ARA0087 – MÉTODOS QUANTITATIVOS

AULA 4

PROFESSOR: DSC. NATHAN OLIVEIRA

Multiplicação de Matriz por um número real:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2.A = \begin{bmatrix} 2.2 & 2.3 \\ 2.6 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$A_{2X3} \times B_{3X2} = C_{2X2}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} = \ ? & c_{12} = \ ? \\ c_{21} = \ ? & c_{22} = \ ? \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

$A_{2X3} \times B_{3X2} = C_{2X2}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Caso seja possível, determine o resultado da multiplicação abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Caso seja possível, determine o resultado da multiplicação abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 & 5 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 & 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 + 0 & 12 + 14 & -6 + 2 \\ 30 + 0 & 20 - 7 & -10 - 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 & 26 & -4 \\ 30 & 13 & -11 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

Os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a zero.

Exemplo: Matriz identidade 3 x 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↖

Diagonal principal

Matriz inversa

Uma matriz quadrada B é inversa da matriz quadrada A quando a multiplicação das duas matrizes resulta em uma matriz identidade I_n, ou seja, $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Determine a matriz inversa da Matriz A

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz inversa da Matriz A

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ 3a+4c=0 \end{cases}$$

$$3a+4c=0$$
$$3a=-4c$$
$$a=-\frac{4}{3}c$$

$$a+2c=1$$

$$-\frac{4}{3}c+2c=1$$

$$\frac{-4c+6c}{3}=\frac{3}{3}$$

$$2c=3$$

$c=\frac{3}{2}$ → a = -2

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases}$$

b + 2d = 0

b = -2d

$$3b+4d=1$$
$$3\cdot(-2d)+4d=1$$
$$-6d+4d=1$$
$$-2d=1$$

$d=-\frac{1}{2}$ → b = 1

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Determine a matriz inversa da Matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Inversa

Alternativa B

Utilizando os dados fornecidos pelo exercício, temos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & a & b \\ c & d & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2w + 9c = 1 \\ y + 2a + 9d = 0 \\ z + 2b + 9t = 0 \\ 0 + w + 6c = 0 \\ 0 + a + 6d = 1 \\ 0 + b + 6t = 0 \\ 0 + 0 + c = 0 \\ 0 + 0 + d = 0 \\ 0 + 0 + t = 1 \end{cases}$$

Analisando o sistema acima, temos:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \\ w = 0 \\ a = 1 \\ b = -6 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Logo, a matriz inversa é:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & a & b \\ c & d & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o valor do elemento c_{11} da matriz C = AB é:

A) 10.

B) 28.

C) 38.

D) 18.

E) 8.

Alternativa A.

Como queremos o termo c_{11}, vamos multiplicar os termos da primeira linha e de A com os termos da primeira coluna de B.

Calculando $c_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 + 4 + 3 = 10$

EXERCÍCIOS DE CONCURSOS

Estácio

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela pela matriz:

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Para calcular a média aritmética de quatro notas, devemos somar as quatro notas e dividi-la por 4. A matriz 4×4 obtida pelas notas deve ser multiplicada por uma matriz coluna 4×1, no qual cada um dos quatro elementos é igual 1/4, que é a matriz da alternativa E.

Sabendo que B é a matriz inversa de A, e x e y são números reais. Calcule o produto entre x e y.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} x & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{3} & y \end{vmatrix}$$

Como B é a inversa de A, temos que o produto entre A e B é igual a matriz identidade.

Assim, temos: A x B = I

$$A \times B = I \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{3} & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolvendo o produto entre as matrizes temos:

$$\begin{vmatrix} \frac{6x-1}{3} & \frac{3y-1}{3} \\ \frac{6x-4}{3} & \frac{12y-1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Logo,

$$\frac{6x-1}{3} = 1$$

6x – 1 = 3

6x = 3 + 1

x = 4/6

x = 2/3

Matriz Transposta

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Como a matriz dada é do tipo 3x2 (3 linhas e 2 colunas) a sua transposta será do tipo 2x3 (2 linhas e 3 colunas).

Para construir a matriz transposta, devemos escrever todas as colunas de B como linhas de B^t. Conforme indicado no esquema abaixo:

$$B_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^t_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Matriz Transposta

- $(A^t)^t = A$: essa propriedade indica que a transposta de uma matriz transposta é a matriz original.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$: a transposta da soma duas matrizes é igual a soma da transposta de cada uma delas.
- $(A \, . \, B)^t = B^t \, . \, A^t$: a transposta da multiplicação de duas matrizes é igual ao produto das transpostas de cada uma delas, em ordem inversa.
- $\det(M) = \det(M^t)$: o determinante da matriz transposta é igual ao determinante da matriz original.

Matriz Simétrica

Uma matriz é chamada simétrica quando, para qualquer elemento da matriz A, a igualdade $a_{ij} = a_{ji}$ é verdadeira.

As matrizes desse tipo são matrizes quadradas, ou seja, o número de linhas é igual ao número de colunas.

Toda matriz simétrica, satisfaz a seguinte relação:

$A = A^t$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 17 \\ 11 & 17 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz Antissimétrica

Diferente da matriz simétrica, na antissimétrica os números opostos em relação a diagonal principal terão sinais contrários:

Matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz Antissimétrica:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Oposta

A matriz oposta é aquela que contém os mesmos elementos nas linhas e nas colunas, no entanto, com sinais diferentes. Assim, a oposta de B é –B.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0{,}5 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } -\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -0{,}5 & -5 \end{bmatrix}$$

Sabendo que a matriz simétrica N de ordem 2x2 obedece à lei de formação $a = \begin{cases} a_{12} = 3 \\ a_{ij} = 2, \ se \ i = j \end{cases}$

podemos afirmar que N é:

A) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Alternativa C.

Vamos montar a matriz genérica com base nas informações do enunciado.

$$N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2$$

$$a_{22} = 2$$

$$a_{12} = 3$$

Como a matriz N é simétrica, temos que $a_{12} = a_{21} = 3$.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A matriz M a seguir é simétrica, então o valor de x + y + z é:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ x & 3 & z \\ y & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Alternativa E

Como a matriz é simétrica, sabemos $a_{ij} = a_{ji}$, então temos que:

$$a_{12} = a_{21}$$

$$x = 2$$

$$a_{13} = a_{31}$$

$$-4 = y$$

$$y = -4$$

$$a_{23} = a_{32}$$

$$7 = z$$

$$z = 7$$

Assim, $x + y + z = 2 + (-4) + 7 = 5$

Sendo $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ matrizes de ordem 2x2, marque a alternativa verdadeira:

A) N é uma matriz simétrica.

B) M é uma matriz transposta de N.

C) M é matriz simétrica.

D) P é matriz simétrica.

E) N é matriz nula.

Alternativa C.

A alternativa A é falsa, pois caso a matriz N fosse simétrica, os elementos -1 e 3 deveriam ser iguais.

A alternativa B é falsa. As matrizes M e N possuem elementos distintos. Numa matriz transposta o que muda é a ordem dos elementos e não seus valores.

A alternativa C é verdadeira. Os elementos $a_{12} = a_{21} = 8$.

A alternativa D é falsa, pois caso a matriz N fosse simétrica, os elementos -1 e 7 deveriam ser iguais.

A alternativa E é falsa, pois a matriz possui elementos diferentes de zero.

$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ x & 4 & y \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica. Determine a soma de todos os elementos da matriz oposta de A.

A) 65

B) -65

C) -51

D) 51

E) 34

Alternativa B.

Pela definição de matriz simétrica, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ x & 4 & y \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & x & 9 \\ 8 & 4 & 6 \\ 9 & y & 9 \end{pmatrix}$$

A partir disso, concluímos que *x = 8* e *y = 6*. Somando os termos dessa matriz e multiplicando por -1, obtemos $-(6+8+9+8+4+6+9+6+9) = -65$..

PLANO DE ENSINO: BIBLIOGRAFIA

BÁSICA:

BARBOSA, Marcos Antonio. Iniciação à Pesquisa Operacional no Ambiente de Gestão (Biblioteca Virtual).. Curitiba: Intersaberes, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30383

COLIN, Emerson C. Pesquisa operacional : 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas (Minha Biblioteca).. 2. São Paulo: Atlas, 2018. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788597014488/cfi/6/2!/4/2/2@0:0

SILVA, Ermes Medeiros da. Pesquisa Operacional para os Cursos de Administração e Engenharia: Programação Linear: Simulação (Minha Biblioteca).. 5. São Paulo: Atlas, 2017. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788597013559/cfi/6/10!/4/2@0:0

COMPLEMENTAR:

ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. Introdução à pesquisa operacional : métodos e modelos para análise de decisões (Minha Biblioteca).. 5. Rio de Jnaeiro: LTC, 2015. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788597014488/cfi/6/2!/4/2/2@0:0

BEZERRA, Cícero Aparecido. Técnicas de planejamento, programação e controle de produção e introdução à programação linear (Biblioteca Virtual).. Curitiba: Intersaberes, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/6598

LACHTERMACHER, Gerson. Pesquisa operacional na tomada de decisões (Minha Biblioteca).. 5. Rio de Janeiro: LTC, 2018. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521630494/cfi/6/2!/4/2/2@0:0

MOREIRA, Daniel Augusto. Pesquisa operacional: curso introdutório (Minha Biblioteca).. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2017. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522128068/cfi/0!/4/4@0.00:0.00

PEREIRA, Adriano Toledo. Métodos quantitativos aplicados à contabilidade (Biblioteca Virtual).. 9. Curitiba: Intersaberes, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22490

OBRIGADO!

Prof. DSc. Nathan Oliveira

http://lattes.cnpq.br/9742943055297358