2014级概率与数理统计试题（A卷）

一、（12分）

1、解： 记 A_1 ={任取一件为第一台车床加工的零件}，

A_2 ={任取一件为第二台车床加工的零件}，

B={任取一件零件为不合格品}

由全概率公式得到

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)$$

$$=0.7\times 0.03+0.3\times 0.05$$

=0.036

2、解： $P(B\mid \overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.85$

$$P(AB)=P(B)-0.85(1-P(A))$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.988$$

二、（12分）

1、解：（1）由分布函数的性质 $\boldsymbol{F(-\infty)=0}$, $\boldsymbol{F(+\infty)=1}$

可得 $$\begin{cases} A+B\,arctg(-\infty)=A+B\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ A+B\,arctg(+\infty)=A+B\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=\dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

（2）由（1）得到 $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}arctg\,x \quad , \quad -\infty<x<\infty$

因此

$$
\begin{aligned}
P(-1<X\le 1)&=F(1)-F(-1)\\
&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg(1)\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg(-1)\right)\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2、**解：** X 的密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\quad,\quad -\infty<x<\infty$$

$Y=e^X$ 的可取值范围是$(0,\infty)$，由 $y=e^x$ 得 $y'=e^x>0$

故$y=e^x$在$(-\infty,\infty)$上严格单增，其反函数$h(y)=\ln y$，且$h'(y)=\dfrac{1}{y}$

因此， $Y=e^X$ 的密度函数

$$
\begin{aligned}
f_Y(y)&=\begin{cases} f_X(\ln y)\left|\dfrac{1}{y}\right| &, y>0\\ 0 &, y\le 0\end{cases}\\
&=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2\sigma^2}} &, y>0\\ 0 &, y\le 0\end{cases}
\end{aligned}
$$

三、（16 分）

1、**解：**（1）由于 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$ $f_Y(z-x)=\begin{cases}2(z-x), & 0\le z-x<1\\ 0, & 其\ 它\end{cases}$

因此$Z=X+Y$的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z 2(z-x)dx, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1 2(z-x)dx, & 1\le z<2\\ 0, & 其\ 它\end{cases}$$

$$=\begin{cases} z^2, & 0 \le z < 1 \\ 2z - z^2, & 1 \le z < 2 \\ 0, & \text{其 它} \end{cases}$$

(2) 由于 X 的分布函数为 $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$

Y 的分布函数为 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y^2, & 0 \le y < 1 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$

因此 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 $F_U(u) = F_X(u)F_Y(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ u^3, & 0 \le u < 1 \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$

$U = \max\{X, Y\}$ 的概率密度函数为 $f_U(u) = \begin{cases} 3u^2, & 0 < u < 1 \\ 0, & \text{其 它} \end{cases}$

2、解：$P(Z \le 0.5 \mid X = 0) = \dfrac{P(Z \le 0.5，X = 0)}{P(X = 0)} = \dfrac{P(X = 0，Y \le 0.5)}{P(X = 0)}$

$$= \frac{P(X = 0)P(Y \le 0.5)}{P(X = 0)} = \frac{1}{2}$$

四、（16 分）

1、解：$E(X) = 0, D(X) = 1.$

$E(Y) = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 1 + 0^2 = 1$

$$E(Y^2) = E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x2}{2}} \mathrm{d}x = 3,$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)^2] = 3 - 1^2 = 2.$$

或 $X \sim N(0,1), Y = Y^2 \sim \chi^2(1), E(Y) = 1, D(Y) = 2.$

$$E(XY) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x2}{2}} \mathrm{d}x = 0,$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0=0.$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=1+2=3.$$

2、解：由 X 的概率密度函数和分布函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{6}x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}1\text{-}e^{-\frac{1}{6}x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

得到 $U=\min\{X,Y,Z\}$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_U(u)=1\text{-}(1-F_X(u))(1-F_Y(u))(1-F_Z(u))=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{2}u}, & u>0\\ 1, & 其它\end{cases}$$

$$f_U(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}, & u>0\\ 1, & 其它\end{cases}$$

因此 $EU=2$，$DU=4$.

五、（8 分）

解：由题知 X_i 服从 $U[-0.5,0.5]$ 分布,

$$E(X_i)=0,\ D(X_i)=\frac{1}{12},\ i=1,2,\ldots,1200.$$

根据中心极限定理知，所求的概率为

$$P\{\left|\sum_{i=1}^{1200}X_i\right|<10\}=P\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{1200}X_i-0}{\sqrt{1200}\sqrt{\frac{1}{12}}}\right|<\frac{10}{\sqrt{1200}\sqrt{\frac{1}{12}}}\}$$

$$\approx\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826.$$

六、（8 分）

解：

(1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$\frac{9S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2(9)$$

$$(2)P\left(0.2088\sigma^2 \le \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \le 2.1665\sigma^2\right)$$

$$=P\left(2.088 \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \le 21.665\right)$$

$$=P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \ge 2.088\right)-P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \ge 21.665\right)$$

$$=0.99-0.01=0.98$$

七、（16 分）

1、解：由于 $EX=\int_0^{\lambda} x\dfrac{2}{\lambda^2}(\lambda-x)dx=\dfrac{\lambda}{3}$

令 $EX=\bar{X}$

得λ的矩估计为 $\hat{\lambda}=3\bar{X}$

由于$E\hat{\lambda}=E(3\bar{X})=3EX=\lambda$

因此$\hat{\lambda}$是λ的无偏估计.

2、解：似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P(X=x_i)=P(X=1)P(X=2)P(X=3)$$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-\theta)^2=2\theta^3(1-\theta)^3$$

对数似然函数为$\ln L(\theta)=\ln 2+3\ln\theta+3\ln(1-\theta)$

对θ求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}=0$$

解得θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}$$

八、（12 分）

1、解：假设H_0：μ=5， H_1：$\mu \neq 5$

检验统计量为 $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域为$W=\{|t|\geq t_{0.025}(8)=2.306\}$

由$n=9,\bar{x}=5.9,s=0.9$计算得：$|t|$=3>2.306

因此，拒绝H_0认为该零件的长度与 5mm 有显著差异.

2、解：该检验犯第一类错误的概率为

$$P(拒绝H_0|H_0成立)=P(S^2\leq 0.349|\sigma^2=0.8)=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leq\frac{8?0.349}{0.8}\right)$$

$$=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leq 3.49\right)=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leq\chi^2_{0.90}(8)\right)=0.10$$