1. 引言

摘要：[请在此处填写摘要]

关键词：[请在此处填写关键词]

2. 神经算子基本原理

与学习有限维向量映射的传统神经网络不同，神经算子旨在学习无限维函数空间之间的映射。给定两个函数空间 *A* 和 *U*，其定义在物理域 *D ⊂ ℝᵈ* 之上，神经算子的目标是学习一个算子 *G: A → U*。对于任意输入函数 *a ∈ A*，算子 *G* 能够输出对应的函数 *u = G(a) ∈ U*。

许多物理系统的解算子可以表达为积分算子的形式。因此，神经算子通过参数化一个积分核函数来构建映射，其通用形式为：

*(G(a))(x) = ∫D κ(x, y, a(x), a(y)) u(y) dy*

傅里叶神经算子 (FNO) 对此通用框架进行了简化和高效实现。通过假定核函数 *κ* 具有平移不变性，即 *κ(x, y; a) = κ(x-y)*，上述积分运算可以简化为卷积运算。根据卷积定理，空间域的全局卷积等价于频率域中逐元素的Hadamard积，这使得计算可以通过快速傅里叶变换（FFT）高效执行。

3. 模型原理与方法

3.1、高精度不连续傅里叶变换

为克服FFT在处理非周期、有界函数时因混叠失真和吉布斯现象所带来的精度瓶颈，我们引入了一种高精度数值积分方法。该方法的核心目标是精确计算以下傅里叶积分：

*F(u) = ∫p₁p₀ f(x)e−2πiux dx*

其核心思想是，完全不对振荡的傅里叶核进行离散化，而是对其进行纯解析处理，从而将全部数值误差转移到对原函数 *f(x)* 的逼近上。该方法通过以下步骤实现：

1、分段与逼近。将积分区间 [*p₀, p₁*] 分为L个子区间。在每个子区间 [*xₗ, xₗ₊₁*] 内，使用一个M阶多项式 *Pₗ(M)(x)* 来高精度地逼近函数 *f(x)*。

2、变量代换与解析求解。对每个子区间上的积分，通过线性变量代换 *x = at + hₗ*，将积分域标准化到 [-1, 1]。由于多项式是由一系列单项式 *tᵐ* 组成的，而形如 *∫ tᵐe⁻ᵃᵗ dt* 的积分存在封闭的解析解，因此整个积分可以通过对解析解的线性组合求得。

3.2、FNO-RC 架构

基于以上理论，我们设计了傅里叶神经算子残差修正 (FNO-RC) 模型。其核心思想在于将标准FNO的快速预测能力与高精度变换的修正能力相结合。单层FNO-RC的详细结构如图1所示，其关键组件的数学含义如下：

*[请在此处插入 图1：FNO-RC架构图]*

1、输入 *vt(x)*：表示在 *t* 时刻，模型在空间点 *x* 处的隐层特征表示。

2、主预测路径：一个标准的FNO层，负责生成初步预测。它包含傅里叶变换 (*F*)、谱域滤波 (*R*)、逆傅里叶变换 (*F⁻¹*)、空间域变换 (*W*)，最终输出初步预测 *v't+1(x)*。

3、残差修正路径：此路径旨在生成一个修正场以补偿主路径的预测误差。它包含高精度变换 (CFT)、一个由 *θ* 参数化的多层感知机 (MLP)，最终输出修正场 *c(x)*。

4、输出 *vt+1(x)*：最终输出由主预测与修正场叠加而成。

4. 实验与分析

4.1、实验设置

我们在三个基准物理系统上对模型进行了评估：一维粘性伯格斯方程、二维含力项的纳维-斯托克斯方程以及三维纳维-斯托克斯方程。所有模型均与标准的FNO基线模型进行公平对比，并采用Adam优化器和余弦退火学习率调度器进行训练。详细超参数设置见表1。

表1：各实验的超参数设置

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Hyperparameter | 1D Burgers' | 2D Navier-Stokes | 3D Navier-Stokes |
| Modes | 16 | 16 | 8 |
| Width | 64 | 64 | 20 |
| Batch Size | 20 | 20 | 4 |
| Epochs | 500 | 500 | 500 |
| Learning Rate | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| Scheduler Step | 100 | 100 | 100 |
| Scheduler Gamma | 0.5 | 0.5 | 0.5 |

4.2、实验结果与分析

1、定量分析

表2汇总了所有基准测试的最终相对L2测试误差。数据显示，FNO-RC在所有维度的问题上均一致性地超越了FNO基线。尤其在二维和三维的纳维-斯托克斯方程这类长时程、混沌主导的预测任务中，FNO-RC分别实现了73.68%和43.58%的显著相对误差降低。我们认为，这一巨大优势源于CFT修正路径的有效性：在混沌系统中，长期预测的误差主要来源于低频全局模态的累积偏差，而CFT路径通过其对信号的鲁棒分析能力，精确地捕捉并修正了这些累积误差。

表2：最终测试误差与相对性能提升

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Problem | FNO Baseline (L2 Error) | FNO-RC (L2 Error) | Relative Improvement |
| 1D Burgers' | 0.2145 | 0.2081 | 2.98% |
| 2D Navier-Stokes | 0.0453 | 0.0119 | 73.68% |
| 3D Navier-Stokes | 0.1581 | 0.0892 | 43.58% |

2、定性分析

定性结果（见图2-4）进一步证实了我们模型的优越性。对于一维伯格斯方程，FNO-RC能够更精确地捕捉激波的锋面；在二维纳维-斯托克斯问题中，FNO-RC的预测结果保留了更多真实流场中的小尺度涡结构细节；对于三维湍流，FNO-RC同样生成了与真实解在拓扑结构上更为一致的等值面。

*[请在此处插入 图2、3、4：分别为1D、2D、3D问题的定性对比图。]*