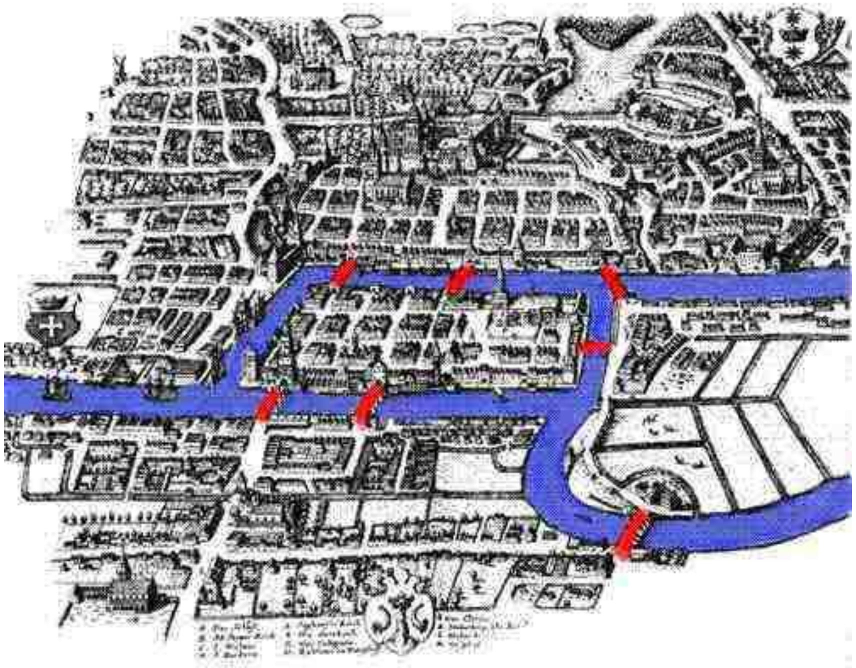
# CHƯƠNG 5: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

PHẦN 2:

- Chu trình và đường đi Euler
- Chu trình và đường đi Hamilton
- Thuật toán Dijkstra

# Chu trình và đường đi Euler

- Bài toán
  - Có thể xuất phát tại một điểm nào đó trong thành phố, đi qua tất cả 7 cây cầu, mỗi cây một lần, rồi trở về điểm xuất phát được không?
  - Leonhard Euler đã tìm ra lời giải cho bài toán vào năm 1736



# Leonhard Euler 1707 - 1783

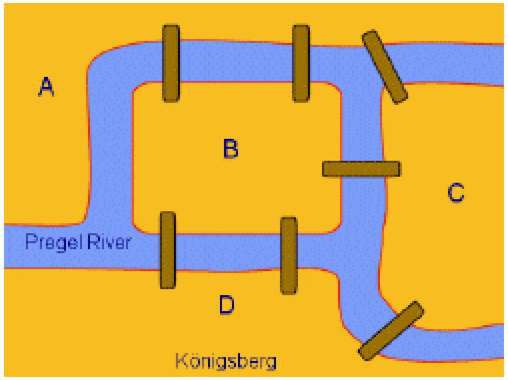
- Leonhard Euler (15/04/1707 – 18/9/1783) là một nhà toán học và nhà vật lý học Thụy Sĩ. Ông (cùng với Archimedes và Newton) được xem là một trong những nhà toán học lừng lẫy nhất. Ông là người đầu tiên sử dụng từ "hàm số" (được Gottfried Leibniz định nghĩa trong năm 1694) để miêu tả một biểu thức có chứa các đối số, như y = F(x). Ông cũng được xem là người đầu tiên dùng vi tích phân trong môn vật lý.

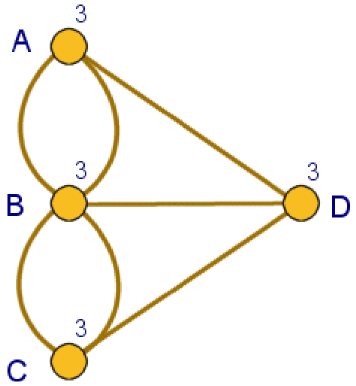
# Leonhard Euler 1707 - 1783

- Ông sinh và lớn lên tại Basel, và được xem là thần đồng toán học từ nhỏ. Ông làm giáo sư toán học tại Sankt-Peterburg, sau đó tại Berlin, rồi trở lại Sankt-Peterburg. Ông là nhà toán học viết nhiều nhất: tất cả các tài liệu ông viết chứa đầy 75 tập. Ông là nhà toán học quan trọng nhất trong thế kỷ 18 và đã suy ra nhiều kết quả cho môn vi tích phân mới được thành lập. Ông bị mù hoàn toàn trong 17 năm cuối cuộc đời, nhưng khoảng thời gian đó là lúc ông cho ra hơn nửa số bài ông viết.
- Tên của ông đã được đặt cho một miệng núi lửa trên Mặt Trăng và cho tiểu hành tinh 2002.

# Chu trình và đường đi Euler

- Bài toán
  - Mô hình hóa bài toán
    - Xây dựng đồ thị G
      - Đỉnh: Các vùng đất trong sơ đồ
      - Cạnh: các cây cầu nối giữa hai vùng đất
    - Yêu cầu
      - Tồn tại hay không một chu trình đơn trong đa đồ thị G = (V, E) có chứa tất cả các cạnh của đồ thị?



# Chu trình và đường đi Euler

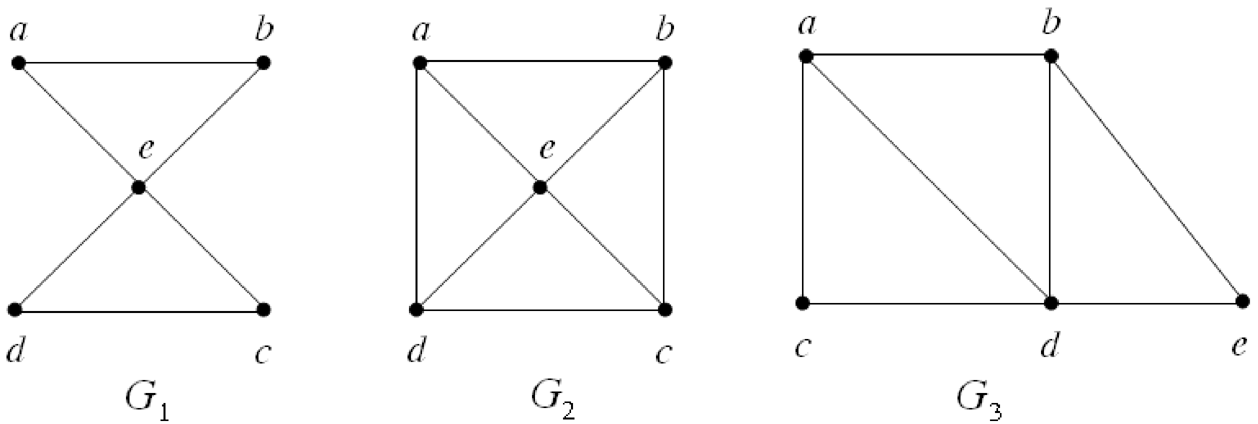
- Định nghĩa

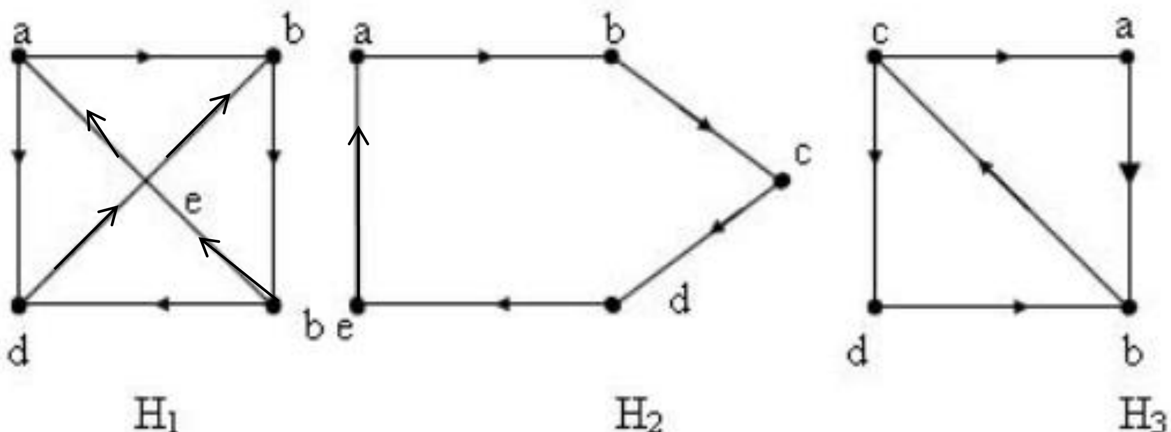
  Cho đồ thị G=(V,E) liên thông

  - Chu trình Euler
    - Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G.
  - Đồ thị Euler
    - Đồ thị có chứa một chu trình Euler
  - Đường đi Euler
    - Đường đi đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G

# Chu trình và đường đi Euler

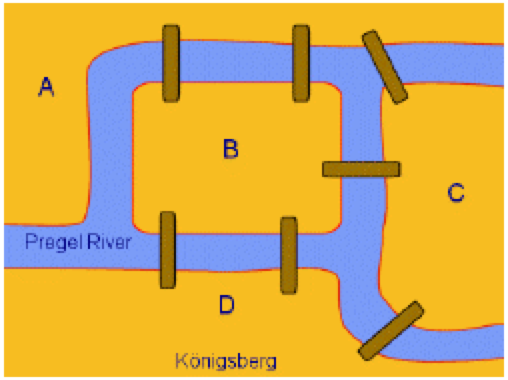
- Định nghĩa
  - Ví dụ: *Chỉ ra đường đi và chu trình Euler (nếu có) trong các đồ thị sau đây?*

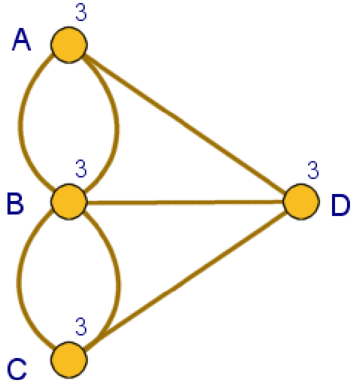


# Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Định lý về chu trình Euler
    - *Một đồ thị liên thông G=(V, E) có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.*
  - Áp dụng định lý trên tìm lời giải cho bài toán mở đầu?



# Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Các thuật toán tìm chu trình Euler:

1. Thuật toán Euler

Ký hiệu: C – chu trình Euler cần tìm của đồ thị G.

Bước 1: Đặt H := G, k :=1, C := ∅. Chọn đỉnh v bất kỳ của G.

Bước 2: Xuất phát từ v, xây dựng chu trình đơn bất kỳ $C_k$ trong H.

Nối $C_k$ vào C, C := C ∪ $C_k$ .

Bước 3: Loại khỏi H chu trình $C_k$ . Nếu H chứa các đỉnh cô lập thì loại chúng ra khỏi H.

Bước 4: Nếu H = ∅ thì kết luận C là chu trình Euler cần tìm, kết thúc.

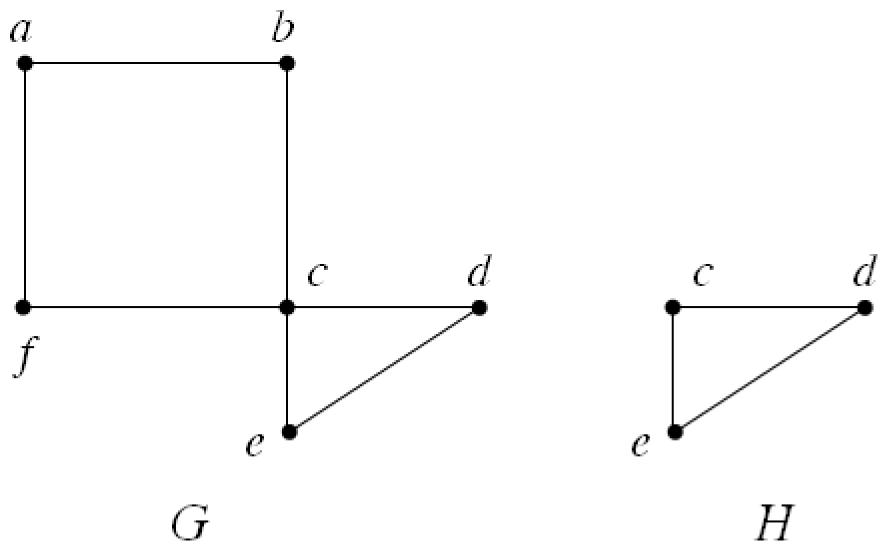
Nếu H ≠ ∅ thì chọn v là đỉnh chung của H và C. Đặt k:= k+1, quay lại bước 2.

# Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Các thuật toán tìm chu trình Euler:

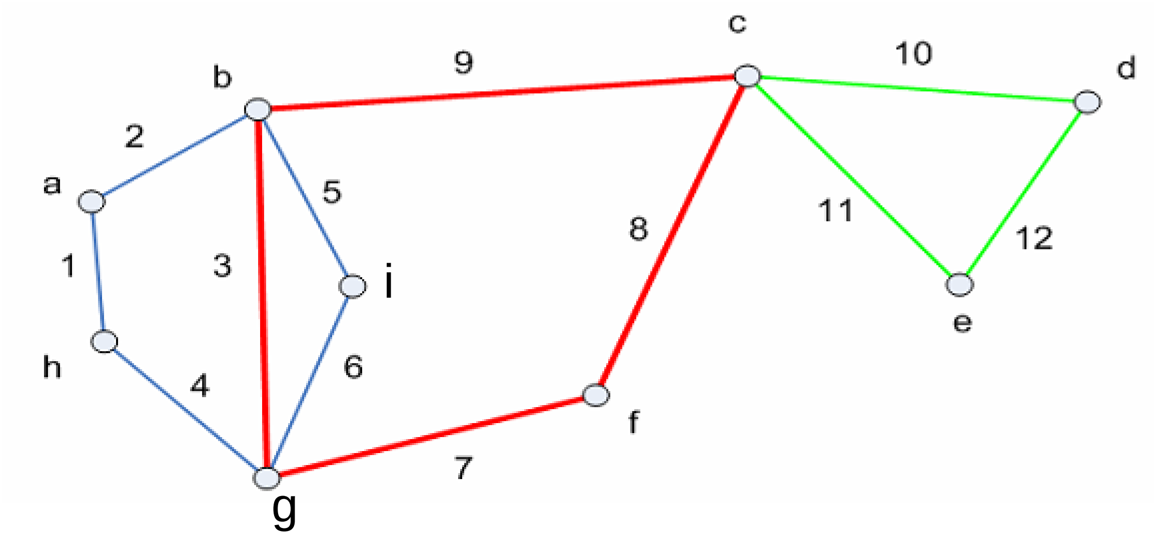
1. Thuật toán Euler

Ví dụ: Tìm chu trình Euler



# Chu trình và đường đi Euler

Ví dụ: Tìm chu trình Euler



# Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Các thuật toán tìm chu trình Euler:

  2. Thuật toán Fleury: Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của đồ thị và tuân theo hai quy tắc sau

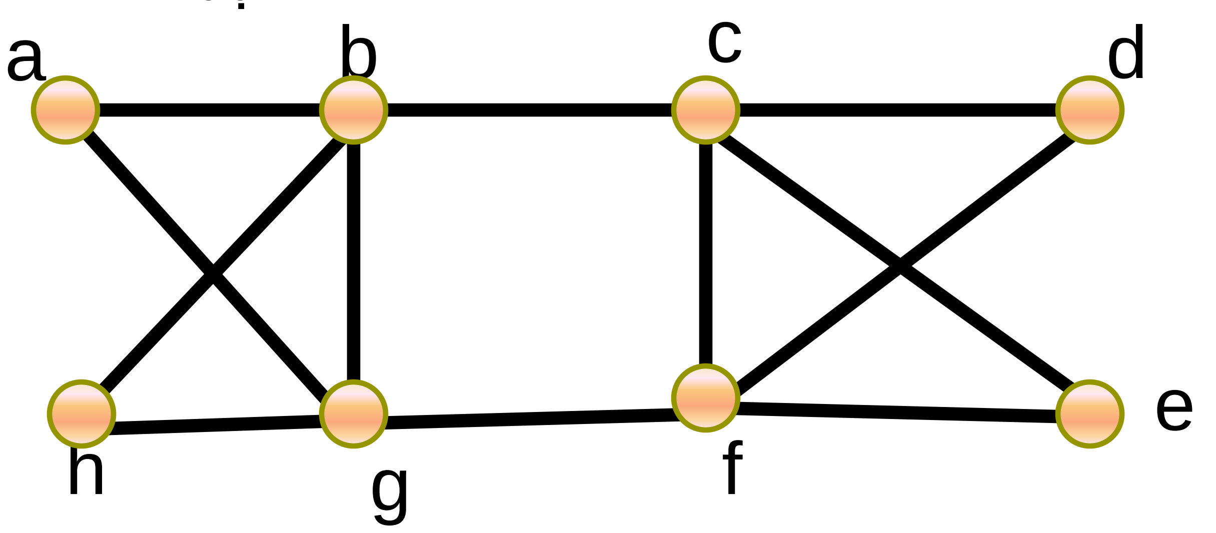
    - Qui tắc 1: Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì
      - Xóa cạnh vừa đi qua
      - Xóa đỉnh cô lập (nếu có)
    - Qui tắc 2:
      - Tại mỗi đỉnh, ta chỉ đi theo một cạnh là cầu nếu không có sự lựa chọn nào khác.

- Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị

# Chu trình và đường đi Euler

2. Thuật toán Fleury:

Ví dụ:



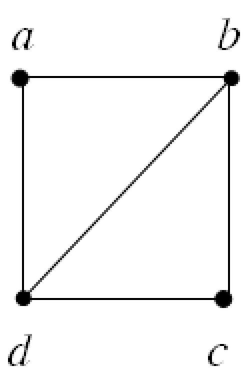

abcfdcefghbga

# Chu trình và đường đi Euler

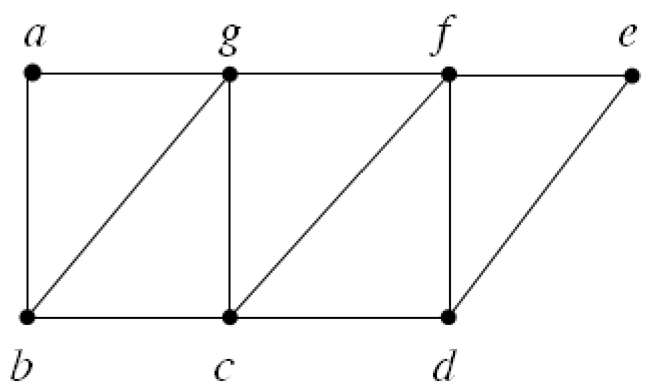
- Trong đồ thị vô hướng
  - Định lý về đường đi Euler
    - Đồ thị liên thông G có đường đi Euler, không có chu trình Euler khi và chỉ khi G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ

# Chu trình và đường đi Euler

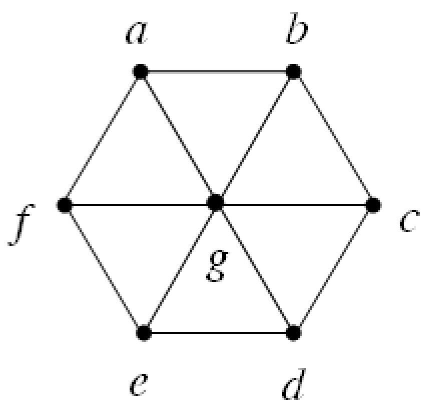
- Trong đồ thị vô hướng
  - Định lý về đường đi Euler
    - Ví dụ: Đồ thị nào có đường đi Euler?




$G_1$




$G_2$



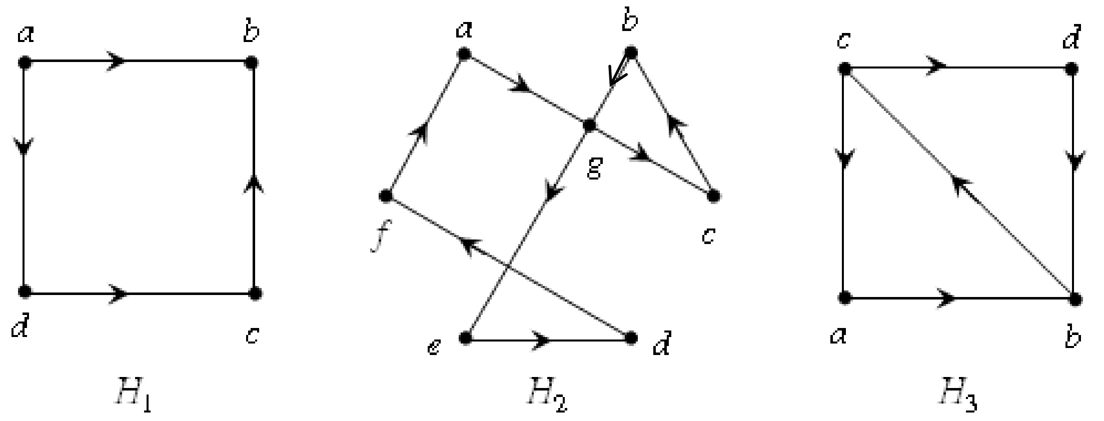

$G_3$

# Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị có hướng
  - Định lý về chu trình Euler
    - *Đồ thị có hướng G=(V, E) có chu trình Euler khi và chỉ khi*
      - *G liên thông mạnh*
      - $deg^+(v) = deg^-(v), \forall v \in V$

# Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị có hướng
  - Định lý về chu trình Euler
    - Ví dụ: Đồ thị nào có chu trình Euler?

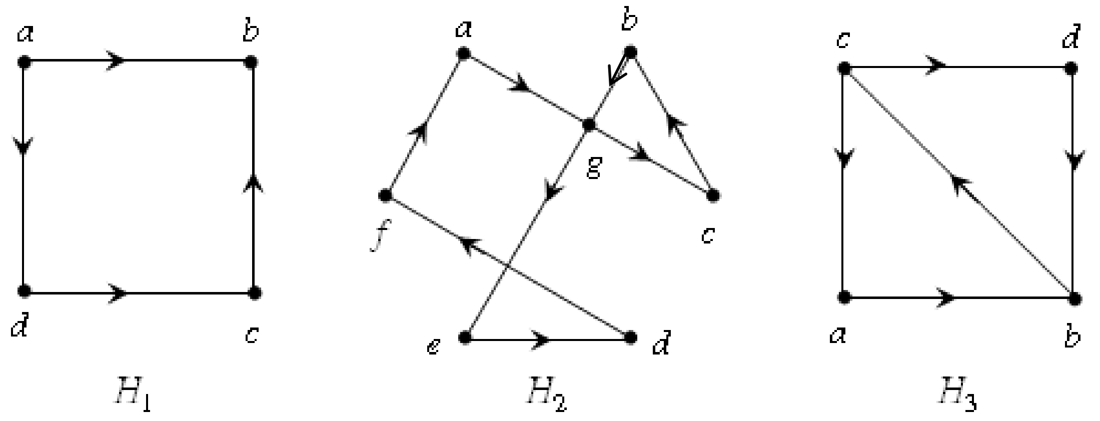


# Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị có hướng
  - Định lý về đường đi Euler
    - G = (V, E) là đồ thị có hướng
    - G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi
      - G liên thông yếu
      - $\exists!\ s \in V$ : $\deg^+(s) = \deg^-(s) + 1$
      - $\exists!\ t \in V$ : $\deg^+(t) = \deg^-(t) - 1$
      - $\deg^+(v) = \deg^-(v),\ \forall v \in V \setminus \{s, t\}$

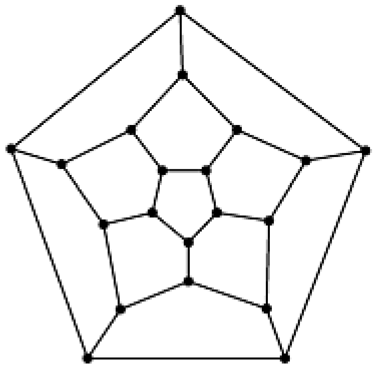
# Chu trình và đường đi Euler

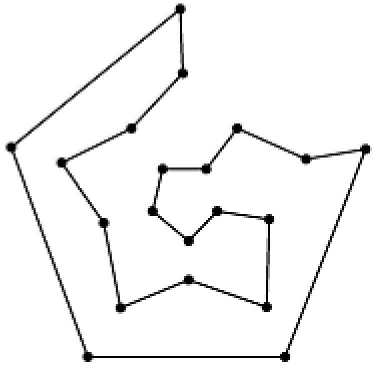
- Trong đồ thị có hướng
  - Định lý về đường đi Euler
    - Ví dụ



# Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Định nghĩa
    - Chu trình Hamilton
      - Chu trình bắt đầu từ một đỉnh v nào đó qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần rồi quay trở về v được gọi là chu trình Hamilton
    - Đồ thị Hamilton
      - Đồ thị có chứa chu trình Hamilton





# Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Điều kiện đủ
    - Định lý Ore (1960)
      - Cho G = (V, E) là một đơn đồ thị liên thông
        - $|V| = n \geq 3$
        - $deg(v) + deg(w) \geq n$, với mọi cặp đỉnh không liền kề v, w

      Khi đó G có chu trình Hamilton

# Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Điều kiện đủ
    - *Hệ quả (Định lý Dirac-1952)*
      - Cho G = (V, E) là một đơn đồ thị
        - $|V| = n \geq 3$
        - $\deg(v) \geq n/2, \forall v \in V$

      Khi đó G có chu trình Hamilton

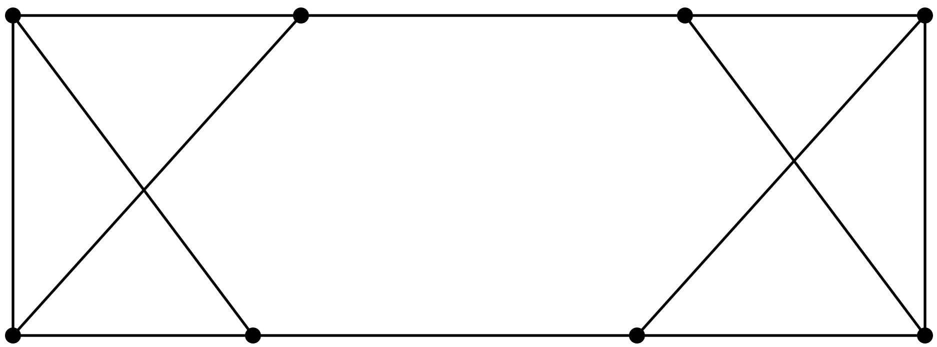
# Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Điều kiện đủ
    - Định lý Pósa
      - Cho G = (V, E) là một đơn đồ thị, $|V| = n \geq 3$
        - $|\{v \in V: deg(v) \leq k\}| \leq k-1 \ \forall\ k \in [1, (n-1)/2)$
        - $|\{v \in V: deg(v) \leq (n-1)/2\}| \leq (n-1)/2$, nếu *n* lẻ

      Khi đó G có chu trình Hamilton

# Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Điều kiện đủ
    - Ví dụ

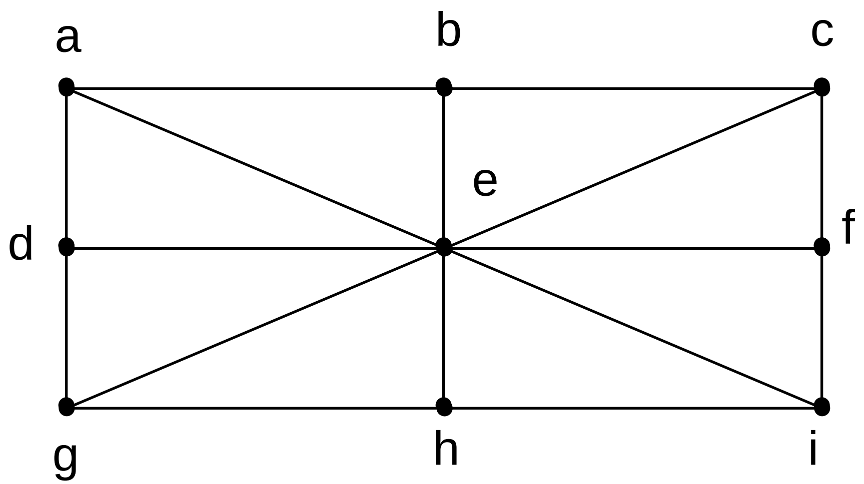


# Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Phương pháp tìm chu trình Hamilton
    - Qui tắc 1: Nếu tồn tại một đỉnh v của G có d(v)<=1 thì đồ thị G không có chu trình Hamilton.
    - Qui tắc 2: Nếu đỉnh v có bậc là 2 thì cả 2 cạnh tới v đều phải thuộc chu trình Hamilton.
    - Qui tắc 3: Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào.
    - Qui tắc 4: Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới một đỉnh v đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới v nữa, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới v.

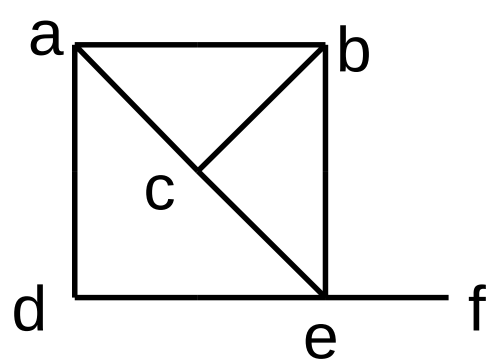
# Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Phương pháp tìm chu trình Hamilton
    - Ví dụ 1: Tìm một chu trình Hamilton



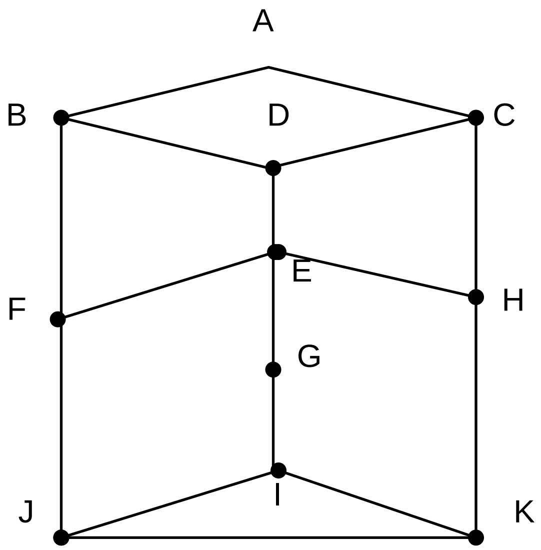
# Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Phương pháp tìm chu trình Hamilton
    - Ví dụ 2: Đồ thị sau có chu trình Hamilton không?



# Chu trình & đường đi Hamilton

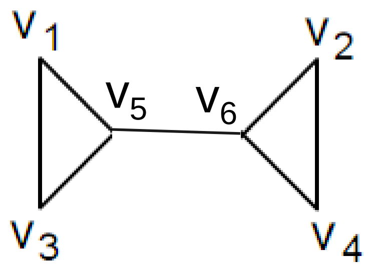
- Chu trình Hamilton
  - Phương pháp tìm chu trình Hamilton
    - Ví dụ 3: Đồ thị sau có chu trình Hamilton không?



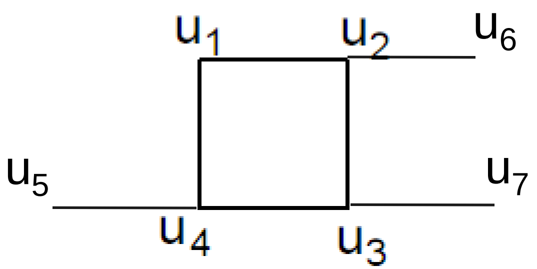
# Chu trình & đường đi Hamilton

- Đường đi Hamilton
  - Định nghĩa
    - Đường đi sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G (đi qua mỗi đỉnh đúng một lần).

Ví dụ:




$v_1$ $v_3$ $v_5$ $v_6$ $v_2$ $v_4$




Không có đường đi Hamilton

# Chu trình & đường đi Hamilton

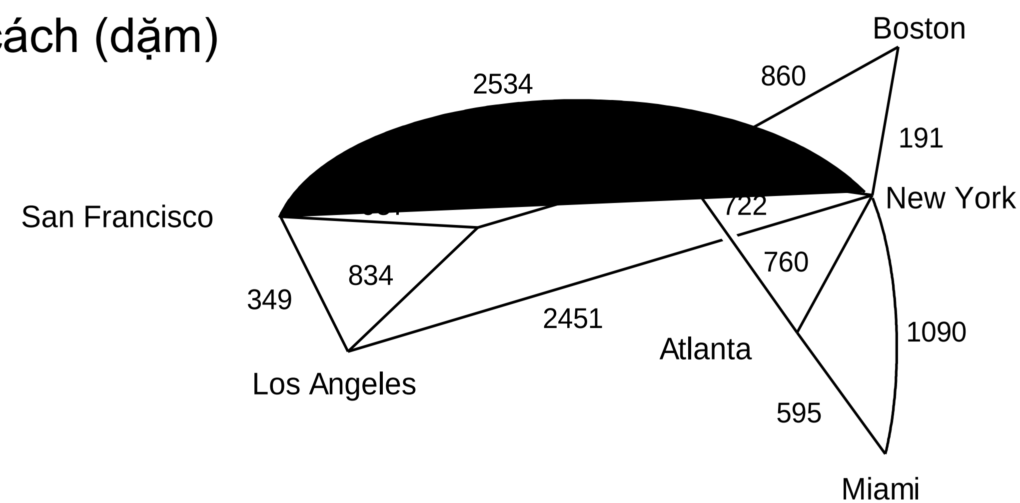
- Đường đi Hamilton
  - Định lý König
    - Mọi đồ thị có hướng đầy đủ (đồ thị vô hướng tương ứng là đầy đủ) đều có đường đi Hamilton.

    *Chứng minh (xem tài liệu)*

# Bài toán đường đi ngắn nhất

- Mở đầu
  - Nhiều bài toán không chỉ quan tâm tồn tại hay không đường đi giữa 2 đỉnh
  - Lựa chọn đường đi với chi phí ít nhất

Khoảng cách (dặm)

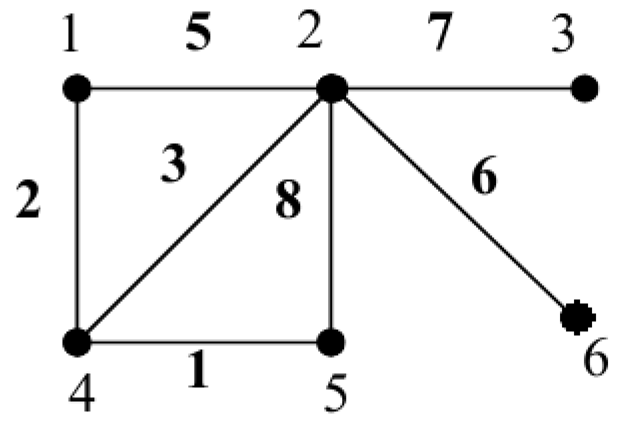


# Bài toán đường đi ngắn nhất

- Mở đầu
  - Mô hình hóa bài toán về đồ thị có trọng số
  - Đồ thị có hướng $G = (V,E)$ với hàm trọng số $W: E \to R$ (gán các giá trị thực cho các cạnh)
  - Trọng số của đường đi $p = v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k$ là

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

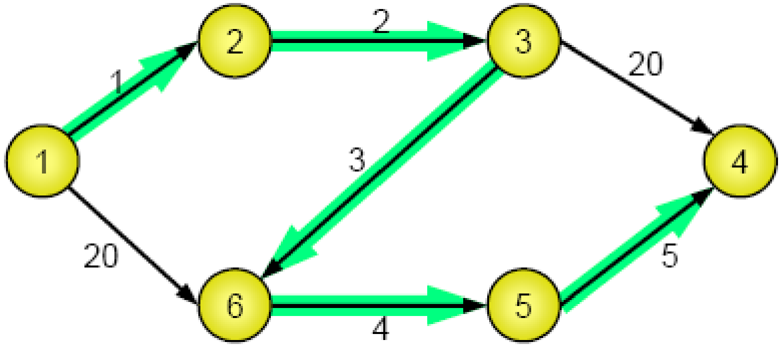
  - Đường đi ngắn nhất là đường đi có trọng số nhỏ nhất




Độ dài của đường đi ($P_1$): 1 2 5 4 2 3 là: 5 + 8 + 1 + 3 + 7 = 24.
Độ dài của đường đi ($P_2$): 1 4 2 6 là: 2 + 1 + 6 = 9.

# Bài toán đường đi ngắn nhất

- Mở đầu
  - Ví dụ: Đường đi ngắn nhất giữa đỉnh 1 và 4:



# Bài toán đường đi ngắn nhất

- Thuật toán Dijkstra
  - Ý tưởng
    - Ở mỗi lần lặp thì thuật toán sẽ tìm ra 1 đỉnh với đường đi ngắn nhất từ *a* tới đỉnh này là xác định

# Bài toán đường đi ngắn nhất

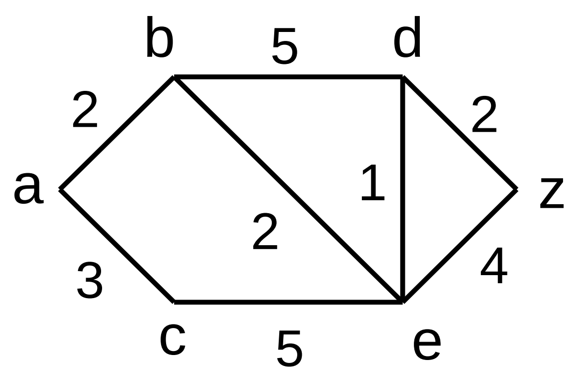
- Thuật toán Dijkstra
  - Ký hiệu:
    - Nhãn của đỉnh *v*: L(*v*)
      - Lưu trữ độ dài đường đi ngắn nhất từ *a* đến *v* được biết cho đến thời điểm hiện tại
    - Tập S: tập các đỉnh mà đường đi ngắn nhất từ *a* đến chúng đã xác định

# Bài toán đường đi ngắn nhất

- Thuật toán Dijkstra
  - Thuật toán (Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z)
    - Bước 1: Khởi tạo
      - L(a) = 0;  L(v)=vo cung lon, S = $\emptyset$
    - Bước 2: Nếu z$\in$S thì kết thúc
    - Bước 3: Chọn đỉnh
      - Chọn u sao cho: L(u) = min { L(v) | v $\notin$ S}
      - Đưa u vào tập S: S = S $\cup$ {u}
    - Bước 4: Sửa nhãn
      - Với mỗi đỉnh v (v $\notin$ S) kề với u
        - L(v) = min { L(v); L(u) + w(uv) } (ký hiệu w(uv)=trọng số cạnh uv)
    - Bước 5: Quay lại Bước 2

# Bài toán đường đi ngắn nhất

- Thuật toán Dijkstra
  - Ví dụ
    - Tìm độ dài đường đi ngắn nhất giữa đỉnh *a* và *z*?




Đáp án: đường đi ngắn nhất: abedz, độ dài 7.

Bài giải: Thuật toán Dijkstra cho bài toán được trình bày trong bảng sau

| Bước lặp | a | b | c | d | e | z | Tập S (các đỉnh có nhãn cố định) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Khởi tạo | 0,a | ∞ ,a | ∞ ,a | ∞ ,a | ∞ ,a | ∞ ,a | { } |
| 1 | 0,a* | 2,a | 3,a | ∞ ,a | ∞ ,a | ∞ ,a | {a} |
| 2 | | 2,a* | 3,a | 7,b | 4,b | ∞ ,a | {a, b} |
| 3 | | | 3,a* | 7,b | 4,b | ∞ ,a | {a,b,c} |
| 4 | | | | 5,e | 4,b* | 8,e | {a,b,c,e} |
| 5 | | | | 5,e* | | 7, d | {a,b,c,e,d} |
| 6 | 0,a | 2,a | 3,a | 5,e | 4,b | 7, d | {a,b,c,e,d,z} |

Đáp số: đường đi ngắn nhất: abedz, độ dài 7.
Nếu hỏi độ dài ngắn nhất đi từ a đến d thì đáp số là……?? Và đường đó là……….

## Ví dụ

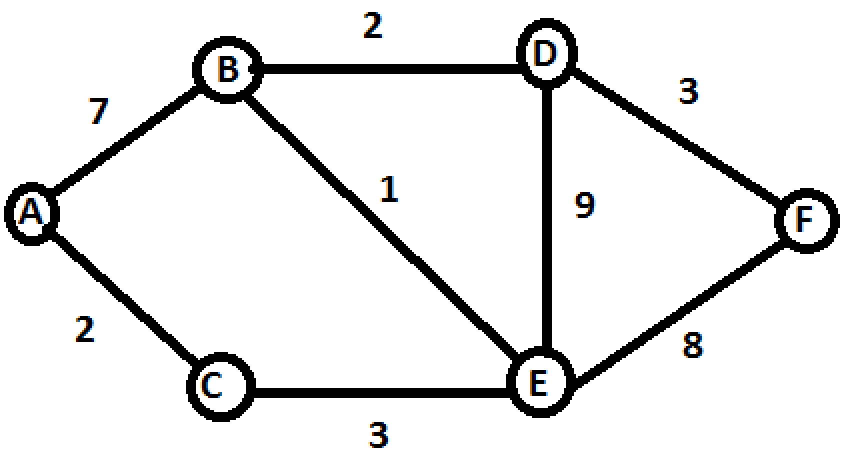
Cho ma trận kề của đơn đồ thị có trọng số G có dạng

$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 9 & 3 \\
0 & 1 & 3 & 9 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

a) Vẽ đồ thị G

Dùng thuật toán Dijkstra:

b) Tìm độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* đến các đỉnh còn lại của G? Chỉ ra các đường đi đó.

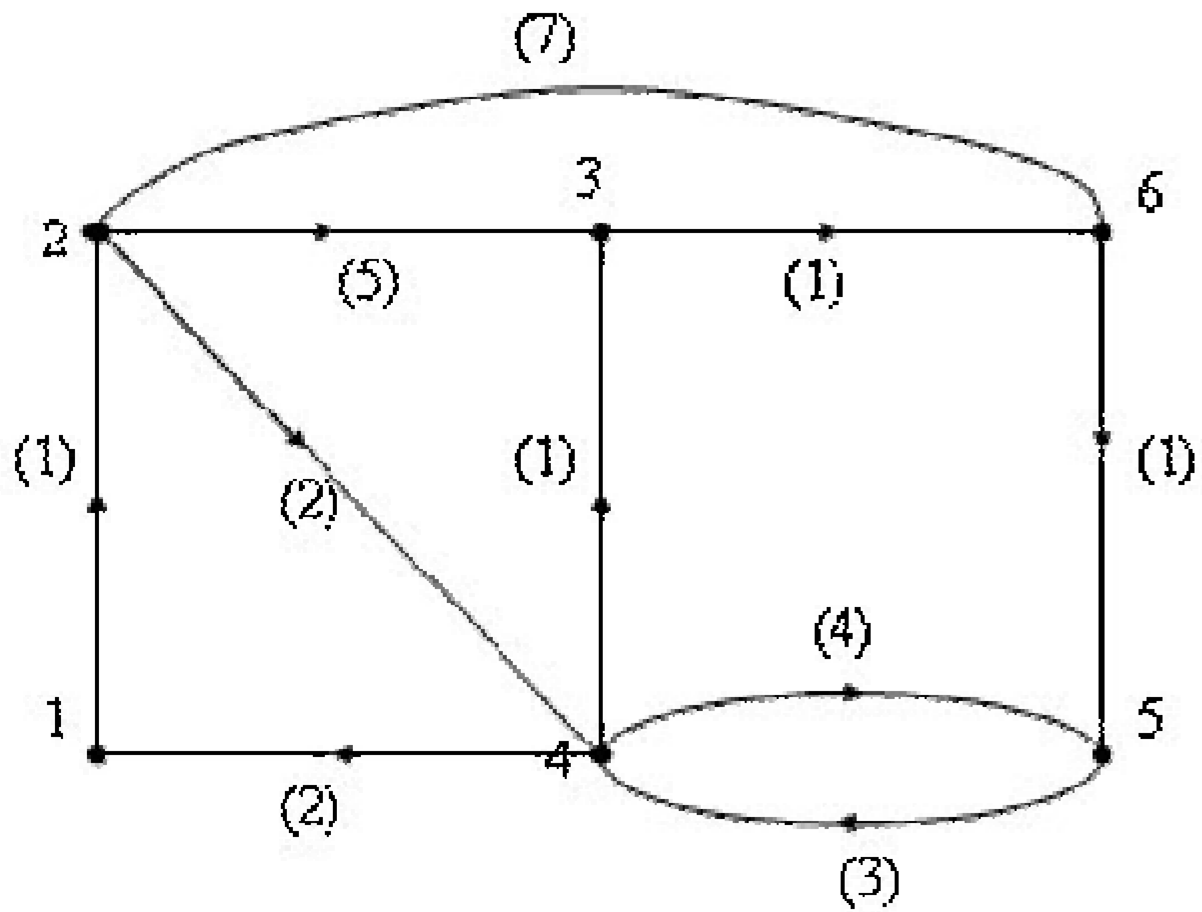

2
B
D
7
3
1
9
A
F
2
8
C
E
3

| Bước lặp | A | B | C | D | E | F | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| KTạo | 0,A | ∞,a | ∞,a | ∞,a | ∞,a | ∞,a | ∅ |
| 1 | 0,A* | 7,a | 2,a | ∞ | ∞ | ∞ | {A} |
| 2 | | 7,A | 2,A* | ∞ | 5,c | ∞ | {A,C} |
| 3 | | 6,E | - | 14,E | 5,C* | 13,E | {A,C,E} |
| 4 | | 6,E* | | 8,B | - | 13,E | {A,C,E,B} |
| 5 | | | | 8,B* | | 11,D | {A,C,E,B,D} |
| 6 | 0,A | 6E | 2A | 8,B | 5,C | 11,D | {A,C,E,B,D,F} |

# Bài toán đường đi ngắn nhất

- Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất
  - Thuật toán Dijkstra
    - Định lý
      - Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh trong đơn đồ thị liên thông, có trọng số.
    - Nhận xét
      - Chỉ đúng cho đồ thị có trọng số không âm
      - Nhãn sau cùng của mỗi đỉnh là độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh xuất phát đến nó.

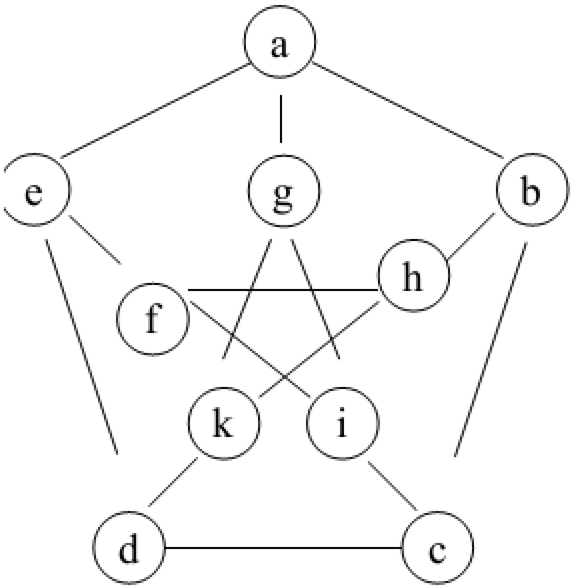
Tìm đường đi ngắn nhất từ 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị ở hình dưới



Kết quả tính toán theo thuật toán được trình bày theo bảng dưới đây. Qui ước viết hai thành phần của nhãn theo thứ tự: d[v]. Đỉnh được đánh dấu * là đỉnh được chọn để cố định nhãn ở bước lặp đang xét, nhãn của nó không biến đổi ở các bước tiếp theo, vì thế ta đánh dấu -.

| Bước lặp | Đỉnh 1 | Đỉnh 2 | Đỉnh 3 | Đỉnh 4 | Đỉnh 5 | Đỉnh 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Khởi tạo | 0,1 | 1,1* | ∞ ,1 | ∞ ,1 | ∞ ,1 | ∞ ,1 |
| 1 | - | - | 6,2 | 3,2* | ∞ ,1 | 8,2 |
| 2 | - | - | 4,4* | - | 7,4 | 8,2 |
| 3 | - | - | | - | 7,4 | 5,3* |
| 4 | - | - | | - | 6,6* | - |
| 5 | | | | | | |

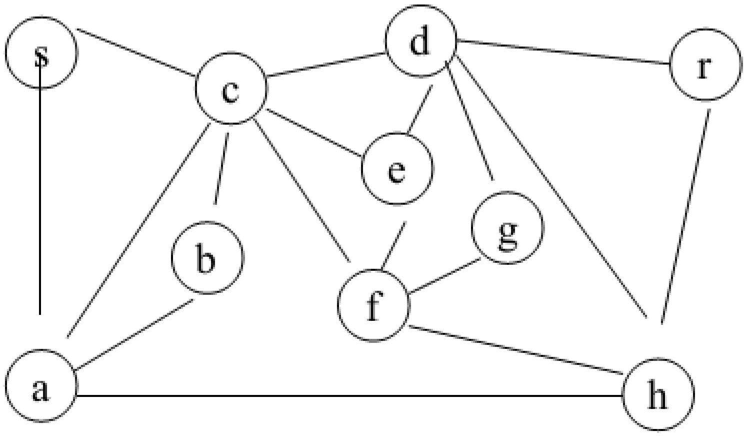
Đồ thị cho trong hình sau gọi là đồ thị Peterson P.




**a)** Tìm một đường đi Hamilton trong P.

**b)** Chứng minh rằng P \ {v}, với v là một đỉnh bất kỳ của P, là một đồ thị Hamilton.

9. Chứng minh rằng đồ thị G cho trong hình sau có đường đi Hamilton (từ s đến r) nhưng không có chu trình Hamilton.




10. Cho thí dụ về:

1) Đồ thị có một chu trình vừa là chu trình Euler vừa là chu trình Hamilton;

2) Đồ thị có một chu trình Euler và một chu trình Hamilton, nhưng hai chu trình đó không trùng nhau;

3) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Hamilton, nhưng không phải là đồ thị Euler;

4) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Euler, nhưng không phải là đồ thị Hamilton.