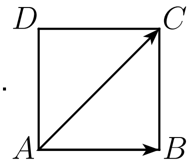
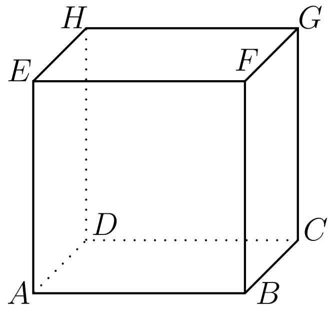
Exercices sur le produit scalaire

Exercice I :
On considère un carré $ABCD$ de côté a.
Déterminer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$



Pour les deux exercices suivants, on donne le cube $ABCDEFGH$ d'arête a :



Exercice II :
Calculer, dans chaque cas, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ en fonction de l'arête a :

(a) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$. (b) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CH}$. (c) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{DG}$. (d) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CH}$.

Exercice III :
On désigne par I, J et K les milieux de $[BF]$, $[FG]$ et $[GH]$.

(a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC}$.

(b) Evaluer $\cos \widehat{IEK}$ après avoir calculé EI, EK et $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EK}$.

Exercice IV :

(a) Montrer que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a : $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

(b) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls.
Etablir l'équivalence : $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires.

Exercice V :
Dans un repère orthonormé, on donne $A(3;4;-2)$, $B(1;6;0)$ et $C(-2;2;1)$.
Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice VI :
Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal, dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$:

(a) $A(3;-1;2)$ et $\overrightarrow{n}(1;0;-4)$

(b) $A(1;-1;0)$ et $\overrightarrow{n}(1;1;-2)$

(c) $A(-2;1;2)$ et $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$

(d) $A(3;4;5)$ et $\overrightarrow{n}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$

Exercice VII :
L'espace est rapporté à un repère orthonormé. Trouver un point du plan et un vecteur normal :

(a) $3x - 5y + z - 1 = 0$ (b) $x = y$ (c) $3z - x - 3 = 0$ (d) $y = -2x + 1$

Exercice VIII :
L'espace est rapporté à un repère orthonormé.
Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du plan P :

(a) P est le plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(-1;3;1)$ et $B(0;5;-3)$.

(b) P est le plan orthogonal à la droite (AC) passant par l'orthocentre du triangle ABC avec $A(3;0;4)$, $B(-1;1;1)$ et $C(2;0;0)$.

Exercice IX :

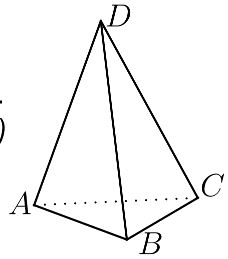
On s'intéresse au système $S\begin{cases}3y+z=6\\2x-y+z=2\\3x-3y+z=4\end{cases}$, ainsi qu'aux plans définis par ces équations : $P_1 : 3y+z=6$, $P_2 : 2x-y+z=2$ et $P_3 : 3x-3y+z=4$.

(a) Démontrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

(b) Etudier la position de Δ par rapport à P_3.

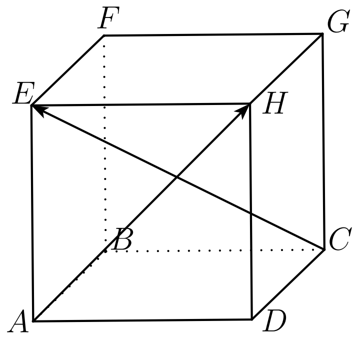
(c) En déduire $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ ainsi que le nombre de solutions de S.

Exercice X :



On considère un tétraèdre $ABCD$ régulier d'arête a. (*chaque face est un triangle équilatéral de côté* a) Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

Exercice XI :



$ABCDEFGH$ est un cube dont les sommets sont disposés comme sur la figure ci-dessous.
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice XII :
Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ on donne $A(1;2;3)$ et $\overrightarrow{n}(1;-3;1)$. Trouver une équation du plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.

Exercice XIII :
On donne les équations cartésiennes de deux plans : $P : x-4y+7=0$ $Q : x+2y-z+1=0$

(a) Montrer que ces plans sont sécants. On note d leur droite d'intersection.

(b) Déterminer un vecteur directeur de d.

Exercice XIV :
Déterminer la forme d'une équation d'un plan parallèle au plan (xOy).

Exercice XV :
Déterminer la forme d'une équation d'un plan perpendiculaire au plan (xOy).

Exercice XVI :
Soit $P : 2x-z=0$ et $d : \begin{cases}x=t-1\\y=-3t\\z=2\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$. Déterminer l'intersection de P avec d.

Exercice XVII :
Soient $P : 2x+y-z-2=0$ et $Q : x+3y+7z-11=0$. Démontrer que P et Q sont sécants, et déterminer une représentation paramétrique leur droite d'intersection.

Exercice XVIII :
Déterminer l'intersection des plans P, Q et R avec :

$P : 2x+3y-2z-2=0$, $Q : 4x-3y+z-4=0$ et $R : 2x+12y-7z-2=0$