2012-2013-1 概率统计标准答案(信二学习部整理)

一、

（1）设 B="顾客买下该箱产品"， $A_i(i=0,1,2)$ 为该箱产品中次品数，

$$P(A_0)=0.8, P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.1$$

$$P(B\mid A_0)=1, P(B\mid A_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}, P(B\mid A_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.94$$

（2） $P(A_0\mid B)=\dfrac{P(A_0)P(B\mid A_0)}{P(B)}=0.85$

二、

解：X 的密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty$$

先求 $Y=3X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$

当 $y\le 0$ 时， $F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(3X^2\le y)$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y}{3}}\le X\le\sqrt{\frac{y}{3}}\right)$$

$$=\Phi\left(\sqrt{\frac{y}{3}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{y}{3}}\right)$$

因此，$Y=3X^2$ 的密度函数

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{3y}}\left[f_X\left(\sqrt{\dfrac{y}{3}}\right)+f_X\left(-\sqrt{\dfrac{y}{3}}\right)\right], & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{6}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

三、

解：

（1） $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{\frac{x}{2}}^{1}1\,\mathrm{d}y=1-\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{2y}1\,\mathrm{d}x=2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y),0<y<1,0<x<2y$,所以 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 不相互独立.

$$P(X<1)=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

（2） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y.$ 被积函数的非零域 $\begin{cases}0<y<1,\\ 0<z-y<2y.\end{cases}$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_{\frac{z}{3}}^{z}1\mathrm{d}y=\dfrac{2z}{3}, & 0<z<1,\\ \int_{\frac{z}{3}}^{1}1\mathrm{d}y=1-\dfrac{z}{3}, & 1<z<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

四、

解：（1）

$$E(X)=\iint_{R^2} xf(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dx\int_{0.5x}^{\infty} x\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy=\int_0^{\infty} x\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=2.$$

$$E(X^2)=\iint_{R^2} x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dx\int_{0.5x}^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dy=\int_0^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=8.$$

所以 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=8-2^2=4.$

(2)

$$E(Y)=\iint_{R^2} yf(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_0^{2y} y\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dx=\int_0^{\infty} y^2e^{-y}dy=2$$

$$E(Y^2)=\iint_{R^2} y^2 f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_0^{2y} y^2\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dx=\int_0^{\infty} y^3e^{-y}dy=6$$

所以 $D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=6-2^2=2.$

(3)

$$E(XY)=\iint_{R^2} xyf(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_0^{2y} xy\cdot\frac{1}{2}e^{-y}dx=\int_0^{\infty} 2y^2\cdot\frac{y}{2}e^{-y}dx=6.$$

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=6-2\cdot 2=2.$

最终

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\frac{2}{\sqrt{4\cdot 2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

五、解：设 S 为用电高峰时，同时用电的户数，电站至少应具有 xW 发电量，才能以 95%的概率保证供电,x 需满足

$$P(200S\le x)\ge 0.95.$$

由题意,

S~B(10000,0.9), $E(S)=9000, D(S)=900,$

由中心极限定理

$$\frac{S-9000}{\sqrt{900}}\text{近似服从}N(0,1),$$

$$P(200S \le x) = P(S \le x/200) \approx \Phi(\frac{x/200-9000}{\sqrt{900}}) = \Phi(\frac{x-1800000}{6000}),$$

由$\Phi(\frac{x-1800000}{6000}) \ge 0.95$.得到$\frac{x-1800000}{6000} \ge 1.65, x \ge 1809900.$

六、

解：(1). $X_i/\sigma \sim N(0,1)$， $i=1,2,3,4$

由X^2分布的性质知

$$\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2)$$

服从$\mathrm{X}^2(4)$分布。

(2). $X_1+X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$ $X_4-X_3 \sim N(0,2\sigma^2)$

$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$ $\frac{X_4-X_3}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$

按X^2分布的性质知

$(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma})^2 \sim \mathrm{X}^2(1)$ $(\frac{X_4-X_3}{\sqrt{2}\sigma})^2 \sim \mathrm{X}^2(1)$

按F分布的性质知

$$Y=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_4-X_3)^2}=\frac{(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma})^2/1}{(\frac{X_4-X_3}{\sqrt{2}\sigma})^2/1} \sim F(1,1).$$

七、

解：(1)由$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{2}^{\infty}x2^{\alpha}\alpha x^{-(\alpha+1)}dx=\frac{2\alpha}{\alpha-1}$

得 $\alpha=\dfrac{EX}{EX-2}$

用 $\bar{X}$ 代替 EX 得 α 的矩估计为 $\hat{\alpha}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-2}$

(2) 似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=(2^{\alpha}\alpha)^{n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\alpha+1)}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\alpha)=n(\ln\alpha+\alpha\ln 2)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

对 α 求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L}{d\alpha}=n\left(\frac{1}{\alpha}+\ln 2\right)-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 α 的最大似然估计为

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln 2}$$

(3) 由 $E\left(C\sum_{i=1}^{n}iX_i\right)=C\sum_{i=1}^{n}iE(X_i)=C\mu\sum_{i=1}^{n}i=C\mu\dfrac{n(n+1)}{2}$

令

$$C\mu\frac{n(n+1)}{2}=\mu$$

得 $C=\dfrac{2}{n(n+1)}$

八、

解（1）H_0：$\mu=30$　　H_1：$\mu\neq 30$

选取检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

H_0的拒绝域 $w_0:|T|=\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

计算 $|T_0|=\left|\dfrac{\bar{x}-30}{0.1/\sqrt{10}}\right|=3.162$

$$|T_0|=3.162>t_{0.05}(9)=1.833$$

在显著性水平 α = 0.1 下 ，拒绝原假设, 认为 $\mu\neq 30$

（2）假设 H_0: $\sigma^2=\sigma_0{}^2=0.04$　　H_1: $\sigma^2\neq\sigma_0{}^2=0.04$

在原假设下，检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2}{\sigma_0^2}=\frac{(10-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

由于在 H_0 下 ξ 取值过大和过小都是拒绝 H_0 的依据. 所以其水平为 α 的拒绝域为

$$\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(10-1)\text{或 }\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(10-1)$$

$$\chi^2=\frac{(10-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(10-1)\times 0.01}{0.04}=2.25<\chi^2_{0.975}(9)=3.325$$

所以在显著性水平 0.1 下，拒绝原假设.总体方差与 0.04 有显著性差异。