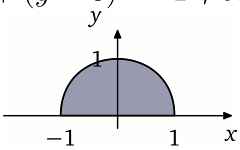
Corrigé des exercices sur les intégrales

Exercice I :

(a) Soit $M(x;y)$. $M \in C_f \iff y = \sqrt{1-x^2} \iff y \geqslant 0$ et $y^2 = 1 - x^2$
$\iff y \geqslant 0$ et $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$, où $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$ est l'équation du cercle de centre O et de rayon 1.



(b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$ est l'aire de la moitié droite du demi-cercle. L'aire d'un cercle de rayon 1 valant $\pi \times 1^2 = \pi$, celle d'un quart de cercle de rayon 1 vaut elle $\dfrac{\pi}{4}$ d'où $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

Exercice II :

(a)

Rectangle N°	1	2	3	4	...	n
Hauteur	0	$\left(\frac{1}{n}\right)^2$	$\left(\frac{2}{n}\right)^2$	$\left(\frac{3}{n}\right)^2$	...	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$

Largeur : $\dfrac{1}{n}$.

$$s_n = \frac{1}{n}\times 0 + \frac{1}{n}\times + \frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + +...\frac{(n-1)^2}{n^2} + \right) = \frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2\right) =$$
$$\frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

(b)

Rectangle N°	1	2	3	4	...	n
Hauteur	$\left(\frac{1}{n}\right)^2$	$\left(\frac{2}{n}\right)^2$	$\left(\frac{3}{n}\right)^2$	$\left(\frac{4}{n}\right)^2$	...	1

Largeur : $\dfrac{1}{n}$.

La différence entre s_n et S_n est de deux termes : le premier de s_n qui est nul, et le dernier de S_n qui vaut $1\times\dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2}{n^2}\times\dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2}{n^3}$. $S_n = s_n + \dfrac{1}{n}\times 1 = s_n + \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

(c) Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$.

Hérédité : supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{6(n+1)^2}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)[6(n+1)+n(2n+1)]}{6} =$$
$$\frac{(n+1)[6n+6+2n^2+n]}{6} = \frac{(n+1)[n\times 2n + n\times 3 + 2\times 2n + 2\times 3]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ceci correspond à ce qu'on obtient par ailleurs en remplaçant n par $n+1$ dans $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$: l'hérédité est donc prouvée.

Concusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(d) $S_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$$= \frac{n+1}{6n} \times \frac{2n+1}{n} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 6n = +\infty$, donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{6n} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{6} + \frac{1}{6n} = +\infty$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$.

Ainsi, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

$s_n = S_n - \frac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par différence $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{3}$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \leqslant \int_0^1 x^2 dx \leqslant S_n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$, donc $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

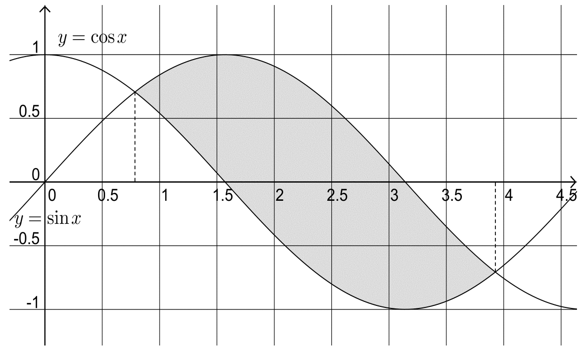
Exercice III : *Questions indépendantes sur les primitives.*

1. Pour tout < 0, $f(x) = \frac{-1}{-x}$ où $-x > 0$. Donc $f(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$ avec $v(x) = -x > 0$. Donc les primitives sur $]-\infty; 0[$ sont les fonctions F de la forme $F(x) = \ln(-x) + c$ où c est une constante.
2. Pour tout $x \leqslant 0$, $g(x) = -x$ donc les primitives de g sur $]-\infty; 0]$ sont les fonctions H de la forme $H(x) = -\frac{x^2}{2} + c$ où c est une constante.
   Pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = x$ donc les primitives de g sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions K de la forme $K(x) = \frac{x^2}{2} + k$ où k est une constante.
   Les fonctions G primitives de g sur $\mathbb{R}$ coïncident avec H et K : il faut donc que $K(0) = H(0)$, c'est-à-dire $k = c$.
   Ainsi $G(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + c \text{ sinon} \end{cases}$, autrement dit : $G(x) = \frac{x|x|}{2}$ où c est une constante.
3. Pour tout $x \leqslant 1$, $x - 1 \leqslant 0$ donc $h(x) = 1 - x$ donc les primitives de h sur $]-\infty; 1]$ sont les fonctions G de la forme $G(x) = x - \frac{x^2}{2} + c$ où c est une constante.
   Pour tout $x \geqslant 1$, $x - 1 \geqslant 0$, donc $h(x) = x - 1$ donc les primitives de h sur $[1; +\infty[$ sont les fonctions K de la forme $K(x) = \frac{x^2}{2} - x + k$ où k est une constante.
   Les fonctions H primitives de h sur $\mathbb{R}$ coïncident avec G et K : il faut donc que $G(1) = K(1)$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} + c = -\frac{1}{2} + k$. Ainsi $k = 1 + c$. Donc $H(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + c \text{ si } x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 + c \text{ sinon} \end{cases}$.
   Remarque : on peut montrer que c'est aussi $H(x) = \frac{(x-1)|x-1|}{2} + \lambda$ où λ est une constante.

Exercice IV :

1. $\cos(2t) = 2(\cos t)^2 - 1$ donc $(\cos t)^2 = \frac{1 + \cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)^2 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) \, dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
   $$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4}\sin(2 \times 0) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 0 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

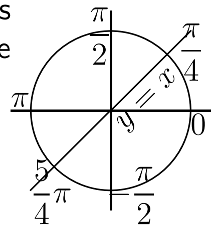
Exercice V :

1. 

   (a)

   (b) On lit graphiquement deux solutions : $x \approx 0,79$ et $x \approx 3,92$.

2. (a) Les solutions de l'équation $\sin x = \cos x$ sont représentées par des points dont l'ordonnée est égale à l'abscisse, ils sont donc situés sur la droite d'équation $y = x$. Les solutions sont $x = \frac{5}{4}\pi$ et $x = \frac{\pi}{4}$.



   (b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Les courbes se coupent donc aux points de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{5}{4}\pi; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. (a) Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi\right]$, la courbe de $\cos$ est en dessous de celle de $\sin$, donc

   $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \sin x - \cos x \, dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} =$

   $-\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) - \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

   $A = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ unités d'aires.

   (b) L'unité d'aire vaut $1,5^2 = 2,25\text{cm}^2$. Donc $A = 2\sqrt{2} \times 2,25 \approx 6,36\text{cm}^2$.

Exercice VI :

1. (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$.

   D'après le cours, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

   (b) $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. $x^2 \geqslant 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$.

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

   (c) Soit $x \in]0; +\infty[$. $g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \times x > 0 \times x$ car $x > 0$.

   Donc $g(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ car $\exp$ est croissante.

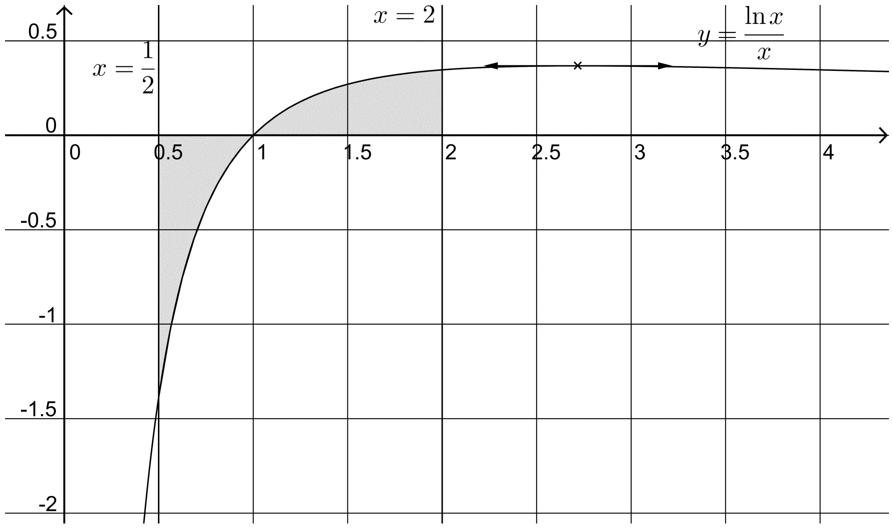
x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

   (d) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ donc la courbe de g admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc la courbe de g admet l'axe des abscisses comme asymptote.

   g admet pour maximum $\frac{1}{e}$ en $x = e$ donc la courbe de g admet une tangente horizontale au point de coordonnées $\left(e; \frac{1}{e}\right)$.

   Enfin comme $g(1) = 0$, la courbe de g coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.



2. (a)

(b) L'aire de S vaut $-\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,dx + \int_{1}^{2} g(x)\,dx = -\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{1}^{2}$

$$= -\left(\frac{(\ln 1)^2}{2} - \frac{\left(\ln \frac{1}{2}\right)^2}{2}\right) + \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}$$

$$= -0 + \frac{(-\ln 2)^2}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{2} - 0$$

$$= \frac{(\ln 2)^2}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{2} = (\ln 2)^2.$$

(c) L'aire de S vaut $(\ln 2)^2 \times 2,5^2 \approx 3,00\text{cm}^2$.

Exercice VII :

Soient $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{(x^2)}dx$, $J = \displaystyle\int_0^1 e^{(x^2)}dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 e^x dx$.

(a) Pour tout $x \in [0;1]$, $x \leqslant 1$ et x est positif donc $x \times x \leqslant 1 \times x$, ainsi $x^2 \leqslant x$.
Or $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $e^{(x^2)} \leqslant e^x$.
Pour tout $x \in [0;1]$, $x \leqslant 1$ et $e^{(x^2)}$ est positif donc $xe^{(x^2)} \leqslant e^{(x^2)}$.

(b) Pour tout $x \in [0;1]$, $xe^{(x^2)} \leqslant e^{(x^2)} \leqslant e^x$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 xe^{(x^2)}dx \leqslant \int_0^1 e^{(x^2)}dx \leqslant \int_0^1 e^x dx$. Ainsi, $I \leqslant J \leqslant K$.
$I = \displaystyle\int_0^1 xe^{(x^2)}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}2xe^{(x^2)}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{(x^2)}dx$ (linéarité)
donc $I = \dfrac{1}{2}\left[e^{(x^2)}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left(e^{(1^2)} - e^{(0^2)}\right) = \dfrac{e-1}{2}$.
$K = \displaystyle\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$. Ainsi $\dfrac{e-1}{2} \leqslant J \leqslant e - 1$.

Exercice VIII :

Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.

(a)
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$: si $y < 0$ alors $y < 0 < -y = |y|$, sinon $y = |y|$.
  Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y \leqslant |y|$.
- Pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant |f(x)|$ donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.
  Pour tout $x \in [a;b]$, $-f(x) \leqslant |-f(x)| = |f(x)|$ donc $\displaystyle\int_a^b -f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$,
  donc par linéarité, $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Or $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b f(x)\,dx$ ou $-\int_a^b f(x)\,dx$, donc
dans tous les cas : $\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

(b) $a=-1$, $b=1$ et $f(x)=x$.

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\frac{0^2}{2} - \left(-\frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \left(-\frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$