16卷子 答案

2019年12月24日 星期二　　上午11:20

16卷子

计9 B

2016 级概率与数理统计试题（A 卷）

座号__________班级__________学号__________姓名__________

（本试卷共 8 页，八个大题，满分 100 分；最后一页空白纸为草稿纸）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

附表：

$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$t_{0.025}(15)=2.1314$，$t_{0.025}(16)=2.1199$，

$t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.05}(16)=1.7459$，$\chi^2_{0.025}(4)=11.1433$，$\chi^2_{0.975}(4)=0.4844$，$\chi^2_{0.025}(5)=12.8325$，

$\chi^2_{0.975}(5)=0.8312$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.4877$，$\chi^2_{0.95}(4)=0.7107$，$\chi^2_{0.5845}(4)=2.8428$

一、填空题（12 分）　得分

1. 设 A，B 为两个事件，则事件 $\overline{A\cup B}$ 表示 A与B都不发生（回答该事件表示的含义）.

2. 若 $P(A)=0.6$，$P(A\cup B)=0.84$，$P(\overline{B}\mid A)=0.4$ 则 $P(B)=$ 0.6.

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，用 Y 表示对 X 的 3 次独立重复观察中事件 $\{X\le\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P(Y=2)=$ $\frac{9}{64}$.

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，都服从参数为 2 的泊松分布，则 $P\{X+Y=0\}=$ e^4.
   $X+Y\sim P(4)$

5. 已知 $EX=-2$，$EX^2=5$，则 $D(1-3X)=$ 9.

6. 设随机变量 X 满足 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式可得 $P(|X-\mu|>3\sigma)\le$ $\frac{1}{9}$.

7. 设随机变量序列 $X_1, X_2,\dots, X_n,\dots$ 相互独立，都服从参数 $\lambda=1$ 的泊松分布，则 $\lim_{n\to\infty}P(X_1+\cdots+X_n\ge n+2\sqrt{n})=$ $P(\frac{X_1+\cdots X_n-n\mu}{}\ge 2)=1-\Phi(2)=0.0228$

8. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立且 $\xi\sim\chi^2(n),\eta\sim\chi^2(m)$，则 $E(\xi+\eta)=$ $m+n$，$D(\xi+\eta)=$ $2(m+n)$.

9. 已知一批零件的长度 X(单位：cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机的取出 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，则 μ 的置信水平为 95%的置信区间是 $(39.51, 40.49)$.

10. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均未知，$x_1,\dots,x_5$ 是总体 X 的样本值，假设 H_0: $\sigma^2=4$，H_1: $\sigma^2=1$. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下的拒绝域是 $s^2\le 0.7107$，则该检验犯第一类错误的概率是 $P(s^2\le 0.7107\mid \sigma^2=4)=P(\chi^2(4)\le 0.7107)=0.05$，犯第二类错误的概率是 $\beta=P(s^2>0.7107\mid\sigma^2=1)=P(\chi^2(4)>2.8428)=0.5845$.

二、（12 分）　得分

甲、乙、丙 3 台机床各自独立的加工同一种零件，已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\frac{1}{12}$，甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\frac{3}{20}$.

1. 分别求甲、乙、丙 3 台机床各自加工的零件是一等品的概率；
2. 从甲、乙、丙加工的零件中各自取一个检验，求至少有一个一等品的概率.

(1) A: 甲为一等品　B: 乙为一等品

C: 丙为一等品　且 A, B, C 独立

$P(A\bar{B})=\frac{1}{4}$　$P(B\bar{C})=\frac{1}{12}$　$P(AC)=\frac{3}{20}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{10}$　$P(B)=\frac{1}{6}$　$P(C)=\frac{1}{2}$

(2) $P(A\cup B\cup C)=\frac{17}{24}$

三、（16 分）　得分

1. 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	1	3
P_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	c

令 $Y=X^2$.

（1）确定常数 c 的值；（2）求 Y 的分布律；（3）求 Y 的分布函数。

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求（1）常数 A，B 的值；（2）$P\{X\le 2\}$，$P\{X>3\}$；（3）X 的概率密度函数 $f(x)$.

1. $c=\frac{17}{30}$

2.

Y	1	4	9
P	$\frac{1}{15}+\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{17}{30}$

3. $F_Y(y)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{4}{15} & [1,4)\\ \frac{13}{30} & [4,9)\\ 1 & [9,+\infty)\end{cases}$

(1) $A=1$　$B=-1$

(2) $P(X\le 2)=1-e^{-2}$　$P(X>3)=1-F(3)=e^{-3}$

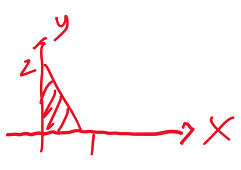
(3) $f_X(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

四、（14 分）　得分

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D=\{(x, y): x>0, y>0, 2x+y\le 2\}$ 上服从均匀分布.

1. 写出 (X, Y) 的联合概率密度函数 $f(x, y)$；
2. 求 X 和 Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断 X 和 Y 是否相互独立（说明理由）；
3. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

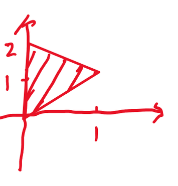
1. $f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$



2. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$　$\begin{cases}2-2x & 0<x<1\\ 0\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}1-\frac{y}{2} & 0<y<2\\ 0\end{cases}$

3. $Z=X+Y$



$f_Z(z)=\begin{cases}z & 0<z<1\\ 2-z & 1\le z<2\\ 0\end{cases}$

五、（14 分）　得分

设二维随机变量 (X, Y)，已知 $EX=1$，$EY=0$，$DX=4$，$DY=1$，$\rho_{XY}=\frac{2}{3}$，令 $Z=2X-3Y$。

试求：1. EZ，DZ；2. $cov(X, Z)$，ρ_{XZ}；3. 判断 X 与 Z 是否独立，为什么？

解：1. $Z=3X-3Y$)　$E(Z)=2$　$D(Z)=4D(X)+9D(Y)-12Cov(X,Y)$　又 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow D(Z)=9$

2. $Cov(X,Z)=2D(X)-3Cov(X,Y)=4$

3. $\rho(X,Z)=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)D(Z)}}=\frac{2}{3}\ne 0$

六、（8 分）　得分

设总体 X 和总体 Y 相互独立，且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自总体 X 的一个样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_5$ 是来自总体 Y 的一个样本，令 $\bar{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i$，$S_X^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar{X})^2$。

问 $\frac{10(\bar{X}-\mu)^2+9S_X^2}{2\sum_{i=1}^{5}(Y_i-\mu)^2}$ 服从什么分布？并给出证明.

六. $X_1\cdots X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$

$Y_1\cdots Y_5\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\Rightarrow \frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$\Rightarrow V=\sum_{i=1}^{5}(\frac{Y_i-\mu}{\sigma})^2\sim\chi^2(5)$

又 $\bar{X}=N(\mu,\frac{\sigma^2}{10})$　$\frac{9S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$ 独立

$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}\sim N(0,1)$

显然 U、V 独立

$F=\frac{\frac{U}{10}}{\frac{V}{5}}\sim F(10,5)$

七、（12 分）　得分

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本观测值. 求 1. 参数 θ 的矩估计；2. 参数 θ 的最大似然估计.

七. 1. $u=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

$=\int_0^{\infty}x\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx$

$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta$

$\Rightarrow\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}u=\hat{\theta}_{矩}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}$

2. $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_{xi}(x_i)=\frac{x_1\cdots x_n}{\theta^{2n}}e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_1^2+\cdots x_n^2)}$

$\ln(L(\theta))=\ln(x_1\cdots x_n)-2n\ln\theta$

$\ln'(L(\theta))=-2n\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots x_n^2)\cdot\frac{-2}{\theta^3}=0$

$\hat{\theta}_{似}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

八、（12 分）　得分

已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布 $N(\mu, 0.048^2)$。今抽取5根纤维，测得其纤度的样本均值 $\bar{x}=1.414$，样本方差 $s^2=0.00778$。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，这天纤度的波动是否正常？

① H_0: $\sigma^2=0.048^2$　H_1 $\sigma^2\ne 0.048^2$

② 检验量 $k=\frac{(n-1)S^2}{0.048^2}\sim\chi^2(n-1)$

③ 拒绝域: $W=\{k\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $k\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

$=k\le 0.4844$ 或 $k\ge 11.1433$

④ $\hat{k}=13.51$

⑤ 拒绝