2013-2014 学年第一学期

概率与数理统计试题 A 卷参考答案(信二学生会学习部整理)

一、（12 分）甲，乙两箱中有同种产品，其中甲箱中有 3 件正品和 3 件次品，乙箱中仅有 3 件正品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱.（1）求从乙箱中任取一件产品为次品的概率；（2）已知从乙箱中取出的一件产品为次品，求从甲箱中取出并放入乙箱的 3 件产品中恰有 2 件次品的概率.

解：（1）设 A_i 表示“第一次从甲箱中任取 3 件，其中恰有 i 件次品”，（i=0,1,2,3）

设 B 表示“第二次从乙箱任取一件为次品”的事件；

$$P(A_0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20},P(A_1)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20},P(A_3)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20},P(A_4)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$$

$$P(B/A_0)=0,P(B/A_1)=\frac{C_1^1}{C_6^1}=\frac{1}{6},P(B/A_2)=\frac{C_2^1}{C_6^1}=\frac{2}{6},P(B/A_3)=\frac{C_3^1}{C_6^1}=\frac{3}{6}$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\,|\,A_i)=\frac{1}{4}$$

（2）$P(A_2\,|\,B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=0.6$

-

二、（12 分） 1. 设连续型随机变量 $X \sim U(a, b)$（$a>0, b>0$，$a<b$，且均为常数），求 $Y=\frac{1}{6}\pi X^3$ 的概率密度函数.

2. 设随机变量 X 是在[0,1]上取值的连续型随机变量，且 $P\{X\le 0.29\}=0.75$，若 Y=1－X，试确定 k，使得 $P\{Y\le k\}=0.25$.

解：1. X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

$Y=\frac{1}{6}\pi X^3$ 的可取值范围是 $\left(\frac{\pi a^3}{6},\frac{\pi b^3}{6}\right)$

由 $Y=\frac{1}{6}\pi X^3$ 得 $y'=\frac{x^2}{2}>0$，故 $Y=\frac{1}{6}\pi X^3$ 在 $\left(\frac{\pi a^3}{6},\frac{\pi b^3}{6}\right)$ 上严格单增，其反函数

$$x=h(y)=\sqrt[3]{\frac{6y}{\pi}}，且 h'(y)=\frac{1}{3}\left(\frac{6y}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{6}{\pi}=\frac{2}{\sqrt[3]{36\pi y^2}},$$

所以 $Y=\frac{1}{6}\pi X^3$ 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X\left(\sqrt[3]{\frac{6y}{\pi}}\right)\left|\frac{2}{\sqrt[3]{36\pi y^2}}\right| & ,\ \frac{\pi a^3}{6}<y<\frac{\pi b^3}{6}\\ 0 & ,\quad \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{(b-a)\sqrt[3]{36\pi y^2}} & ,\ \frac{\pi a^3}{6}<y<\frac{\pi b^3}{6}\\ 0 & ,\quad \text{其他}\end{cases}$$

（2）X、Y 的分布函数分别记为 $F_X(x)$、$F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-X\le y\}=1-P\{X\le 1-y\}=1-F_X(1-y),$$

要使 $P\{Y\le k\}=0.25$，所以 $F_X(1-k)=0.75$，

由已知，$F_X(0.29)=0.75$，从而 $1-k=0.29$，解得 $k=0.71$

三、（16 分）1. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<x^2<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$.

2．设随机变量 X,Y 相互独立，都服从期望为 1 的指数分布.（1）求 $Z = X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$;（2）求 $U = Min(X, Y)$的数学期望 $E(U)$.

解：1、

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{3}{4}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}(1-x^2), & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{3}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2、（1） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\mathbf{d}x.$

被积函数的非零域: $\begin{cases}x>0\\ z-x>0.\end{cases}$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z e^{-x}e^{-(z-x)}\mathbf{d}x=ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2）

$$F_U(u)=1-(1-F_X(u))(1-F_Y(u))=\begin{cases}1-e^{-2u}, & u>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

关于 u 求导，得

$$f_U(u)=\begin{cases}2e^{-2u}, & u>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}u\cdot f_U(u)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u\cdot 2e^{-2u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}.$$

四、（16 分）设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,4)$，Y 服从指数分布并且 $E(Y)=2$，$Cov(X,Y)=-1$，令 $Z=X-aY$，且已知 $Cov(X,Z)=Cov(Y,Z)$.

（1）求常数 a;（2）求 Z 的期望 $E(Z)$与方差 $D(Z)$;（3）求 X 和 Z 的相关系数 ρ_{XZ} .

解: (1)由题设条件得到 $E(X)=0, D(X)=4;\quad E(Y)=2, D(Y)=4;$因此

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(Y,Z)\\
\Rightarrow\ &\operatorname{cov}(X,X-aY)=\operatorname{cov}(Y,X-aY)\\
\Rightarrow\ &\operatorname{cov}(X,X)-a\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)-a\operatorname{cov}(Y,Y)\\
\Rightarrow\ &4-a(-1)=-1-a\times 4\\
\Rightarrow\ &a=-1
\end{aligned}
$$

(2) $Z=X-aY=X+Y$

$E(Z) = E(X+Y) = E(X)+ E(Y)=0+2=2$

$$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=4+4-2=6;$$

(3) $$Cov(X,Z)=\operatorname{cov}(X,X+Y)=\operatorname{cov}(X,X)+\operatorname{cov}(X,Y)=4+(-1)=3;$$

$$\rho_{XZ}=\frac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Z)}}==\frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

五、（8 分）一复杂系统由 n 个相互独立的部件所组成，每个部件能正常工作的概率均为 0.9，且必须至少有 80%的部件正常工作才能使整个系统正常工作，问 n 至少为多大才能使系统正常工作的概率不低于 0.95.

解：设X为n个部件中正常工作的个数，

$$X \sim B(n, 0.9)$$

E（X）$= 0.9n$，D（X）$= 0.09n$，

由中心极限定理

$\dfrac{X - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}$近似服从$N(0, 1)$，

所以系统能正常工作的概率为

$$P(X \geq 0.8n) = P\left(\frac{X - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \geq \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)$$

由$\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95, \dfrac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.645, n \geq 24.354,$

n至少为25.

六、（8 分）1．设 X_1， X_2， …, X_{10} 是来自总体 $X \sim N(0, 0.3^2)$ 的样本，试求统计量 $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.3}\right)^2$ 所服从的分布（写出分布和自由度，并说明理由）.

2．设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$， $\sigma^2 > 0$， $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 为来自该总体的样本，令

$$Y = \frac{\left(\sum_{i=1}^{16} X_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{16}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}，其中 \overline{X} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i$$

试确定常数 C，使 CY 服从 F 分布，并指出自由度.

1.解：因为 $X_i \sim N(0, 0.3^2)$， $i = 1, \cdots, 10$， $\frac{X_i}{0.3} \sim N(0,1)$， $i = 1, \cdots, 10$，

且 X_1， X_2， …, X_{10} 相互独立，由 χ^2 分布的定义可知 $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.3}\right)^2$ 服从 χ^2 分布，自由度为 10.

2. 解：由于 $X_1, X_2, \cdots X_{16}$ 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，所以 $\sum_{i=1}^{16} X_i$ 服从分布 $N(0, 16\sigma^2)$， $\frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{4\sigma}$ 服从分布 $N(0,1)$， $\left(\frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{4\sigma}\right)^2$ 服从分布 $\chi^2(1)$.

同时，由于 $\sum_{i=1}^{16}(X_i - \overline{X})^2 = (16-1)\frac{1}{(16-1)}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \overline{X})^2 = (16-1)S^2$，

$\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(16-1)S^2}{\sigma^2}$ 服从分布 $\chi^2(15)$. 利用 $\overline{X}$ 与 S^2 的独立性，可知

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{16} X_i}{4\sigma}\right)^2 \div \left(\frac{\sum_{i=1}^{16}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}\Bigg/15\right) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{16} X_i\right)^2}{16\sigma^2} \times \frac{15\sigma^2}{\sum_{i=1}^{16}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{15}{16}Y$$

服从 F 分布，自由度为 1 和 15, 其中 C=15/16.

七、（16 分）1．设总体 X 的分布律为

X	0	1	2
p_i	α^2	$2\alpha(1-\alpha)$	$(1-\alpha)^2$

其中 $\alpha(0<\alpha<1)$ 为未知参数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本.

（1）求参数 α 的矩估计．（2）若已知取得了样本值 $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=0, x_5=2, x_6=1$,请给出参数 α 的矩估计值.

2．设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, \quad x\in R$，其中 $\lambda>0$ 为未知参数. .$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应的样本值. 求参数 λ 的最大似然估计量，判断该估计是否是 λ 的无偏估计，并证明.

解：(1)由于 $EX=0\times\alpha^2+1\times2\alpha(1-\alpha)+2\times(1-\alpha)^2=2-2\alpha$

令 $EX=\bar{X}$ 即 $2-2\alpha=\bar{X}$

解得 α 的矩估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{2-\bar{X}}{2}$

由于 $\bar{x}=\dfrac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)=1$，因此 α 的矩估计值为 $\hat{\alpha}=\dfrac{1}{2}$

(2) 似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x_i|}{\lambda}}=\frac{1}{(2\lambda)^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

对数似然函数为 $\ln L(\lambda)=-n\ln 2\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

对 λ 求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$$

解得 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$

由于 $E\hat{\lambda}=E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right)=E|X|=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=\lambda$,因此 $\hat{\lambda}$ 是 λ 的无偏估计.

八、（12 分）设炮弹的炮口速度（单位：米/秒）服从正态分布，某种炮弹出厂时，

其炮口速度的方差为16. 经过5年贮存后，随机抽取该种炮弹9发做试验，得样本方差为s^2=36.

（1）问能否认为经过 5 年贮存后该种炮弹炮口速度的方差有变化，显著水平α=0.10.

（2）若希望知道经过5年贮存后该种炮弹炮口速度的方差是无变化还是变大，给定原假设为炮口速度的方差无变化，备择假设为方差变大. 针对拒绝域$W=\{S^2>26.724\}$，问该检验犯第一类错误的概率为多少？

解答：（1）H_0：$\sigma^2=4^2$，H_1：$\sigma^2\neq4^2$，

当H_0成立时有 $\dfrac{8S^2}{4^2}\sim\chi^2(8)$

于是检验的拒绝域为

$$W=\{\frac{8S^2}{4^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(8)\ \text{or}\ \frac{8S^2}{4^2}>\chi^2_{\alpha/2}(8)\}$$

查表得$\chi^2_{0.95}(8)=2.733, \chi^2_{0.05}(8)=15.507$，计算得

$$\frac{8S^2}{4^2}=\frac{8\times36}{16}=18>15.507$$

于是拒绝H_0，认为经过5年贮存后该种炮弹炮口速度的方差有变化。

（2）给定 H_0：$\sigma^2=4^2$，H_1：$\sigma^2>4^2$，针对拒绝域 $W=\{S^2>26.724\}$，犯第一类错误的概率为

$$P(\text{拒绝 } H_0|H_0\text{ 成立})=P(S^2>26.724|\sigma^2=4^2)=P(\frac{8S^2}{4^2}>\frac{8\times26.724}{16})$$

$$=P(\frac{8S^2}{4^2}>13.462)=0.10\ 。$$