Géométrie dans l'espace, vecteurs.

1 Vecteurs de l'espace

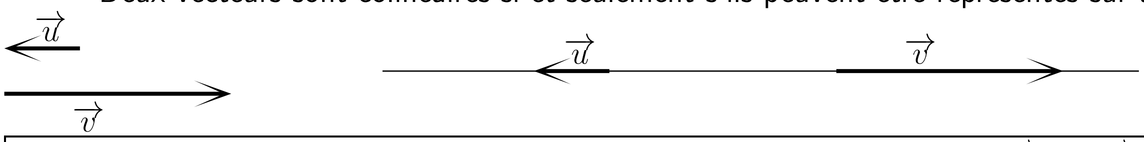
1.1 Vecteurs colinéaires

Définition :
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque : Le vecteur $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété : Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

Remarque :
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement s'ils peuvent être représentés sur une même droite.



Propriété : Trois points L, M et N définissent un plan si et seulement si $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{LN}$ non colinéaires.

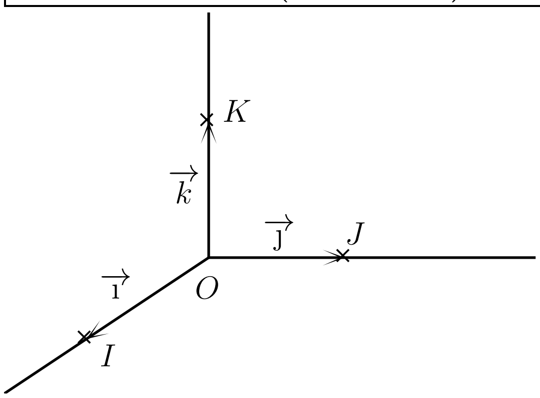
Preuve : $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{LN}$ non colinéaires $\Longleftrightarrow$ L, M, N ne sont pas alignés.

1.2 Coordonnées

1.2.1 Repère de l'espace

Définitions :
- Si $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ sont trois vecteurs, alors dire que $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de l'espace signifie que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(a; b; c)$ tel que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$.
- Si O est un point alors dire que $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère de l'espace signifie que $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de l'espace.

Théorème : Soient trois points O, I, J non alignés et K un point n'appartenant pas au plan (OIJ).
Soient les vecteurs : $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}$.
Alors $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère de l'espace, et $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de l'espace.



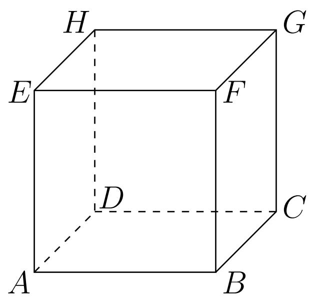
Exemple : On considère un cube $ABCDEFGH$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(a) $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère de l'espace

(b) $\left(A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère de l'espace

(c) $\left(B; \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}\right)$ est un repère de l'espace

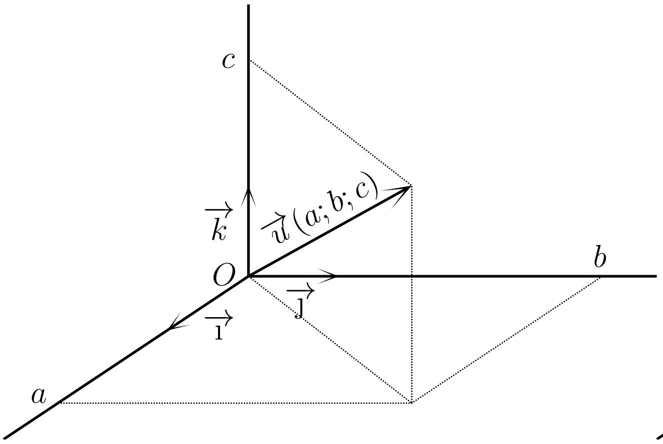
(d) $\left(A; \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{EC}\right)$ est un repère de l'espace

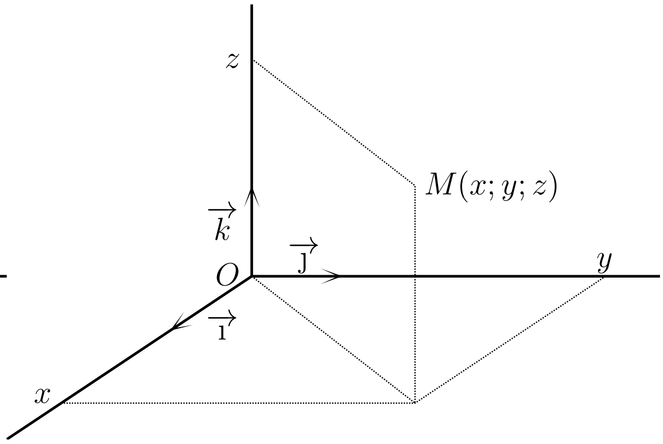


1.2.2 Coordonnées d'un point, d'un vecteur

Dans ce qui suit, l'espace est rapporté à un repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

Définitions : Soient M un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
- Dire que $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ signifie que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$.
- Dire que $M(x; y; z)$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$.
- c est appelé la cote du vecteur $\overrightarrow{u}$; z est appelé la cote du point M.





Remarque : Dans un repère donné, les coordonnées d'un vecteur sont uniques, ainsi que celles d'un point.

1.2.3 Calculs sur les coordonnées

Les règles de calcul des coordonnées dans le plan s'étendent à l'espace.

Propriété : Soit un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ de l'espace.
- Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(x + x'; y + y'; z + z')$ $\quad \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}(x - x'; y - y'; z - z')$ $\quad \lambda\overrightarrow{u}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.
- Si deux points A et B ont pour coordonnées $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Si de plus C a pour coordonnées $C(x_C, y_C, z_C)$ alors le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées : $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

1.2.4 Colinéarité

Propriété : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Propriété : Si $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ et $\overrightarrow{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\Longleftrightarrow a\beta = \alpha b$ et $b\gamma = \beta c$ et $a\gamma = \alpha c$.

Remarques :
- Pour prouver que deux vecteurs sont colinéaires, il est en général plus simple de trouver le coefficient de proportionalité.
- Pour prouver que deux vecteurs ne sont pas colinéaires, il suffit de trouver un produit en croix qui ne "marche" pas.

Exemples :

(a) $\overrightarrow{u}(2; 0; 3)$ et $\overrightarrow{v}(1; 0; 2)$ sont-ils colinéaires ?

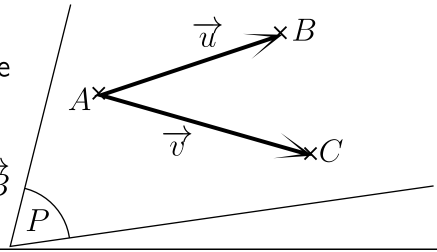
(b) $\overrightarrow{u}(1,2; 1; -0,8)$ et $\overrightarrow{v}(-3; -2,5; 2)$ sont-ils colinéaires ?

1.3 Vecteurs coplanaires

Définition :
Des vecteurs sont dits "coplanaires" si et seulement s'ils peuvent être représentés dans un même plan.

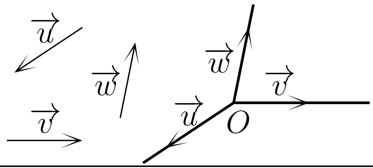
Propriété : Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Preuve : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, soit A un point.
Soient B l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, et C l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
Il existe un plan P passant par A, B et C.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ peuvent être représentés sur P puisque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.



Propriété : Soient un point O et trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
Alors $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un repère de l'espace $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ non coplanaires.

Preuve : Admise. La figure ci-contre illustre cette propriété.

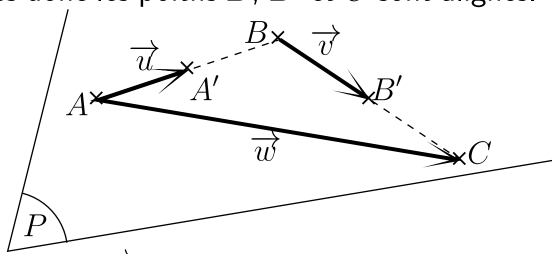


Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.
S'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Preuve : Soit A un point.
Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$,
soit B l'image de A par la translation de vecteur $a\overrightarrow{u}$.
$\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{AA'}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires donc les poitns A, A' et B sont alignés.
Soit B' l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$,
soit C l'image de B par la translation de vecteur $b\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{BC} = b\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{BB'}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont colinéaires donc les poitns B, B' et C sont alignés.
Il existe un plan P passant par A, B et C.

Or $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,
donc on peut représenter $\overrightarrow{w}$ sur P.

Comme les poitns A, A', B sont alignés, $A' \in P$;
et comme les poitns B, B', C sont alignés, $B' \in P$.



Donc on peut représenter $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sur P puisque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BB'}$.
Il découle de cette propriété un cas particulier important :

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs dont deux sont colinéaires.
Alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Preuve : Supposons par exemple que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient colinéaires.
Supposons par exemple que $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{v}$ où $k \in \mathbb{R}$.
Alors $\overrightarrow{w} = 0\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$, donc d'après la propriété précédente, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs coplanaires, tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires.
Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Preuve : Soit P un plan sur lequel $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ peuvent être représentés.
Soit $O \in P$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère du plan P.
Soient $(a; b)$ les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans ce repère, on a : $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Remarque : Dans la propriété précédente, l'hypothèse "$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires" est indispensable.
Supposons par exemple, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{w}$ non colinéaire à $\overrightarrow{u}$.
Alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires car ils comportent deux vecteurs colinéaires.
Mais pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et donc différent de $\overrightarrow{w}$.

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points. Alors :
A, B, C et D coplanaires $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ coplanaires $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ coplanaires.

2 Droites

2.1 Vecteur directeur

Définition : On appelle "vecteur directeur" d'une droite D tout vecteur ayant la direction de D.

Conséquences :
- Un vecteur directeur est non nul.
- Les vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires entre eux.

Exemple :
- Si A et B sont deux points distincts alors les vecteurs directeurs de la droite (AB) sont les vecteurs $k\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}^*$.
- Soit M un point. $M \in (AB) \iff ABM$ alignés $\iff$ il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{AB}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ est un autre vecteur directeur de (AB), alors il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$. Donc $M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = s \times \frac{1}{k}\overrightarrow{u} = \frac{s}{k}\overrightarrow{u}$.
  Et en posant $t = \frac{s}{k}$, on obtient $M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Propriété : Si D est une droite passant par A avec pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$
alors D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ où $t \in \mathbb{R}$.

2.2 L'espace est muni d'un repère

Théorème : Si α, β et γ ne sont pas tous nuls alors l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \\ z = \gamma t + c \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est la droite passant par $A(a;b;c)$ avec pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha;\beta;\gamma)$.

Preuve : Par hypothèse $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.
Soit D la droite passant par $A(a;b;c)$ avec pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha;\beta;\gamma)$. Alors

$$M(x;y;z) \in D \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \iff \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\alpha \\ t\beta \\ t\gamma \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \\ z = \gamma t + c \end{cases}.$$

Définition : La représentation d'une droite D sous la forme $\begin{cases} x = \alpha t + a \\ y = \beta t + b \\ z = \gamma t + c \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$
s'appelle système d'équations paramétriques de D.

Remarque : Pour une même droite, il existe une multitude de systèmes d'équations paramétriques.
Ceux-ci dépendent du point A choisi et du vecteur $\overrightarrow{u}$ choisi.

Exemples :

(a) <u>Enoncé</u> :

Soit Δ la droite déquations $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

① Donner un vecteur directeur de Δ.

② Déterminer si les points $E(-2;10;5)$ et $F(-2;-8;-5)$ sont sur Δ.

<u>Solution</u> :

① $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.

② $\begin{cases} -2 = -2 \\ 10 = 2t \\ 5 = -1 + t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 \\ t = 6 \end{cases}$ c'est impossible donc $E(-2;10;5) \notin \Delta$.

$$\begin{cases} -2 = -2 \\ -8 = 2t \\ -5 = -1 + t \end{cases} \iff t = -4 \text{ donc } F(-2;-8;-5) \in \Delta.$$

(b) Soient les points $A(6;-2;4)$, $B(2;4;2)$, et $C(-1;3;4)$. Soit D la parallèle à (BC) passant par A.

① Donner un système d'équations paramétriques de (AB) ainsi que de D.

② Le point O est-il sur (AB) ? Est-il sur D ? **1**

2.3 Positions relatives

Points communs \ Vecteurs directeurs colinéaires	Oui	Non
Oui		
Non		

Remarque : Le paramètre t est différent pour chaque droite bien qu'il soit souvent désigné par la même lettre. Il convient de leur donner des noms différents lorsqu'on cherche les points communs à deux droites.

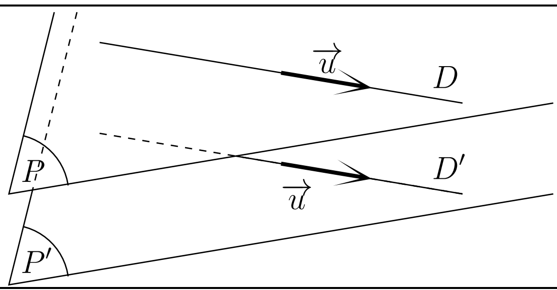
3 Plans

3.1 Vecteurs directeurs

On dira que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan P si et seulement si $\overrightarrow{u}$ peut être représenté sur P.

Propriété : Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre.

Preuve : Cela découle de la propriété suivante :
deux plans sont parallèles si et seulement si toute droite incluse dans l'un est parallèle à une droite incluse dans l'autre.



Définition :
On appelle "vecteurs directeurs" d'un plan P la donnée de deux vecteurs non colinéaires de P.

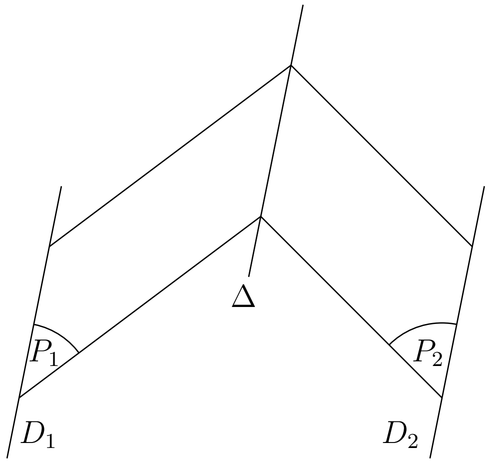
Remarque : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs de P si et seulement si $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ est une base de P.

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs directeurs d'un plan P_1,
soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs directeurs d'un plan P_2.
Alors P_1 est P_2 sont parallèles ou confondus si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont coplanaires.

Preuve :

- Supposons $P_1 // P_2$.
  Alors tout vecteur de P_2 est un vecteur de P_1, donc $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont coplanaires.
- Réciproquement, supposons $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ coplanaires. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, il existe $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{a} = c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{b} = e\overrightarrow{u} + f\overrightarrow{v}$.
  Soit $\overrightarrow{w}$ un autre vecteur de P_2. Alors $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires et $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non colinéaires.
  Donc il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$. Donc
  $\overrightarrow{w} = x(c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v}) + y(e\overrightarrow{u} + f\overrightarrow{v}) = xc\overrightarrow{u} + xd\overrightarrow{v} + ye\overrightarrow{u} + yf\overrightarrow{v} = (xc+ye)\overrightarrow{u} + (xd+yf)\overrightarrow{v}$.
  Or $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs de P_1, donc $\overrightarrow{w}$ est un vecteur de P_1.
  Ainsi, tout vecteur de P_2 est un vecteur de P_1, donc $P_1 // P_2$.

Application : preuve du théorème du toit.



Théorème : Si deux plans sécants P_1 et P_2 contiennent deux droites parallèles D_1 et D_2, alors la droite d'intersection de P_1 et P_2 est parallèle à D_1 et D_2.

Preuve :

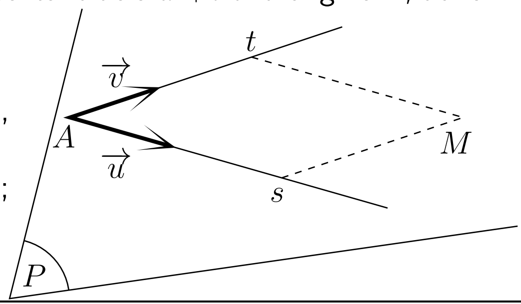
- Soient P_1 et P_2 deux plans se coupant suivant une droite Δ.
  On suppose que D_1 est une droite de P_1, que D_2 est une droite de P_2, et que $D_1//D_2$.
  D_1 et D_2 admettent un même vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
  Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de Δ. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs à la fois de P_1 et de P_2.
- Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne soient pas colinéaires.
  Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ seraient des vecteurs directeurs à la fois de P_1 et de P_2, donc P_1 et P_2 seraient parallèles ou confondus, ce qui est contradictoire avec le fait P_1 et P_2 sont sécants.
  Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires, d'où : $D_1//\Delta//D_2$.

3.2 Equations paramétriques

Propriété : Soit P un plan passant par un point A avec pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors $M \in P$ si et seulement s'il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$.

Preuve :

- Soient $s, t \in \mathbb{R}$.
  Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ peuvent être représentés sur P, le vecteur $s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ peut être représenté sur P.
  Si $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ alors M est l'extrémité du représentant de $s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ d'origine A, donc $M \in P$.



- Réciproquement, supposons que $M \in P$.
  Alors comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère du plan P.
  Soient (s, t) les coordonnées de M dans ce repère ; par définition, on a $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$.

Théorème et définition : Soient $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ et $\overrightarrow{v}(\alpha; \beta; \gamma)$. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires alors le plan P passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ avec pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\begin{cases} x = x_0 + a\,s + \alpha\,t \\ y = y_0 + b\,s + \beta\,t \\ z = z_0 + c\,s + \gamma\,t \end{cases}$ où $s, t \in \mathbb{R}$. Ce système s'appelle représentation paramétrique de P.

Preuve : $M \in P \iff$ il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$

$\iff$ il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} x - x_0 = s\,a + t\,\alpha \\ y - y_0 = s\,b + t\,\beta \\ z - z_0 = s\,c + t\,\gamma \end{cases}$ $\iff$ il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} x = x_0 + a\,s + \alpha\,t \\ y = y_0 + b\,s + \beta\,t \\ z = z_0 + c\,s + \gamma\,t \end{cases}$.

Remarque : Pour un même plan, il existe une multitude de représentations paramétriques.