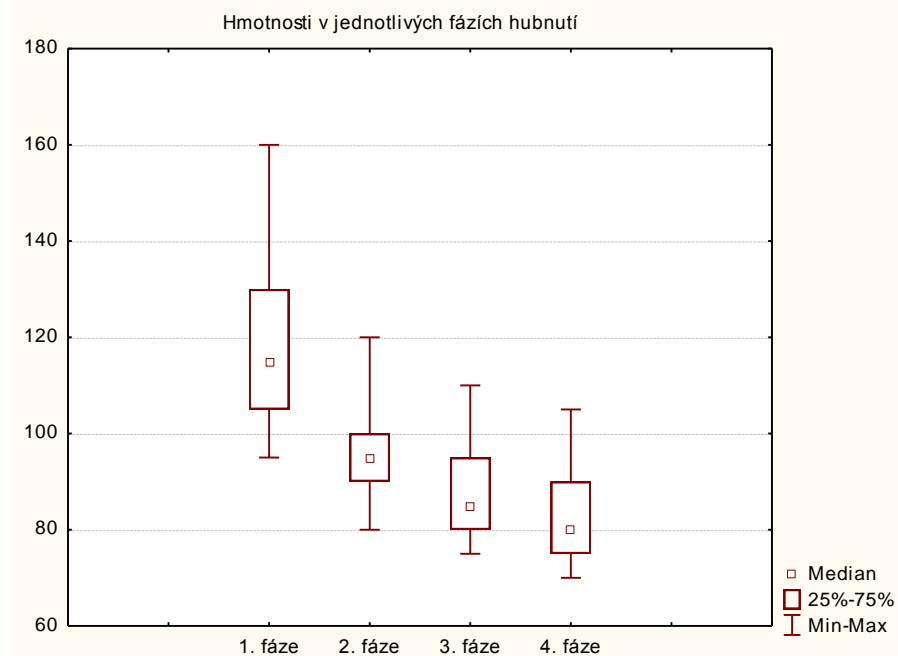
- **několik vzájemně závislých** výběrů, alespoň jeden má nenormální rozdělení dat (většinou ale mají nenormální rozdělení všechny) – obdoba párového Wilcoxonova testu (zde pro  $>2$  výběry)
- $H_0$ : všechny výběry mají stejné spojité rozdělení,  $H_1$ : alespoň jedna dvojice výběrů nemá shodné rozdělení
- typickým příkladem soubor prvků (např. pacientů) v různých časech (etapách léčby atd.)
- např.  $H_0$ : rozdělení velikosti nádoru (resp. mediánu velikosti) **je** po první, druhé, třetí i čtvrté chemoterapii shodné; vs.  $H_1$ : rozdělení velikosti nádoru (resp. mediánu velikosti) po první, druhé, třetí i čtvrté chemoterapii **není** shodné (některá dvojice rozdělení není shodná, je signifikantně odlišná)
- Statistica, R, online verze



# Friedmanův test

fáze hubnoucí kůry:	1. fáze	2. fáze	3. fáze	4. fáze
hmotnosti pacientů:	105	90	80	75
	130	100	95	90
	95	80	75	70
	160	120	110	105
	115	95	85	80

Friedman ANOVA and Kendall Coef				
ANOVA Chi Sqr. (N = 5, df = 3) = 15				
Coeff. of Concordance = 1,0000 Ave				
Variable	Average Rank	Sum of Ranks	Mean	Std.Dev
1. fáze	4,000000	20,00000	121,0000	25,347
2. fáze	3,000000	15,00000	97,0000	14,832
3. fáze	2,000000	10,00000	89,0000	13,874
4. fáze	1,000000	5,00000	84,0000	13,874



Hodnocen 1 faktor  
různých situacích nebo  
2 faktory (závislost)



v

Nezávislé – různé výběry  
Závislé (př. tíž pacienti v  
různých situacích)

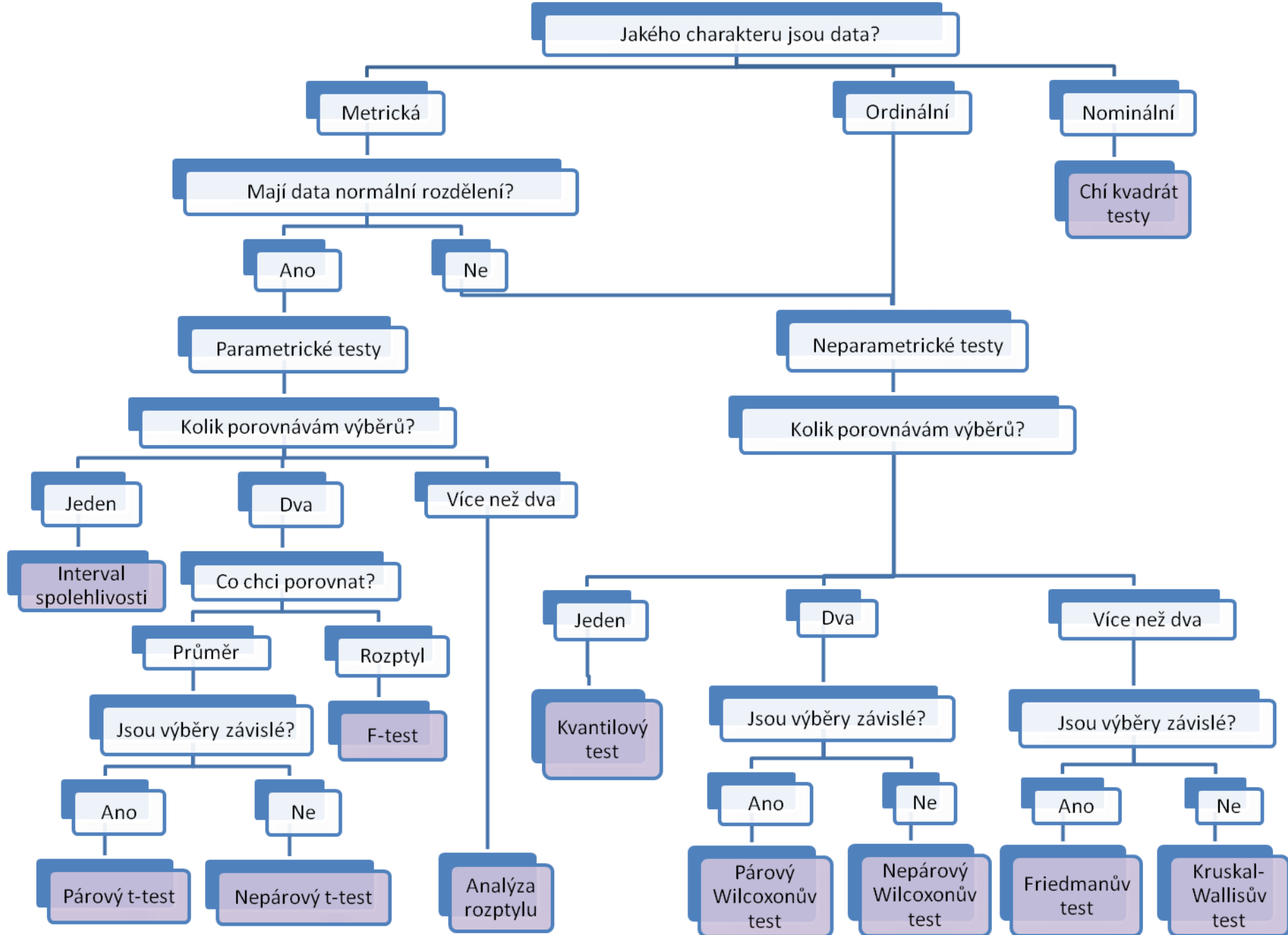
Srovnání s  
populací, dva  
nebo více  
výběrů

Proměnné Výběry Data	1 faktor					2 faktory	
	NEZAVISLE			ZAVISLE			
	1 výběr	2 výběry	k výběrů	2 výběry	k výběrů		
Metrická	Interval spolehlivosti, u-test	t-test	ANOVA při jednoduchém třídění	Párový t-test	Analýza rozptylu s opakování	Pearsonův korelační koeficient	Poloha
	Interval spolehlivosti	F-test	Bartlett	Fergusonův			Variabilita
Ordinální	Kvantilový test	Wilcoxon 2výběrový Mann-Whitney	Kruskal-Wallis (-H test)	Wilcoxon 2výběrový pro závislé	Friedman	Spearmanův korelační koeficient	Poloha
	Siegel - Tukey			Shorac			Variabilita
Alternativní	Test dobré shody	χ-kvadrát 2*2, Fisher	χ-kvadrát, k*m tabulka	MC Nemar	Q-test	Kontingenční korelační koeficient	Cetnosti výskytu

Data metrická (měřitelná) symetrická  
ordinální (pořadí) nebo asymetrická  
alternativní (ano-ne)



Srovnáváme  
střední hodnoty  
nebo  
variability



lubomir.stepanek@lf1.cuni.cz  
lubomir.stepanek@fbmi.cvut.cz