

## 2010-2011 年概率论与数理统计 1 答案（信二学习部整理）

一、

解：  $A_i = \{\text{他第 } i \text{ 次及格}\}, i=1,2$

$$\text{已知 } P(A_1) = P(A_2|A_1) = P, \quad P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{P}{2}$$

(1)  $B = \{\text{至少有一次及格}\}$

$$\text{所以 } \bar{B} = \{\text{两次均不及格}\} = \bar{A}_1\bar{A}_2$$

$\therefore$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) \text{-----4 分}$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2|\bar{A}_1)]$$

$$= 1 - (1 - P)(1 - \frac{P}{2}) = \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}P^2 \text{-----2 分}$$

(2) 由乘法公式，有  $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = P^2$  -----2 分

由全概率公式，有  $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$

$$= P \cdot P + (1 - P) \cdot \frac{P}{2}$$

$$= \frac{P^2}{2} + \frac{P}{2}$$

-----2 分

$$\text{得 } P(A_1|A_2) = \frac{P^2}{\frac{P^2}{2} + \frac{P}{2}} = \frac{2P}{P+1} \text{-----2 分}$$

二、

解： 1、  $Y = \ln X$  的可取值范围是  $(-\infty, \infty)$

$$\text{由 } y = \ln x \text{ 得 } y' = \frac{1}{x} > 0$$

故  $y = \ln x$  在  $(0, \infty)$  上严格单增，

其反函数  $x = h(y) = e^y$ ，且  $h'(y) = e^y$  ..... (6 分)

所以  $Y = \ln X$  的密度函数

$$f_Y(y) = f_X(e^y)|e^y| \text{----- (2 分)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^y \sigma} e^{-\frac{(\ln e^y - \mu)^2}{2\sigma^2}} e^y$$

..... (2 分)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < y < \infty$$

2、因为

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| < \sigma) &= P(-\sigma < X - \mu < \sigma) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \end{aligned}$$

所以，随着  $\sigma$  的增大，概率  $P(|X - \mu| < \sigma)$  是不变的

..... (4 分)

三、

解：(1) (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{..... (4 分)}$$

$$(2) f_X(x) = \begin{cases} \int_1^4 \frac{1}{4} dy, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_1^3 \frac{1}{4} dx, & 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{..... (6 分)}$$

(3) 因为  $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

所以 X 和 Y 独立。..... (2 分)

$$(4) f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_1^{z-1} \frac{1}{4} dx, & 2 \leq z \leq 4 \\ \int_{z-3}^3 \frac{1}{4} dx, & 4 < z \leq 6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}(z-2), & 2 \leq z \leq 4 \\ \frac{1}{4}(6-z), & 4 < z \leq 6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

先求 U 的分布函数：

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ \frac{4 - 2 \times \frac{1}{2} \times (2u^2)}{4}, & 0 \leq u \leq 2 \\ 1, & u > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ 1 - \frac{1}{4} \times (2u^2), & 0 \leq u \leq 2 \\ 1, & u > 2 \end{cases}$$

求导数得 U 的密度函数为

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \times (2 - u), & 0 \leq u \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

四、

解：(1) 由 X, Y 的密度函数易知

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ 1 - e^{-y}, & y > 0. \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(\max(X, Y) \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) \\ &= P(X \leq z) \cdot P(Y \leq z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0; \\ (1 - e^{-\frac{1}{2}z})(1 - e^{-z}), & z > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0; \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} + e^{-z} - \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}z}, & z > 0. \end{cases}$$

(2) 由指数分布的期望与方差易知

$$\int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \quad \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}. \quad \text{因此}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^{\infty} z \left( \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} + e^{-z} - \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}z} \right) dz \\ &= \int_0^{\infty} z \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} dz + \int_0^{\infty} z \cdot e^{-z} dz - \int_0^{\infty} z \cdot \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}z} dz \\ &= 2 + 1 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z) dz = \int_0^{\infty} z^2 \left( \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} + e^{-z} - \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}z} \right) dz \\ &= \int_0^{\infty} z^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}z} dz + \int_0^{\infty} z^2 \cdot e^{-z} dz - \int_0^{\infty} z^2 \cdot \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}z} dz \\ &= 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 - 2 \left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{82}{9}. \end{aligned}$$

$$\text{最终 } \text{Var}(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) = \frac{82}{9} - \left( \frac{7}{3} \right)^2 = \frac{11}{3}.$$

五、

解 设第  $k$  位顾客的消费额为  $X_k (k=1, 2, \dots, 10000)$ ，商场日销售额为  $X$ ，则

$$X = \sum_{k=1}^{10000} X_k, \text{ 由已知}$$

$$E(X_k) = \frac{200 + 2000}{2} = 1100,$$

$$D(X_k) = \frac{(2000 - 200)^2}{12} = \frac{1800^2}{12} = 270000; \quad \text{-----} \quad 2 \text{ 分}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{10000} E(X_k) = 10000 \times 1100 = 11 \times 10^6,$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{10000} D(X_k) = 10000 \times 270000 = 27 \times 10^8. \quad \text{-----} \quad 2 \text{ 分}$$

进而，由中心极限定理，

$$P\{11 \times 10^6 - 30000 \leq X \leq 11 \times 10^6 + 30000\}$$

$$= P\left\{ -\frac{30000}{100 \times \frac{1800}{\sqrt{12}}} \leq \frac{X - 11 \times 10^6}{100 \times \frac{1800}{\sqrt{12}}} \leq \frac{30000}{100 \times \frac{1800}{\sqrt{12}}} \right\}$$

$$= 2\Phi\left(\frac{30000}{30000 \times \sqrt{3}}\right) - 1$$

$$= 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1 \approx 2\Phi(0.58) - 1 \approx 0.44 \quad \text{-----} \quad 4 \text{ 分}$$

六、

解：(1) 由于

$$EX = \lambda + 1 \quad \text{-----} \quad 3 \text{ 分}$$

$$\text{令 } EX = \bar{X}_n \quad \text{即} \quad \lambda + 1 = \bar{X}_n \quad \text{-----} \quad 3 \text{ 分}$$

解得  $\lambda$  的矩估计为

$$\hat{\lambda} = \bar{X}_n - 1 \quad \text{-----} \quad 3 \text{ 分}$$

(2) 似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\lambda+1} e^{-\frac{1}{\lambda+1}x_i} = (\lambda+1)^{-n} e^{-\frac{1}{\lambda+1}\sum_{i=1}^n x_i} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

对数似然函数为

$$\ln L = -n \ln(\lambda+1) - \frac{1}{\lambda+1} \sum_{i=1}^n x_i \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

对  $\lambda$  求导并令其为零，得

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = -\frac{n}{\lambda+1} + \frac{1}{(\lambda+1)^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

解得  $\lambda$  的最大似然估计为

$$\hat{\lambda} = \bar{x}_n - 1 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由于  $EX = \lambda + 1$ ，因此  $EX$  的最大似然估计为

$$\hat{\lambda} + 1 = \bar{x}_n \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

七、

解：(1) 检验该门课程成绩的平均分是否为 70。

假设  $H_0: \mu = 70$ ;  $H_1: \mu \neq 70$ 。

选取检验统计量  $t = \frac{\bar{X} - 70}{S/\sqrt{n}}$ ,

构造拒绝域:  $|t| \geq t_{0.025}(n-1) = t_{0.025}(35) = 2.030$  -----4 分

计算得:  $t = \frac{64-70}{15/6} = -2.4$  故拒绝  $H_0$ ，可以认为这门课程的平均成绩与 70

分有显著性差异。 -----2 分

(2) 检验该门课程成绩的方差是否低于 210。

假设  $H_0: \sigma^2 \leq 210$ ,  $H_1: \sigma^2 > 210$

选取检验统计量  $\chi^2 = (n-1) \frac{S^2}{210}$ ,

构造拒绝域:  $\chi^2 \geq \chi_{0.05}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(35) = 49.802$  -----4 分

由样本计算得:  $\chi^2 = 35 \times \frac{225}{210} = 37.50$ . 故不拒绝  $H_0$ ，可以认为该成绩的方差

没有显著地大于 210。 -----2 分