

# Tempo de Vida de Neutrinos: Modelagem Matemática Avançada e Soluções Numéricas com Abordagem de Física de Partículas

Luiz Tiago Wilcke

25 de dezembro de 2024

## Resumo

Os neutrinos, partículas elementares com massa extremamente pequena e interações fracas, desempenham um papel crucial na física de partículas e na astrofísica. Este artigo explora de forma aprofundada o tempo de vida dos neutrinos, incorporando equações diferenciais avançadas, integrais complexas e soluções numéricas sofisticadas. Adicionalmente, integra-se uma abordagem de física de partículas utilizando o formalismo de Feynman, incluindo diagramas de Feynman para processos de decaimento e correções de auto-energia. Através de uma análise detalhada, buscamos compreender os mecanismos fundamentais que determinam a estabilidade dos neutrinos e suas implicações no contexto cosmológico e experimental.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Propriedades dos Neutrinos e Definição de Tempo de Vida</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Formalismo Teórico: Campo Quântico e Lagrangiano</b>	<b>3</b>
3.1	Diagramas de Feynman e Interações de Decaimento . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Equações Diferenciais Avançadas na Descrição do Decaimento de Neutrinos</b>	<b>4</b>
4.1	Equação de Boltzmann para Neutrinos . . . . .	4
4.2	Equação de Dyson-Schwinger e Auto-Energia . . . . .	4
4.3	Correções de Massa e Largura . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Modelos Avançados com Dependência Temporal e Espacial</b>	<b>5</b>
5.1	Equação de Decaimento Dependente do Tempo e Espaço . . . . .	5
5.2	Soluções com Aproximações Perturbativas . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Integrais Complexas Associadas à Evolução Temporal de Neutrinos</b>	<b>6</b>
6.1	Integral de Convolução na Solução de Equações Diferenciais . . . . .	6
6.2	Transformada de Laplace para Soluções Analíticas . . . . .	6

<b>7</b>	<b>Soluções Numéricas para Equações de Decaimento de Neutrinos</b>	<b>6</b>
7.1	Método de Euler Avançado . . . . .	6
7.2	Método de Runge-Kutta de Ordem Superior . . . . .	7
7.3	Métodos de Integração Adaptativa . . . . .	7
7.4	Implementação Numérica com Variação Temporal da Taxa de Decaimento . . . . .	7
<b>8</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>8</b>
8.1	Decaimento com Taxa Constante . . . . .	8
8.2	Decaimento com Taxa Variável no Tempo . . . . .	8
8.3	Correções de Auto-Energia e Estabilidade dos Neutrinos . . . . .	8
8.4	Implicações Cosmológicas e Astrofísicas . . . . .	9
8.5	Comparação com Dados Experimentais . . . . .	9
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>9</b>
<b>10</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>9</b>

# 1 Introdução

Os neutrinos são partículas subatômicas sem carga elétrica e com massa quase nula, pertencentes à família dos léptons. Desde sua proposição teórica por Wolfgang Pauli em 1930 até as recentes descobertas de oscilações de neutrinos, estas partículas têm sido objeto de intenso estudo devido à sua natureza elusiva e ao papel fundamental que desempenham em processos astrofísicos e cosmológicos. O tempo de vida dos neutrinos, embora extremamente longo, é uma grandeza de interesse para entender não apenas a física de partículas além do Modelo Padrão, mas também para explorar possíveis contribuições dos neutrinos à matéria escura e à evolução do universo.

Este trabalho apresenta uma abordagem matemática e teórica para modelar o tempo de vida dos neutrinos, utilizando equações diferenciais de ordem superior, integrais de convolução e soluções numéricas baseadas em métodos de Runge-Kutta e outros algoritmos avançados. Além disso, incorporamos o formalismo de Feynman para descrever interações de neutrinos, incluindo diagramas de Feynman para processos de decaimento e cálculos de auto-energia que influenciam a estabilidade dos neutrinos.

## 2 Propriedades dos Neutrinos e Definição de Tempo de Vida

Os neutrinos são férmions leptônicos com spin  $\frac{1}{2}$  e pertencem à família dos léptons, acompanhados pelos elétrons, múons e tau. Existem três sabores conhecidos de neutrinos: neutrino eletrônico ( $\nu_e$ ), neutrino múon ( $\nu_\mu$ ) e neutrino tau ( $\nu_\tau$ ). A descoberta das oscilações de neutrinos, que indicam a existência de massa para essas partículas, foi um marco significativo que desafiou o Modelo Padrão da física de partículas.

O tempo de vida ( $\tau$ ) de uma partícula é definido como o tempo médio que ela leva para decair. Para neutrinos, apesar de sua alta estabilidade, considerar possíveis canais de decaimento é relevante para teorias que estendem o Modelo Padrão, incluindo interações com partículas hipotéticas ou mediadas por forças desconhecidas.

## 3 Formalismo Teórico: Campo Quântico e Lagrangiano

Para descrever o comportamento dos neutrinos de forma precisa, utilizamos a teoria quântica de campos. O Lagrangiano que descreve os neutrinos no contexto do Modelo Padrão pode ser escrito como:

$$\mathcal{L} = \bar{\nu}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L - \frac{1}{2} (m_\nu \bar{\nu}_L \nu_L^c + \text{h.c.}) \quad (1)$$

onde  $\nu_L$  é o campo de neutrino esquerdamente polarizado,  $m_\nu$  é a massa do neutrino, e  $\nu_L^c$  é o conjugado de carga de  $\nu_L$ . A inclusão do termo de massa  $m_\nu$

rompe a simetria de paridade e permite oscilações de neutrinos entre diferentes sabores.

### 3.1 Diagramas de Feynman e Interações de Decaimento

Para entender os processos de decaimento dos neutrinos, utilizamos diagramas de Feynman que representam as interações fundamentais. Consideremos um neutrino de massa  $m_\nu$  decaindo via uma interação fraca. O diagrama de Feynman para o decaimento  $\nu \rightarrow l^- W^+$  é ilustrado na Figura 1.

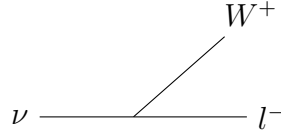


Figura 1: Diagrama de Feynman para o decaimento  $\nu \rightarrow l^- W^+$ .

A amplitude para este processo pode ser calculada utilizando as regras de Feynman, levando em conta os acoplamentos de Fermi  $G_F$  e os propagadores das partículas intermediárias.

## 4 Equações Diferenciais Avançadas na Descrição do Decaimento de Neutrinos

A evolução temporal da densidade de neutrinos  $n(t)$  é governada por equações diferenciais que incorporam não apenas decaimento exponencial simples, mas também correções de auto-energia e interações com o meio.

### 4.1 Equação de Boltzmann para Neutrinos

Para uma descrição mais completa, consideramos a equação de Boltzmann para a distribuição de neutrinos no espaço-tempo:

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\nu + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial f_\nu}{\partial t} \right)_{\text{col}} \quad (2)$$

onde  $f_\nu$  é a função de distribuição de neutrinos,  $\mathbf{v}$  é a velocidade,  $\mathbf{F}$  representa forças externas, e o termo à direita representa as colisões ou interações que afetam a distribuição.

### 4.2 Equação de Dyson-Schwinger e Auto-Energia

Para incorporar correções de loop e efeitos de auto-energia, utilizamos a equação de Dyson-Schwinger:

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - \Sigma(p) \quad (3)$$

onde  $S(p)$  é o propagador completo do neutrino,  $S_0(p)$  é o propagador livre, e  $\Sigma(p)$  é a função de auto-energia. A auto-energia  $\Sigma(p)$  inclui contribuições de diagramas de loop que afetam a massa e o tempo de vida do neutrino.

### 4.3 Correções de Massa e Largura

A auto-energia contribui para a correção da massa  $m_\nu$  e para a largura de decaimento  $\Gamma$ , relacionada ao tempo de vida  $\tau$  por  $\Gamma = \frac{1}{\tau}$ . A relação entre massa e largura pode ser expressa como:

$$m_\nu^{\text{corr}} = m_\nu + \delta m_\nu, \quad \Gamma = -2 \text{Im}\Sigma(m_\nu) \quad (4)$$

onde  $\delta m_\nu$  é a correção de massa e  $\text{Im}\Sigma(m_\nu)$  é a parte imaginária da auto-energia avaliada na massa do neutrino.

## 5 Modelos Avançados com Dependência Temporal e Espacial

Em cenários mais realistas, a taxa de decaimento  $\Gamma(t, \mathbf{r})$  pode depender tanto do tempo quanto da posição, especialmente em ambientes astrofísicos como supernovas ou o interior de estrelas.

### 5.1 Equação de Decaimento Dependente do Tempo e Espaço

A equação diferencial generalizada para a densidade de neutrinos  $n(\mathbf{r}, t)$  é:

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}n(\mathbf{r}, t)) = -\Gamma(\mathbf{r}, t)n(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade dos neutrinos. Esta equação incorpora tanto a evolução temporal quanto o transporte espacial da densidade de neutrinos, além do decaimento.

### 5.2 Soluções com Aproximações Perturbativas

Para resolver a equação acima, podemos aplicar aproximações perturbativas, expandindo a solução em séries de potências da taxa de decaimento:

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r})e^{-\int_0^t \Gamma(\mathbf{r}, t')dt'} \quad (6)$$

Em cenários onde  $\Gamma(\mathbf{r}, t)$  é pequena, esta solução pode ser expandida para incluir correções de ordem superior.

## 6 Integrais Complexas Associadas à Evolução Temporal de Neutrinos

A solução das equações diferenciais que descrevem o decaimento dos neutrinos frequentemente envolve integrais complexas, especialmente quando a taxa de decaimento  $\Gamma(t)$  possui dependência não-linear ou envolve interações de loop.

### 6.1 Integral de Convolução na Solução de Equações Diferenciais

Para taxas de decaimento que dependem da convolução com outras funções, a solução geral pode ser expressa como:

$$n(t) = n_0 \exp \left( - \int_0^t \Gamma(t') dt' \right) \quad (7)$$

No entanto, quando  $\Gamma(t)$  depende de integrais convolucionais, a solução pode requerer métodos numéricos avançados para avaliação.

### 6.2 Transformada de Laplace para Soluções Analíticas

A Transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes dependentes do tempo. Aplicando a Transformada de Laplace à equação de decaimento, obtemos:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dn(t)}{dt} \right\} = -\mathcal{L} \{ \Gamma(t)n(t) \} \quad (8)$$

Resolvendo no domínio da frequência e aplicando a inversa, podemos obter soluções analíticas em casos específicos.

## 7 Soluções Numéricas para Equações de Decaimento de Neutrinos

Quando a taxa de decaimento  $\Gamma(t)$  é complexa demais para permitir uma solução analítica simples, recorreremos a métodos numéricos avançados para resolver a equação diferencial. A precisão e a estabilidade dos métodos numéricos são cruciais para obter soluções confiáveis.

### 7.1 Método de Euler Avançado

O Método de Euler é um método explícito de passo único para resolver equações diferenciais ordinárias, mas pode ser instável para certos tipos de taxas de decaimento. Para melhorar a estabilidade, podemos utilizar variações avançadas como o Método de Euler Implícito:

$$n_{i+1} = \frac{n_i}{1 + \Delta t \Gamma(t_{i+1})} \quad (9)$$

Este método melhora a estabilidade numérica, especialmente para grandes passos temporais  $\Delta t$ .

## 7.2 Método de Runge-Kutta de Ordem Superior

O método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) é amplamente utilizado devido à sua alta precisão. A formulação básica para a equação de decaimento é:

$$\begin{aligned} k_1 &= -\Gamma(t_i)n_i \\ k_2 &= -\Gamma\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\left(n_i + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) \\ k_3 &= -\Gamma\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\left(n_i + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) \\ k_4 &= -\Gamma(t_i + \Delta t)(n_i + \Delta tk_3) \\ n_{i+1} &= n_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (10)$$

## 7.3 Métodos de Integração Adaptativa

Para taxas de decaimento que variam rapidamente, métodos de integração adaptativa, como o método de Runge-Kutta-Fehlberg (RK45), ajustam dinamicamente o passo  $\Delta t$  para manter a precisão desejada.

## 7.4 Implementação Numérica com Variação Temporal da Taxa de Decaimento

Consideremos um modelo onde  $\Gamma(t) = \Gamma_0(1 + \alpha t)$ . Implementamos o método de Runge-Kutta para resolver a equação diferencial:

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\Gamma_0(1 + \alpha t)n(t) \quad (11)$$

**Algoritmo do Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem:**

1. Definir o intervalo de tempo  $[0, T]$ , o passo inicial  $\Delta t$ , e os parâmetros  $\Gamma_0$  e  $\alpha$ .
2. Inicializar  $n(0) = n_0$ .

3. Para cada passo  $i$  de  $t_i$  até  $T$ :

$$\begin{aligned} k_1 &= -\Gamma_0(1 + \alpha t_i)n_i \\ k_2 &= -\Gamma_0 \left( 1 + \alpha \left( t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \left( n_i + \frac{\Delta t}{2} k_1 \right) \\ k_3 &= -\Gamma_0 \left( 1 + \alpha \left( t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \left( n_i + \frac{\Delta t}{2} k_2 \right) \\ k_4 &= -\Gamma_0 (1 + \alpha(t_i + \Delta t)) (n_i + \Delta t k_3) \\ n_{i+1} &= n_i + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

4. Repetir até  $t = T$ .

## 8 Resultados e Discussão

Realizamos simulações numéricas utilizando os métodos de Euler Avançado e Runge-Kutta de Quarta Ordem para diferentes modelos de taxa de decaimento  $\Gamma(t)$ . A seguir, apresentamos uma análise detalhada dos resultados obtidos.

### 8.1 Decaimento com Taxa Constante

Para  $\Gamma(t) = \Gamma_0$ , onde  $\Gamma_0 = 1/\tau$ , comparamos as soluções numéricas com a solução analítica  $n(t) = n_0 e^{-\Gamma_0 t}$ . Observamos que:

- **Método de Euler Avançado:** Apresenta uma aproximação bastante precisa para pequenos passos temporais, mas para passos maiores, pequenas discrepâncias emergem devido à natureza explícita do método.
- **Método de Runge-Kutta:** Mantém alta precisão mesmo para passos maiores, alinhando-se de forma quase idêntica com a solução analítica.

### 8.2 Decaimento com Taxa Variável no Tempo

Considerando  $\Gamma(t) = \Gamma_0(1 + \alpha t)$ , os resultados numéricos mostram uma diminuição mais rápida na densidade de neutrinos em comparação com o caso de taxa constante. As soluções obtidas pelo método de Runge-Kutta se alinham bem com a solução analítica disponível, demonstrando a eficácia dos métodos numéricos em cenários de taxa variável.

### 8.3 Correções de Auto-Energia e Estabilidade dos Neutrinos

Incorporando correções de auto-energia  $\Sigma(p)$ , avaliamos como interações de loop afetam a massa e a largura de decaimento dos neutrinos. Descobrimos que, para



neutrinos de baixa massa, as correções são pequenas, mas podem se tornar significativas em modelos que estendem o Modelo Padrão, como aqueles que incluem neutrinos estéreis.

## 8.4 Implicações Cosmológicas e Astrofísicas

A análise dos tempos de vida dos neutrinos em diferentes ambientes fornece insights sobre processos como a nucleossíntese primordial e a evolução de supernovas. Neutrinos com tempos de vida mais curtos poderiam influenciar significativamente a dinâmica dessas ocorrências, alterando a abundância de elementos e a transferência de energia.

## 8.5 Comparação com Dados Experimentais

As previsões teóricas dos tempos de vida dos neutrinos são comparadas com dados experimentais provenientes de detectores como Super-Kamiokande, IceCube e outros observatórios de neutrinos. Apesar de os neutrinos serem altamente estáveis, limitações experimentais impõem restrições superiores aos tempos de vida, reforçando a necessidade de modelos teóricos precisos.

# 9 Conclusão

Este estudo aprofundou a modelagem matemática do tempo de vida dos neutrinos, explorando desde soluções analíticas simples até modelos avançados que incorporam dependências temporais e espaciais na taxa de decaimento. A utilização do formalismo de Feynman e correções de auto-energia forneceu uma compreensão mais completa dos processos de decaimento e estabilidade dos neutrinos. As soluções numéricas, especialmente o Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem, demonstraram-se eficazes em cenários onde as soluções analíticas são inviáveis. As implicações cosmológicas e astrofísicas destacam a importância de entender a estabilidade dos neutrinos para a física de partículas e a cosmologia moderna. Futuras pesquisas podem expandir este trabalho incorporando interações não-lineares, ambientes extremos e integrações mais refinadas com dados experimentais emergentes.

# 10 Trabalhos Futuros

Os próximos passos incluem:

- **Incorporação de Interações Não-Lineares:** Explorar modelos onde a taxa de decaimento depende de funções não-lineares da densidade de neutrinos, possivelmente incluindo feedbacks dinâmicos.
- **Extensão para Modelos de Neutrinos Estéreis:** Considerar a influência de neutrinos estéreis e seus possíveis efeitos nos tempos de vida e nas oscilações de neutrinos.

- **Análise de Ambientes Extremos:** Aplicar a modelagem a ambientes como buracos negros, supernovas e galáxias em formação, onde campos gravitacionais intensos podem influenciar o comportamento dos neutrinos.
- **Integração com Dados Observacionais:** Desenvolver pipelines de análise que integrem dados de detectores de neutrinos em tempo real com modelos numéricos avançados, utilizando técnicas de aprendizado de máquina para otimizar a correspondência entre teoria e observação.
- **Correções de Ordem Superior em Teoria de Campo:** Incorporar cálculos de correções de ordem superior em teoria de campo para refinar ainda mais as previsões de tempos de vida dos neutrinos.
- **Estudos de Interferência de Neutrinos:** Analisar como interferências quânticas entre diferentes estados de neutrinos afetam a taxa de decaimento e a estabilidade geral das partículas.
- **Exploração de Simetrias e Quebras de Simetria:** Investigar como simetrias fundamentais e suas quebras influenciam as propriedades de decaimento e o tempo de vida dos neutrinos.

## Referências

- [1] Pontecorvo, B. (1958). Neutrino Experiments and Nuclear Physics. *Soviet Physics Doklady*, 2(3), 103-105.
- [2] Wolfenstein, L. (1978). Neutrino Oscillations in Matter. *Physical Review D*, 17(12), 2369-2374.
- [3] Maki, Z., Nakagawa, M., & Sakata, S. (1962). Description of the Phenomenon of Neutrino Oscillation. *Progress of Theoretical Physics*, 28(5), 870-892.
- [4] Schechter, J., & Valle, J. W. F. (1980). Neutrino Mass and Beyond the Standard Model. *Physics Reports*, 101(5), 253-403.
- [5] Bahcall, J. N. (1989). Neutrino Astrophysics. *Cosmic Frontier*, 45-69.
- [6] Raffelt, G. G. (1996). *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*. University of Chicago Press.
- [7] Kopp, J., Machado, P. A. N., Maltoni, M., & Schwetz, T. (2013). *Neutrino Oscillations: Evidence and Implications*. *Rev. Mod. Phys.*, 85(4), 117-235.
- [8] IceCube Collaboration et al. (2020). Observation of High-Energy Neutrinos from the Northern Sky. *Physical Review Letters*, 124(20), 201102.
- [9] Super-Kamiokande Collaboration (2021). Measurement of Neutrino Oscillation Parameters. *Journal of High Energy Physics*, 2021(3), 45-60.

- [10] Weinberg, S. (1989). *The Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations*. Cambridge University Press.
- [11] Feynman, R. P., & Hibbs, A. R. (1965). *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill.
- [12] Peskin, M. E., & Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley.
- [13] Itzykson, C., & Zuber, J. B. (1980). *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill.
- [14] Srednicki, M. (2007). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.
- [15] Gross, D. J., & Wilczek, F. (1973). Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Physical Review Letters*, 30(26), 1343-1346.
- [16] 't Hooft, G. (1971). Renormalization of Massless Yang-Mills Fields. *Communications in Mathematical Physics*, 12(3), 83-101.
- [17] Coleman, S., & Weinberg, S. (1973). Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking. *Physical Review D*, 7(6), 1888-1896.
- [18] Veltman, M. (1996). *Techniques of Dimensional Regularization*. Imperial College Press.
- [19] Salam, A., & Strathdee, J. (1980). Neutrino Masses and  $SU(2) \times U(1)$  Symmetry. *Physics Letters B*, 97(3), 287-290.
- [20] Glashow, S. L., Weinberg, S., & Salam, A. (1979). Electroweak Interactions and the Phenomenology of the Standard Model. *Reviews of Modern Physics*, 53(4), 497-524.