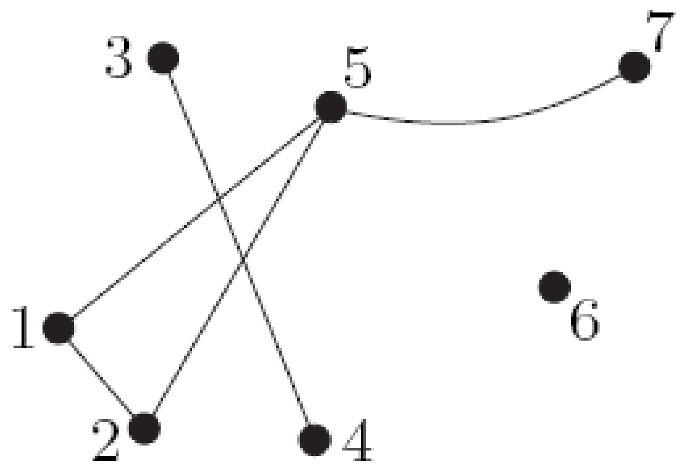
CHƯƠNG 5: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

PHẦN 1:

- Các khái niệm cơ bản
- Biểu diễn đồ thị
- Một số đồ thị đặc biệt
- Sự đẳng cấu của các đồ thị
- Đồ thị có hướng
- Đường đi và chu trình
- Sự liên thông

Các khái niệm cơ bản

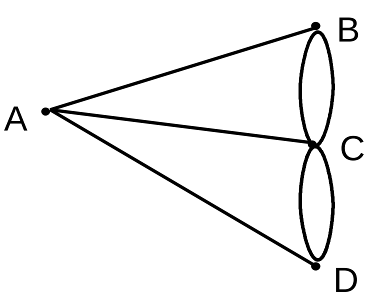
- Đồ thị (Graph)
  - $G = (V, E)$ với $V \neq \emptyset$
    - V: tập các đỉnh
    - E: tập các cạnh
  - Cạnh $e \in E$
    - ứng với 2 đỉnh $v, w \in V$
    - v, w là 2 đỉnh kề (hay liên kết) với nhau, e liên thuộc với v và w
    - Ký hiệu: $e = vw$ (…)
    - $v \equiv w$: e được gọi là vòng (khuyên) tại v

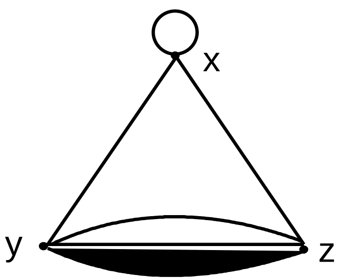


$$V = \{1, \ldots, 7\}$$
$$E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5,7\}\}$$

Các khái niệm cơ bản

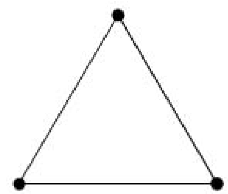
- Đồ thị (Graph)
  - *Cạnh bội* (song song)
    - Hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh
  - *Đơn đồ thị*
    - Đồ thị không có vòng và cạnh song song
  - *Đa đồ thị*
    - Các đồ thị không phải là đơn đồ thị

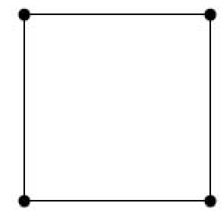




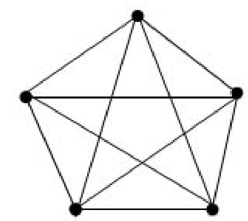
Các khái niệm cơ bản

- Đồ thị (Graph)
  - *Đồ thị đầy đủ*
    - Đồ thị mà mọi cặp đỉnh đều kề nhau
    - K_n: đơn đồ thị đầy đủ
  - *Đồ thị con*
    - Đồ thị $G' = (V', E')$
    - $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$
  - *Đồ thị hữu hạn*
    - E và V hữu hạn
  - *Đồ thị vô hạn*

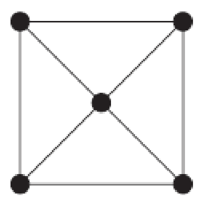




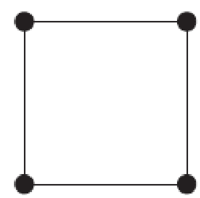
K_4



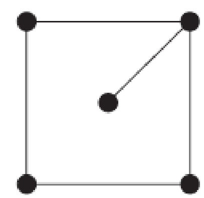
K_4



G



G'



G''

Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn hình học
  - Mỗi đỉnh ≡ một điểm
  - Mỗi cạnh ≡ một đường (cong hoặc thẳng) nối 2 đỉnh liên thuộc với nó
- Biểu diễn bằng ma trận
  - Thường được dùng để biểu diễn trên máy tính
  - 2 cách biểu diễn thường dùng
    - Ma trận kề
    - Ma trận liên thuộc

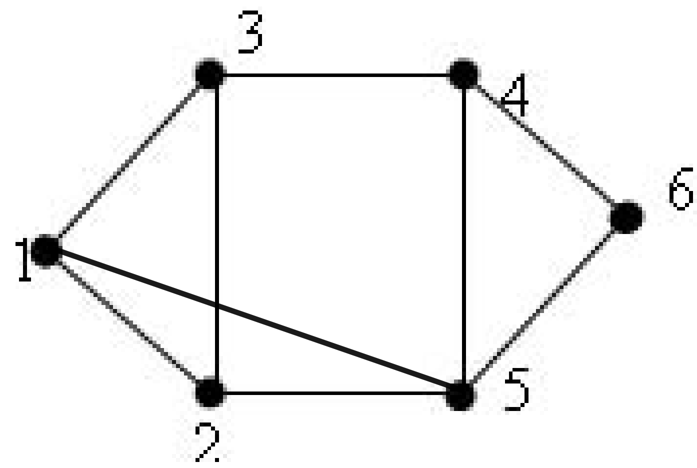
Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma trận kề
    - Ma trận vuông cấp *n* (số đỉnh của đồ thị)
    - Các phần tử a_{ij} được xác định bởi
      - $a_{ij} = 1$: Nếu $v_i v_j$ là một cạnh của *G*
      - $a_{ij} = 0$: Nếu $v_i v_j$ không là một cạnh của *G*
    - Tính chất
      - Phụ thuộc vào thứ tự liệt kê của các đỉnh
      - Ma trận là đối xứng
      - Một vòng được tính là một cạnh (a_{kk} = 1)

Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma trận kề
    - Ví dụ 1

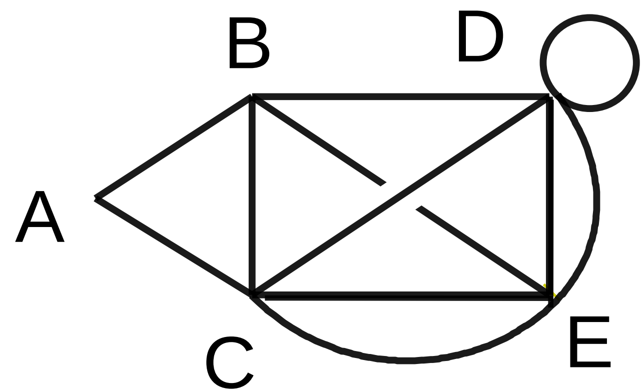
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0



Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma trận kề
    - Ví dụ 2

$$
\begin{array}{c}
\\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



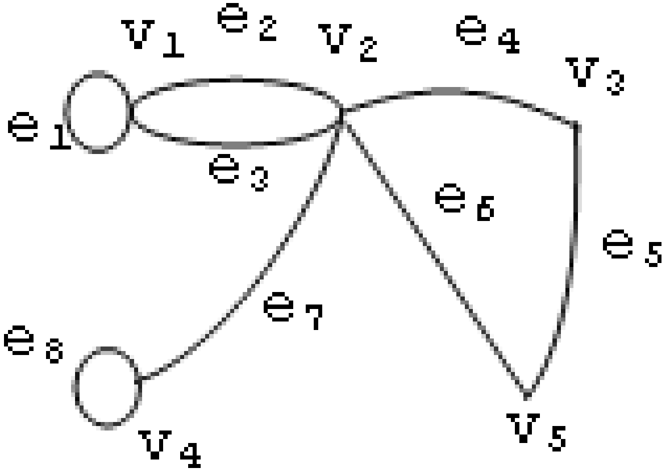
Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma trận liên thuộc
    - Ma trận $M = (a_{ij})_{nxm}$
    - Các phần tử a_{ij} được xác định bởi
      - $a_{ij} = 1$: Nếu cạnh e_j liên thuộc với v_i của G
      - $a_{ij} = 0$: Nếu cạnh e_j *không* liên thuộc với v_i của G
    - Tính chất
      - Các cột tương ứng với các cạnh bội là giống nhau trong ma trân liên thuộc
      - Các vòng ứng với một cột có đúng một phần tử bằng 1 ứng với đỉnh nối với vòng đó.

Biểu diễn đồ thị

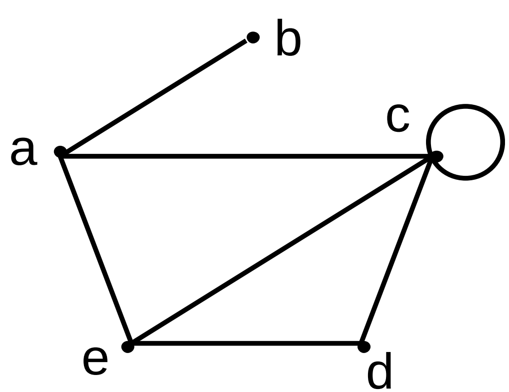
- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma liên thuộc
    - Ví dụ

$$
\begin{array}{c}
 \\
v_1 \\
v_2 \\
v_3 \\
v_4 \\
v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\left\|\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right\|
\end{array}
$$



Biểu diễn đồ thị

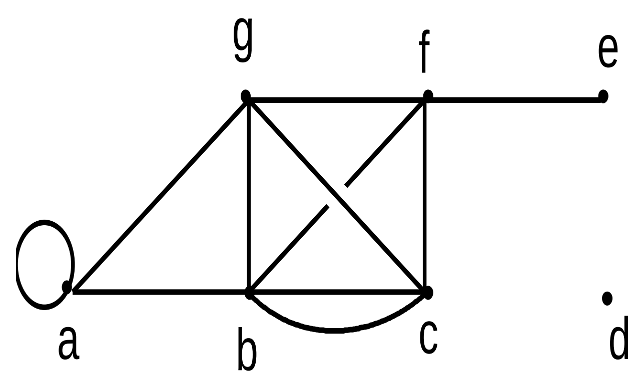
- Biểu diễn bằng bảng (danh sách liền kề)
  - Lưu trữ các đỉnh liền kề với một đỉnh
  - Ví dụ



Đỉnh	Đỉnh liền kề
a	b, c, e
b	a
c	a, c, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Các khái niệm cơ bản

- Bậc của đỉnh
  - Đỉnh của đồ thị G có bậc là *n* nếu nó kề với *n* đỉnh khác.
  - Ký hiệu: *deg*(*v*) hay *d*(*v*)
  - Mỗi vòng được kể là 2 cạnh tới một đỉnh
  - Đỉnh cô lập $\Leftrightarrow$ *deg*(*v*)=0
  - Đỉnh treo $\Leftrightarrow$ *deg*(*v*)=1
  - Cạnh treo có đầu mút là một đỉnh treo
  - Đồ thị rỗng: *deg*(*v*)=0 $\forall v$



deg(a) = 4; deg(b) = 5; deg(c) = 4; deg(d) = 0; deg(e) = 1; deg(f) = 4; deg(g) = 4

Các khái niệm cơ bản

- Bậc của đỉnh
  - Định lý 1.1
    - *Trong mọi đồ thị G = (V, E), tổng số bậc của các đỉnh của G bằng 2 lần số cạnh của nó*

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v)$$

    - *Hệ quả*
      - *Trong mọi đồ thị G = (V, E) ta có*
        - *Số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn*
        - *Tổng bậc của đỉnh bậc lẻ là một số chẵn*

Các khái niệm cơ bản

- Bậc của đỉnh
  - Định lý 1.2
    - *Trong mọi đơn đồ thị G = (V, E), nếu số đỉnh nhiều hơn 1 thì tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc.*
  - Định lý 1.3
    - *Trong mọi đơn đồ thị G = (V, E), nếu số đỉnh nhiều hơn 2 và có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không đồng thời có bậc bằng 0 hoặc n-1.*

Các khái niệm cơ bản

- Chứng minh và giải toán bằng phương pháp đồ thị

1. *Xây dựng đồ thị mô tả đầy đủ thông tin của bài toán*
   - *Mỗi đỉnh $v \in V \equiv$ một **đối tượng** trong bài toán*
   - *Mỗi cạnh $e \in E \equiv$ **mối quan hệ** giữa hai đối tượng*
   - *Vẽ đồ thị mô tả bài toán*
2. *Sử dụng các định nghĩa, tính chất, định lý, … suy ra điều cần phải chứng minh*

Các khái niệm cơ bản

- Một số bài toán ví dụ

Chứng minh rằng trong một cuộc họp tùy ý có ít nhất 2 đại biểu tham gia trở lên, luôn có ít nhất hai đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đến dự họp.

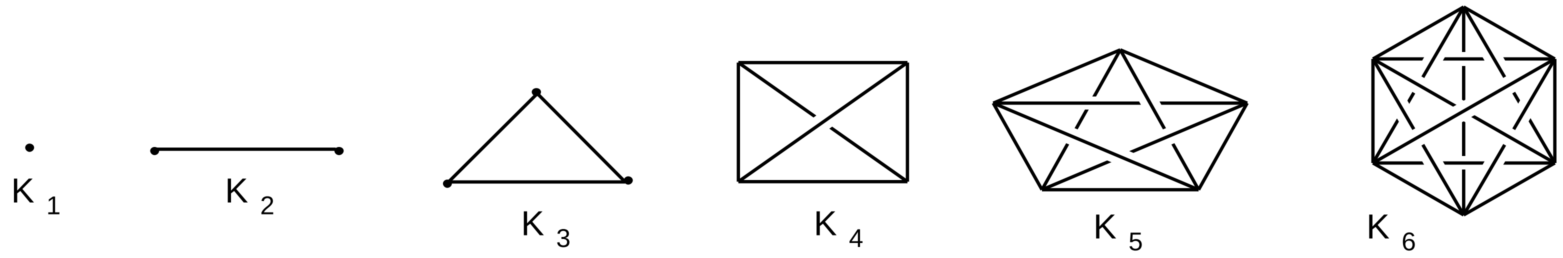
Các khái niệm cơ bản

- Một số bài toán ví dụ

Chứng minh rằng số người mà mỗi người đã có một số lẻ lần bắt tay nhau trên trái đất là một con số chẵn.

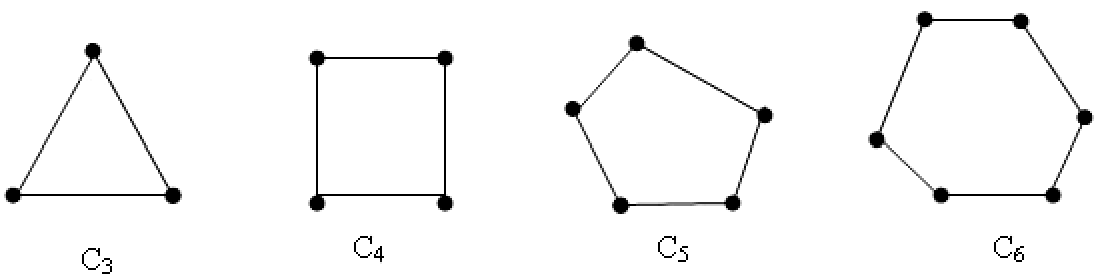
Một số đồ thị đặc biệt

- Đồ thị đầy đủ K_n
  - Đơn đồ thị
  - Số đỉnh: $|V| = n$
  - *Bậc:* $deg(v) = n – 1, \forall v \in V$
  - Số cạnh: $|E| = n(n - 1) / 2$



Một số đồ thị đặc biệt

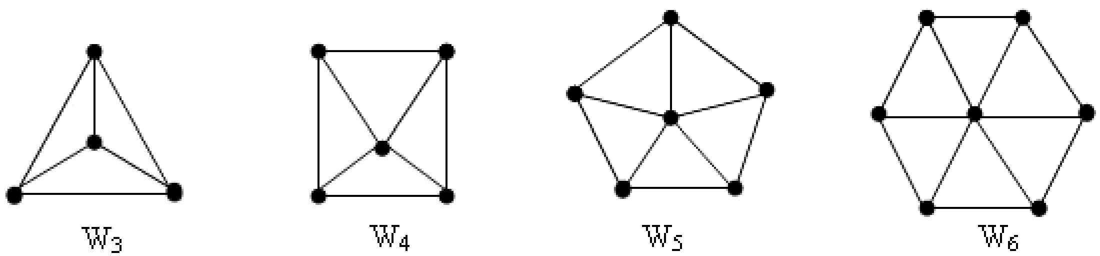
- Đồ thị vòng C_n
  - Đơn đồ thị
  - Số đỉnh: $|V| = n \geq 3$
  - *Bậc: deg*(v) = 2, $\forall v \in V$
  - Số cạnh: $|E| = n$



Một số đồ thị đặc biệt

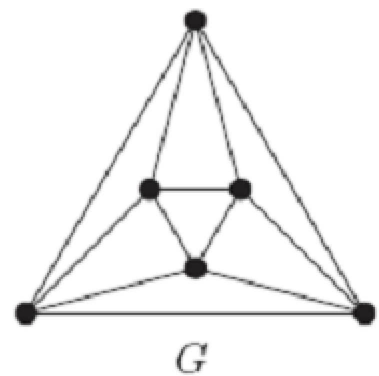
- Đồ thị hình bánh xe W_n
  - Nối các đỉnh của C_n với một đỉnh mới *u* ta được W_n
  - Số đỉnh: $|V| = n + 1, \quad n \geq 3$
  - *Bậc:* $deg(v) = 3, \forall v \in V \setminus \{u\};$

    $deg(u) = n$
  - Số cạnh: $|E| = 2n$



Một số đồ thị đặc biệt

- Đồ thị đều bậc k (Đồ thị k-đều)
  - Mọi đỉnh đều có cùng bậc k
  - Số đỉnh: $|V| = n$
  - *Bậc:* $deg(v) = k, \forall v \in V$
  - Số cạnh: $|E| = n.k/2$

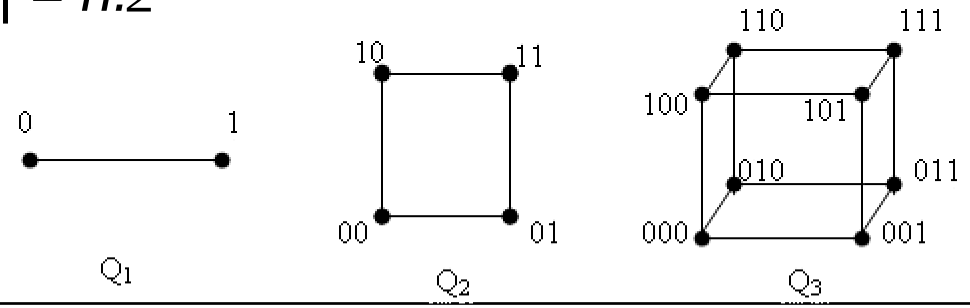


Ví dụ:

- C_n là đồ thị đều bậc 2
- K_n là đồ thị đều bậc (n-1)

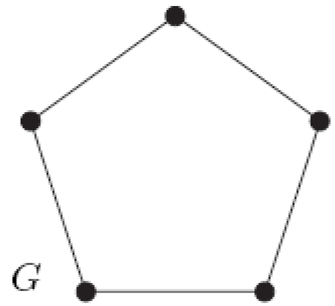
Một số đồ thị đặc biệt

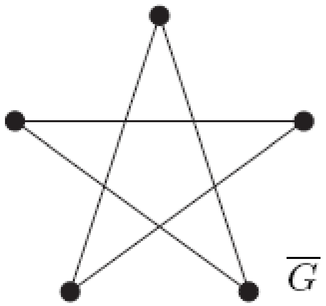
- Các khối *n*-lập phương Q_n
  - Có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một dãy số nhị phân với độ dài n.
  - Hai đỉnh là liền kề nếu và chỉ nếu các dãy nhị phân biểu diễn chúng chỉ khác nhau đúng 1 bit.
  - Số đỉnh: $|V| = 2^n$
  - *Bậc: deg*(*v*) = *n*, $\forall v \in V$
  - Số cạnh: $|E| = n.2^{n-1}$



Một số đồ thị đặc biệt

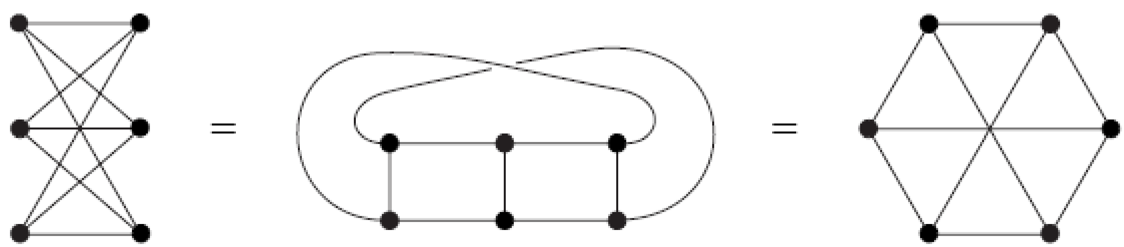
- Đồ thị bù
  - Hai đơn đồ thị G và G' được gọi là bù nhau
    - chúng có chung các đỉnh
    - Cạnh nào thuộc G thì không thuộc G' và ngược lại
  - Ký hiệu: G' = $\overline{G}$





Một số đồ thị đặc biệt

- Đồ thị lưỡng phân
  - Một đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập các đỉnh của G có thể phân thành 2 tập hợp không rỗng, rời nhau sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh thuộc tập này đến một đỉnh thuộc tập kia.
  - Ký hiệu: $K_{m,n}$



$K_{3,3}$

Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

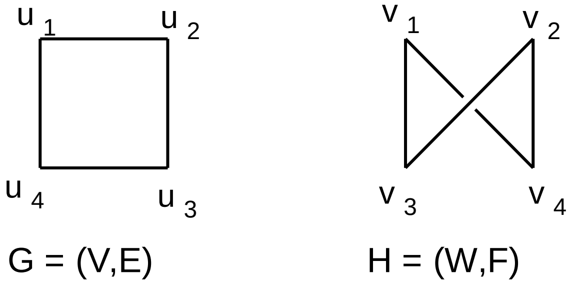
- Định nghĩa
  - $G(V, E)$ *đẳng cầu* với $G'(V', E')$, ($G \approx G'$) nếu
    - Tồn tại song ánh $f: V \rightarrow V'$
    - Bảo toàn quan hệ liền kề:

$$\forall u, v \in V,\ uv \in E \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E'$$

  - G đẳng cấu với G' thì
    - $|V| = |V'|$
    - $|E| = |E'|$
    - $\deg(v) = \deg(f(v)),\ \forall v \in V$

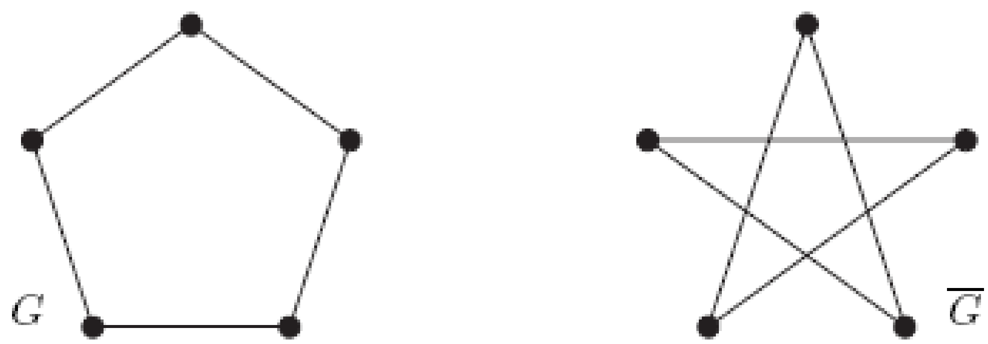
Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

- Định nghĩa
  - Chứng minh 2 đồ thị đẳng cấu
    - Điều kiện cần
      - Xét số cạnh, số đỉnh, bậc của đỉnh
    - Điều kiện đủ
      - Xây dựng song ánh bảo toàn quan hệ liền kề
  - Ví dụ 1:



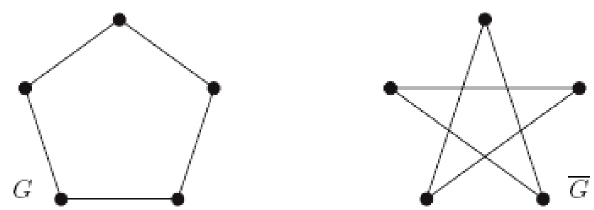
Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

- Định nghĩa
  - Chứng minh 2 đồ thị đẳng cấu
    - Ví dụ 2



Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

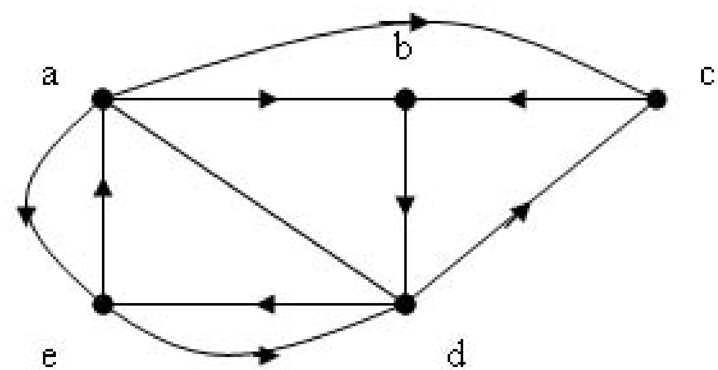
- Đồ thị tự bù
  - Định nghĩa
    - Đồ thị G tự bù nếu G đẳng cấu với phần bù của nó
    - Ví dụ



  - Định lý 1.4
    - Hai đồ thị có ma trận liền kề (theo một thứ tự nào đó của các đỉnh) bằng nhau thì đẳng cấu với nhau

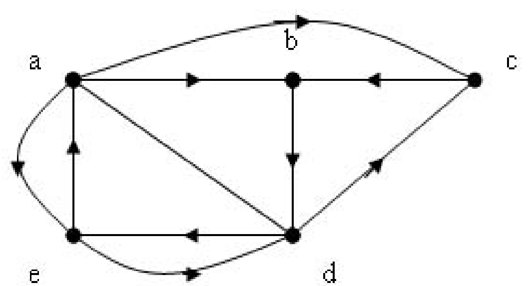
Đồ thị có hướng

- Định nghĩa
  - G = (V, E)
    - Tập đỉnh V
    - Tập cạnh (cung) E = { (a, b) | a,b $\in$ V }
  - e = (a, b) $\in$ E
    - Ký hiệu: e = $\overrightarrow{ab}$
    - e có hướng từ a đến b
    - a: đỉnh đầu;   b: đỉnh cuối
    - e là khuyên (vòng) $\Leftrightarrow$ a$\equiv$b
    - G được gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng của nó là đầy đủ



Đồ thị có hướng

- Bậc của đỉnh
  - Bậc vào
    - *deg* $^{-}$(v) = | { u | (u, v) $\in$ E } | = số cạnh có đỉnh cuối là v
  - Bậc ra
    - *deg* $^{+}$(v) = | { u | (v, u) $\in$ E } | = số cạnh có đỉnh đầu là v



  - Chú ý: Một khuyên (vòng) tại một đỉnh sẽ góp thêm một đơn vị vào bậc vào và bậc ra của đỉnh này.

Đồ thị có hướng

- Bậc của đỉnh
  - Định lý 1.5
    - Tổng bậc vào của các đỉnh bằng tổng bậc ra và bằng số cạnh của đồ thị

$$\sum_{i=1}^{|V|} \deg^{+}(v) = \sum_{i=1}^{|V|} \deg^{-}(v) = |E|$$

  - Đồ thị cân bằng

$$\deg^{+}(v) = \deg^{-}(v), \forall v \in V$$

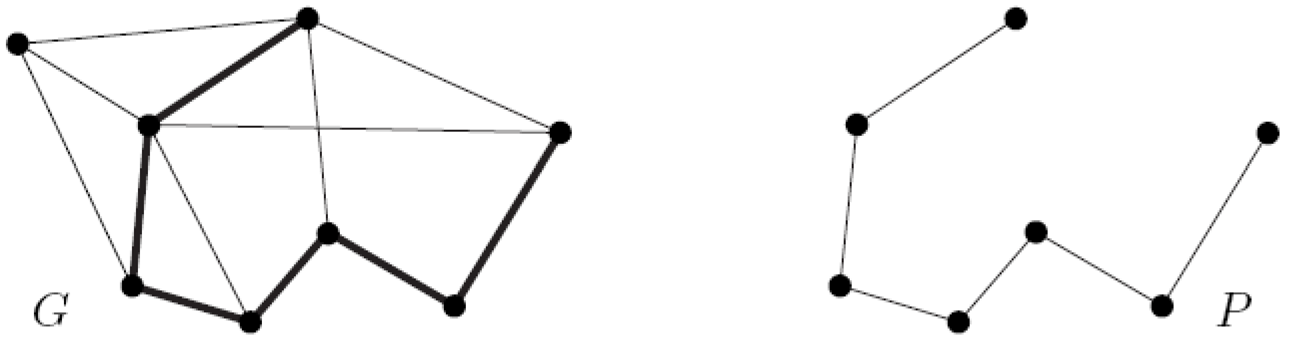
Đồ thị có hướng

- Bậc của đỉnh
  - Ví dụ
    - Có một nhóm gồm 9 đội bóng bàn thi đấu vòng tròn một lượt.
    - Hỏi sau khi có kết quả thi đấu của tất cả các đội có thể có trường hợp *bất kỳ đội nào trong 09 đội này cũng đều thắng đúng 05 đội khác trong nhóm được không?*

      (Lưu ý trong thi bóng bàn không có trận hòa)

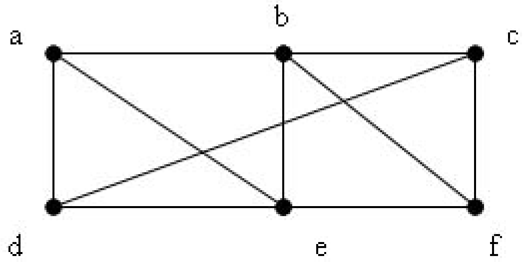
Đường đi và chu trình

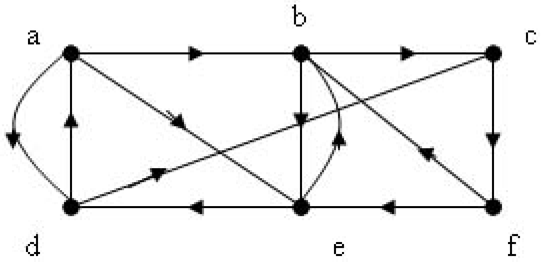
- Đường đi
  - Định nghĩa
    - Đường đi có độ dài n từ v_0 đến v_n với n là một số nguyên dương là một dãy các cạnh liên tiếp $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n$
    - v_0: đỉnh đầu; v_n: đỉnh cuối
    - Ký hiệu: $v_0v_1v_2 \ldots v_{n-1}v_n$
      đường đi $v_0 - v_n$



Đường đi và chu trình

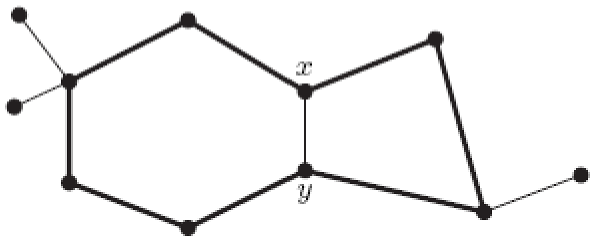
- Đường đi
  - Định nghĩa
    - Đường đi đơn giản (đường đi đơn)
      - Đường đi không qua cạnh nào quá một lần
    - Đường đi sơ cấp
      - Đường đi không qua đỉnh nào quá một lần
    - Đường đi sơ cấp ⇒ Đường đi đơn giản





Đường đi và chu trình

- Chu trình
  - Định nghĩa
    - Chu trình
      - đường đi khép kín ($v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n v_0$)
      - độ dài ít nhất là 3



    - Chu trình đơn giản
      - Chu trình không đi qua cạnh nào quá 1 lần
    - Chu trình sơ cấp
      - Chu trình không đi qua đỉnh nào quá 1 lần (trừ đỉnh đầu, đỉnh cuối)

Đường đi và chu trình

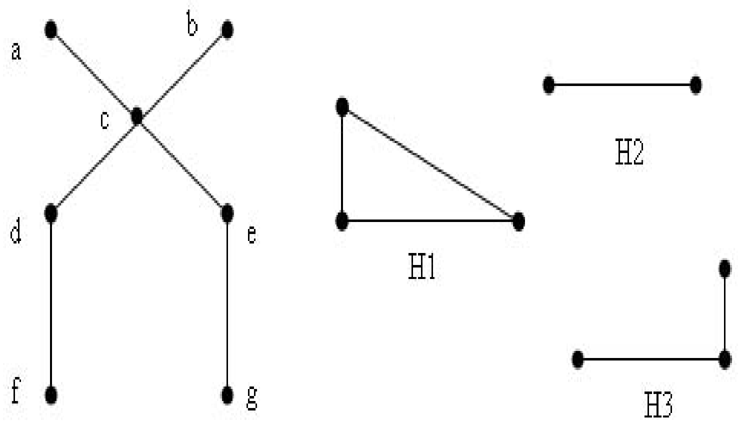
- Chu trình
  - Định lý 1.6
    - G = (V, E) là một đồ thị vô hướng
      - Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng 3
      - Bậc của mọi đỉnh đều lớn hơn hoặc bằng 2

    thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp
  - Định lý 1.7
    - G = (V, E) là một đồ thị vô hướng
      - Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng 4
      - Bậc của mọi đỉnh đều lớn hơn hoặc bằng 3

    thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp có độ dài chẵn

Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định nghĩa
    - Hai đỉnh v, u trong đồ thị G được gọi là liên thông nếu tồn tại một đường đi nối chúng với nhau.
    - Đồ thị G gọi là liên thông nếu hai đỉnh phân biệt bất kỳ trong đồ thị đều liên thông. Ngược lại thì ta gọi là đồ thị không liên thông.

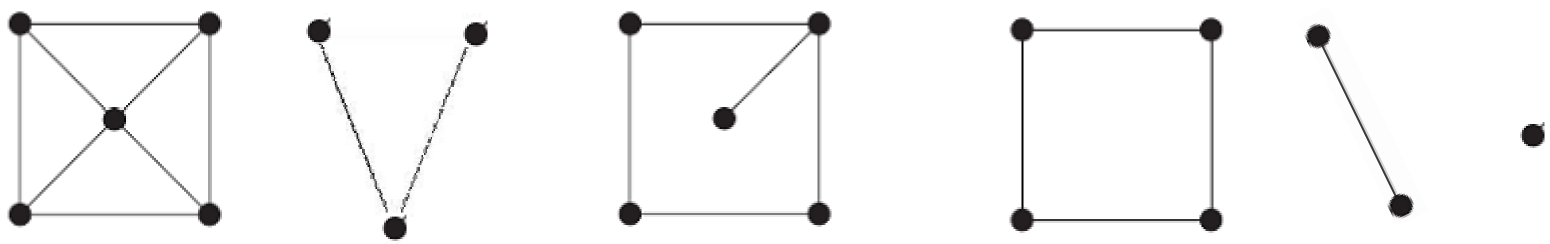


Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định nghĩa
    - Cho G = (V,E), v ∈ V .
      - V’ là tập con của V gồm đỉnh v và tất cả các đỉnh liên thông với v trong G.
      - E’ là tập con của E gồm tất cả các cạnh nối các đỉnh thuộc V’.

      Khi đó G’ = (V’, E’) gọi là **thành phần liên thông của G** chứa v.

  Chú ý: Nếu v và u liên thông trong G thì thành phần liên thông của G chứa v cũng là thành phần liên thông của G chứa u.



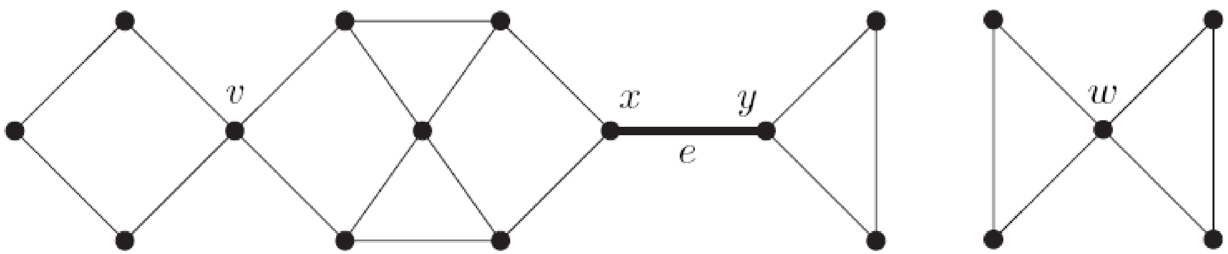
Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định lý 1.8
    - Đồ thị G=(V, E) là liên thông khi và chỉ khi G có duy nhất một thành phần liên thông.

      (Sv tự chứng minh)

Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Đỉnh cắt và cầu
    - *u* là *đỉnh cắt* (điểm khớp) ⇔ số thành phần liên thông tăng lên nếu bỏ *u* và các cạnh liên thuộc với nó.
    - *e* là cầu ⇔ số thành phần liên thông tăng lên nếu bỏ cạnh *e.*



Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định lý 1.9:
    - Đơn đồ thị $G = (V, E)$ có
      - $|V| = n \geq 2$
      - $\deg(u) + \deg(v) \geq n, \forall u,v \in V$

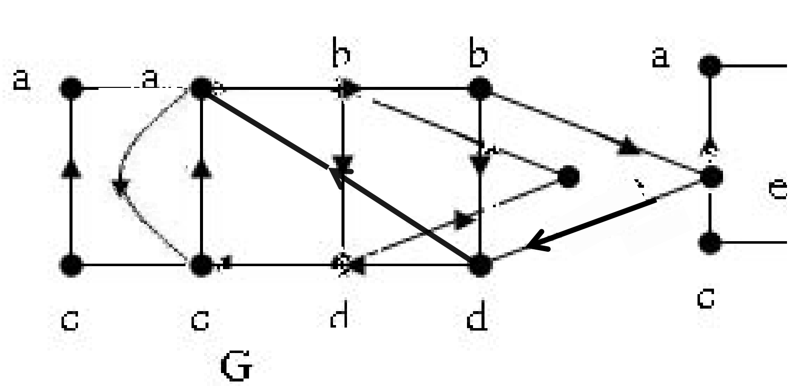
    thì G là đồ thị liên thông
  - Hệ quả:
    - Đơn đồ thị $G = (V, E)$, $|V| = n$ có

      $\deg(v) \geq n/2, \forall v \in V$

    thì G là đồ thị liên thông

Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị có hướng
  - Liên thông mạnh
    - Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông mạnh nếu giữa 2 đỉnh u,v bất kỳ trong G luôn có đường đi từ v đến u và từ u đến v.
  - Liên thông yếu
    - Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông

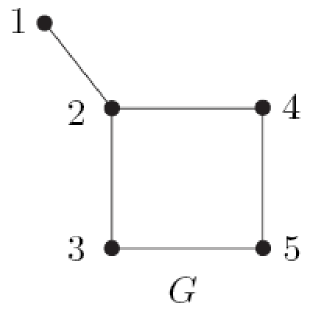


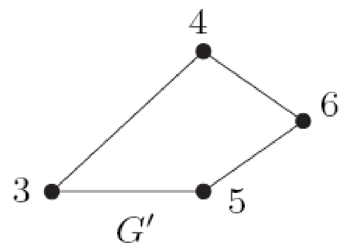
Tính liên thông

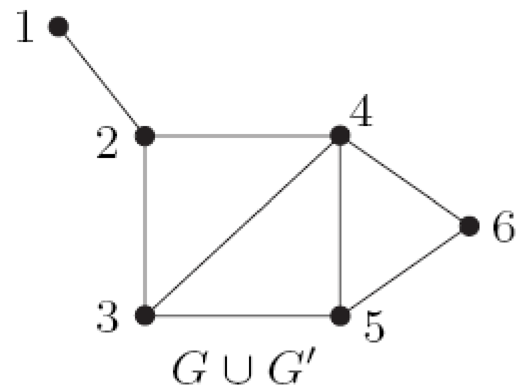
- Tính liên thông trong đồ thị có hướng
  - Định lý 1.10
    - *Nếu đồ thị G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ thì 2 đỉnh này phải liên thông với nhau*
  - Định lý 1.11
    - *Đồ thị G là một đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của nó đều có độ dài chẵn*

Một số phép biến đổi đồ thị

- Hợp của 2 đồ thị
  - G = (V, E)
  - G' = (V', E')
  - G'' = G ∪ G' = (V'', E'')
    - V'' = V ∪ V'
    - E'' = E ∪ E'







Một số phép biến đổi đồ thị

- Phép phân chia sơ cấp
  - Phép thay thế cạnh *e* = *uv* của G bởi một đỉnh mới *w* cùng với 2 cạnh *uw* và *vw*
- Đồng phôi
  - G và G' gọi là đồng phôi nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp
  - Hai đồ thị đồng phôi chưa chắc đẳng cấu với nhau