3. 理论背景 (Theoretical Background)

3.1 神经算子 (Neural Operator)

与学习有限维向量映射的传统神经网络不同，神经算子旨在学习无限维函数空间之间的映射。给定两个函数空间 *A* 和 *U*，其定义在物理域 *D ⊂ ℝᵈ* 之上，神经算子的目标是学习一个算子 *G: A → U*。对于任意输入函数 *a ∈ A*，算子 *G* 能够输出对应的函数 *u = G(a) ∈ U*。

傅里叶神经算子 (FNO) 是该框架的一种高效实现，它通过在傅里叶域中执行全局卷积来参数化该算子。一个傅里叶层可由下式表示：

v\_t+1(x) = σ(Wv\_t(x) + F⁻¹(R · (Fv\_t))(x)) (1)

其中 *F* 与 *F⁻¹* 分别表示快速傅里叶变换 (FFT) 及其逆变换，*R* 是频域中可学习的权重，*W* 是逐点的线性变换。FNO的成功源于其网格无关性（mesh-invariance）和高效的计算复杂度。然而，其核心依赖的FFT在处理具有不连续性或非周期边界的函数时，会因吉布斯现象（Gibbs phenomenon）和混叠失真（aliasing distortion）而面临精度瓶颈。

3.2 高精度不连续傅里叶变换

为克服FFT的固有局限性，我们引入了一种高精度数值方法，即共形傅里叶变换（Conformal Fourier Transform, CFT），其理论基础源于 [Zhu et al., 2010]。该方法旨在精确计算定义在有界区间 *[p₀, p₁]* 上的不连续函数的傅里叶积分：

F(u) = ∫\_p₁^p₀ f(x)e⁻²πiux dx (2)

传统方法（如FFT）通过对被积函数整体（包括傅里叶核 *e⁻²πiux*）进行离散采样来近似该积分，这要求采样率必须满足奈奎斯特定理以避免混叠失真。然而，对于空间有界的函数，其频谱是无限宽的，这使得混叠成为一个无法回避的问题。

CFT的核心思想是，不对振荡的傅里叶核进行离散化，而是对其进行解析处理。该方法通过以下步骤实现：

1. 1. **分段高阶插值:** 将积分区间 [p₀, p₁] 分为L个子区间。在每个子区间 [xₗ, xₗ₊₁] 内，使用一个M阶拉格朗日（或切比雪夫）多项式 *Pₗ⁽ᴹ⁾(x)* 来高精度地逼近函数 *f(x)*。
2. 2. **解析积分求解:** 对于每个子区间上的多项式 *Pₗ⁽ᴹ⁾(x)*，其与傅里叶核的乘积的积分存在解析表达式。通过变量代换，可以将积分变换为对一系列单项式 *tᵐ* 的傅里叶积分，而后者拥有封闭解。
3. 3. **全域结果求和:** 将所有子区间上的积分结果求和，得到最终的傅里叶变换 *F(u)*。

通过这种方式，CFT将数值近似的误差完全集中于对函数 *f(x)* 的插值上，而完全避免了对傅里叶核的采样误差。这使其能够以远低于奈奎斯特频率的采样率获得高精度的频谱，并有效抑制混叠失真。这种从信号中提取高保真度、鲁棒频谱特征的能力，为我们修正FNO的预测误差提供了坚实的理论基础。

4. 实验 (Experiments)

4.1 FNO-RC 架构

基于以上理论，我们设计了傅里叶神经算子残差修正 (FNO-RC) 模型，其架构如图1所示。核心创新在于FNO-RC层，它将标准FNO的预测能力与CFT的信号分析优势相结合。对于输入 *v\_t(x)*，该层通过两条并行路径进行处理：

[请在此处插入 图1：FNO-RC架构图]

* • **主预测路径:** 该路径遵循公式(1)，生成初步预测 *v'\_t+1(x)*。
* • **残差修正路径:** 该路径旨在生成一个修正场 *c(x)* 以补偿主路径的预测误差。其计算过程为：

c(x) = MLP\_θ(CFT(v\_t(x))) (3)

其中，*MLP\_θ* 的最后一层被零初始化，以确保训练稳定并为模型性能提供下界。

最终，该层的输出由主预测与修正场叠加而成：

v\_t+1(x) = v'\_t+1(x) + c(x) (4)

4.2 实验设置

我们在三个基准问题上对模型进行了评估：

所有实验中，FNO-RC均与标准的FNO基线模型进行对比。两个模型均采用Adam优化器和余弦退火学习率调度器进行端到端训练，以最小化相对L2范数损失为目标。详细超参数设置见表1。

[请在此处插入 表1：各实验的超参数设置]

4.3 实验结果与分析

**4.3.1 定量分析**

[请在此处插入 表2：最终测试误差与相对性能提升]

**4.3.2 定性分析**  
  
[请在此处插入 图2、3、4：分别为1D、2D、3D问题的定性对比图。]