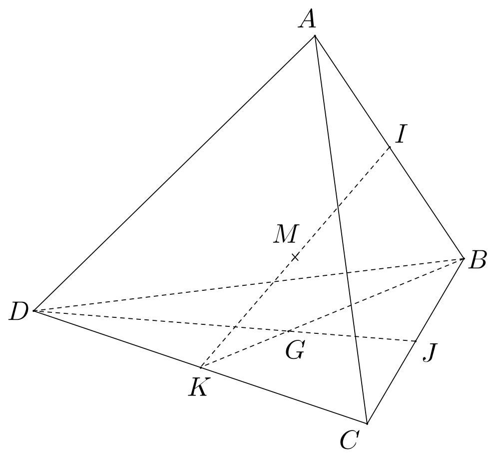
Exercices sur les vecteurs 1

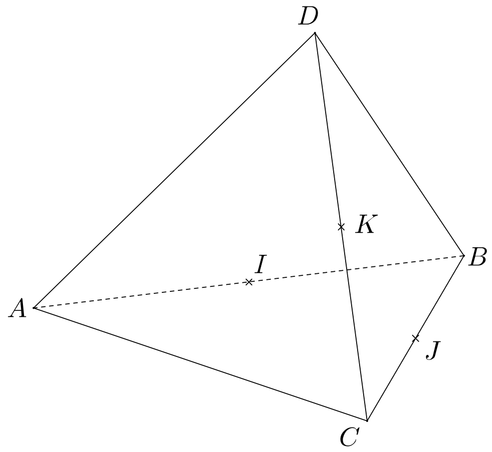
Exercice I :
$ABCD$ est un tétraèdre. On considère les milieux I de $[AB]$, J de $[BC]$, K de $[CD]$ et M de $[IK]$. G est l'intersection des segments $[BK]$ et $[DJ]$.

1. (a) Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{KG} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{DC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
   (c) En déduire que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{IK}$ puis $\overrightarrow{IM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.
3. Démontrer que les points A, M et G sont alignés.



Exercice II :
$ABCD$ est un tétraèdre ; on considère les milieux I de $[AB]$, J de $[BC]$ et K de $[CD]$.

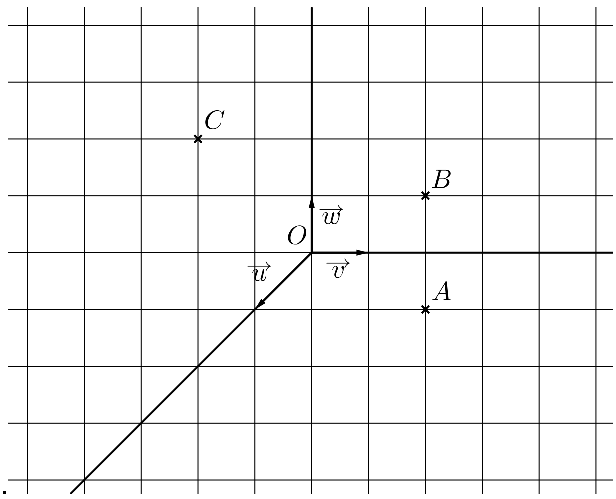
1. (a) Exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{IK}$.
   (b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IK}$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
2. (a) Exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$.
   (b) En déduire les coordonnées des points I, J et K dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.



Exercice III :

L'espace est muni du repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

1. Déterminer les coordonnées de :
   - A sachant que son abscisse est 3,
   - B sachant que son ordonnée est 1,
   - C sachant que sa cote est 3.



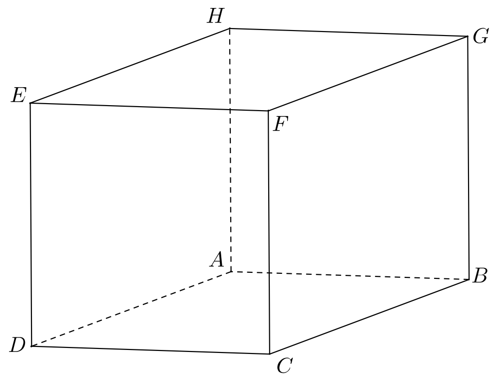
2. Placer $D(-1; -2; -1)$, $E(2; 1; -1)$ et $F(2; 4; 3)$.

Exercice IV :
L'espace est rapporté à un repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Les parties 1, 2, 3 sont indépendantes.

1. Soient les points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 6; -3)$, $C(-1; -2; -3)$ et $D(2; -8; 6)$.
   Démontrer que $(AB)//(CD)$.

2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(3;-2;0)$, $\overrightarrow{v}(4;0;3)$ et $\overrightarrow{w}(7;-6;-3)$.
   (a) Existe-t-il deux réels α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$?
   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont-ils coplanaires ?
3. Soient les points $A(2;2;1)$, $B(3;1;2)$, $C(1;5;3)$ et $D(3;5;8)$.
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   (b) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
   (c) Démontrer qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
   (d) En déduire que $D \in (ABC)$.

Exercice V :



$ABCDEFGH$ est un cube.
Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont coplanaires.

(a) $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CH}$. (b) $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EF}$.

(c) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$. (d) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{FG}$.

(e) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CD}$. (f) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

Exercice VI :
L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$.
Soient les droites définies par les systèmes d'équations paramétriques :

$$D_1\begin{cases}x=\lambda+1\\y=-\lambda\\z=\lambda+3\end{cases}\text{ où } \lambda\in\mathbb{R}\quad D_2\begin{cases}x=-t+4\\y=t-4\\z=t-1\end{cases}\text{ où } t\in\mathbb{R}\quad D_3\begin{cases}x=2s\\y=-2s\\z=2s+1\end{cases}\text{ où } s\in\mathbb{R}\quad D_4\begin{cases}x=t+2\\y=-t-2\\z=-t+1\end{cases}\text{ où } t\in\mathbb{R}$$

(a) Parmi ces droites, trouver deux droites strictement parallèles, et deux droites confondues.
(b) Déterminer la position de D_1 par rapport à D_2.
(c) Déterminer la position de D_3 par rapport à D_4.

Exercice VII :
L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$.

1. Soient les point $A(1;1;2)$, $B(-1;2;3)$ et $C(-2;1;5)$.
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   (b) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
   (c) Donner un système d'équations paramétriques du plan (ABC).
2. Soit P le plan représenté par le système $\begin{cases}x=5-s\\y=-4+s-t\\z=3+2t\end{cases}$ où $s,t\in\mathbb{R}$.
   (a) Donner un point D et deux vecteurs directeurs de P qu'on nommera $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   (b) Le point D est-il sur (ABC) ?
   (c) Parmi les points A, B et C lesquels se trouvent sur P ?
   (d) Démontrer que P coupe (ABC) suivant une droite dont on donnera une représentation paramétrique.