3. 理论背景 (Theoretical Background)

3.1 神经算子 (Neural Operator)

与学习有限维向量映射的传统神经网络不同，神经算子旨在学习无限维函数空间之间的映射。给定两个函数空间 *A* 和 *U*，其定义在物理域 *D ⊂ ℝᵈ* 之上，神经算子的目标是学习一个算子 *G: A → U*。对于任意输入函数 *a ∈ A*，算子 *G* 能够输出对应的函数 *u = G(a) ∈ U*。

傅里叶神经算子 (FNO) 是该框架的一种高效实现，它将算子学习问题转化为在傅里叶域中的卷积操作。其核心思想基于对一个积分算子的参数化：

(Κv)(x) = ∫\_D κ(x, y; a)v(y) dy (1)

其中 *κ ∈ ℝ^(d\_v×d\_v)* 是由 *a* 参数化的核函数。FNO通过将核函数约束为平移不变的，即 *κ(x, y; a) = κ(x-y)*，从而将积分变换简化为卷积。根据卷积定理，这在傅里叶域中等价于逐元素的Hadamard积：

F((κ ∗ v))(k) = F(κ)(k) · F(v)(k) (2)

最终，一个傅里叶层通过结合频域的全局卷积和空间域的局部变换，对隐状态函数 *v\_t(x)* 进行迭代更新：

v\_t+1(x) = σ(Wv\_t(x) + F⁻¹(R · (Fv\_t))(x)) (3)

其中 *F* 与 *F⁻¹* 分别表示快速傅里叶变换 (FFT) 及其逆变换，*R* 是频域中可学习的权重，*W* 是逐点的线性变换。然而，FFT的离散性使其在处理非周期边界和网格分辨率变化时存在局限性。

3.2 连续傅里叶变换 (Continuous Fourier Transform)

为克服FFT的局限性，我们引入了连续傅里叶变换 (CFT)。对于定义在区间 *[a, b]* 上的非周期函数 *f(t)*，其CFT系数 *ĉ(k)* 由下式给出：

ĉ(k) = ∫\_a^b f(t)e⁻²πikt dt (4)

与FFT的离散求和不同，CFT的积分形式使其天然具备更高的动态范围、抗混叠能力和对边界效应的鲁棒性。根据 [Iserles, 2010]，该积分可通过高精度的谱方法进行数值逼近。在我们的实现中，我们采用分段的切比雪夫多项式插值来构造函数 *f(t)* 的近似，从而将积分解析地计算出来。这种方法能够从信号中提取更稳定、更精确的低频全局特征，这对于修正长时程预测中的累积误差至关重要。

4. 实验 (Experiments)

4.1 FNO-RC 架构

基于以上理论，我们设计了傅里叶神经算子残差修正 (FNO-RC) 模型，其架构如图1所示。核心创新在于FNO-RC层，它将标准FNO的预测能力与CFT的信号分析优势相结合。对于输入 *v\_t(x)*，该层通过两条并行路径进行处理：

[请在此处插入 图1：FNO-RC架构图]

1. 1. **主预测路径:** 该路径遵循公式(3)，生成初步预测 *v'\_t+1(x)*。
2. 2. **残差修正路径:** 该路径旨在生成一个修正场 *c(x)* 以补偿主路径的预测误差。其计算过程为：

c(x) = MLP\_θ(CFT(v\_t(x))) (5)

其中，*MLP\_θ* 的最后一层被零初始化，以确保训练稳定并为模型性能提供下界。

最终，该层的输出由主预测与修正场叠加而成：

v\_t+1(x) = v'\_t+1(x) + c(x) (6)

4.2 实验设置

所有模型均在PyTorch中实现，并与标准的FNO基线模型进行公平对比。超参数设置见表1。

[请在此处插入 表1：各实验的超参数设置]

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

4.3 实验结果与分析

**4.3.1 定量分析**

表2汇总了所有基准测试的最终相对L2测试误差。数据显示，FNO-RC在所有维度的问题上均一致性地超越了FNO基线。尤其在二维纳维-斯托克斯这一长时程预测任务中，FNO-RC实现了73.68%的显著相对误差降低。我们认为，这一巨大优势源于CFT修正路径的有效性。在混沌系统中，长期预测的误差主要来源于低频全局模态的累积偏差。CFT路径通过其对信号的鲁棒分析能力，精确地捕捉并修正了这些累积误差，从而有效抑制了误差随时间增长的趋势，极大地提升了模型的长期保真度。

[请在此处插入 表2：最终测试误差与相对性能提升]

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

**4.3.2 定性分析**

定性结果进一步证实了我们模型的优越性。对于一维伯格斯方程（图2），FNO-RC能够更精确地捕捉激波的锋面和传播速度，有效缓解了标准谱方法中常见的吉布斯振荡现象。在二维纳维-斯托克斯问题中（图3），FNO-RC的预测结果在视觉上展现出更少的数值耗散，保留了更多真实流场中的小尺度涡结构细节，而基线模型的预测则显得过于平滑。对于三维湍流（图4），FNO-RC同样生成了与真实解在拓扑结构上更为一致的等值面，证明了其在高维复杂系统建模中的潜力。  
  
[请在此处插入 图2、3、4：分别为1D、2D、3D问题的定性对比图。]