

17-18-2 概率统计参考答案 (A 卷)

一、(12 分) 每空 1 分

1. 事件 A 和 B 都不发生 2. 0.6 3. 9/64 4. e^{-4} 5. 9 6. 1/9 7. 0.0228
 8. $n+m$, $2(n+m)$ 9. [39.51, 40.49] 10. 0.05, 0.5845

二、(12 分)

解: (1) 设 A 、 B 、 C 分别表示甲、乙、丙 3 台机床加工出的零件是一等品。

$$\text{易知: } P(A\bar{B}) = \frac{1}{4}, P(B\bar{C}) = \frac{1}{12}, P(AB) = \frac{3}{20}$$

$$\text{有独立性可得 } P(A)P(\bar{B}) = \frac{1}{4}, P(B)P(\bar{C}) = \frac{1}{12}, P(A)P(B) = \frac{3}{20}$$

$$\text{解方程组得: } P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{8}, P(C) = \frac{7}{9}$$

$$(2) P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{9} = \frac{11}{12}$$

三、(16 分)

$$1. \text{ 解: } (1) \text{ 由 } \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + c = 1, \text{ 得 } c = \frac{17}{30}$$

(2) $Y = X^2$ 的分布律为

Y	1	4	9
P_k	4/15	1/6	17/30

(3) Y 的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{4}{15}, & 1 \leq y < 4 \\ \frac{13}{30}, & 4 \leq y < 9 \\ 1, & y \geq 9 \end{cases}$$

$$2. \text{ 解 } (1) \text{ 由 } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} F(x) \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$(2) P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-2}$$

$$P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3}$$

$$(3) f(x) = F'(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

四、(14 分)

解：(1) (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0, 2x + y \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_0^{2-2x} 1 dy = 2-2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_0^{\frac{2-y}{2}} 1 dx = \frac{2-y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

在区域 $D = \{(x,y) | x > 0, y > 0, 2x + y \leq 2\}$ 上, $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$,

X 和 Y 不相互独立.

(3) $Z = X + Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_0^z 1 dx, & 0 < z < 1, \\ \int_0^{2-z} 1 dx, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} = \begin{cases} z, & 0 < z < 1, \\ 2-z, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

五、(14 分)

解：(1) $E(Z) = E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2$

$$D(Z) = D(2X - 3Y) = D(2X) + D(3Y) - 2Cov(2X, 3Y)$$

$$= 4D(X) + 9D(Y) - 12Cov(X, Y)$$

$$= 16 + 9 - 12\sqrt{D(X) \cdot D(Y)} \cdot \rho_{XY} = 9$$

$$(2) Cov(X, Z) = 2Cov(X, X) - 3Cov(X, Y) = 4$$

$$\rho_{XZ} = \frac{Cov(X, Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}} = \frac{2}{3}$$

$$(3) \because \rho_{XZ} = \frac{2}{3} \neq 0 \quad \therefore \text{不独立}$$

六、(8分)

解：由于 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/10)$ ，因此 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{10}} \sim N(0,1)$ ， $\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/10} \sim \chi^2(1)$

又由性质可知， $\frac{9S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$ ，且 \bar{X} 和 S_X^2 相互独立，

因此， $\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/10} + \frac{9S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$

由于 $\frac{Y_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1), i=1, \dots, 5$ 且相互独立，因此，

$$\sum_{i=1}^5 \left(\frac{Y_i-\mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(5)$$

所以，

$$\frac{10(\bar{X}-\mu)^2 + 9S_X^2}{2 \sum_{i=1}^5 (Y_i-\mu)^2} \sim F(10, 5)$$

七、(12分)

解：(1) 由于 $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \theta$

$$\text{令 } EX = \bar{X}, \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \theta = \bar{X}$$

解得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{X}$

$$(2) \text{ 似然函数为 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta^2} e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}} = \frac{1}{\theta^{2n}} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\theta^2}}$$

$$\text{对数似然函数为 } \ln L(\theta) = -2n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\theta^2}$$

$$\text{对 } \theta \text{ 求导并令其为零，得 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\text{解得 } \theta \text{ 的最大似然估计为 } \hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

八、(12分)

解：提出假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

选取检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \stackrel{H_0 \text{真}}{\sim} \chi^2(n-1)$

拒绝域 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ or $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$

已知 $n = 5$, $\sigma_0 = 0.048$, $\alpha = 0.05$, $s^2 = 0.00778$

查表 $\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(4) = 11.143$, $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(4) = 0.484$

计算 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 13.51 > 11.143$

拒绝 H_0 , 即在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下认为这天纤度的波动有显著变化。