2017 级概率与数理统计试题（A 卷）

一、填空题（10 分，每空 1 分）

1. 三次都没有击中目标； 2. 1； 3. 一定是； 4. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$； 5. 0.25； 6. $\sigma^2+\mu^2$； 7. 0.7； 8. 0.927； 9. $\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$； 10. $\{(x_1,x_2,\cdots,x_{16}):\bar{x}\geq 2.33\}$；

二、（12 分）

1. 设事件为 A 和 B，当 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 时，A 和 B 互斥可以推出 A 和 B 不独立；反之，A 和 B 独立则有 A 和 B 不互斥；

若 $P(A)$和 $P(B)>0$ 至少一个为 0 时，由互斥可以推出独立，独立不一定互斥.

2.解：设 A 表示系统甲单独使用时有效，B 表示系统乙单独使用时有效

则已知条件为： $P(A)=0.92, P(B)=0.3$，$P(B\mid\overline{A})=0.85$

（1）$P(B\mid\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(BA)}{1-P(A)}$

$\Rightarrow P(BA)=P(B)-P(B\mid\overline{A})[1-P(A)]=0.93-0.85\times0.08=0.862$

$P(B\bigcup A)=P(B)+P(A)-P(BA)=0.92+0.93-0.862=0.988\ldots$

（2）$P(A\mid\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(BA)}{1-P(B)}=\dfrac{0.92-0.862}{1-0.93}=\dfrac{29}{35}=0.829\ldots\ldots$

三、（12 分）

解：1. 随机变量 X 的分布列为

X	-1	2	3
P	1/4	1/4	1/2

$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=3/4$

2. 解：（1）$P(|X|<1/4)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

（2）随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1/2, & x\in(-1,1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

显然当 $y\leq0$ 时，$P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=0$；

当 $y\in(0,1)$时，$P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{2}dx=\sqrt{y}$

当 $y\geq1$时，$P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=1$

因此，Y 的分布函数为$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leq0\\ \sqrt{y}, & y\in(0,1)\\ 1, & y\geq1\end{cases}$

Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}, & y\in(0,1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

四、（16 分）

1. 解： (1)X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}3e^{-3x}\int_0^{\infty}4e^{-4y}dy, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}4e^{-4y}\int_0^{\infty}3e^{-3x}dx, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(2)由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，因此 X 和 Y 相互独立.

(3)X 和 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-4y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$
$$=1\text{-}(1\text{-}F_X(z))(1\text{-}F_Y(z))=\begin{cases}1\text{-}e^{-7z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}7e^{-7z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(4)$U=3X+4Y$ 的分布函数为

$$F_U(u)=P(U\le u)=P(3X+4Y\le u)=\begin{cases}\iint\limits_{\substack{3x+4y\le u\\ x>0,y>0}}12e^{-(3x+4y)}dxdy, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12\int_0^{\frac{u}{3}}\int_0^{\frac{u-3x}{4}}e^{-(3x+4y)}dydx, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-u}-ue^{-u}, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$U=3X+4Y$ 的密度函数为 $f_U(u)=\begin{cases}ue^{-u}, & u>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

五、（14 分）

1.切比雪夫不等式为：设随机变量 X 的期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2>0$，则对于任意 $\varepsilon>0$，成立不等式： $P\{|X-\mu|\ge\varepsilon\}\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 或者 $P\{|X-\mu|\le\varepsilon\}\ge1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ ……

2.解：解：（1）

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{\infty}x\ e^{-x}dx=1.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{\infty}x^2\ e^{-x}dx=2.$$

$$D(X)=\ E(X^2)-[E(X)]^2=2-1=1.$$

$$E(Y)=E(X^2)=2.$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^4f(x)dx=\int_{0}^{\infty}x^4\ e^{-x}dx=24.$$

$$D(Y)=\ E(Y^2)-[E(Y)]^2=24-4=20.$$

（2）因为

$$E(XY)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx=\int_{0}^{\infty}x^3\ e^{-x}dx=6.$$

所以，

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=6-1\times 2=4.$$

所以

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{4}{\sqrt{1}\sqrt{20}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

（3）因为$\rho_{XY}=\frac{2}{\sqrt{5}}\neq 0$　所以，X与Y相关.

因为X与Y相关，即存在线性关系，所以X与Y不独立。

六、（8分）

解：（1）$\because X_i\sim N(0,\sigma^2)$，$\therefore \frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1), i=1,2,\cdots,5,$

且有$\therefore X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)\Rightarrow \frac{X_1+X_2}{\sigma\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$$\therefore \sum_{i=3}^{5}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim \chi^2(3),\text{即}\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$$

由独立性和 t 分布的定义知

$$\frac{\frac{X_1+X_2}{\sigma\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3\sigma^2}}}\sim \mathrm{t}(3),\text{即}\frac{\sqrt{3}(X_1+X_2)}{\sqrt{2(X_3^2+X_4^2+X_5^2)}}\sim \mathrm{t}(3)$$

（2）由（1）知$\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$，$\frac{X_1+X_2}{\sigma\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，所以有$\frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$

由独立性和 F 分布的定义知

$$\frac{\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}}{\dfrac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3\sigma^2}}=\frac{3}{2}\frac{(X_1+X_2)^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}\sim F(1,3)$$

七、（14 分）

解：（1）由于 $EX=\sqrt{\alpha}+1$， 即 $\alpha=\left(EX-1\right)^2$

令 $EX=\bar{X}$， 解得 α 的矩估计为 $\alpha=\left(\bar{X}-1\right)^2$

(2) 先求 p 的最大似然估计

似然函数为 $$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}\left(1-p\right)^{1-x_i}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\left(1-p\right)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

对数似然函数为 $$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\left(1-p\right)$$

对 p 求导并令其为零，得 $$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{p}+\frac{n}{1-p}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

解得 p 的最大似然估计值为 $$p=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$$

最大似然估计量为 $p=\bar{X}$

由最大似然估计的不变性知，$\beta=\dfrac{1-p}{p}$ 的最大似然估计为 $\hat{\beta}=\dfrac{1-\hat{p}}{\hat{p}}=\dfrac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$

八、（14 分）

1. 实际统计推断原理，又叫小概率原理：即在单次试验中，概率很小的事件几乎不会发生。

2. 提出假设 H_0: $\mu=200$， H_1: $\mu\neq 200$.

选取检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0\text{真}}{\sim}t(n\text{-}1)$,拒绝域 $|t|=\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$

已知 $n=9$，$\mu_0=200$, $\bar{x}=197$, s =4.3589，$\alpha=0.05$，查表 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$

计算 $|t|=\left|\dfrac{197-200}{4.5/\sqrt{9}}\right|=2<2.306$

接受 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下认为该卷装卫生纸净含量符合要求。