

# Dynamique du Solide



## Objectifs du cours :

**Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans les cas suivant :**

- Mouvement de translation rectiligne
- Mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

**Pour obtenir les informations suivantes sur un mécanisme :**

- Déterminer les actions mécaniques.
- Déterminer les équations du mouvement.

<b>1. Champs d'application et hypothèses :</b>	<b>3</b>
1.1 Application :	3
1.2 Hypothèses :	3
<b>2. Notion de repère galiléen:</b>	<b>3</b>
<b>3. Equilibre dynamique d'un solide en mouvement de translation rectiligne:</b>	<b>4</b>
3.1 Hypothèses:	4
3.2 Expression du principe fondamental de la dynamique:	4
3.2.1 Expression générale:	4
3.2.2 Cas d'un solide en Translation :	5
3.2.3 Exemple 1 :	5
3.2.4 Exemple 2 :	5
<b>4. Equilibre dynamique d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe:</b>	<b>8</b>
4.1 Expression du principe fondamental de la dynamique:	8
4.1.1 Expression générale:	8
4.1.2 Expression vectorielle et scalaire:	8
4.1.3 Cas particulier d'un solide en rotation autour d'un axe passant par G:	8
4.1.4 Exercice :	9
4.1.5 Remarques:	9
4.1.6 Application : Tour à bois	11
<b>5. Moment d'inertie par rapport à un axe:</b>	<b>12</b>
5.1 définition:	12
5.2 Que représente le moment d'inertie (J) ou (I) ?	12
5.3 Théorème de Huyghens:	13
5.4 Formulaire:	14
<b>6. Méthode de résolution:</b>	<b>15</b>
<b>7. Exercices :</b>	<b>16</b>
7.1 Navette spatiale :	16
7.2 Ascenseur	16
7.3 Moto	17
7.4 Remorque:	17
7.5 Chargeur:	18
7.6 Freinage d'un véhicule automobile	19
7.7 Touret à meuler:	20
7.8 Perceuse:	20
7.9 Manège	21
7.10 Limiteur de vitesse	21

## 1. Champs d'application et hypothèses :

### 1.1 Application :

La **dynamique** est l'étude des relations entre le mouvement d'un solide (vitesse, accélération) et les actions mécaniques qui engendrent ce mouvement, agissant sur ce solide. Son principe fondamental permet de déterminer des actions mécaniques en prenant en compte les effets de l'inertie des masses en mouvement ; ce que ne permet pas le principe en statique.

Le **Principe Fondamental de la Dynamique** s'applique à toute sorte de corps modélisé comme ensemble matériel (solides, ensembles de solides, fluides...).

### 1.2 Hypotheses :

- Les systèmes matériels étudiés possèdent une masse supposée constante et concentrée en leur centre de gravité.
- Le repère absolu utilisé pour le référentiel est Galiléen.

Ce cours décrit le Principe Fondamental de la Dynamique dans les deux cas du mouvement étudié en cinématique.

- Cas des solides en mouvement de **translation rectiligne**.
- Cas des solides en mouvement de **rotation autour d'un axe fixe**.

Nous verrons que le Principe Fondamental de la Dynamique a des points communs avec son homologue en statique.

À ce titre le bilan des actions mécaniques extérieures agissant sur un système matériel préalablement isolé, fait l'objet de la même démarche de recherche.

On se rapportera également à des notions déjà vues en cinématique (vecteur position, vecteur vitesse, vecteur accélération, loi horaire du mouvement...).

## 2. Notion de repère galiléen:

Définition:

Un repère est dit galiléen si et seulement si tout corps, initialement immobile par rapport à ce repère et n'étant soumis à aucune action mécanique pendant une durée  $\Delta t$ , reste immobile pendant cette durée.

Pour la plupart des expériences terrestres et notamment en mécanique industrielle, tout repère lié à la terre est considéré comme galiléen.

Nous négligeons ainsi:

- Le mouvement de rotation de la terre autour de ses pôles.
- Le mouvement elliptique de son centre autour du soleil.
- les autres mouvements de dimension égale ou supérieure à notre galaxie et qui ne peuvent être appréciés à l'échelle humaine.

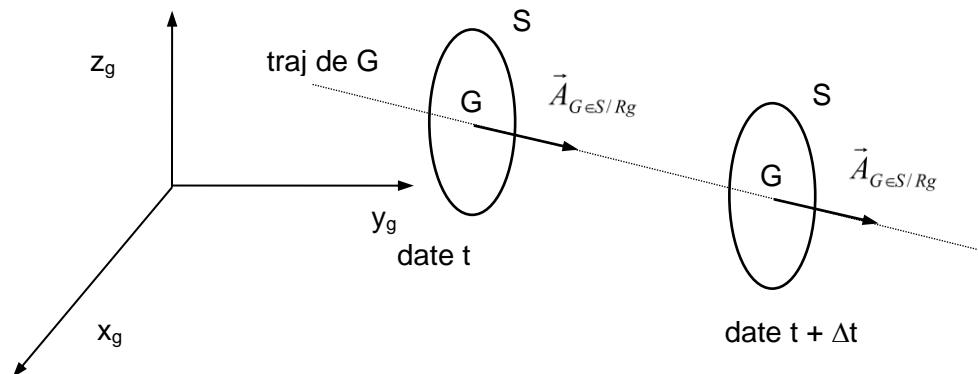
Cette approximation revient à considérer tous ces mouvements en un seul équivalent en une translation rectiligne uniforme.

### 3. Equilibre dynamique d'un solide en mouvement de translation rectiligne:

#### 3.1 Hypothèses:

Soit S un corps solide supposé indéformable, de masse m et de centre d'inertie G et Rg un repère galiléen tel que S est en mouvement de translation rectiligne par rapport à Rg.

#### 3.2 Expression du principe fondamental de la dynamique:



##### 3.2.1 Expression générale:

Soit un Solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère galiléen, alors la somme des torseurs des efforts extérieurs qui agissent sur (S) est égale au torseur dynamique de (S) par rapport au repère galiléen.

$$\sum \{T_{\bar{S}/S}\} = \{D_{S/R_g}\}$$

$\{D_{S/R_g}\}$  est le torseur dynamique. Il est composé :

- d'une résultante dynamique
- et d'un moment dynamique

Sous les hypothèses précédentes nous avons à tout instant:

$$\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{A}_{G \in S / R_g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{A}_{G \in S / R_g} \\ M_{O(m \cdot \vec{A}_{G \in S / R_g})} \end{array} \right\}_O$$

- $\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\}$  représente le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur S. ( $\|\vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S}\|$  exprimée en Newton).
- G est le centre d'inertie du solide.
- O est un **point fixe** quelconque.
- $\vec{A}_{G \in S / R_g}$  représente le vecteur accélération à la date t du centre d'inertie G du solide S (en m.s<sup>-2</sup>).
- m est la masse de S est exprimée en kg.

### 3.2.2 Cas d'un solide en Translation :

Théorème de la Résultante Dynamique – (TRD)

Dans un repère galiléen, un solide en translation de masse  $m$  soumis à des actions mécaniques, subit une accélération «  $a$  » telle que :

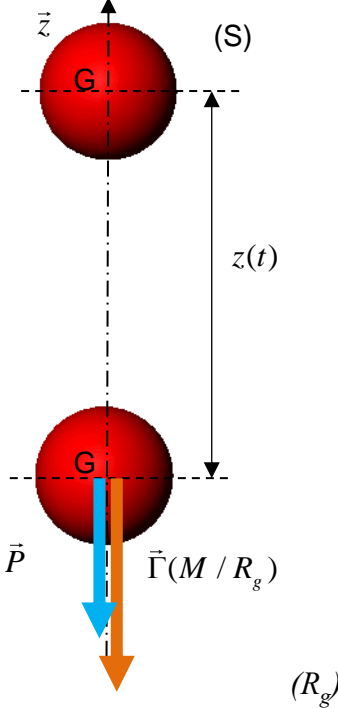
$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$N = kg \times m \cdot s^{-2}$$

Remarque importante : Dans ce cas, la somme des moments par rapport au centre d'inertie  $G$  est nulle

$$\Sigma \vec{M}_G = \vec{0}$$

### 3.2.3 Exemple 1 :

	<p>Le grand classique : accélération lors d'une chute libre... ...Un solide S de masse <math>m</math> qui tombe...</p> <p>Bilan des Forces extérieures</p> <p>→ Le Poids <span style="background-color: yellow;"><math>\vec{P} = -mg\vec{z}</math></span></p> <p>(Appelons « <math>a</math> » l'accélération de ce solide)</p> <p>Appliquons le PFD :</p> $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} = -m \cdot g \cdot \vec{z}$ <p>Donc <math>a = -g</math></p> <p>Vous le saviez déjà !</p> <p>L'<b>accélération</b> et donc la <b>vitesse</b> ainsi que la <b>durée</b> de la chute sont <b>indépendantes de la masse</b> du solide</p>
--	---

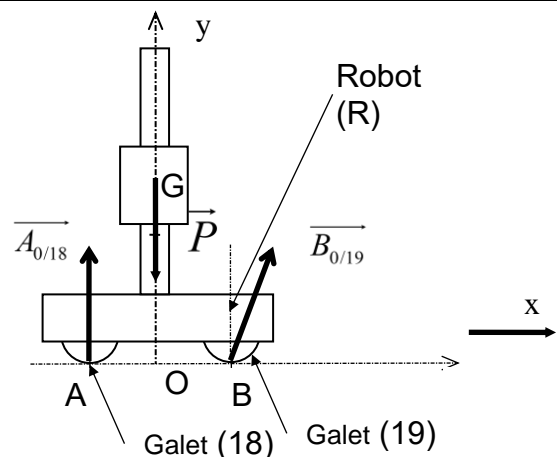
### 3.2.4 Exemple 2 :

Accélération d'un chariot automatisé...

Ce robot est en translation rectiligne uniformément accélérée d'axe  $(O, x)$ .

- Masse du robot :  $m = 2000 \text{ kg}$
- On prendra  $a_x = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- On donne  $OA = 0.2 \text{ m}$ ,  $OB = 0.3 \text{ m}$ ,  $OG = 0.6 \text{ m}$

Pour cette étude, les masses en rotation (galets) seront négligées.  
Seul le galet (19) est moteur et roule sans glisser (Adhérence) sur le sol horizontal.



On isole l'ensemble des chariots = 18 + 19 + chariot R

Bilan des AME :

Action Mécanique	Choix d'un point	Droite de moment constant	Moment propre	Sens - Intensité	Torseur
$\{T_{0/18}\}$	<b>A</b>	<b>Az</b>	$\vec{0}$	?	$\left\{ \begin{matrix} \vec{A}_{0/18} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$
$\{T_{0/19}\}$	<b>B</b>	? <b>Adhérence en B</b>	$\vec{0}$	?	$\left\{ \begin{matrix} \vec{B}_{0/19} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$
$\{T_{pes/S}\}$	<b>G</b>	<b>Gz</b>	$\vec{0}$	$\ \vec{P}\  = m.g$ 19620 N ↓	$\left\{ \begin{matrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -m.g.\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$
Action Dynamique	Choix d'un point	Droite de moment constant	Moment propre	Sens - Intensité	Torseur
$\{D_{acc/S}\}$	<b>G</b>	<b>Gx</b>	$\vec{0}$	$\ \vec{R}_{dyn}\  =  m.a_x $	$\left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{dyn} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} m.a_x.\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$

➔ Appliquer le PFD au point G : (calcul plus simple en se plaçant au B (maximum d'inconnues))

a) La résultante :

$$\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m.a_x \\ \Sigma F_y = m.a_y \\ \Sigma F_z = m.a_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + Bx = m.a_x \\ Ay + P + By = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Bx = 2000 \times 0,15 \\ Ay - 2000 \times 9,81 + By = 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Bx = 300 \\ Ay + By = 19620 \\ 0 \end{cases}$$

b) Le moment :

Les équations de la résultante ne suffisent pas elles seules pour lever toutes les inconnues, nous allons utiliser maintenant les équations du moment.

$$\Sigma \vec{M}_{G(F_{ext})} = \vec{M}_{G(R_{dyn})}$$

$$\vec{M}_{G(A_{0/18})} + \vec{M}_{G(P)} + \vec{M}_{G(B_{0/19})} = \vec{M}_{G(R_{dyn})}$$

$$(-).(OA).Ay.\vec{y} + \vec{0} + (+).(OB).By.\vec{y} + (OG).Bx.\vec{y} = \vec{0}$$

$$(-).(OA).Ay.\vec{y} + \vec{0} + (OB).(19620 - Ay).\vec{y} + (OG).Bx.\vec{y} = \vec{0}$$

$$-((OA) + (OB)).Ay + 0,3 \times 19620 + 0,6 \times 300 = 0$$

$$-0,5.Ay = -(0,3 \times 19620 + 0,6 \times 300)$$

$$Ay = \frac{-(0,3 \times 19620 + 0,6 \times 300)}{-0,5}$$

$$Ay = 12132$$

$$By = 19620 - 12132$$

$$By = 7488$$

$$\|\vec{A}_{0/18}\| = 12132\text{N}$$

$$\text{D'où } \|\vec{B}_{0/19}\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 7454,04 \text{ N}$$

Remarque :

On peut envisager une résolution graphique en suivant la méthode suivante :

- Placer en G l'action de la pesanteur et y ajouter l'opposé de la résultante dynamique (-m.a).
- Tracer le vecteur résultant.
- Le problème se ramène à un système à trois forces concourantes dont nous connaissons les méthodes graphiques de résolution

## 4. Equilibre dynamique d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe:

### 4.1 Expression du principe fondamental de la dynamique:

#### 4.1.1 Expression générale:

Nous avons à tout instant:

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{T}_{\vec{S} \rightarrow S} \\ \vec{M}_{O(\vec{S} \rightarrow S)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\vec{S} \rightarrow S} \\ \vec{M}_{O(\vec{S} \rightarrow S)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot \vec{A}_{G \in S / R_g} \\ J_{O(S, \vec{u}_g)} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \vec{u}_g \end{array} \right\}.$$

- $\left\{ \vec{T}_{\vec{S} \rightarrow S} \right\}$  représente le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur S.
- G est le centre d'inertie du solide S et O un point fixe.
- $J_{O(S, \vec{u}_g)}$  représente le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_g)$  exprimé en  $\text{kg.m}^2$  (voir en annexe les moments d'inertie des solides usuels).
- $\vec{u}_g$  est un vecteur unitaire porté par l'axe de rotation.

#### 4.1.2 Expression vectorielle et scalaire:

Deux égalités vectorielles sont issues de l'expression précédente:

**Le théorème de la résultante dynamique:**

$$\vec{R}_{\vec{S} \rightarrow S} = m \cdot \vec{A}_{G \in S / R_g} = -m \cdot r \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \vec{x} + m \cdot r \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \vec{y}$$

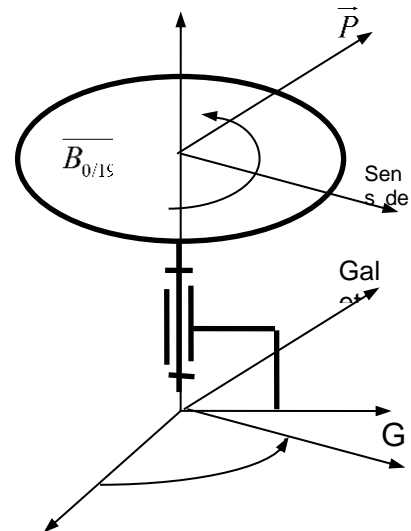
$$\vec{R}_{\vec{S} \rightarrow S} = m \cdot \vec{A}_{G \in S / R_g} = -m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \vec{x} + m \cdot r \cdot \alpha \cdot \vec{y}$$

Voir expression de l'accélération pour le mouvement de rotation.

**Le théorème du moment dynamique:**

$$\vec{M}_{O(\vec{S} \rightarrow S)} = J_{O(S, \vec{u}_g)} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \vec{u}_g$$

$$\vec{M}_{O(\vec{S} \rightarrow S)} = J_{O(S, \vec{u}_g)} \cdot \alpha \cdot \vec{u}_g$$



#### 4.1.3 Cas particulier d'un solide en rotation autour d'un axe passant par G:

**Théorème de la résultante dynamique:**  $\vec{R}_{\vec{S} \rightarrow S} = \vec{0}$

**Théorème du moment dynamique:**  $\vec{M}_{G(\vec{S} \rightarrow S)} = J_{G(S, \vec{u}_g)} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cdot \vec{u}_g$

Cette équation permet de déduire la loi horaire du moment en fonction des efforts extérieurs. On choisit en général un repère galiléen dont l'un des axes correspond à l'axe de rotation.

Dans le **cas particulier** du mouvement de rotation autour d'un axe fixe  $(A, x)$  le PFD appliqué au point A appartenant à l'axe devient :



$$\begin{cases} \Sigma \vec{F} = \vec{0} \\ \Sigma \vec{M}_{Ax} = J_{Ax} \cdot \alpha \cdot \vec{x} \end{cases}$$

avec

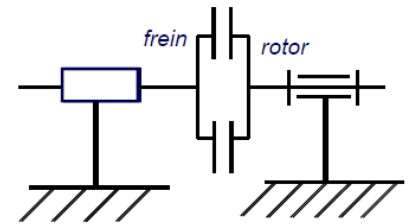
$$\begin{cases} \Sigma \vec{M}_{Ax} & \text{la somme des moment extérieur en A selon l'axe x unité N.m} \\ J_{Ax} & \text{le moment d'inertie autour de l'axe Ax unité: kg.m}^2 \\ \alpha & \text{l'accélération angulaire unité: rad.s}^{-2} \end{cases}$$

### 4.1.4 Exercice :

Soit le frein schématisé ci-contre.

Données :  $N=1500\text{N}$ ,  $f=0,2$ ,  $R=150\text{mm}$ ,  $r=115\text{mm}$ .

- $N$  : force normale aux surfaces frottantes.
- $f$  : coefficient de frottement entre les surfaces frottantes.
- $r_m$  : rayon moyen du disque.
- Inertie du rotor  $J=1,6 \text{ Kg.m}^2$



- Détermination du couple de freinage  $C_f$  du moteur :

$$C_f = n \cdot N \cdot f \cdot r_m$$

$$C_f = 1 \times 1500 \times 0.2 \times (0.115 + 0.150) / 2$$

$$C_f = 39.8 \text{ Nm}$$

$n$  : nombre de couples de surfaces frottantes (1)

- Détermination de la décélération du moteur. On prendra une inertie du rotor  $J_r=1,6 \text{ Kg.m}^2$ .

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F} = \vec{0} \\ \Sigma \vec{M}_{Ax} = J_{Ax} \cdot \alpha \cdot \vec{x} \end{cases}, \text{ seule l'équation des moments nous est utile ici.}$$

$$\Sigma \vec{M}_{Ax} = J_{Ax} \cdot \alpha \cdot \vec{x}$$

$$C_f = J_r \times \alpha$$

$$\alpha = \frac{C_f}{J_r}$$

$$\alpha = \frac{39,8}{1,6}$$

$$\alpha = 24,87 \text{ rad.s}^{-2}$$

- Pour une fréquence de rotation nominale de 300tr/min, déterminer le temps de freinage

### 4.1.5 Remarques:

Le théorème de la résultante dynamique et les expressions projetées du théorème du moment sur les axes perpendiculaires à l'axe de rotation permettent de déterminer les actions mécaniques transmises par la liaison pivot guidant ce mouvement.

Le solide est dit équilibré si ces actions projetées sur des axes galiléens ne dépendent pas du temps:

- Si G est sur l'axe de rotation, le solide est dit statiquement équilibré; alors  $\vec{R}_{\vec{s} \rightarrow \vec{s}} = \vec{0}$

- Pour qu'il soit dynamiquement équilibré il faut en plus avoir:

$$\vec{M}_{G(\vec{s} \rightarrow \vec{s})} \cdot \vec{x}_g = 0 \text{ et } \vec{M}_{G(\vec{s} \rightarrow \vec{s})} \cdot \vec{y}_g = 0$$



### 4.1.6 Application : Tour à bois

Le dessin de la figure représente un tour à bois dont la broche est entraînée par un moteur de perceuse portative. Sa puissance est de 500 W pour deux fréquences de rotation :

$N_1 = 1450 \text{ t/min}$  et  $N_2 = 3200 \text{ t/min}$ .

Suivant la forme de la pièce à réaliser, le tournage s'effectue soit avec prise de pièce entre pointes soit avec montage de la pièce sur un plateau.

Envisageons le montage entre pointes

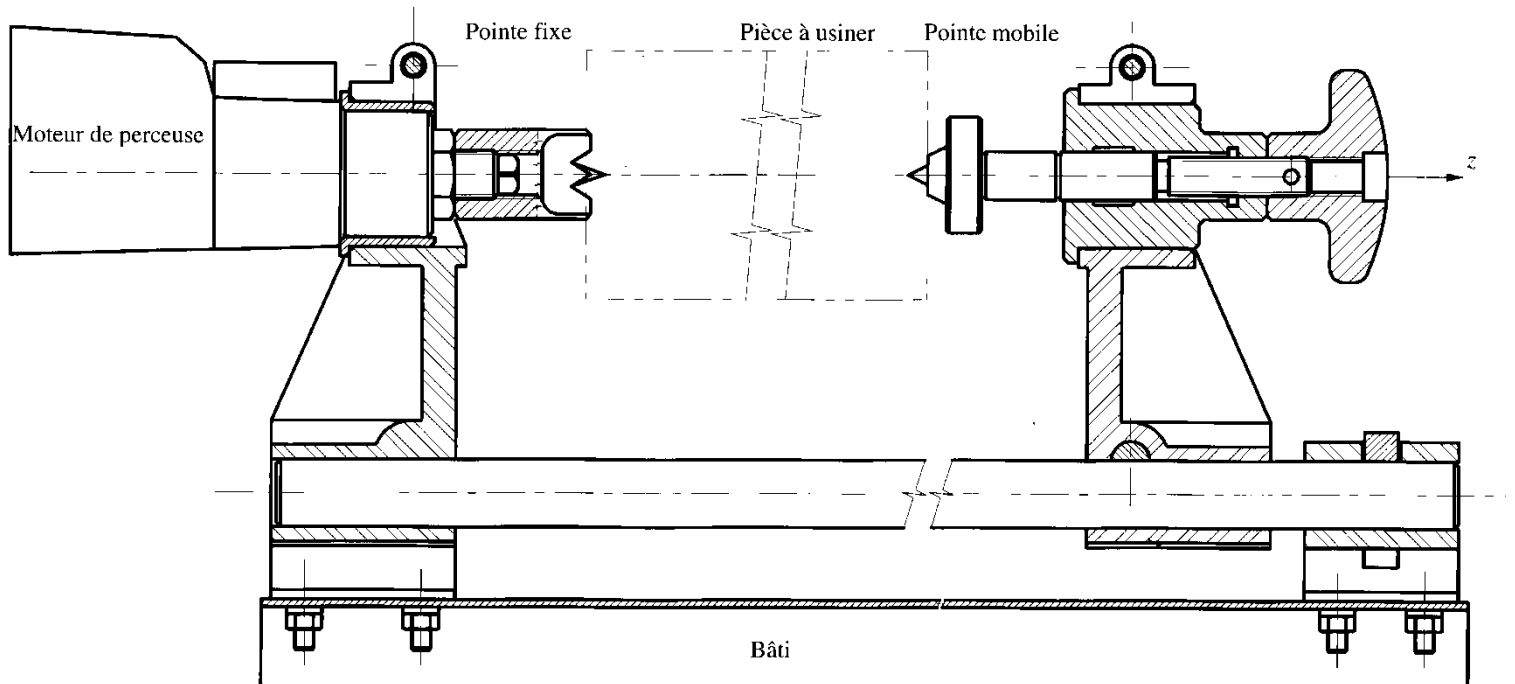
La pointe mobile exerce sur la pièce, une action mécanique résistante dont la projection sur l'axe  $\vec{z}$  du moment résultant vaut  $M_{\text{résist}} = 0,5 \text{ Nm}$ .

Les dimensions maximales d'une pièce cylindrique ainsi montée sont  $L \times D = 600 \times 95 \text{ mm}$ .

La densité du bois est supposée égale à 1.

Le rotor de la perceuse est assimilé à un solide unique dont le moment d'inertie est

$$J_{G(\text{rot}/\vec{z})} = 2.10^{-4} \text{ kg.m}^2$$



Déterminer pour chaque vitesse de rotation le temps de démarrage.

#### 1) Détermination du couple moteur (pour chaque vitesse) :

L'expression de la puissance  $P$  en fonction du couple et de la vitesse de rotation angulaire est de la forme

$$P = \dots$$

D'où :

Pour  $N_1 = 1450 \text{ tr/min}$

Pour  $N_2 = 1450 \text{ tr/min}$

$C_1 =$

$C_2 =$

#### 2) Moment d'inertie de la pièce :

Il s'agit d'un cylindre de masse  $m_p =$

D'après l'expression du moment d'inertie (voir annexe) nous avons :

$$J_{G(\text{pièce}, \vec{z})} =$$

#### 3) Théorème du moment dynamique à la partie tournante de la machine :

La partie tournante est constituée par le rotor associé à la pièce à usiner.

En projection sur l'axe  $\vec{z}$  (axe de la broche) nous avons la relation :

## 5. Moment d'inertie par rapport à un axe:

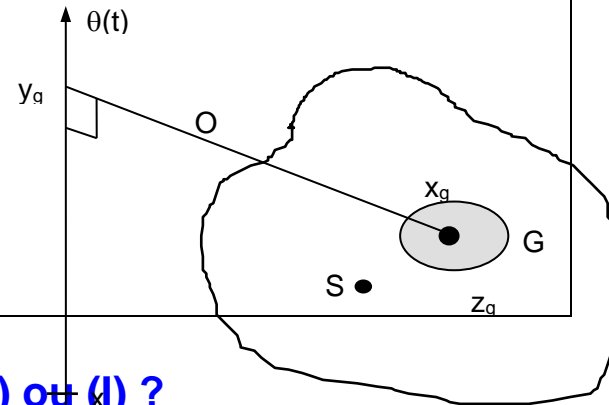
### 5.1 définition:

Soit un solide  $S$  de masse  $m$ .  
 Considérons un point  $M$  quelconque, entouré d'un volume  $dV$  aussi petit que possible et de masse  $dm$ . Soit  $d$  la distance du point  $M$  à l'axe  $(O, \vec{z})$ .

On appelle moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à l'axe  $(O, \vec{z})$  la quantité:

$$J_{(O, \vec{z})} = \int_S d^2 dm$$

L'unité du moment d'inertie d'un solide s'exprime en  $\text{kg.m}^2$ .



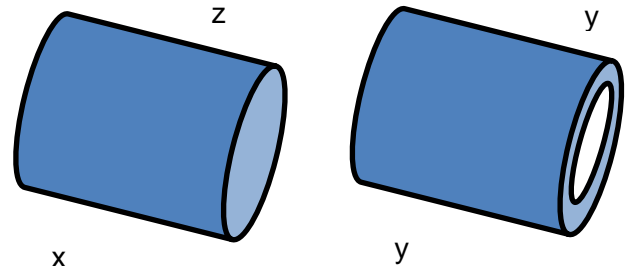
### 5.2 Que représente le moment d'inertie (J) ou (I) ?

L'utilisation seule de la masse lors d'un mouvement de rotation n'est pas suffisante. On fait donc appel au moment d'inertie qui tient compte de la forme et de la position du solide par rapport à l'axe de rotation.

#### Exemple1 :

On peut facilement constater qu'un cylindre plein de masse  $m$  et un cylindre creux de même masse ne subissent pas la même accélération (pour un même couple moteur fourni).

En effet dans les deux cas, la quantité de matière est la même mais la répartition par rapport à l'axe est différente. (le tube « éloigne » la matière de l'axe).

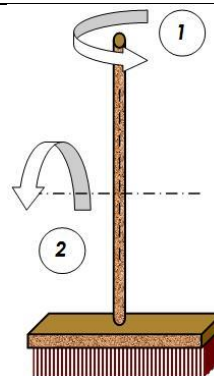


#### Exemple2 :

Prenez un balai en main au niveau du centre d'inertie  $G$ . Essayez de le faire tourner comme sur la figure ci-contre.

Autour de l'axe du manche (1) cela est plus facile qu'autour d'un axe transversal (2).

Cela est dû au fait que dans le deuxième cas des points sont plus éloignés de l'axe de rotation. A vitesse de rotation égale, l'énergie cinétique est plus importante : l'inertie est augmentée.



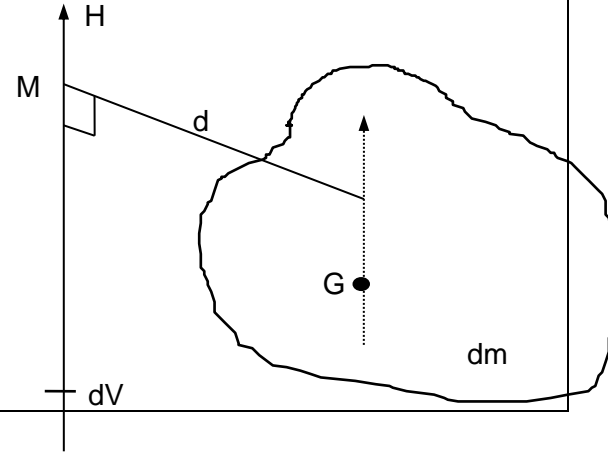
### 5.3 Théorème de Huyghens:

Considérons un solide S de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  et dont le moment d'inertie par rapport à l'axe  $(G, \vec{z})$  est  $J_{(G, \vec{z})}$ .

Soit  $(O, \vec{z})$  un axe parallèle à l'axe  $(G, \vec{z})$  situé à une distance  $D$  de celui-ci; alors:

$$J_{(O, \vec{z})} = J_{(G, \vec{z})} + m.D^2$$

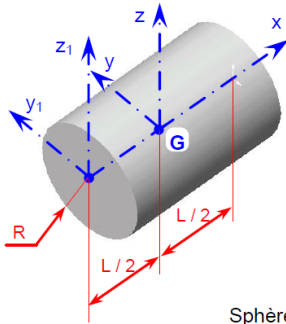
Remarque: Pour une orientation donnée de l'axe de rotation, le moment d'inertie est minimal lorsque cet axe passe par le centre de masse.



## 5.4 Formulaire:

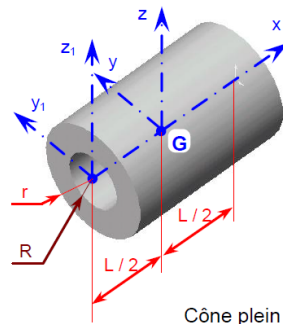
Figure 4 :

Cylindre plein



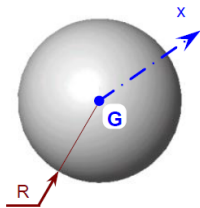
$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{m R^2}{2} \\
 J_y &= J_z = \frac{m R^2}{4} + \frac{m L^2}{12} \\
 J_{y_1} &= J_{z_1} = \frac{m R^2}{4} + \frac{m L^2}{3}
 \end{aligned}$$

Cylindre creux



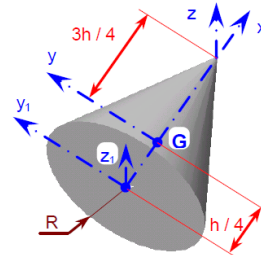
$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{m (R^2 + r^2)}{2} \\
 J_y &= J_z = \frac{m (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m L^2}{12} \\
 J_{y_1} &= J_{z_1} = \frac{m (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m L^2}{3}
 \end{aligned}$$

Sphère



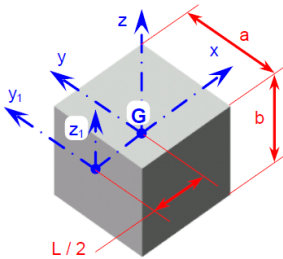
$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m R^2$$

Cône plein



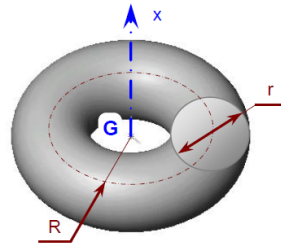
$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{3 m R^2}{10} \\
 J_y &= J_z = \frac{3 m R^2}{20} + \frac{3 m h^2}{5} \\
 J_{y_1} &= J_{z_1} = \frac{3 m R^2}{20} + \frac{3 m h^2}{10}
 \end{aligned}$$

Parallélépipède rectangle



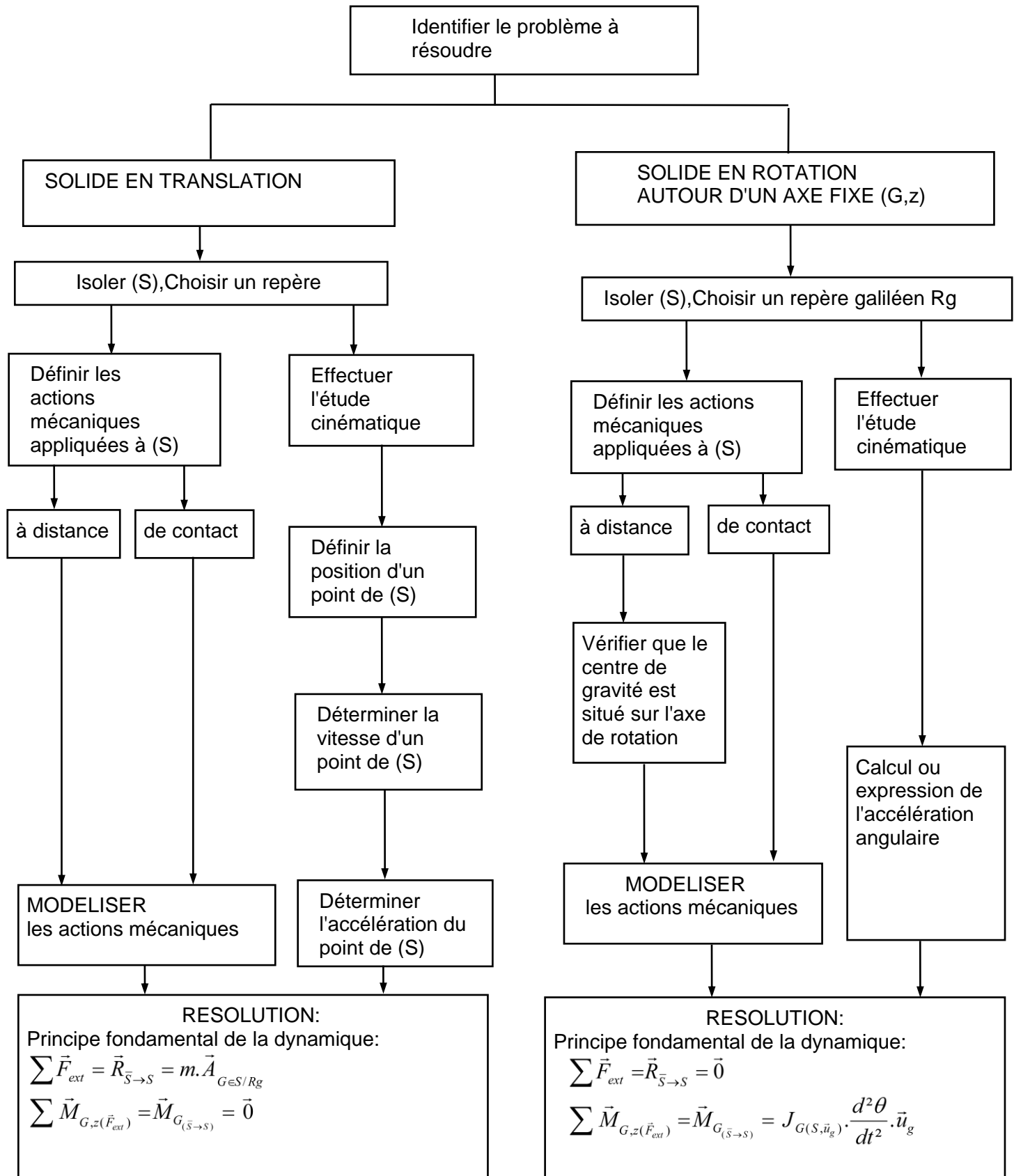
$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \\
 J_y &= \frac{m}{12} (b^2 + L^2) \\
 J_z &= \frac{m}{12} (a^2 + L^2) \\
 J_{y_1} &= \frac{m b^2}{12} + \frac{m L^2}{3}
 \end{aligned}$$

Tore



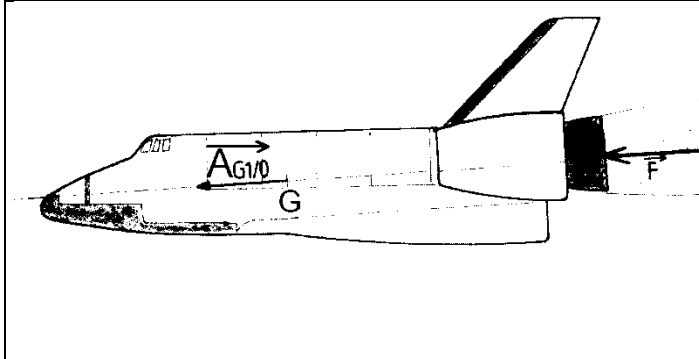
$$J_x = \frac{m}{4} (4 R^2 + 3 r^2)$$

## 6. Méthode de résolution:



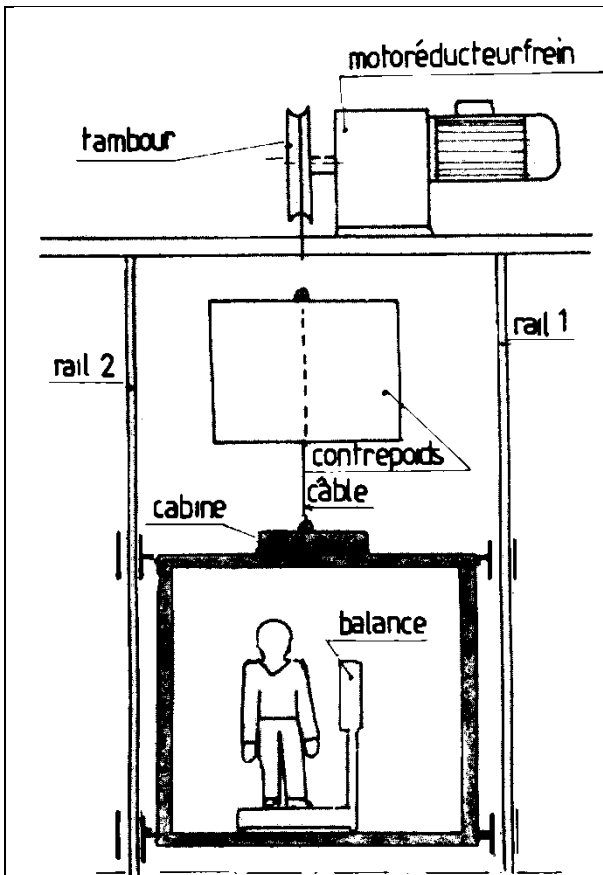
## 7. Exercices :

### 7.1 Navette spatiale :



La navette ci-dessus est supposée à l'arrêt dans le vide spatial.  
 Les trois moteurs sont allumés, la poussée de chaque moteur est de 230 000 daN,  $\vec{F}$  schématise l'action résultante des trois moteurs,  $\vec{F}$  passe par G le centre de gravité de l'ensemble de l'appareil.  
 Déterminons l'accélération supportée par les cosmonautes si la masse de la navette est de 100 tonnes.

### 7.2 Ascenseur



Un homme de 80 kg se tient debout sur une balance dans une cabine d'ascenseur.  
 La masse totale de l'ensemble cabine + balance + homme est de 800 kg.

L'ascenseur est à l'arrêt, le moteur est mis en marche et monte la cabine qui atteint une vitesse de 4,5 m/s en 3 secondes.

L'ascenseur se déplace à vitesse constante sur une distance de 15 m.

La cabine met ensuite 3 secondes pour s'arrêter.

Hypothèses :

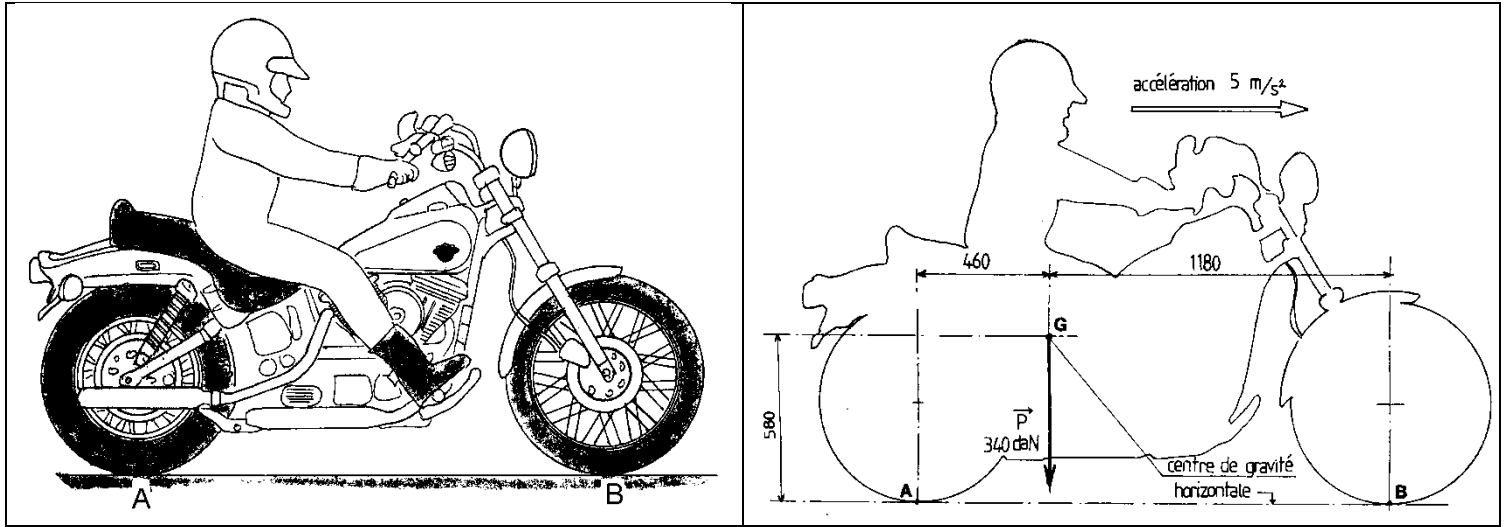
- L'accélération est supposée constante pendant les trois secondes du démarrage (mouvement rectiligne uniformément accéléré vers le haut).
- Les actions des rails sur la cabine seront négligées (frottements négligés).

Pour chaque phase du mouvement :

- 1) Ecrire les équations du mouvement de l'ensemble (cabine + balance + homme).
- 2) Tracer les graphes déplacement, vitesse et accélération en fonction du temps
- 3) En déduire l'accélération de la cabine.
- 4) Isoler l'ensemble (cabine + balance + homme) et en déduire la tension dans le câble.
- 5) Quelle lecture peut-on lire sur la balance.



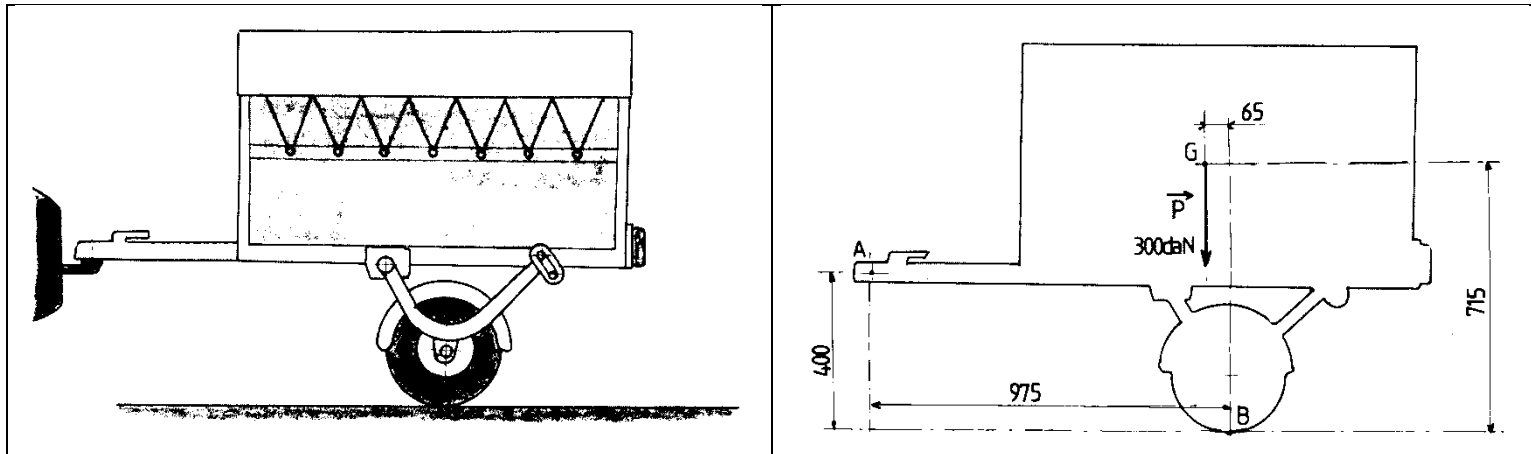
### 7.3 Moto



L'ensemble homme plus moto ci-dessus a un poids total de 340 daN le centre de gravité de l'ensemble est le point G.

- 1) Au démarrage, l'accélération est de  $5 \text{ m/s}^2$  (mouvement uniformément accéléré). En déduire les actions exercées sur les roues en A et B. L'action en B est supposée verticale (roue porteuse). Quelle doit être la valeur du coefficient de frottement en A pour assurer un démarrage sans glissement.
- 2) Refaire l'étude dans le cas du freinage (décélération de  $5 \text{ m/s}^2$ ). Les frottements en A et B sont supposés identiques, la moto est sur une route horizontale.
- 3) Refaire la question précédente lorsque la moto est dans une descente de 10%. La décélération est toujours de  $5 \text{ m/s}^2$ . Comparer les résultats. Que peut-on conclure en ce qui concerne la construction des freins et des suspensions?

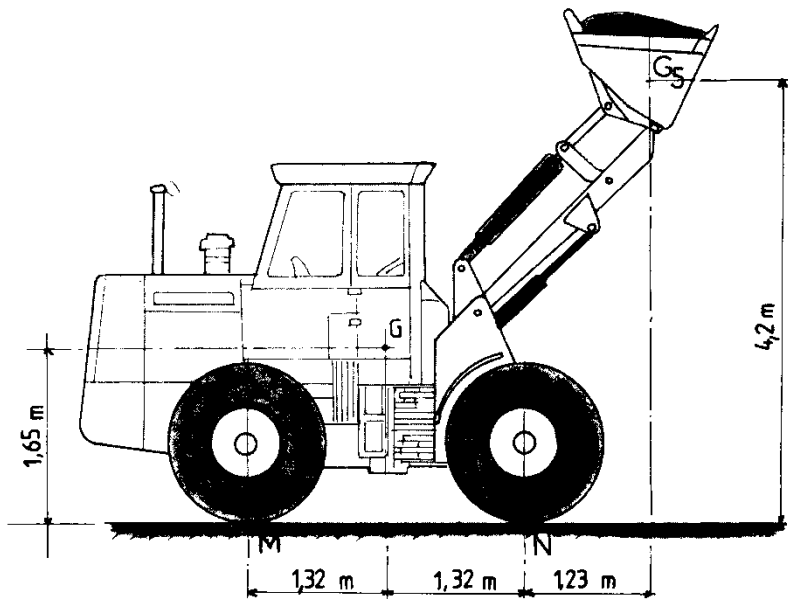
### 7.4 Remorque:



La remorque proposée ci-dessus a une masse totale de 306 kg ( poids de 300 daN ). La remorque est articulée en A (liaison rotule) sur le crochet d'attelage de la voiture .L'ensemble voiture plus remorque atteint la vitesse de 60 km/h en 60 m, départ arrêté . Le mouvement est supposé rectiligne uniformément accéléré . L'étude est effectuée dans le plan de symétrie de la remorque.

- 1) Déterminer l' accélération du mouvement .
- 2) Déterminer les actions exercées en A et B au moment du démarrage .  
A est le centre de la rotule d'attelage et B le point de contact entre pneu et route .
- 3) L'ensemble roule à la vitesse de 120 km/h puis freine sur la distance de 120 m .Le mouvement est supposé rectiligne uniformément décéléré. Que deviennent les résultats précédents?.

## 7.5 Chargeur:



Le chargeur proposé a un poids total à vide de 12500 daN, centre de gravité G . Le poids des matériaux contenus dans le godet est de 5000 daN, centre de gravité G5 .  
 Le chargeur occupe la position de la figure ci-dessus (godet en position haute ) . L'étude sera effectuée dans le plan de symétrie de l'appareil.

1 ) L'engin roule à la vitesse uniforme de 41,5 km/h puis freine (mouvement uniformément décéléré) sur une distance de 10 m .

Déterminer la valeur de la décélération du mouvement .

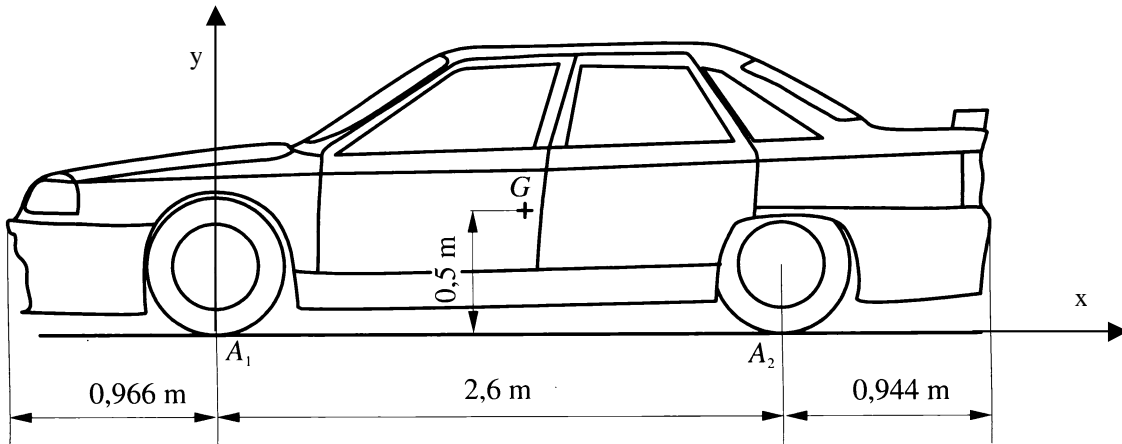
2) La décélération est supposée égale à  $2 \text{ m/s}^2$ . Déterminer les actions exercées en M et N entre les roues et le sol. Les frottements en M et N sont supposés identiques .

a) Y a-t-il basculement du chargeur vers l'avant (rotation autour de N) ?

b) A partir de quelle valeur de la décélération y a-t-il risque de basculement vers l'avant ?

3) Le système de freinage permet une décélération maximale de  $6 \text{ m/s}^2$ . A partir de quel poids de matériaux dans le godet, y a-t-il risque de basculement ?

## 7.6 Freinage d'un véhicule automobile



### 1 Mise en situation:

Au cours d'un essai de freinage un véhicule automobile se déplace sur une route droite horizontale à la vitesse de 215 km/h. Il est alors contraint à un freinage violent. Le dispositif de sécurité (A.B.S.) équipant le véhicule empêche tout blocage des roues. Les dimensions caractéristiques du véhicule sont définies (voir figure ).

Le but de l'étude est d'évaluer la répartition des charges sur les roues au cours du freinage (transfert de masse) et la distance de freinage.

### 2. Hypothèses et données

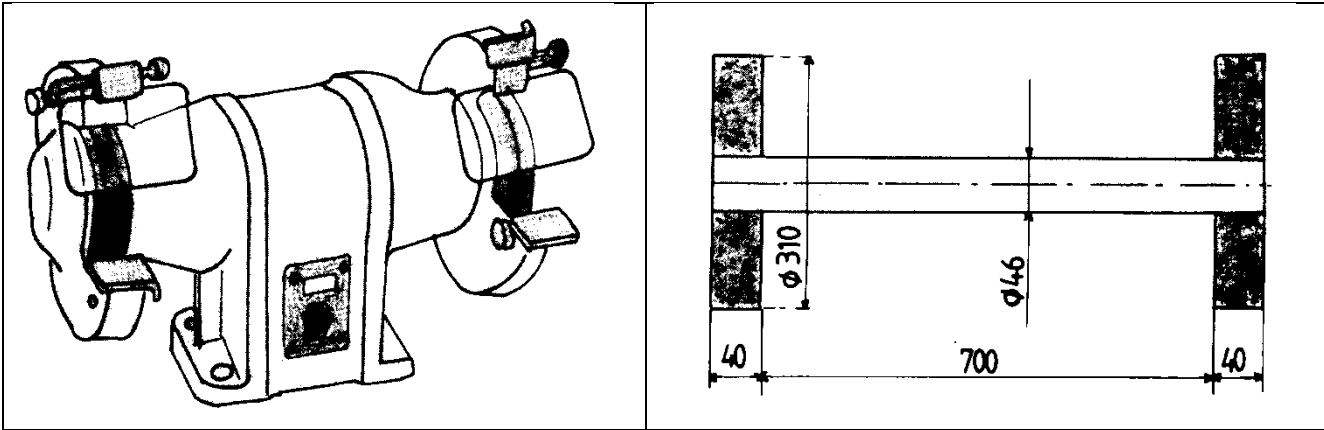
La résistance à l'avancement créée par l'écoulement de l'air autour du véhicule est négligée.

- Le problème est ramené dans le plan de symétrie du véhicule.
- Le freinage s'effectue à la limite de l'adhérence.
- Masse du véhicule  $m = 1295$  kg.
- A l'arrêt la répartition des masses sur les essieux du véhicule est la suivante :
  - essieu arrière (A2) : 490 kg,
  - essieu avant (A1) : 805 kg.
- Le centre de gravité est située à 0,5 m du sol.
- Vitesse initiale du véhicule au début du freinage 215 km/h.
- Le coefficient d'adhérence sur route sèche roue/sol est identique pour les 4 roues et vaut :  $f = \tan \varphi = 0,9$ .

### 3. Etude demandée:

1. Définir la position du centre de gravité du véhicule. Pour cela écrire l'équilibre du véhicule lorsqu'il est à l'arrêt.
2. Définir le modèle des actions de contact roue/sol.
3. Exprimer le Principe fondamental de la Dynamique pour le véhicule et écrire les équations qui en découlent.
4. Donner l'expression de l'accélération en fonction de la masse du véhicule et du coefficient d'adhérence. On se place à l'équilibre strict (limite du glissement)
5. Calculer cette accélération.
6. Calculer la nouvelle répartition des charges sur chaque essieu.
7. Calculer la distance et le temps du freinage.

### 7.7 Touret à meuler:

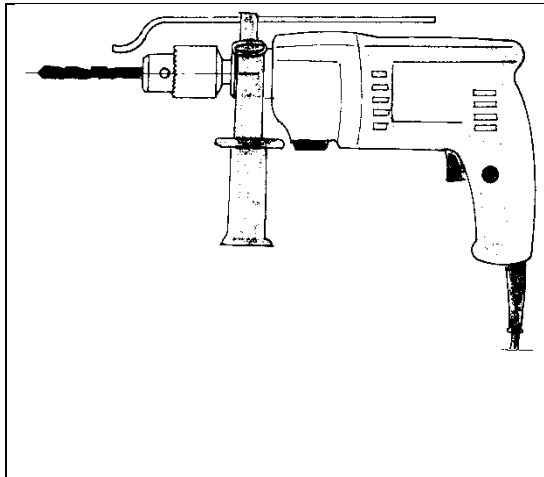


L'arrêt de la broche du touret à meuler ci-dessus est effectué en 70 secondes depuis la vitesse de 1500 tr/min. Le mouvement est supposé uniformément décéléré.

- 1) Déterminer la valeur de la décélération.
- 2) L'ensemble meules plus arbre est assimilé au dessin de la figure ci dessus. La masse volumique des meules est de  $2500 \text{ kg/m}^3$ , la masse volumique de l'arbre en acier est de  $7800 \text{ kg/m}^3$ .

- Calculer le moment d'inertie de l'ensemble meules plus arbre, en déduire la valeur du couple résistant exercé par les paliers du touret .

### 7.8 Perceuse:

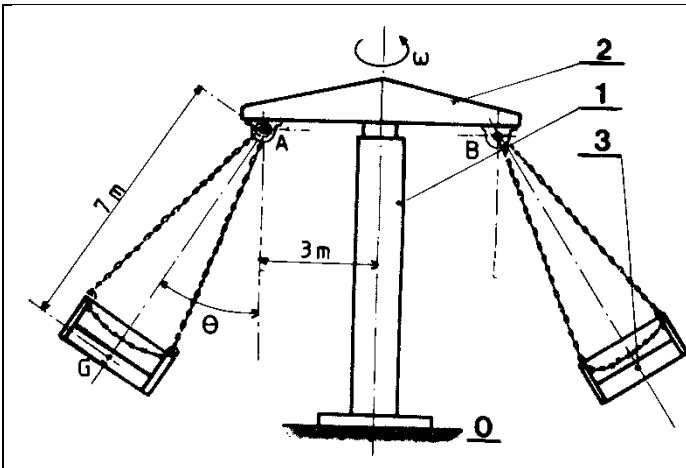


Le moteur électrique de la perceuse ci-dessous a un couple de démarrage égal à 0, 1 N.m , la vitesse de rotation en régime permanent est de 3000 tr/min.

Le moment d'inertie des parties tournantes est égal a  $10^{-4} \text{ m}^2\text{kg}$  .

- 1) Déterminer l'accélération angulaire au moment du démarrage, le mouvement est supposé uniformément accéléré.
- 2) Combien de temps faut-il au foret pour atteindre la vitesse de 3000 tr/min ?.  
En combien de tours ?.

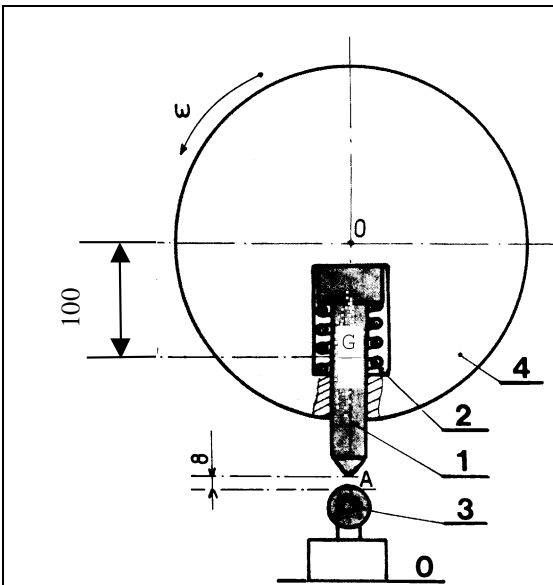
## 7.9 Manège



Le manège proposé ci-contre se compose d'un bâti fixe 1 et d'une tourelle porte balancelles 2. Les balancelles 3 sont liées à la tourelle 1 par des liaisons pivots en A et B, les axes de ces liaisons sont tangents au cercle de diamètre  $AB = 6 \text{ m}$ .  $AG = 7 \text{ m}$ , G est le centre de gravité de la balancelle. L'angle d'inclinaison des balancelles est  $\theta = 37^\circ$ .

Déterminer sous ces conditions la vitesse de rotation  $\omega$  du manège.

## 7.10 Limiteur de vitesse



Pour limiter la vitesse de rotation du disque 4 (axe de rotation  $O, z$ ). On construit un limiteur de vitesse à partir d'un piston 1, d'un ressort de compression 2 et d'un interrupteur 3. La masse du piston 1 est de 300 grammes, son centre de gravité G est situé à 100 mm de l'axe de rotation. La raideur du ressort est  $K = 50 \text{ N/mm}$ , au repos la force exercée par le ressort est égale à 30 daN. La course maximale nécessaire pour couper le contact en A est de 8 mm.

A partir de quelle vitesse de rotation  $\omega$  le piston coupe-t-il le contact en A ?

Peut-on la modifier ?, si oui comment ?