1. 引言

摘要：[请在此处填写摘要]

关键词：[请在此处填写关键词]

2. 神经算子基本原理

与学习有限维向量映射的传统神经网络不同，神经算子旨在学习无限维函数空间之间的映射。给定两个函数空间 *A* 和 *U*，其定义在物理域 *D ⊂ ℝᵈ* 之上，神经算子的目标是学习一个算子 *G: A → U*。对于任意输入函数 *a ∈ A*，算子 *G* 能够输出对应的函数 *u = G(a) ∈ U*。

许多物理系统的解算子可以表达为积分算子的形式。因此，神经算子通过参数化一个积分核函数来构建映射，其通用形式为：

*(G(a))(x) = ∫D κ(x, y, a(x), a(y)) u(y) dy*

傅里叶神经算子 (FNO) 对此通用框架进行了简化和高效实现。通过假定核函数 *κ* 具有平移不变性，即 *κ(x, y; a) = κ(x-y)*，上述积分运算可以简化为卷积运算。根据卷积定理，空间域的全局卷积等价于频率域中逐元素的Hadamard积，这使得计算可以通过快速傅里叶变换（FFT）高效执行。

3. 模型原理与方法

3.1、高精度不连续傅里叶变换

为克服FFT在处理非周期、有界函数时因混叠失真和吉布斯现象所带来的精度瓶颈，我们引入了一种高精度数值积分方法。该方法的核心目标是精确计算以下傅里叶积分：

*F(u) = ∫p₁p₀ f(x)e−2πiux dx*

其核心思想是，完全不对振荡的傅里叶核进行离散化，而是对其进行纯解析处理，从而将全部数值误差转移到对原函数 *f(x)* 的逼近上。该方法通过以下步骤实现：

1、分段与逼近。将积分区间 [*p₀, p₁*] 分为L个子区间。在每个子区间 [*xₗ, xₗ₊₁*] 内，使用一个M阶多项式 *Pₗ(M)(x)* 来高精度地逼近函数 *f(x)*。此时，原积分可近似为各子区间积分之和：

*F(u) ≈ ΣLl=1 ∫xₗ₊₁xₗ Pₗ(M)(x)e−2πiux dx*

2、变量代换与解析求解。对每个子区间上的积分，通过线性变量代换 *x = at + hₗ*，将积分域标准化到 [-1, 1]。由于多项式是由一系列单项式 *tᵐ* 组成的，而形如 *∫ tᵐe⁻ᵃᵗ dt* 的积分存在封闭的解析解，因此整个积分可以通过对解析解的线性组合求得。

3、数值稳定性处理。在低频区（即频率 *u* 接近0时），直接计算解析解会因舍入误差而变得不稳定。此时，方法会切换到对指数项的泰勒级数展开来进行计算，从而保证了在全频带内的高精度。

3.2、FNO-RC 架构

基于以上理论，我们设计了傅里叶神经算子残差修正 (FNO-RC) 模型。其核心设计哲学在于解耦动力学演化的“主趋势预测”与“误差修正”这两个任务。

单层FNO-RC的详细结构如图1所示，它包含两条并行计算路径：

*[请在此处插入 图1：FNO-RC架构图]*

1、主预测路径：该路径是一个标准的FNO层，旨在利用其计算高效性和强大的非线性拟合能力，快速捕捉系统演化的主体趋势。对于输入 *vt(x)*，该路径通过傅里叶变换、谱域滤波、逆变换和局部线性变换，生成一个初步的、可能存在累积误差的预测 *v't+1(x)*。

2、残差修正路径：此路径是本工作的核心创新，其目标是学习一个修正场 *c(x)* 来精确补偿主路径的预测误差。我们认为，标准FNO的误差，尤其在长时程预测中，主要表现为低频的全局漂移和高频的数值伪影。因此，一个理想的修正模块需要具备极高的频谱保真度来“洞察”这些误差。高精度不连续傅里叶变换（CFT）正是实现此目标的关键。该路径将输入 *vt(x)* 视为一个有界函数，应用CFT将其转换到谱空间，提取出高保真度的全局频谱特征。随后，一个由 *θ* 参数化的多层感知机 (MLP) 从这些高保真谱特征中学习到一个非线性映射，生成最终的修正场 *c(x)*。

3、输出合成与关键技术：最终的输出由主预测与修正场叠加而成。一个至关重要的技术细节是，修正路径中MLP的最后一层被零初始化。这确保了在训练初期，c(x)为零，使得整个FNO-RC模型的性能至少不劣于一个标准的FNO模型。这种设计不仅为训练提供了一个稳定的起点，也保证了模型性能的可靠下界，使得修正路径可以专注于学习“锦上添花”的残差部分。

4. 实验与分析

4.1、实验设置

我们在三个基准物理系统上对模型进行了评估：一维粘性伯格斯方程、二维含力项的纳维-斯托克斯方程以及三维纳维-斯托克斯方程。所有模型均与标准的FNO基线模型进行公平对比，并采用Adam优化器和余弦退火学习率调度器进行训练。详细超参数设置见表1。

表1：各实验的超参数设置

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Hyperparameter | 1D Burgers' | 2D Navier-Stokes | 3D Navier-Stokes |
| Modes | 16 | 16 | 8 |
| Width | 64 | 64 | 20 |
| Batch Size | 20 | 20 | 4 |
| Epochs | 500 | 500 | 500 |
| Learning Rate | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| Scheduler Step | 100 | 100 | 100 |
| Scheduler Gamma | 0.5 | 0.5 | 0.5 |

4.2、实验结果与分析

1、定量分析

表2汇总了所有基准测试的最终相对L2测试误差。数据显示，FNO-RC在所有维度的问题上均一致性地超越了FNO基线。尤其在二维和三维的纳维-斯托克斯方程这类长时程、混沌主导的预测任务中，FNO-RC分别实现了73.68%和43.58%的显著相对误差降低。我们认为，这一巨大优势源于CFT修正路径的有效性：在混沌系统中，长期预测的误差主要来源于低频全局模态的累积偏差，而CFT路径通过其对信号的鲁棒分析能力，精确地捕捉并修正了这些累积误差。

表2：最终测试误差与相对性能提升

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Problem | FNO Baseline (L2 Error) | FNO-RC (L2 Error) | Relative Improvement |
| 1D Burgers' | 0.2145 | 0.2081 | 2.98% |
| 2D Navier-Stokes | 0.0453 | 0.0119 | 73.68% |
| 3D Navier-Stokes | 0.1581 | 0.0892 | 43.58% |

2、定性分析

定性结果（见图2-4）进一步证实了我们模型的优越性。对于一维伯格斯方程，FNO-RC能够更精确地捕捉激波的锋面；在二维纳维-斯托克斯问题中，FNO-RC的预测结果保留了更多真实流场中的小尺度涡结构细节；对于三维湍流，FNO-RC同样生成了与真实解在拓扑结构上更为一致的等值面。

*[请在此处插入 图2、3、4：分别为1D、2D、3D问题的定性对比图。]*