18-19-1A 概率统计参考答案

一、填空题（12 分，每空 1 分）

1. $1-p$; **2.** $2/3$; **3.** $\ln 2$; **4.** 3; **5.** 0.9772; **6.** $1-e^{-3}$, $1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}$; **7.** 4; **8.** 0.0228;

9. （$\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}$）; **10.** 0.05，0.1492；

二、（10 分）

解：记事件 A_i 为"第 i 次取到黑球"，$i=1,2,\dots$。

（1）所求概率为 $P\left(A_1A_2\cdots A_n\right)$，用乘法公式得：

$$P\left(A_1A_2\cdots A_n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

（2）所求概率为 $P\left(A_1A_2\cdots \overline{A}_n\right)$，用乘法公式得：

$$P\left(A_1A_2\cdots \overline{A}_n\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\left(n+1\right)}$$

三、（10 分）

解：1.

X	0	1	2	3
$Y=(X-1)^2$	1	0	1	4
P	1/8	3/8	3/8	1/8

所以 Y 的分布律为

Y	0	1	4
P	3/8	1/2	1/8

+

2. 解：（1）X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2) $P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-F(2)=1-(1-e^{-\frac{2^2}{2}})=e^{-2}$

四、（16分）

1. 解：（1）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3xdy, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx, 0<y<1\\ 0, \quad 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), 0<y<1\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

1 (2)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{z/2}^{z}3xdx,\ 0<z<1\\ \int_{z/2}^{1}3xdx, 1\le z<2\\ 0, \quad 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{9}{8}z^2,\ 0<z<1\\ \frac{3}{2}-\frac{3}{8}z^2, 1\le z<2\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

2. 解：（1） $P\{X=0,\quad Z=0\}=P\{X=0,\quad Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=p(1-p)$；

$P\{X=0,\quad Z=1\}=P\{X=0,\quad Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=(1-p)^2$；

$P\{X=1,\quad Z=0\}=P\{X=1,\quad Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=p(1-p)$；

$P\{X=1,\quad Z=1\}=P\{X=1,\quad Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=p^2$；

即随机变量$(X,\quad Z)$的联合分布律为

$X \backslash Z$	0	1
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	p^2

（2）将 X 和 Z 的边缘分布律写出：

$X \backslash Z$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
$p_{\cdot j}$	$2p(1-p)$	$1-2p+2p^2$	

由独立性的性质可得：

$$P\{X=1,\quad Z=0\}=p(1-p)=P\{X=1\}P\{Z=0\}=p\cdot 2p(1-p),$$

解方程 $p(1-p)=p\cdot 2p(1-p)$，得 $p=\frac{1}{2}$.

五、（18分）

解：1. 由题设，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2;\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

(1) $E(Y)=E(|X-1|)=\int_{-\infty}^{\infty}|x-1|f(x)dx=\int_0^2|x-1|\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$.

$E(Y^2)=E(|X-1|^2)=\int_{-\infty}^{\infty}|x-1|^2f(x)dx=\int_0^2|x-1|^2\frac{1}{2}dx=\frac{1}{3}$.

所以 $D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1/3-(1/2)^2=1/12$.

(2) $E(XY)=E(X|X-1|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x-1|f(x)dx=\int_0^2x|x-1|\frac{1}{2}dx=\int_{-1}^1(y+1)|y|\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}$

(3) $E(X)=1$，$D(X)=1/3$，所以

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2}=0$$

因此 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$

2. 设每周进货量为 a，每周的利润为 Y，则 Y 满足

$$Y=\begin{cases}500a+300(X-a), & a\le X\\ 500X-100(a-X), & a>X\end{cases}=\begin{cases}300X+200a, & a\le X\\ 600X-100a, & a>X\end{cases}$$

已知 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}, & 10\le x\le 30\\ 0, & 其他\end{cases}$

因此

$$E(Y)=\int_{10}^{a}(600x-100a)\frac{1}{20}dx+\int_a^{30}(300x+200a)\frac{1}{20}dx=-\frac{15}{2}a^2+350a+5250$$

求导数并令其为 0 得： $-15a+350=0$，解得 $a=\frac{70}{3}$

六、（8 分）

解：由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，从而，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$$

再由于 $X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，从而，$\frac{X_{n+1}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。

则 $\left(\frac{X_{n+1}-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$

由独立性，利用 χ^2 分布可加性，得

$$\frac{\left(X_{n+1}-\mu\right)^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\sim\chi^2(n)$$

七、（12 分）

解：(1) $E(X)=\dfrac{3\theta}{2}$，用 $\bar{X}$ 代替 $E(X)$，

得到 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\bar{X}}{3}$.

(2) 记 $x_{(1)}=\min(x_1,x_2,\ldots,x_n),x_{(n)}=\max(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，**X** 的概率密度是

$$f(x;\theta)=\begin{cases}1/\theta & \theta\le x\le 2\theta,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}1/\theta^{n} & \theta\le x_1,x_2,\cdots x_n\le 2\theta,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

似然函数可写成

$$L(\theta)=\begin{cases}1/\theta^{n} & \theta\le x_{(1)}\le x_{(n)}\le 2\theta,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

对于满足条件 $x_{(n)}/2\le\theta\le x_{(1)}$ 的 任意 θ 有

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}\le\frac{1}{(x_{(n)}/2)^n},$$

所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=x_{(n)}/2=\max_{1\le i\le n}x_i/2.$$

θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=X_{(n)}/2=\max_{1\le i\le n}X_i/2.$$

八、（14 分）

解：**1.** 对于给定的正数 α， $0<\alpha<1$，满足条件 $P(\chi^2>\chi^2_\alpha(n))=\alpha$ 的点 $\chi^2_\alpha(n)$ 称为自由度为 n 的 χ^2 分布上 α 分位点.

2. $H_0:\sigma^2\le 0.016$ ； $H_1:\sigma^2>0.016$

检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域为 $W=\{(x_1,\cdots,x_n):\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)\}$

查表得： $\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.05}(24)$=36.415

由 $n=25,s^2=0.025$ 计算得 $\chi^2=\dfrac{24S^2}{0.016}=37.5>36.415$

因此，拒绝 $H_0:\sigma^2\le 0.016$.