17卷子 答案

2019年12月24日 星期二　　上午11:18

17卷子

课程编号：100172003　　北京理工大学 2018-2019 学年第二学期　　计9 A

2017 级概率与数理统计试题（A 卷）

座号________ 班级________ 学号________ 姓名________

（本试卷共 8 页，八个大题，满分 100 分；最后一页空白纸为草稿纸，可撕下，考试结束后不交此页草稿纸，答案写在草稿纸上无效）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

附表：

$\Phi(2.5)=0.994$, $\Phi(1.5)=0.933$, $\Phi(2.33)=0.99$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.64)=0.95$，$t_{0.05}(8)=1.8595$，$t_{0.025}(8)=2.3060$，$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.18$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.700$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$

一、填空题（10 分）　得分

1. 一名射手连续向一目标射击三次，事件 A_i 表示射手第 i 次击中目标(i=1,2,3)，则 $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ 表示的含义是 三次都没打中 .

2. 设随机变量 X 的分布函数满足 $F(x)=a-e^{-x}, x>0$，则 $a=$ 1 .　$\lim_{x\to\infty} F(x)=1$

3. 如果(X,Y)服从二维正态分布，则其边缘分布 一定是 （一定是或不一定是）正态分布.

4. 设 $X\sim N(0,0.5), Y\sim N(0,0.5)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $E|X-Y|=$ $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.
$X-Y\sim N(0,1)$
$E|X-Y|=E|u|=\int_{-\infty}^{\infty}|u|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

5. 设随机变量 X 服从几何分布，期望为 4，则 $P(X=1)=$ $\frac{1}{4}$.　$\frac{1}{p}=4$

6. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ 是独立同分布的随机变量序列，且有有限的期望 $E(X_k)=\mu$ 与方差 $D(X_k)=\sigma^2>0, k=1,2,\ldots$，则 $Y=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$ 依概率收敛到________.

7. 设随机变量 $X\sim F(n,n)$ 且 $P(X>A)=0.3$，A>0 为常数，则 $P(X>\frac{1}{A})=$ 0.7 .　$\frac{1}{X}\sim F(n,n)$

8. 某保险公司多年统计资料表明，在索赔户中，被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中，因被盗向保险公司索赔的户数. 则被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率近似为 0.927 .
$X\sim B(100,0.2) \Rightarrow E(X)=20$　$D(X)=16$
$P=P(14\le X\le 30)=\Phi(2.5)-\Phi(1.5)$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\mu\in R$，$\sigma>0$ 未知，$\bar{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为 $\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

10. 设总体$X\sim N(\mu,4^2)$，$x_1,\ldots,x_{16}$是总体X的样本值，已知假设H_0: $\mu=0$，H_1: $\mu>0$.在显著性水平$\alpha=0.01$下的拒绝域是 $W=\{\bar{x}>z_{0.01}\}$
$=\{\bar{x}>2.33\}$

二、（12 分）　得分

1. 叙述两个事件互斥和独立的关系.
1. AB互斥 $\Leftrightarrow AB=\phi$
AB独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$
若P(A)=0或P(B)=0，则A,B必独立，但不确定是否互斥
若P(A)>0，P(B)>0，则独立与互斥不能同时发生

2. 为了防止意外，某矿内同时设有两种报警系统甲和乙，每种系统单独使用时，系统甲有效的概率为 0.92，系统乙有效的概率为 0.93. 在系统甲失灵的情况下，系统乙有效的概率为 0.85. 求：(1) 发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；(2) 在系统乙失灵的情况下，系统甲有效的概率.
(1) $P(A\cup B)=0.988$　(2) $P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=0.829$

三、（12 分）　得分

1.设随机变量 X 的分布函数如下：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1/4, & -1\le x<2\\ 1/2, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

求（1）随机变量 X 的分布律；（2）$P(X>1)$.

(1)

X	-1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(2) $P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{4}$

2. 设随机变量 X 服从区间$(-1,1)$上的均匀分布，求

（1）$P(|X|<\frac{1}{4})$；（2）设 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

2 (1) $P(|X|<\frac{1}{4})=P(-\frac{1}{4}<X<\frac{1}{4})=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}f_X(x)dx=\frac{1}{4}$
(2) $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0或y>1\\ \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0<y\le 1\end{cases}$

四、（16 分）　得分

设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1）求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（2）判断 X 和 Y 是否相互独立，并给出理由；

（3）求函数 $Z=\min(X,Y)$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

（4）求函数 $U=3X+4Y$ 的分布函数 $F_U(u)$ 和密度函数 $f_U(u)$.

四 (1) $f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

(2) $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$ 成立 $\Rightarrow X,Y$ 独立

(3) $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$
又 $F_X(z)=1-e^{-3z}$　$F_Y(z)=1-e^{-4z}$
$\Rightarrow F_Z(z)=1-e^{-3z}e^{-4z}$
$\Rightarrow f_Z(z)=7e^{-7z}$

(4) $F_U(u)=P(U\le u)$
1° 当 $u\le 0$　$F_U(u)=0$
2° $u>0$
$F_U(u)=1-(u+1)e^{-u}$

五、（14 分）　得分

1. 叙述切比雪夫不等式.
1. X为随机变量，E(X)和D(X)存在且有限，则$\forall\varepsilon>0$
有 $P(|X-E(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$.

(1) $E(X)=1$　$D(X)=1$　$E(Y)=2$　$E(Y^2)=24$
$D(Y)=20$
(2) $Cov=4$　$\rho(XY)=\frac{2}{\sqrt{5}}$
(3) $\rho(XY)\ne 0$，故相关不独立

（1）求 $E(X)$，$D(X)$，$E(Y)$，$D(Y)$；（2）求X与Y的相关系数；
（3）判断X与Y是否相关，判断X与Y是否独立（说明理由）.

六、（8 分）　得分

设$X_1,X_2,\cdots,X_5$是来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，令 $Z=\frac{\sqrt{3}(X_1+X_2)}{\sqrt{2(X_3^2+X_4^2+X_5^2)}}$。

(1) 求 Z 的分布；(2) 求 Z^2 的分布.（要求写出具体过程）

(1) $Z\sim t(3)$　(2) $Z^2=\frac{U^2}{\frac{V}{3}}$　$U\sim N(0,1)$　$V\sim\chi^2(3)$　$U^2\sim\chi^2(1)$　$Z^2\sim F(1,3)$

七、（14 分）　得分

1、设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \sqrt{\alpha}<x<\sqrt{\alpha}+2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中，α>0 为未知参数。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自该总体的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本观测值. 求参数α的矩估计.
$X\sim U(\sqrt{\alpha},\sqrt{\alpha}+2)$　$\alpha=(u-1)^2 \Rightarrow \alpha_{矩}=(\bar{X}-1)^2$

2. 设总体 X 服从以 p 为参数的两点分布，即其分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

其中 0<p<1 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自该总体的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本观测值。求参数 p 及 $\beta=\frac{1-p}{p}$ 的最大似然估计.

2. $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$　$k=0$或1
$L(p)=\prod P(X_i=x_i)=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$
$L_n'(p)=0$
解出 $\hat{p}_{似}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$

八、（14 分）　得分

1. 叙述假设检验的理论依据.

2. 某卷装卫生纸净含量按标准要求为200克/卷，已知该卷装卫生纸净含量服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。今抽取9卷，测得其净含量样本均值$\bar{x}=197$克，样本标准差s=4.5克。问在显著性水平$\alpha=0.05$下，该卷装卫生纸净含量是否符合要求？

1. 实际推断原理或小概率原理，即在一次试验中，概率很小的事件几乎不发生

2. ① 提出假设　H_0 $u=200$　H_1 $u\ne 200$
② 检验量　$T=\frac{\bar{X}-200}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\overset{H_0为真}{\sim}t(n-1)$
③ 拒绝域　$W=\{(X_1,X_q)\mid|T|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$
$=\{|T|>2.306\}$
④ $\hat{T}=-2$
⑤ 判断，接受