2010-2011 年概率论与数理 A 统计答案（信二学习部整理）

一：解：

设 A，B，C 分别为甲、乙、丙三人回答问题；

D 为正确回答问题。

由已知 P（A）=P（B）=P（C）=1/3,

P(D|A)=0.8, P(D|B)=0.4, P(D|C)=0.3

P(D)=P（A）P（D|A）+P（B）P（D|B）+ P（C）P（D|C）

= (0.8+0.4+0.3)/3=0.5

二|

解：X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\ ,\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0\ \ ,\ \text{其他}\end{cases}$$

$Y=\cos X$ 的可取值范围是$(0,1)$

当$0<y<1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)$

$$=P\left(-\frac{\pi}{2}\le Y\le -\arccos y\right)+P\left(\arccos y\le Y\le\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y}\frac{1}{\pi}dx+\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}dx$$

因此，$Y=\cos X$ 的密度函数

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\quad ,\ 0<y<1$$

故，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

三

解：（1）

$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=1.$$

$$\int_0^1\int_0^{\infty} ce^{-x}ydxdy=\frac{c}{2}=1\Rightarrow c=2.$$

..................................（+4）

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

当 x>0时，$f_X(x)=\int_0^1 2e^{-x}y\,dy=e^{-x}.$

当$x\le 0$时，$f_X(x)=0.$

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

..................................（+4）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$f_Y(y)=\int_0^{\infty} 2e^{-x}ydx=2y, 0<y<1.$$

..................................（+4）

（3） 因为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 所以 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立.

..................................（+2）

（4）因为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立，则

$$P(\max(X,Y)>1)=1-P(\max(X,Y)\le 1)$$
$$=1-P(X\le 1,Y\le 1)$$
$$=1-\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^1 2y\,dy \qquad \text{..................................}（+4）$$
$$=1-[1-e^{-1}]=e^{-1}$$

四解:（1）易求得 D 的面积为 4，所以(X,Y)的联合概率密度函数;

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}}$$

（3）因为:

$$\boldsymbol{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^2\frac{1}{4}dy=\frac{2-x}{4}, & 0<x<2\\ \int_{-x}^2\frac{1}{4}dy=\frac{2+x}{4}, & -2<x<0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}}$$

$$\boldsymbol{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\frac{1}{4}dx=\frac{y}{2}, & -2<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}}$$

易见 $\boldsymbol{f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)}$ 所以 X 与 Y 不独立

（2）

$$\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^2 x\frac{2-x}{4}dx+\int_{-2}^0 x\frac{2+x}{4}dx=0}$$

$$\boldsymbol{E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{-y}^{y}xy\frac{1}{4}dx=0}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0$$

所以 X 与 Y 不相关。

五解： $EX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},$ ……… 2 分

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\int_0^1 2x^3dx-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$ ……… 2 分

令 $S_{18}=\sum_{i=1}^{18}X_i$，由中心极限定理，所求概率为

$$P(S_{18}>14)=P\left(\frac{S_{18}-18\times 2/3}{\sqrt{18\times\frac{1}{18}}}>\frac{14-18\times 2/3}{1}\right)=1-\Phi(2)=0.023$$

……… 4 分

六、 解：（1）似然函数

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}(\beta+1)x_i^{\beta}=(\beta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta}$$

对数似然函数

$$l(\beta)=\ln L(\beta)=n\ln(\beta+1)+\beta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

对 β 求导并令其为零

$$\frac{d(\ln L(\beta))}{d\beta}=\frac{n}{\beta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

得 β 的最大似然估计

$$\beta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$$

（2）由于 $$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

所以 $$E\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = n-1$$

故 $$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = (n-1)\sigma^2$$

从而

$$E\left(\sigma_1^2\right) = \sigma^2 ,\ E\left(\sigma_2^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 ,\ E\left(\sigma_2^2\right) = \frac{n-1}{n+1}\sigma^2$$

故，只有σ_1^2是σ^2的无偏故计，σ_2^2，σ_3^2是σ^2的有偏故计

七

1．解：（1）检验包装的食盐净重量是否是 500g。

假设H_0： $\mu = 500$； H_1： $\mu \neq 500$。

选取检验统计量：$t = \dfrac{\overline{X} - 500}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

构造拒绝域： $|t| \geq t_{0.025}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.3060.$ ------4 分

由样本计算得：$|t| = \dfrac{|498 - 500|}{2/3} = 3.$ 故拒绝H_0，可以认为此批食盐的净重量与 500g 有显著性差别。 ------2 分

（2）假设 $H_0 : \sigma^2 \leq 3, \quad H_1 : \sigma^2 > 3$

选取检验统计量：$\chi^2 = (n-1)\dfrac{S^2}{3}$，

构造拒绝域：$\chi^2 \ge \chi^2_{0.05}(n-1) = \chi^2_{0.05}(8) = 15.507$ -------4 分

由样本计算得：$\chi^2 = 8\times\frac{4}{3} = 10.667$. 故不拒绝$H_0$，可以认为此批食盐的方差没有显著性地大于 3。 -------2 分