4. 实验 (Experiments)

4.1 理论背景

神经算子（Neural Operator）旨在学习无限维函数空间之间的映射。给定输入函数 *a(x) ∈ A*，其中 *x ∈ D*，神经算子学习一个算子 *G: A → U*，以输出目标函数 *u(x) ∈ U*。傅里叶神经算子（FNO）是该框架的一种高效实现，它通过在傅里叶域中执行全局卷积来参数化该算子。一个傅里叶层可由下式表示：

v\_t+1(x) = σ(Wv\_t(x) + F⁻¹(R · (Fv\_t))(x)) (1)

其中 *F* 表示快速傅里叶变换（FFT），*F⁻¹* 表示其逆变换。*R* 是频域中可学习的复数张量权重，*W* 是空间域中的局部线性变换。然而，FFT的离散性使其对网格分辨率敏感且易受边界效应影响。

为克服此限制，我们引入了连续傅里葉變換（CFT）。对于一个非周期函数 *f(t)*，其CFT系数 *c(k)* 定义为：

c(k) = ∫ f(t)e⁻²πikt dt (2)

CFT通过积分变换，具备更高的动态范围和抗混叠能力，尤其在处理具有稳定低频成分的信号时表现出优越的鲁棒性。在我们的实现中，该积分通过切比雪夫多项式进行数值逼近。

4.2 FNO-RC 架构

基于以上理论，我们设计了傅里叶神经算子残差修正（FNO-RC）模型（架构见图1）。其核心创新在于FNO-RC层，它将标准FNO的预测能力与CFT的信号分析优势相结合。对于输入 *v\_t(x)*，该层通过两条并行路径进行处理：

* • **主预测路径:** 该路径遵循公式(1)，生成初步预测 *v'\_t+1(x)*。
* • **残差修正路径:** 该路径旨在生成一个修正场 *c(x)* 以补偿主路径的预测误差。其计算过程为：

c(x) = MLP\_θ(CFT(v\_t(x))) (3)

其中，*MLP\_θ* 是一个小型多层感知机。为保证训练的稳定性并为模型性能提供下界，*MLP\_θ* 的最后一层被零初始化。该策略确保模型在训练初期退化为标准FNO，仅当修正路径能够带来实质性性能提升时才被激活。

最终，该层的输出由主预测与修正场叠加而成：

v\_t+1(x) = v'\_t+1(x) + c(x) (4)

4.3 实验设置

我们在三个基准问题上对模型进行了评估：

1. 1. **一维伯格斯方程 (1D Burgers' Equation):** 一个包含激波传播的经典非线性问题。数据集由空间分辨率为8192、时间步为1001的单个长时程模拟组成。
2. 2. **二维纳维-斯托克斯方程 (2D Navier-Stokes Equations):** 一个模拟不可压缩流体涡度演化的混沌系统。数据集包含600个独立模拟，空间分辨率为128×128，粘性系数ν=1e-4。
3. 3. **三维纳维-斯托克斯方程 (3D Navier-Stokes Equations):** 一个高维湍流问题。数据集包含50个独立模拟，空间分辨率为64×64×64，粘性系数ν=1e-4。

所有实验中，FNO-RC均与标准的FNO基线模型进行对比。两个模型均采用Adam优化器和余弦退火学习率调度器进行端到端训练，以最小化相对L2范数损失为目标。详细超参数设置见表1。

[请在此处插入 表1：各实验的超参数设置]

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **问题** | **维度** | **傅里叶模态** | **宽度** | **批量大小** | **学习率** | **训练周期** |
| 伯格斯方程 | 1D | 16 | 64 | 20 | 1e-3 | 500 |
| 纳维-斯托克斯 | 2D | 16 | 32 | 20 | 1e-3 | 500 |
| 纳维-斯托克斯 | 3D | 8 | 20 | 10 | 1e-3 | 500 |

4.4 实验结果与分析

**4.4.1 定量分析**

表2汇总了所有基准测试的最终相对L2测试误差。数据显示，FNO-RC在所有维度的问题上均一致性地超越了FNO基线。尤其在二维纳维-斯托克斯这一长时程预测任务中，FNO-RC实现了73.68%的显著相对误差降低。我们认为，这一巨大优势源于CFT修正路径的有效性。在混沌系统中，长期预测的误差主要来源于低频全局模态的累积偏差。CFT路径通过其对信号的鲁棒分析能力，精确地捕捉并修正了这些累积误差，从而有效抑制了误差随时间增长的趋势，极大地提升了模型的长期保真度。

[请在此处插入 表2：最终测试误差与相对性能提升]

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **问题** | **FNO 基线误差** | **FNO-RC 误差** | **相对性能提升** |
| 1D 伯格斯方程 | 0.2211 | 0.2145 | 2.98% |
| 2D 纳维-斯托克斯 | 0.0218 | 0.0057 | 73.68% |
| 3D 纳维-斯托克斯 | 0.8820 | 0.4976 | 43.58% |

**4.4.2 定性分析**

定性结果进一步证实了我们模型的优越性。对于一维伯格斯方程（图2），FNO-RC能够更精确地捕捉激波的锋面和传播速度，有效缓解了标准谱方法中常见的吉布斯振荡现象。在二维纳维-斯托克斯问题中（图3），FNO-RC的预测结果在视觉上展现出更少的数值耗散，保留了更多真实流场中的小尺度涡结构细节，而基线模型的预测则显得过于平滑。对于三维湍流（图4），FNO-RC同样生成了与真实解在拓扑结构上更为一致的等值面，证明了其在高维复杂系统建模中的潜力。  
  
[请在此处插入 图2、3、4：分别为1D、2D、3D问题的定性对比图，展示真实解、FNO基线和FNO-RC的预测结果。]