Géométrie dans l'espace, produit scalaire.

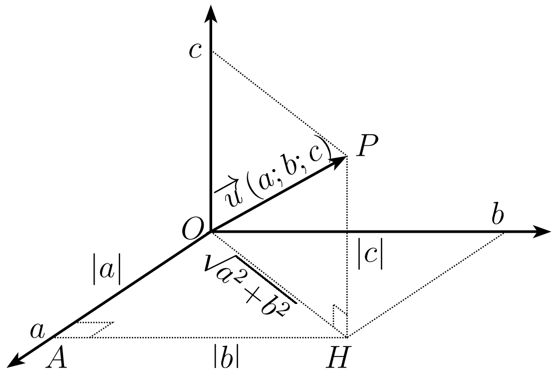
1 Produit scalaire

1.1 Norme d'un vecteur dans un repère orhtonormé

Théorème : Si dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Preuve : Soit P l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$: $\|\overrightarrow{u}\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = OP$.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{u}(a; b; c)$ donc $P(a; b; c)$.
Soient $H(a; b; 0)$ et $A(a; 0; 0)$.
$\overrightarrow{OA}(a; 0; 0)$ donc $\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{\imath}$; $\overrightarrow{AH}(0; b; 0)$, donc $\overrightarrow{AH} = b\,\overrightarrow{\jmath}$;
donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.
Dans le triangle OAH rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $OH^2 = OA^2 + AH^2 = a^2 + b^2$.
$\overrightarrow{HP}(0; 0; c)$, donc $\overrightarrow{HP} = c\,\overrightarrow{k}$ est orthogonal au plan (OIJ)
$(HP) \perp (OIJ)$ et $(AH) \subset (OIJ)$ donc $(AH) \perp (HP)$.
Dans le triangle OHP rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, $OP^2 = OH^2 + HP^2 = a^2 + b^2 + c^2$.



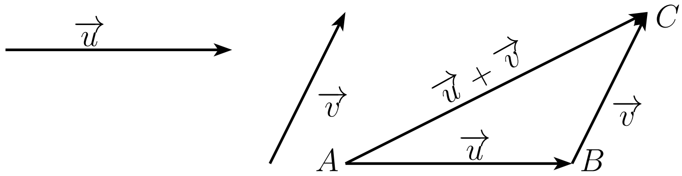
Propriété : Si dans un repère orthonormé, $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$
alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Preuve : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ donc $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple : L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on considère les points
$A(0; -44; -44)$, $B(35; 24; 7)$, $C(-25; -35; 44)$. Déterminer la nature du triangle ABC. 1

Propriété : *Inégalité triangulaire.* Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.

Preuve :



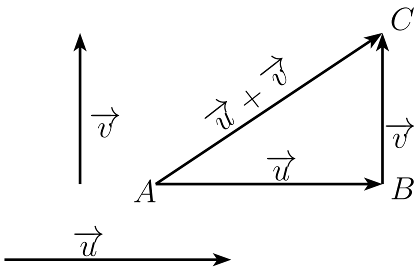
Soit A un point, soit B l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, soit C l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

On a $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = AC \leqslant AB + BC = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.

1.2 Norme d'un vecteur et orthogonalité

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls ; alors
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$.

Preuve :
Soit A un point, soit B l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, soit C l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$, de sorte qu'on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
On a donc $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$, $\|\overrightarrow{v}\|^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = BC^2$ et $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = AC^2$.



- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$.
- Réciproquement, si $\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$ alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B, autrement dit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

1.3 Définition

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ; alors on appelle *produit scalaire de* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{2}$.

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (c) $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

(d) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Preuve :

(a) Cela découle immédiatement de la définition.

(b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \dfrac{\|\vec{u} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2}{2} = \dfrac{\|2\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2}{2} = \dfrac{(2\|\vec{u}\|)^2 - 2\|\vec{u}\|^2}{2}$

$= \dfrac{4\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2}{2} = \dfrac{2\|\vec{u}\|^2}{2} = \|\vec{u}\|^2.$

(c) $\vec{u} \cdot \vec{0} = \dfrac{\left\|\vec{u} + \vec{0}\right\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \left\|\vec{0}\right\|^2}{2} = \dfrac{\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2}{2} = 0.$ $\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0.$

(d) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Alors : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ d'après la propriété précédente.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$

$\iff \dfrac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{2} = 0 \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$

Notation : L'écriture $\vec{u}^2$ désigne indifféremment $\vec{u} \cdot \vec{u}$ ou $\|\vec{u}\|^2$.

1.4 Expression analytique

Propriété : Si, dans un repère orthonormé, $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = a\alpha + b\beta + c\gamma$.

Preuve : $\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

Or le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(a+\alpha; b+\beta, c+\gamma)$, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (a+\alpha)^2 + (b+\beta)^2 + (c+\gamma)^2$.

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{2}$

$= \dfrac{(a+\alpha)^2 + (b+\beta)^2 + (c+\gamma)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{2}$

$= \dfrac{a^2 + 2a\alpha + \alpha^2 + b^2 + 2b\beta + \beta^2 + c^2 + 2c\gamma + \gamma^2 - a^2 - b^2 - c^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2}$

$= \dfrac{2a\alpha + 2b\beta + 2c\gamma}{2} = a\alpha + b\beta + c\gamma.$

Exemple : L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, trouver les vecteurs orthogonaux parmi : $\vec{u}(1; -2; -2)$, $\vec{v}(-2; 1; -2)$ et $\vec{w}(1; -3; -2)$ **2**

Propriété : L'espace est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé.

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ un vecteur. Alors $x = \vec{u} \cdot \vec{\imath}$, $y = \vec{u} \cdot \vec{\jmath}$ et $z = \vec{u} \cdot \vec{k}$.

Preuve : $\vec{\imath}(1; 0; 0)$ donc $\vec{u} \cdot \vec{\imath} = x \times 1 + y \times 0 + z \times 0 = x$,

$\vec{\jmath}(0; 1; 0)$ donc $\vec{u} \cdot \vec{\jmath} = x \times 0 + y \times 1 + z \times 0 = y$ et $\vec{k}(0; 0; 1)$ donc $\vec{u} \cdot \vec{k} = x \times 0 + y \times 0 + z \times 1 = z$.

1.5 Règles de calcul

L'expression analytique permet de prouver les formules suivantes.

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pour tout réel k :

- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$

Les deux dernières formules expriment la distributivité du produit scalaire dans la somme et la différence de vecteurs. On peut en déduire la double distributivité : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{b}$.
Ce qui permet d'établir les "identités remarquables" qui prennent la forme suivante :

Propriété : Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
- $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
- $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$

1.6 Lien avec les angles

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

Preuve : Comme deux vecteurs sont toujours coplanaires, on se place dans un plan F sur lequel on peut représenter les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

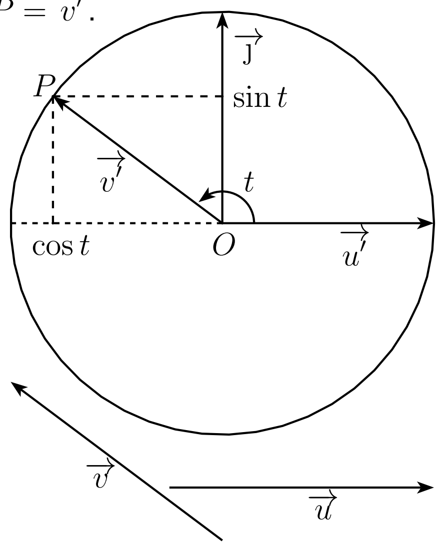
Comme $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, on peut s'intéresser au vecteur $\overrightarrow{u'}=\dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$:

comme $\dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}>0$, $\overrightarrow{u'}$ a le même sens que $\overrightarrow{u}$. De plus, $\left\|\overrightarrow{u'}\right\|=\left\|\dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}\right\|=\dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\|\overrightarrow{u}\|=1$.

De même, le vecteur $\overrightarrow{v'}=\dfrac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$ est de norme 1 et a le même sens que $\overrightarrow{v}$.

Soit $\overrightarrow{\jmath}$ un vecteur de norme 1 orthogonal à $\overrightarrow{u'}$, soit O un point du plan F ; alors $\left(O;\overrightarrow{u'},\overrightarrow{\jmath}\right)$ est un repère orthonormé du plan F.

Soit P l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{v'}$, de sorte que $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{v'}$.



$OP=\left\|\overrightarrow{v'}\right\|=1$, donc P est un point du cercle trigonométrique.

Ainsi, dans le repère $\left(O;\overrightarrow{u'},\overrightarrow{\jmath}\right)$, $P(\cos t;\sin t)$ où t est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u'};\overrightarrow{v'}\right)$. Or $\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{OP}$, donc $\overrightarrow{v'}(\cos t;\sin t)$.

Comme $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ ont le même sens que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\left(\overrightarrow{u'};\overrightarrow{v'}\right)=t$.

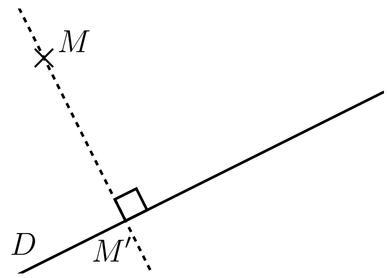
Dans $\left(O;\overrightarrow{u'},\overrightarrow{\jmath}\right)$, $\overrightarrow{u'}(1;0)$, donc $\overrightarrow{u'}\cdot\overrightarrow{v'}=1\cos t+0\sin t=\cos t$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{v'}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\left(\|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{u'}\right)\cdot\left(\|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{v'}\right)=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{u'}\cdot\overrightarrow{v'}\\&=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos t=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}).\end{aligned}$$

1.7 Projeté orthogonal

Il ne faut pas confondre la notion de *projeté orthogonal d'un point* avec celle de *projeté orthogonal d'un vecteur*.



Définition :
On appelle *projeté orthogonal* d'un point M sur une droite D, le point M' intersection de D avec la perpendiculaire à D passant par M.

Définition :
On appelle *projeté orthogonal* d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ sur un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$, l'unique vecteur $\overrightarrow{v'}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v'}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

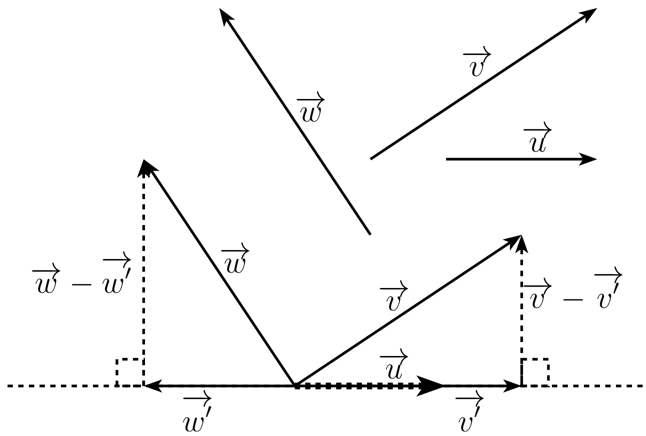


Illustration :
On a représenté ci-contre trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
$\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$.
$\overrightarrow{w'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{w}$ sur $\overrightarrow{u}$.

Propriété : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur. Si $\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v'}$.

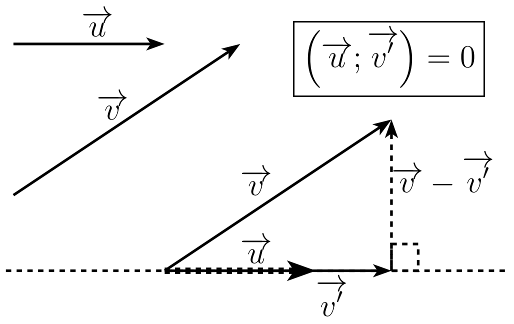
Preuve : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v'}\right)=0$ car $\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$.

Donc $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v'}$.

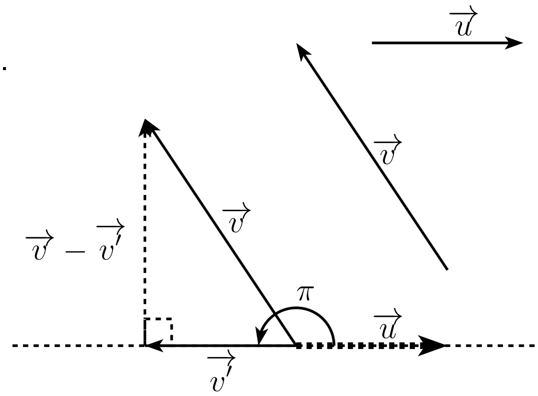
Propriété : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur. Soit $\overrightarrow{v'}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$. • Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\\|\overrightarrow{u}\\|\left\\|\overrightarrow{v'}\right\\|$. • Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont de sens contraires alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\\|\overrightarrow{u}\\|\left\\|\overrightarrow{v'}\right\\|$.

Preuve :

- D'après la propriété précédente, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v'}$. Donc $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\left\|\overrightarrow{v'}\right\|\cos\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v'}\right)$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont de même sens, alors $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v'}\right)=0\ [2\pi]$.
  Donc $\cos\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v'}\right)=1$, donc $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\left\|\overrightarrow{v'}\right\|$.



- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont de sens contraires, alors $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v'}\right)=\pi\ [2\pi]$.
  Donc $\cos\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v'}\right)=-1$, donc $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\|\overrightarrow{u}\|\left\|\overrightarrow{v'}\right\|$.



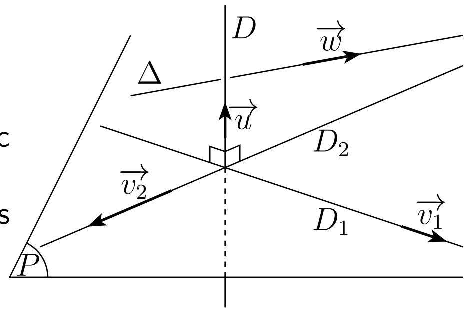
1.8 Application

Le produit scalaire et la notion de vecteurs directeurs permettent de démontrer le théorème bien connu :

Théorème : Si une droite D est perpendiculaire à deux droites sécantes D_1 et D_2 d'un plan P alors elle est orthogonale à toute droite Δ de P.

Preuve :

- Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs directeurs de D, D_1 et D_2.
  Comme $D\perp D_1$ et $D\perp D_2$, $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u}=0$ et $\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{u}=0$.
- Soit Δ une droite de P, soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de Δ.
  D_1, D_2 et Δ sont dans P, donc elles sont coplanaires, donc leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
  Or comme D_1 et D_2 sont sécantes, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires.
  Donc il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$.



- Donc $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{u}=a\times 0+b\times 0=0$.
  $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ sont donc orthogonaux, ainsi Δ et D sont orthogonales.

Définition : Dire qu'une droite D est perpendiculaire à un plan P signifie qu'elle est orthogonale à toute droite de P.

2 Équations cartésiennes de plans

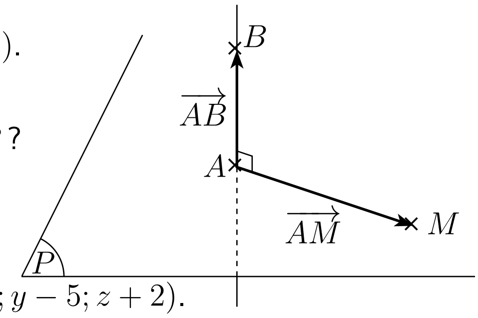
2.1 Plan perpendiculaire

Exemple :

Enoncé : Dans un repère orthonormé, on a $A(-1;5;-2)$ et $B(5;1;0)$.
Soit P le plan perpendiculaire à (AB) passant par A.

(a) Soit $M(x;y;z)$. A quelle condition sur x, y, z, M est-il sur P ?

(b) Les points $C(2;2;2)$ et $D(1;7;-4)$ sont-ils sur P ?



Solution :

(a) $\overrightarrow{AB}(5-(-1);1-5;0-(-2))$, $\overrightarrow{AB}(6;-4;2)$ et $\overrightarrow{AM}(x+1;y-5;z+2)$.

$$M \in P \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$$
$$\iff 6(x+1)-4(y-5)+2(z+2)=0 \qquad \iff 3(x+1)-2(y-5)+z+2=0$$
$$\iff 3x+3-2y+10+z+2=0 \qquad \iff 3x-2y+z+15=0.$$

(b) En remplaçant dans le membre de gauche x, y, z par les coordonnées de C,
on obtient $3\times2-2\times2+2+15=19\neq0$ donc $C\notin P$.

En remplaçant x, y, z par les coordonnées de D, on obtient $3\times1-2\times7-4+15=0$ donc $D\in P$.

Remarques : $3x-2y+z+15=0$ s'appelle une équation cartésienne de P.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'appelle un vecteur normal de P.

Définition : On appelle vecteur normal d'un plan P tout vecteur non nul orthogonal à P.

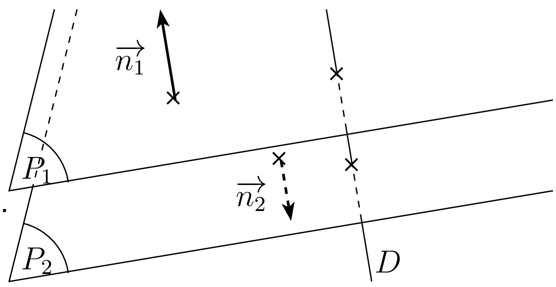
Remarque : Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal d'un plan P
alors les vecteurs normaux de P sont les vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{u}$.

Propriété : L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, soient $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)\neq\overrightarrow{0}$ et $A(a;b;c)$.

- Alors le plan passant par A avec pour vecteur normal $\overrightarrow{u}$ a pour équation cartésienne $\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$ ou encore $\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha a+\beta b+\gamma c$.
- Réciproquement, soit $\delta\in\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Propriété : Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils possèdent des vecteurs normaux colinéaires.

Preuve : •Soit P_1 un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$,
soit P_2 un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$.
Soit D une droite ayant $\overrightarrow{n_1}$ pour vecteur directeur ;
alors $D\perp P_1$.
•Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires, alors
$\overrightarrow{n_2}$ est aussi un vecteur directeur de D, donc $D\perp P_2$.
Or deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles (au sens large), donc $P_1//P_2$.
•Réciproquement : $P_1//P_2\implies D\perp P_2\implies\overrightarrow{n_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{n_2}$.



Exemple : L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on considère les plans donnés par leurs équations, R : $\sqrt{2}x-2y+\sqrt{3}z+4=0$ et S : $-2x+\sqrt{8}y-\sqrt{6}z-4=0$.
Démontrer que R et S sont strictement parallèles.

3

2.2 Plan médiateur

Théorème : Soient A et B deux points distincts. Alors
l'ensemble des points équidistants de A et B est le plan orthogonal à (AB) passant par le mileu de $[AB]$.

Preuve : Soient A et B deux points distincts, et I le milieu de $[AB]$. Soit M un point.

(a) Démontrer que $AM^2=AI^2+2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IM}+IM^2$.

(b) Démontrer que $BM^2=AI^2-2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IM}+IM^2$.

(c) En déduire que $AM=BM\iff\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IM}=0$.

(d) Conclure.

4

Définition : Si A et B sont deux points distincts alors
on appelle "plan médiateur" du segment $[AB]$ le plan qui coupe perpendiculairement $[AB]$ en son milieu.
Le plan médiateur de $[AB]$ est aussi l'ensemble des points équidistants des extrémités A et B.

2.3 Plans définis par trois points

Exemple : Dans un repère orthonormé, soient les points $A(3;2,1)$, $B(1;-2;3)$ et $C(-1;0;1)$.

(a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

(b) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ orthogonal à $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

(c) En déduire une équation du plan (ABC). **5**

3 Positions relatives de droites et de plans

3.1 Rappel Soient D une droite et P un plan.

Nombre de points communs	0	1	plus d'un
Position	D strictement parallèle à P	D coupe P	D incluse dans P

Exemple : Dans un repère orthonormé, on a $P : x + 2y + z = 1$.

$$D_1 \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda + 3 \end{cases} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \qquad D_2 \begin{cases} x = -t + 4 \\ y = t - 4 \\ z = t - 1 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad D_3 \begin{cases} x = 2s \\ y = -2s \\ z = 2s + 1 \end{cases} \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

Déterminer la position de P par rapport à D_1, D_2 et D_3. Préciser les points d'intersection. **6**

Propriété : Soit D une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et P un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
Alors D coupe P si et seulement si $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} \neq 0$.

Preuve : $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur de P.
Or $D//P$ ou $D \subset P \iff \overrightarrow{u}$ est un vecteur de $P \iff \overrightarrow{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
Donc D coupe $P \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$.

3.2 Intersections de plans

La propriété suivante vient compléter celle du paragraphe 2.1.

Propriété : Soient P_1 et P_2 deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
- Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires et $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ alors P_1 et P_2 sont confondus.
- Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ alors P_1 et P_2 sont strictement parallèles.
- Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires alors P_1 et P_2 se coupent suivant une droite.

Exercice :

Enoncé :

Dans un repère orthonormé, on a $P_1 : x - y + 2z = 3$ et $P_2 : x - 2z = 4$.

(a) Prouver que P_1 et P_2 sont sécants.

(b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $D = P_1 \cap P_2$.

(c) Etudier la position de P_1 et P_2 par rapport à $P_3 : -2x + 2y - 4z = 3$.

Solution :

(a) P_1 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1;-1;2)$, P_2 a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1;0;-2)$.
$1 \times 0 \neq 1 \times (-1)$ donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc P_1 et P_2 sont sécants.

(b)
- Première méthode : on se ramène à ce qu'on sait faire.
  Trouvons deux points A et B communs à P_1 et P_2.
  Choisissons une cote nulle pour A alors dans l'équation de P_2 : $x - 2 \times 0 = 4$ donc $x = 4$.
  Remplaçons dans l'équation de P_1 : $4 - y + 2 \times 0 = 3$ donc $y = 1$. $A(4;1;0)$.
  Choisissons une abscisse nulle pour B alors dans P_2 : $0 - 2 \times z = 4$ donc $z = -2$.
  Remplaçons dans P_1 : $0 - y + 2 \times (-2) = 3$ donc $y = -7$. $B(0;-7;-2)$.

$D=(AB)$, donc un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}(0-4;-7-1;-2-0)$, $\overrightarrow{AB}(-4;-8;-2)$.

De plus D passe par $A(4;1;0)$, donc $D\begin{cases} x=-4t+4 \\ y=-8t+1 \\ z=-2t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

- Seconde méthode : plus directe.
  L'équation de P_2 permet d'exprimer facilement x en fonction de z, on choisit donc $z=t$, on obtient $x-2t=4$ d'où $x=2t+4$.
  Puis en remplaçant dans l'équation de P_1 : $2t+4-y+2t=3$, d'où $y=4t+1$.
  Ainsi, $D\begin{cases} x=2t+4 \\ y=4t+1 \\ z=t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.
  Remarques : - il n'est pas surprenant d'obtenir une autre représentation paramétrique,
  - la relation entre les paramètres des deux représentations est un facteur -2.

(c) **7**

3.3 Plans orthogonaux

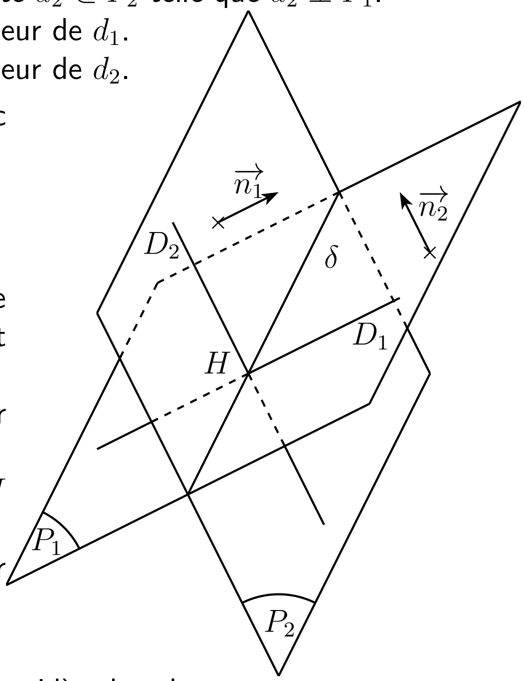
Propriété : Soient P_1 et P_2 deux plans.
S'il existe une droite $d_1\subset P_1$ telle que $d_1\perp P_2$ alors il existe une droite $d_2\subset P_2$ telle que $d_2\perp P_1$.

Preuve : Soient P_1 et P_2 deux plans. Supposons qu'il existe une droite $d_1\subset P_1$ telle que $d_1\perp P_2$.
- P_1 et P_2 ne sont pas confondus car sinon toute droite d_1 de P_1 serait incluse dans P_2.
  P_1 et P_2 ne sont pas strictement parallèles car ils ont en commun le point H intersection de d_1 avec P_2.
  Donc P_1 et P_2 se coupent suivant une droite δ, qui passe par H.
- $d_1\perp P_2$ et $\delta\subset P_2$ donc d_1 est orthogonale à δ. Or δ et d_1 sont coplanaires puisqu'elles sont incluses dans P_1, donc d_1 et δ sont deux droites sécantes de P_1.
- Dans le plan P_2, soit d_2 la perpendiculaire à δ en H. $d_1\perp P_2$ et $d_2\subset P_2$ donc d_1 et d_2 sont orthogonales.
  Or d_1 et d_2 ont en commun le point H, donc $d_1\perp d_2$.
  Or $\delta\perp d_2$, donc d_2 est perpendiculaire à deux droites sécantes de P_1, donc $d_2\perp P_1$.

Définition :
Dire que deux plans sont perpendiculaires signifie que l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Théorème : Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Preuve :
- Soient P_1 et P_2 deux plans orthogonaux. D'après la définition et la propriété précédentes, il existe une droite $d_1\subset P_1$ telle que $d_1\perp P_2$, et il existe une droite $d_2\subset P_2$ telle que $d_2\perp P_1$.
  Soit $\overrightarrow{n_2}$ un vecteur normal de P_2, $\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur directeur de d_1.
  Soit $\overrightarrow{n_1}$ un vecteur normal de P_1, $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur directeur de d_2.
  $d_2\perp P_1$ et $d_1\subset P_1$, donc d_2 et d_1 sont orthogonales donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.



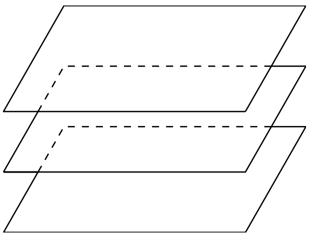
- Réciproquement, soient P_1 et P_2 deux plans dont des vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.
  Alors P_1 et P_2 ne sont ni parallèles ni confondus puisque leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires. Donc P_1 et P_2 se coupent suivant une droite δ.
  Soit $H\in\delta$. Soit d_1 la droite passant par H avec pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_2}$.
  $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ donc d_1 ne coupe pas P_1, or d_1 et P_1 ont H pour point commun donc $d_1\subset P_1$.
  Comme d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_2}$ qui est un vecteur normal de P_2, $d_1\perp P_2$.
  Or $d_1\subset P_1$, donc $P_1\perp P_2$.

Exemple : L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère les plans :
$P:2x+y-z-5=0$; $Q:-x+2y-z=0$; $R:2x-y+3z-7=0$.
Déterminer ceux qui sont orthogonaux. **8**

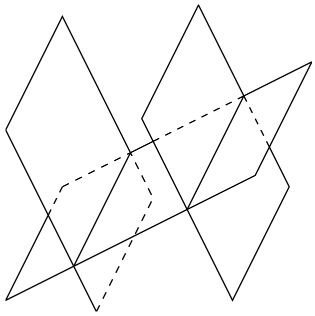
3.4 Intersection de trois plans

Propriété : L'intersection de trois plans est :
soit l'ensemble vide, soit un point, soit une droite, soit un plan.

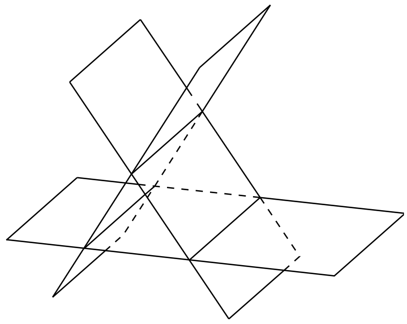
Les cas où, parmi les trois plans, deux sont confondus, se ramènent à l'intersection de deux plans.
Les figures ci-dessous présentent les autres cas.



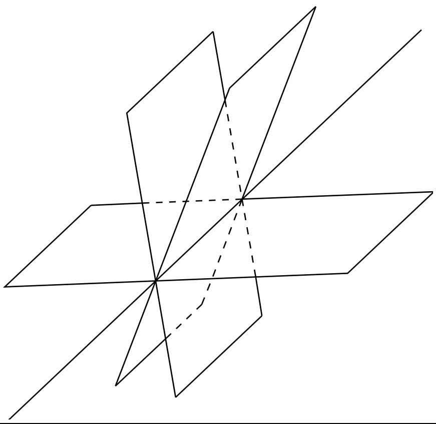
Trois plans strictement parallèles.



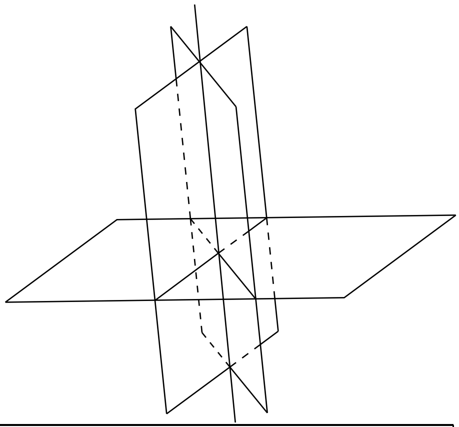
Deux plans strictement parallèles coupés par le troisième.



Les plans se coupent deux à deux suivant des droites strictement parallèles.



Deux plans se coupent suivant une droite incluse dans le troisième : les trois plans se coupent suivant une même droite.



Deux plans se coupent suivant une droite qui coupe le troisième : les trois plans se coupent en un point.

Propriété : Les solutions d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues sont les coordonnées des points communs aux trois plans définis par les équations du système.

Exemple :

On s'intéresse au système $S \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-2z=1 \\ 2x+4y+5z=5 \end{cases}$, ainsi qu'aux plans définis par ces équations : $P_1 : x+y+z=2$, $P_2 : x-y-2z=1$ et $P_3 : 2x+4y+5z=5$.

(a) Démontrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

(b) Etudier la position de Δ par rapport à P_3.

(c) En déduire $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ ainsi que le nombre de solutions de S. **9**

Appendice

Lorsque deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, le programme ci-contre calcule les coordonnées d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors le résultat sera nul.
Ce programme peut s'avérer utile par exemple pour trouver un vecteur normal à un plan défini par trois points.
Il est toutefois préférable dans la mesure du possible de trouver "à la main" un tel vecteur.
Le programme ci-contre s'appuie sur la notion hors-programme de produit vectoriel.

TI	Casio
`Input "X U",A`	`"X U"?→A`
`Input "Y U",B`	`"Y U"?→B`
`Input "Z U",C`	`"Z U"?→C`
`Input "X V",D`	`"X V"?→D`
`Input "Y V",E`	`"Y V"?→E`
`Input "Z V",F`	`"Z V"?→F`
`Disp B×F-C×E`	`B×F-C×E◢`
`Disp C×D-A×F`	`C×D-A×F◢`
`Disp A×E-B×D`	`A×E-B×D◢`