1) Obecně pro $\forall x \in \mathbb{R}$ je $F_X(x) = P(X \leq x)$, tedy nutně $0 \leq F_X(x) \leq 1$. Zároveň nahlédněme, že je-li $x_1 < x_2$, pak $F_X(x_2) = P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1 \vee X \in \langle x_1, x_2 \rangle) = P(X \leq x_1) + P(X \in \langle x_1, x_2 \rangle) = F(x_1) + P(X \in \langle x_1, x_2 \rangle)$. To přepišme jako $F_X(x_2) - F_X(x_2) = P(X \in \langle x_1, x_2 \rangle) \geq 0$, tedy nutně $F_X(x_2) - F_X(x_2) \geq 0$ pro $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2$. Distribuční funkce náhodné veličiny X je tedy neklesající a svými hodnotami nikdy mimo interval $\langle 0, 1 \rangle$.

   a) V intervalu $(0, \pi)$ není $F_X(x) = \sin x$ distribuční funkcí, neboť na podintervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right)$ je klesající.

   b) V intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ může být $F_X(x) = \sin x$ distribuční funkcí, neboť je neklesající a není svými hodnotami mimo interval $\langle 0, 1 \rangle$. Současně snadno nahlédneme, že pravděpodobnostní hustotou je pak $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$.

2) Zřejmě je pro náhodnou veličinu X dle zadání $P(0 \leq X \leq 4) = 1$. Proto můžeme psát $P(0 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(0) = 1$ (†). Obecně platí $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tau)\mathrm{d}\tau$.

   a) Dosaďme předchozí vztah do rovnosti (†). Získáme

$$
\begin{aligned}
F_X(4) - F_X(0) &= \int_{-\infty}^{4} f_X(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^{0} f_X(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{0}^{4} f_X(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{0}^{4} \left(\frac{1}{2} - a\tau \right) \mathrm{d}\tau \\
&= \left[\frac{\tau}{2} - \frac{a\tau^2}{2} \right]_0^4 \\
&= \left(\frac{4}{2} - \frac{a \cdot 4^2}{2} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{a \cdot 0^2}{2} \right) \\
&= 2 - 8a \\
&\overset{(\dagger)}{=} 1.
\end{aligned}
$$

   Teď již snadno nahlédneme, že $a = \frac{1}{8}$.

   b) Už víme, že je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tau)\mathrm{d}\tau$. Dosaďme do předchozího vztahu za $f_X(\tau) = \left(\frac{1}{2} - a\tau\right)$ pro $a = \frac{1}{8}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{2} - a\tau\right) \mathrm{d}\tau \Big|_{\tau \geq 0 \ \wedge \ a=\frac{1}{8}} \\
&= \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{8}\right) \mathrm{d}\tau \\
&= \left[\frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{16}\right]_0^x \\
&= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0^2}{16}\right) \\
&= \frac{8x - x^2}{16}, \qquad 0 \leq x \leq 4.
\end{aligned}$$

c) Je $P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1)$, po dosazení z b) dostaneme $P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{8 \cdot 2 - 2^2}{16} - \frac{8 \cdot 1 - 1^2}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{16} = \frac{5}{16}$.

3) Obecně platí $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$ a také $\mathbf{E}(X) = \int_{\forall x \in \mathcal{D}_{f_X}} x f_X(x)\mathrm{d}x$. Nejdříve najděme pravděpodobnostní hustotu $f_X(x)$, zřejmě je $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{x^4}$, kde $x > 1$.

Nyní dopočítejme střední hodnotu. Je $\mathbf{E}(X) = \int_{\forall x \in \mathcal{D}_{f_X}} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4} \cdot \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{3}{x^3} \cdot \mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{2x^2}\right]_1^{\infty} = 0 - (-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$.

Pro medián $\tilde{x}$ platí, že pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X nabude hodnoty nanejvýš rovné mediánu, je $\frac{1}{2}$. Je tedy $P(X \leq \tilde{x}) = F_X(\tilde{x}) = \frac{1}{2}$. Získáváme rovnost $1 - \frac{1}{\tilde{x}^3} = \frac{1}{2}$, jejímž řešením je medián $\tilde{x} = \sqrt[3]{2}$.

4) Z obrázku nahlédneme, že je

$$f_X(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Víme, že musí být $P(X = \{\forall x : x \in \mathcal{D}_{f_X}\}) = 1 = \int_{\forall x \in \mathcal{D}_{f_X}} f_X(x)\mathrm{d}x$. Z toho vyjděme při vyčíslení konstanty a; je tedy $P(X = \langle 0, 1\rangle) = 1 = \int_0^1 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 ax\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a \cdot 1^2}{2} - \frac{a \cdot 0^2}{2} = \frac{1}{2}a$. Takže $a = 2$. Teď už jen přepišme vztah pro pravděpodobnostní hustotu $f_X(x)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

b) Obecně je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tau)\mathrm{d}\tau\Big|_{\tau\in\mathcal{D}_{f_X}}$. Dosaďme za $f_X(\tau) = 2x$ a řešme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tau)\mathrm{d}\tau\Big|_{\tau\in\mathcal{D}_{f_X}} = \int_0^x 2\tau\mathrm{d}\tau = \left[\tau^2\right]_0^x = x^2 - 0^2 = x^2$, kde $0 \le x \le 1$. Pro distribuční funkci tedy platí

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

c) Je $P\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right) = F_X\left(\frac{2}{3}\right) - F_X\left(\frac{1}{3}\right)$, po dosazení z b) dostaneme $P\left(\frac{1}{3} \le X \le \frac{2}{3}\right) = F_X\left(\frac{2}{3}\right) - F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

5) Víme, že musí být $P(X = \{\forall x : x \in \mathcal{D}_{f_X}\}) = 1 = \int_{\forall x\in\mathcal{D}_{f_X}} f_X(x)\mathrm{d}x$. Z toho vyjděme při vyčíslování konstant c.

a) Je $P(X = \{\forall x : x \in \mathcal{D}_{f_X}\}) = 1 = \int_{\forall x\in\mathcal{D}_{f_X}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi c\cdot\sin x\cdot\mathrm{d}x = [-c\cdot\cos x]_0^\pi = c - (-c) = 2c$. Takže $c = \frac{1}{2}$.

b) Je $P(X = \{\forall x : x \in \mathcal{D}_{f_X}\}) = 1 = \int_{\forall x\in\mathcal{D}_{f_X}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 cx^2\mathrm{d}x = \left[\frac{cx^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}c - 0 = \frac{8}{3}c$. Takže $c = \frac{3}{8}$.

6) Ze zadání pro distribuční funkci $F_X(x)$ vyplývá, že

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ \frac{x+5}{7}, & -5 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

a) Platí $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$, tedy $f_X(x) = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+5}{7}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{7}$ pro všechna $-5 \le x \le 2$. Pišme tedy pro pravděpodobnostní hustotu $f_X(x)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & -5 \le x \le 2 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

b) Je $P(-2 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-2)$, po dosazení ze zadání dostaneme $P(-2 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-2) = \frac{2+5}{7} - \frac{-2+5}{7} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

c) Je $P(X = 2) = P(2 \le X \le 2) = F_X(2) - F_X(2)$, po dosazení ze zadání dostaneme $P(2 \le X \le 2) = F_X(2) - F_X(2) = \frac{2+5}{7} - \frac{2+5}{7} = 1 - 1 = 0$. To jsme mohli nahlédnou i apriorně, neboť pravděpodobnost, že spojitá veličina nabude právě jedné bodové hodnoty na spojitém intervalu hodnot, je již z geometrické definice pravděpodobnosti nulová.

d) Je $P(-6 < X < 1) = P(-6 < X < -5) + P(-5 \le X < 1) = 0 + (F_X(1) - F_X(-5))$, po dosazení ze zadání dostaneme $P(-6 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-5) = \frac{1+5}{7} - \frac{-5+5}{7} = \frac{6}{7} - 0 = \frac{6}{7}$.

7) Ze zadání víme, že pro pravděpodobnostní hustotu $f_X(x)$ platí

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Víme, že obecně platí $\mathbf{E}(X) = \int_{\forall x \in \mathcal{D}_{f_X}} x f_X(x)\mathrm{d}x$. Dosaďme do předchozího vztahu pravděpodobnostní hustotu $f_X(x)$ ze zadání, získáváme $\mathbf{E}(X) = \int_{\forall x \in \mathcal{D}_{f_X}} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 12x^2(1-x) \cdot \mathrm{d}x = \int_0^1 (12x^3 - 12x^4)\mathrm{d}x = \left[3x^4 - \frac{12}{5}x^5\right]_0^1 = (3 \cdot 1^4 - \frac{12}{5} \cdot 1^5) - 0 = \frac{3}{5}$. Je tedy $\mathbf{E}(X) = \frac{3}{5}$.

Pro výpočet rozptylu použijeme tzv. výpočtový tvar, tedy $\mathrm{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$. Zřejmě musíme nejdříve spočítat $\mathbf{E}(X^2)$. To provedeme podle obecného vztahu pro $\mathbf{E}(X^2)$, kdy je $\mathbf{E}(X^2) = \int_{\forall x \in \mathcal{D}_{f_X}} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x$. Dosaďme tedy $\mathbf{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 12x^2(1-x) \cdot \mathrm{d}x = \int_0^1 (12x^4 - 12x^5)\mathrm{d}x = \left[\frac{12}{5}x^5 - 2x^6\right]_0^1 = (\frac{12}{5} \cdot 1^5 - 2 \cdot 1^6) - 0 = \frac{2}{5}$. Teď již vyčísleme rozptyl $\mathrm{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}$. Je tedy $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{25}$.

Modus x^* je nejvíce pravděpodobnou hodnotou náhodné veličiny X. Musí tedy být $x^* = \underset{0 \leq x \leq 1}{\arg\max} \left\{\lim_{\Delta \to 0} P\left(x - \frac{\Delta}{2} \leq X \leq x + \frac{\Delta}{2}\right)\right\} \approx \underset{0 \leq x \leq 1}{\arg\max} \{f_X(x) \cdot \Delta\}$. Zafixujme $\Delta > 0$ na velmi „malou“ hodnotu, pak $x^* \approx \underset{0 \leq x \leq 1}{\arg\max} \{f_X(x)\}$. Využijme spojitosti $f_X(x)$ na intervalu $0 \leq x \leq 1$, najděme první derivaci $f_X(x)$ podle x a položme ji rovnou nule a hledejme extrém, pak ověřme, že jde o maximum. Tedy $\frac{\mathrm{d}f_X(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(12x^2(1-x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(12x^2 - 12x^3))}{\mathrm{d}x} = 24x - 36x^2 \equiv 0$, odtud je $x^* \equiv x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$. Pro druhou derivaci platí $\frac{\mathrm{d}^2 f_X(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(24x - 36x^2)}{\mathrm{d}x} = 24 - 72x$, tedy pouze pro $x = \frac{2}{3}$ je $24 - 72x < 0$ a jde v tomto bodě skutečně o maximum. Modem x^* náhodné veličiny X je tedy hodnota $x^* = \frac{2}{3}$.