CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Otimização Linear

Professor: Sérgio Ricardo de Souza

Belo Horizonte, setembro de 2023

Sumário

1 **Solução Básica de um Problema de Otimização Linear** **3**

2 **Forma Preparada de um Problema de Otimização Linear** **16**

3 **Álgebra do Método Simplex** **25**

4 **Otimalidade e Ilimitação** **34**

5 **Método Simplex** **45**

6 **Convergência do Método Simplex** **48**

7 **Método Simplex em Formato Tabela** **55**

8 **Interpretação da Tabela** **60**

9 **Solução Básica Inicial Factível** **64**

10 **Método Simplex Revisado** **72**

10.1 Método Simplex Revisado - Algoritmo 73

10.2 Comparação 79

11 **Problema de Programação Linear com Variáveis Limitadas** **80**

1 Solução Básica de um Problema de Otimização Linear

Seja o problema de otimização linear:

$$\min \ z = c'x \tag{1}$$
$$\text{suj. a } \ Ax = b \tag{2}$$
$$x \geq \mathbf{0} \tag{3}$$

no qual

$$\begin{aligned} A &\in \Re^{m\times n}\,, \quad n > m \\ b &\in \Re^{m} \\ c &\in \Re^{n} \\ x &\in \Re^{n} \end{aligned}$$

Considere que sejam selecionadas m vetores-coluna linearmente independentes da matriz A, de modo que:

I : conjunto dos índices das m colunas LI.

J : conjunto dos índices das $n - m$ colunas restantes.

posto $\{A_I\} = m$.

Portanto, A_I é uma matriz-base.

Logo, pode-se escrever que:

$$A_I x^I + A_J x^J = b \tag{4}$$

ou seja:

$$x^I = (A_I)^{-1} b - (A_I)^{-1} A_J x^J \tag{5}$$

Definição 1 *As partições x^I e x^J são denominadas:*

x^I : *vetor das variáveis básicas;*

x^J : *vetor das variáveis não-básicas*

Definição 2 *Faça $x^J = \mathbf{0}$ em (5). Então, o vetor:*

$$x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_I^{-1} b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

é denominado Solução Básica com relação à base I.
Se, além disso,

$$x^I \geq \mathbf{0}$$

então, o vetor x é denominado Solução Básica Factível.
Se, também,

$$x^I > \mathbf{0}$$

então, o vetor x é denominado Solução Básica Factível não-degenerada e, nesse caso, a Solução Básica referente à base I é única.

Exemplo 1

$$\begin{array}{llrrrrrrrrl}
\min & z = & \frac{1}{2}x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & \\
\text{suj. a} & & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 6 \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 10
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, 3, 4$$

Para $I = \{1, 4\}$ *e* $J = \{2, 3\}$*:*

$$A_I x^I + A_J x^J = b$$

Substituindo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Solução básica:

$$x^J = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^I = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$\longrightarrow$ *Solução básica factível não- degenerada.*

$\longrightarrow$ *Solução única.*

Teorema 1 *Seja* $\mathbb{S}$ *o conjunto poliedral convexo formado pelos pontos factíveis do Problema de Otimização Linear:*

$$\begin{array}{ll} \min & z = c'x \\ \text{suj. a} & Ax = b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Um vetor x *é um ponto extremo de* $\mathbb{S}$ *se e somente se é uma solução básica factível para o Problema.*

Prova: Seja $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ o conjunto de índices de uma base de A, de modo que

$$x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

seja uma solução básica factível, para $x^J = \mathbf{0}$. Então:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m = b$$

sendo

$$A_I = [A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_m]$$

uma base.

Suponha que x possa ser expresso como a combinação convexa estrita de dois outros pontos em $\mathbb{S}$, na forma:

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z \ , \quad 0 < \alpha < 1 \ , \quad y \neq z, \quad y, z \in \mathbb{S}$$

Assim:

$$\begin{cases} x_i \ = \ \alpha y_i + (1-\alpha) z_i \ , \ \ i \in I \\ \\ x_j \ = \ \alpha y_j + (1-\alpha) z_j \ , \ \ j \in J \end{cases}$$

Portanto, como $x_j = 0$, $\forall\ j \in J$, e, além disso, $y \geq \mathbf{0}$, $z \geq \mathbf{0}$ e $0 < \alpha < 1$, conclui-se que:

$$y_j = z_j = x_j = 0, \ \ \forall\ j \in J$$

Assim, como $y \in \mathbb{S}$ e $z \in \mathbb{S}$, tem-se que:

$$\begin{cases} A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_m y_m = b \\ \\ A_1 z_1 + A_2 z_2 + \ldots + A_m z_m = b \end{cases}$$

Porém, como os vetores-coluna de índices pertencentes ao conjunto I formam uma base:

$\Longrightarrow$ são LI $\rightarrow$ solução única

$\Longrightarrow$ $x = y = z$;

$\Longrightarrow$ x é um ponto extremo de $\mathbb{S}$.

De forma reversa, considere que x seja um ponto extremo de $\mathbb{S}$, na forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

para

$$x_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q$$

Logo, como $x \in \mathbb{S}$:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_q x_q = b$$

Suponha que as colunas $A_1, A_2, \ldots, A_q$ de A sejam LD.

Portanto, existem escalares não-nulos d_i, $i = 1, \ldots q$, tais que:

$$A_1 d_1 + A_2 d_2 + \ldots + A_q d_q = \mathbf{0}$$

ou seja, existe um vetor não-nulo $d \in \Re^n$ tal que:

$$Ad = \mathbf{0}$$

para

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_q \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, é possível selecionar $\varepsilon \approx 0$ tal que:

$$\begin{cases} z = x + \varepsilon d \geq \mathbf{0} \\ \\ v = x - \varepsilon d \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

de modo que $z \in \mathbb{S}$ e $v \in \mathbb{S}$. Assim:

$$x = \frac{1}{2}\, z + \frac{1}{2}\, v$$

Ou seja, x, pode ser expresso como uma combinação convexa entre dois pontos de $\mathbb{S}$.

Contudo, isso é uma contradição à hipótese que x seja um ponto extremo de $\mathbb{S}$.

Portanto, as colunas $A_1, A_2, \ldots, A_q$ de A são LI.

Sejam, então, as partições:

$$A_I \;=\; [\; A_1 \;\; A_2 \ldots A_q \;]$$

$$A_J \;=\; [\; A_{q+1} \;\; A_{q+2} \;\; \ldots \;\; A_n \;]$$

para

$$A = [\; A_I \;\; A_J \;]$$

Da mesma forma:

$$x^I = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}, \qquad x^J = \begin{bmatrix} x_{q+1} \\ x_{q+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

para

$$x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix}$$

Como as colunas de A_I são LI, tem-se que:

$$x^I = A_I^{-1} b$$

$\Longrightarrow x$ é solução básica factível. ¶

Exemplo 2

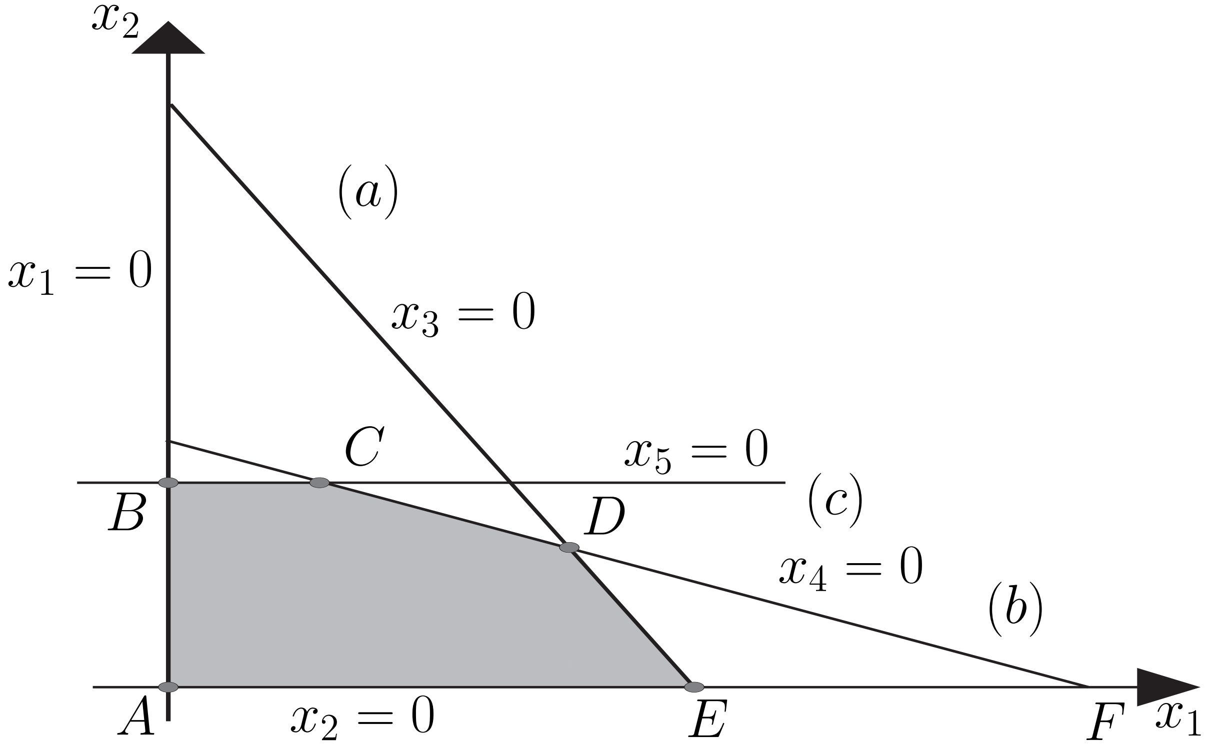
$$\begin{array}{llrcrcl}
\max & z = & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{suj. a} & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \quad (a) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \quad (b) \\
 & & & & x_2 & \leq & 3 \quad (c)
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\max & z = & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{suj. a} & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 7 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



- *Ponto extremo A:*

$$\begin{array}{l} I_A = \{3,4,5\} \\ \\ J_A = \{1,2\} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} & x_3 = 8 \\ x_1 = 0 & \\ & x_4 = 7 \\ x_2 = 0 & \\ & x_5 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{Solução} \\ \textit{básica} \\ \textit{factível} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z_A = 0$$

- *Ponto extremo B*

$$\begin{array}{l} I_B = \{3,4,2\} \\ \\ J_B = \{1,5\} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} & x_3 = 5 \\ x_1 = 0 & \\ & x_4 = 1 \\ x_5 = 0 & \\ & x_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{Solução} \\ \textit{básica} \\ \textit{factível} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z_B = 3$$

- *Ponto extremo C*

$$\begin{array}{l} I_C = \{3,1,2\} \\ \\ J_C = \{4,5\} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} & x_3 = 3 \\ x_4 = 0 & \\ & x_1 = 1 \\ x_5 = 0 & \\ & x_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{Solução} \\ \textit{básica} \\ \textit{factível} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z_C = 4$$

- *Ponto extremo D*

$$\begin{array}{l} I_D = \{5,1,2\} \\ \\ J_C = \{4,3\} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{r} x_5 = 1 \\ \\ x_1 = 3 \\ \\ x_2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{Solução} \\ \textit{básica} \\ \textit{factível} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z_D = 5$$

- *Ponto extremo E*

$$\begin{array}{l} I_E = \{5,1,4\} \\ \\ J_E = \{2,3\} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{r} x_5 = 3 \\ \\ x_1 = 4 \\ \\ x_4 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{Solução} \\ \textit{básica} \\ \textit{factível} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z_E = 4$$

- *Ponto extremo F*

$$\begin{array}{l} I_F = \{5,1,3\} \\ \\ J_F = \{2,4\} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ \\ x_4 = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{r} x_5 = 3 \\ \\ x_1 = 7 \\ \\ x_3 = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{Solução} \\ \textit{básica} \\ \textit{Infactível} \end{array}$$

Observe que:

$$Ax = b \ , \quad A \in \Re^{m \times n} \ , \quad b \in \Re^m$$

possui um número máximo de soluções básicas factíveis:

$$\mathbf{B}_n^m = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

No exemplo, $n = 5$, $m = 3$ $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_n^m = 10$

$\Rightarrow$ Um método simplista para resolver um PPL:

i) Listar todas as soluções básicas factíveis;

ii) Avaliar a função objetivo em cada vértice do poliedro de soluções factíveis e escolher a solução de menor valor (Problema de minimização).

$\Rightarrow$ Problema: número de vértices é muito elevado.

$\Rightarrow$ Método mais simples $\Longrightarrow$ Método Simplex

Corolário 1 *Se existir uma solução ótima finita para o PPL:*

$$\begin{array}{ll} \min & z = c'x \\ \text{suj. a} & Ax = b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

então existe uma solução básica factível ótima, que é um ponto extremo do conjunto de restrições.

Corolário 2 *Se o conjunto $\mathbb{S}$ das soluções factíveis é não-vazio, então ele possui pelo menos um ponto extremo.*

Corolário 3 *O conjunto $\mathbb{S}$ possui um número finito de pontos extremos.*

2 Forma Preparada de um Problema de Otimização Linear

Seja o Problema de Otimização Linear:

$$\begin{aligned} \min \;\; & z = c'x && (6)\\ \text{suj. a} \;\; & Ax = b && (7)\\ & x \geq \mathbf{0} && (8) \end{aligned}$$

e considere:

I **:** conjunto ordenado de índices das m colunas correspondentes a uma base factível;

J **:** conjunto ordenado de índices, associados às $(n-m)$ colunas restantes.

Particionando as matrizes e vetores:

$$\begin{aligned} \min \;\; & z = c'_I x^I + c'_J x^J && (9)\\ \text{suj. a} \;\; & A_I x^I + A_J x^J = b && (10)\\ & x^I \geq \mathbf{0} && (11)\\ & x^J \geq \mathbf{0} && (12) \end{aligned}$$

ou, em forma compacta:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline c'_I & c'_J \\ \hline A_I & A_J \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|} \hline x^I \\ \hline x^J \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline z \\ \hline b \\ \hline \end{array} \qquad (13)$$

Observe que, por (10):

$$A_I x^I + A_J x^J = b$$

ou seja:

$$x^I = (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_J x^J \tag{14}$$

Substituindo na função objetivo, dada em (9):

$$\begin{aligned} z &= c'_I x^I + c'_J x^J \\ &= c'_I (A_I)^{-1} b - c'_I (A_I)^{-1} A_J x^J + c'_J x^J \\ &= c'_I (A_I)^{-1} b - \left[c'_I (A_I)^{-1} A_J - c'_J \right] x^J \end{aligned} \tag{15}$$

Definindo:

$$\pi = c'_I (A_I)^{-1} \;\rightarrow\; \text{Vetor multiplicador} \tag{16}$$

$$z_0 = c'_I (A_I)^{-1} b \tag{17}$$

$$= \pi b \qquad \rightarrow\; \text{Valor da função para a base I} \tag{18}$$

$$z_J = c'_I (A_I)^{-1} A_J \tag{19}$$

$$= \pi A_J \tag{20}$$

obtém-se:

$$
\begin{aligned}
z &= z_0 - [z_J - c'_J]\, x^J \\
&= \pi b - [\pi A_J - c'_J]\, x^J \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Portanto, de (14) e (21):

$$\mathbf{0}.\ x^I + [\pi A_J - c'_J]\, x^J = \pi b - z \qquad (22)$$

$$\mathbf{I}.\ x^I + (A_I)^{-1} A_J x^J = (A_I)^{-1} b \qquad (23)$$

ou seja:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{0} & \pi A_J - c'_J \\ \hline \mathbf{I} & (A_I)^{-1} A_J \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|}\hline x^I \\ \hline x^J \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \pi b - z \\ \hline (A_I)^{-1} b \\ \hline \end{array}$$

Defina então:

$$
\begin{aligned}
\hat{c} &= \left[\, 0 \ \vdots \ \pi A_J - c'_J \,\right] \qquad (24) \\
&= \left[\, \hat{c}_I \ \vdots \ \hat{c}_J \,\right] \qquad (25)
\end{aligned}
$$

para:

$\hat{c}$: vetor de custos, relativo à base I.

$\hat{c}_I$: vetor de custos básicos, relativo à base I.

$\hat{c}_J$: vetor de custos não-básicos, relativo à base I.

Logo, substituindo (25) em (22)-(23):

$$\mathbf{0}.\ x^I + \hat{c}_J x^J \ = \ \pi b - z \tag{26}$$

$$\mathbf{I}.\ x^I + (A_I)^{-1} A_J x^J \ = \ (A_I)^{-1} b \tag{27}$$

ou seja:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{0} & \hat{c}_J \\ \hline \mathbf{I} & (A_I)^{-1}A_J \\ \hline \end{array} \ \begin{array}{|c|}\hline x^I \\ \hline x^J \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \pi b - z \\ \hline (A_I)^{-1} b \\ \hline \end{array} \tag{28}$$

ou ainda:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & \hat{c}_J & \pi b - z \\ \hline I & (A_I)^{-1}A_J & (A_I)^{-1} b \\ \hline \end{array} \tag{29}$$

$\Longrightarrow$ Forma Preparada para a base I

Fazendo $x^J = \mathbf{0}$ em (29) :

$$\begin{cases} x^I \ = \ (A_I)^{-1} b \geq \mathbf{0} \ \rightarrow \ \text{Solução básica factível} \\[2ex] z \ = \ \pi b \qquad\qquad\quad \rightarrow \ \begin{array}{l}\text{Valor da função objetivo para} \\ \text{esta solução básica factível}\end{array} \end{cases}$$

Exemplo 3 *Considere o PPL:*

$$\min \quad z = \begin{bmatrix} 25 & 35 & 50 & 11 & 12 \end{bmatrix} x$$

$$\text{suj. a} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\Downarrow$$

$$\min \quad z = \begin{bmatrix} 25 & 35 & 50 & 11 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\text{suj. a} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Escreva-o na forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
25	35	50	11	12	0	0	z
3	4	5	1	2	1	0	42
2	3	4	1	1	0	1	24

Seja, então, a base dada pelos conjuntos:

$$I = \{4, 5\}$$

$$J = \{1, 2, 3, 6, 7\}$$

Faça o seguinte procedimento:

$$l_c \leftarrow -l_c + l_1 + 10 l_2$$

Portanto:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-2	-1	-5	0	0	-1	-10	$282 - z$
3	4	5	1	2	1	0	42
2	3	4	1	1	0	1	24

$\Longrightarrow$ *Corresponde a zerar os coeficientes das variáveis básicas na função objetivo*

$\Longrightarrow$ *Pivotear sobre a função objetivo.*

O vetor multiplicador π é dado por:

$$\begin{aligned}\pi &= c'_I A_I^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 10 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\pi_1 = 1 \rightarrow \textit{Multiplicador da linha 1.}$$

$$\pi_2 = 10 \rightarrow \textit{Multiplicador da linha 2.}$$

Sistematizando:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} c'_I & c'_J & z \\ \hline A_I & A_J & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \pi A_J - c'_J & \pi b - z \\ \hline A_I & A_J & b \end{array}\right]$$

$$l_c \leftarrow -l_c + \pi A$$

$$\hat{c} = \pi A - c$$

Continuando o exemplo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-2	-1	-5	0	0	1	10	$282-z$
3	4	5	1	2	1	0	42
2	3	4	1	1	0	1	24

Faça o seguinte procedimento:

$$l_1 \leftarrow -l_1 + 2l_2$$
$$l_2 \leftarrow l_1 - l_2$$

Logo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-2	-1	-5	0	0	1	10	$282-z$
1	2	3	1	0	-1	2	6
1	1	1	0	1	1	-1	18

$\Rightarrow$ *Reduzir a partição associada às variáveis básicas na matriz de restrições a uma matriz identidade.*

$\Rightarrow$ *Pivotear sobre as restrições.*

$\Rightarrow$ *Partição das variáveis básicas:*

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_I^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *Forma preparada para a base I dada.*

Sistematizando, novamente:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \pi A_J - c'_J & \pi b - z \\ \hline A_I & A_J & b \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \pi A_J - c'_J & \pi b - z \\ \hline \mathbf{I} & A_I^{-1} A_J & A_I^{-1} b \end{array}\right]$$

$\rightarrow$ *Pré-multiplicar a matriz de restrições A por A_I^{-1}.*

- *Resumindo:*

  $\rightarrow$ *Pivotear sobre a partição A_I, de modo a reduzi-la à matriz identidade.*

  $\rightarrow$ *Pivotear sobre a função objetivo, de modo a zerar os coeficientes das variáveis básicas.*

$$\left[\begin{array}{c|c|c} c'_I & c'_J & \mathrm{z} \\ \hline A_I & A_J & \mathrm{b} \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \pi A_J - c'_J & \pi b - z \\ \hline \mathbf{I} & A_I^{-1} A_J & A_I^{-1} b \end{array}\right]$$

3 Álgebra do Método Simplex

Considere a forma preparada para uma base I dada:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \pi b - \hat{c}_J x^J \\ \text{suj. a} \quad & x^I + A_I^{-1} A_J x^J = A_I^{-1} b \\ & x^J \geq \mathbf{0} \\ & x^I \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Se $\hat{c}_J < 0$ para todo $j \in J$

$\Rightarrow$ não é possível melhorar o valor de z caso algum x^j, $j \in J$, tenha seu valor aumentado positivamente a partir de zero.

$\longrightarrow$ Se $\exists\ \hat{c}_j > 0$, $j \in J$

$\Rightarrow$ aumentar o valor das variáveis não-básicas correspondentes, mantendo a factibilidade do problema, implica em melhorar o valor de z.

Escolha, então, o índice $k \in J$ de modo que:

$$k = \arg\max_{j\ \in\ J} \{\ \hat{c}_j \quad : \quad \hat{c}_j > 0\ \}$$

Logo, o novo valor da função objetivo será:

$$z = \pi b - \hat{c}_k x_k$$

Porém, observe que resta determinar qual é o valor limite de crescimento de x_k (a partir de seu valor inicial nulo), de modo que a função objetivo tenha o maior avanço no processo de otimização e seja mantida a factibilidade do problema.
Assim:

$$A_I x^I + A_J x^J = b$$

ou

$$A_I x^I + A_k x_k = b$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x^I &= (A_I)^{-1} b - (A_I)^{-1} A_k x_k \\ &= \bar{b} - y^k x_k \end{aligned}$$

para:

$$\bar{b} = (A_I)^{-1} b$$

$$y^k = (A_I)^{-1} A_k$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} x_1^I \\ x_2^I \\ \vdots \\ x_r^I \\ \vdots \\ x_m^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ \vdots \\ y_r^k \\ \vdots \\ y_m^k \end{bmatrix} x_k$$

Duas situações podem ocorrer:

i) $y_i^k \leq 0 \ \rightarrow \ x_i^I$ aumenta positivamente quando x_k aumenta na mesma direção.

$\Rightarrow$ factibilidade garantida para qualquer valor de $x_k \geq 0$.

ii) $y_i^k > 0 \quad \rightarrow \quad x_i^I$ decrescerá.

$\Rightarrow$ determinar o valor máximo de crescimento de x_k.

$$x_k^{\max} = \frac{\bar{b}_r}{y_r^k} = \min_{i \,\in\, I} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_i^k} \quad : \quad y_i^k > 0 \right\}$$

$$x_k^{\max} \rightarrow \text{Valor de bloqueio} \Rightarrow x_r^I = 0$$

$$\Downarrow$$

Uma nova solução básica factível está determinada.

$$\Downarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_k & \text{entrou para a base} \\ \\ x_r & \text{saiu da base} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Novo conjunto das variáveis básicas:

$$I_{\text{velho}} = \{1, 2, \ldots, r, \ldots, m\}$$

$$I_{\text{novo}} = \{1, 2, \ldots, k, \ldots, m\}$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{suj. a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \quad (a) \\ & x_2 + x_4 = 1 \qquad\qquad (b) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- *Identificação dos dados:*

$$c' = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- *Para $I = \{1, 2\}$:*

$$x^I = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (A_I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^J = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow z^{(1)} = 0$$

- *Vetor multiplicador:*

$$\begin{aligned}\pi &= c_I(A_I)^{-1}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- *Cálculo do custo relativo:*

$$\begin{aligned}\hat{c}_J &= \pi A_J - c'_J\\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad k = 3 = \arg\max_{j\ \in\ J} \{\hat{c}_J : \hat{c}_j > 0\}$$

- *Portanto:*

$$\begin{aligned}x^I &= (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_k x_k\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3\end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$$

- *Assim:*

$$r = \arg \min_{i \, \in \, I} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_i^k} \quad : \quad y_i^k > 0 \right\}$$

$$= 1$$

$\longrightarrow x_3$ *entra na base* I.

$\longrightarrow x_1$ *deixa a base* I.

$$\Downarrow$$

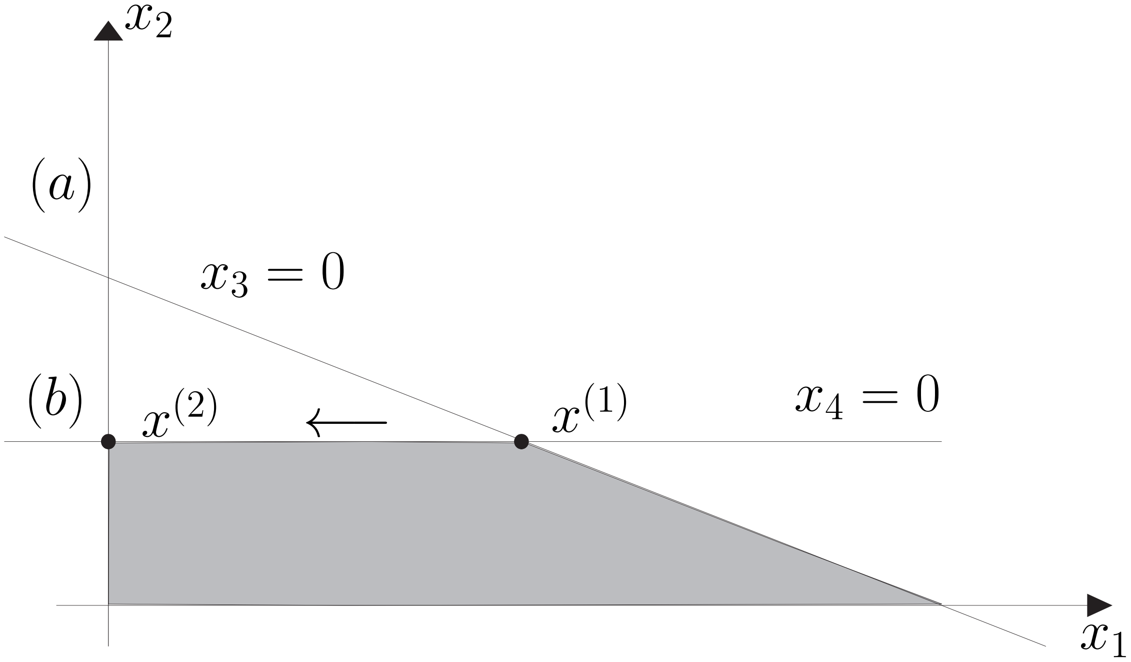
Nova Base: $I = \{3, 2\}$

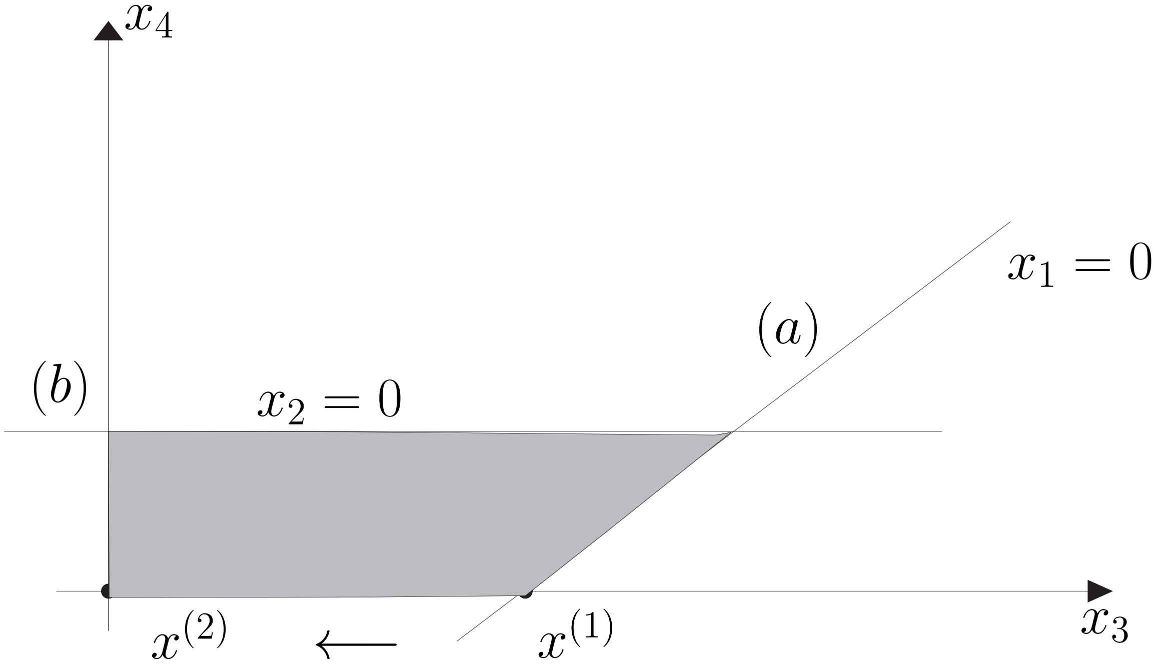
$\rightarrow$ *Nova Solução*

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^{(2)} = 1$$

$\rightarrow$ *Geometria do problema*





$$
\begin{array}{ll}
\min & z = 3 - x_3 + x_4 \\
\text{suj. a} & x_1 + x_3 - 2x_4 = 2 \\
& x_2 + x_4 = 1 \\
& x \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

- Resumindo:

a) Entrada na base:

$$k = \arg\max_{j \, \in \, J} \{ \; \hat{c}_j \quad : \quad \hat{c}_j > 0 \; \}$$

b) Saída da base:

$$r = \arg\min_{i \in I} \left\{ \; \frac{\bar{b}_i}{y_i^k} \quad : \quad y_i^k > 0 \; \right\}$$

- Questões a serem respondidas:

$\longrightarrow$ Critério de parada: quando uma solução é ótima ?

$\longrightarrow$ Impossibilidade de troca de base.

4 Otimalidade e Ilimitação

Teorema 2 *Se o vetor de custos relativo à base I é não-positivo, ou seja, se*

$$\hat{c}_j \leq 0$$

para todo $j \in J$, então a solução básica factível correspondente é ótima.

Prova: Sabemos que, na base I,

$$z = \pi b - \hat{c}_J x^J$$

ou seja

$$\pi b - z = \hat{c}_J x^J = \sum_{j \in J} \hat{c}_j x_j$$

Suponha que $\hat{c}_J \leq \mathbf{0}$, ou seja, suponha que não seja possível determinar uma variável não-básica que entre na base. Logo:

$$\sum_{j \in J} \hat{c}_j x_j \leq 0$$

pois $x_j \geq 0$ para todo $j \in J$. Assim:

$$\pi b - z \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \pi b \leq z$$

e, portanto, a solução básica factível corrente é ótima:

$$\Rightarrow \quad x^* = \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix}$$

Porém, se:

$$\hat{c}_j \leq 0 \ , \quad \forall_j \in J$$

mas

$$\hat{c}_k = 0 \quad , \quad k \in J$$

Logo:

$$\begin{aligned} x^I &= (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_k x_k \\ &= \bar{b} - y^k x_k \end{aligned}$$

→ Determina-se pontos que são distintos de x^*, mas que têm o mesmo valor da função objetivo quando x_k cresce a partir de zero.

→ Número infinito de solução alternativas.

¶

Exemplo 5

$$\begin{array}{rl} \min & z = -3x_1 + x_2 \\ \text{suj. a} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{array}$$

$$I = \{1, 4\}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^I = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (A_I)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x^J = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi = c_I(A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z &= \pi b \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = -12 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_J &= \pi A_J - c_J \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7 & -3 \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \; x = x^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

- *Altere agora a função objetivo para:*

$$
z = -2x_1 - 4x_2
$$

Assim, para:

$$
x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad z = -8
$$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
\pi &= c_I(A_I)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_J &= \pi A_J - c_J \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow x = x^*$$

Porém:

$$\hat{c}_2 = 0$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_2$$

Portanto:

$$\Longrightarrow \; x = x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 5 - 3x_2 \end{bmatrix} \;, \quad para \quad x_2 \leq \frac{5}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad z^* = -8$$

$\Rightarrow$ *Família de soluções ótimas alternativas.*

- Suponha agora que não seja possível efetuar a troca de base, ou seja, que, no critério de saída:

$$y_i^k < 0 \ , \quad \forall \ i \in I$$

Logo, não é possível determinar a variável de bloqueio, ou seja, em

$$\begin{aligned} x^I &= (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_k x_k \\ &= \bar{b} - y^k x_k \end{aligned}$$

a variável x_k que está entrando na base pode crescer indefinidamente, sem que a factibilidade do problema seja alterada.

$\Longrightarrow$ Solução ilimitada

Exemplo 6

$$
\begin{array}{rll}
\min & z = -x_1 - 3x_2 & \\
\text{suj. a} & x_1 - 2x_2 + x_3 & = \ 4 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 & = \ 3 \\
& x_i \geq 0 \ , & \quad i = 1, \ldots, 4
\end{array}
$$

- *1ª iteração*

$$I_1 = \{3, 4\}$$

$$x^I = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = (A_I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x^J = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi = c_I (A_I)^{1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_J &= \pi A_J - c_J \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \to x_2 \ \ \textit{entra na base}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^I &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
&= (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_2 x_2 \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 \quad \to x_4 \ \ \textit{sai da base}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \to x_4 \ \ \textit{sai da base} \\ \\ \to x_2 = 3 \end{cases}$$

- *2ª iteração*

$$I_2 = \{3, 2\}$$

$$x^I = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = (A_I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

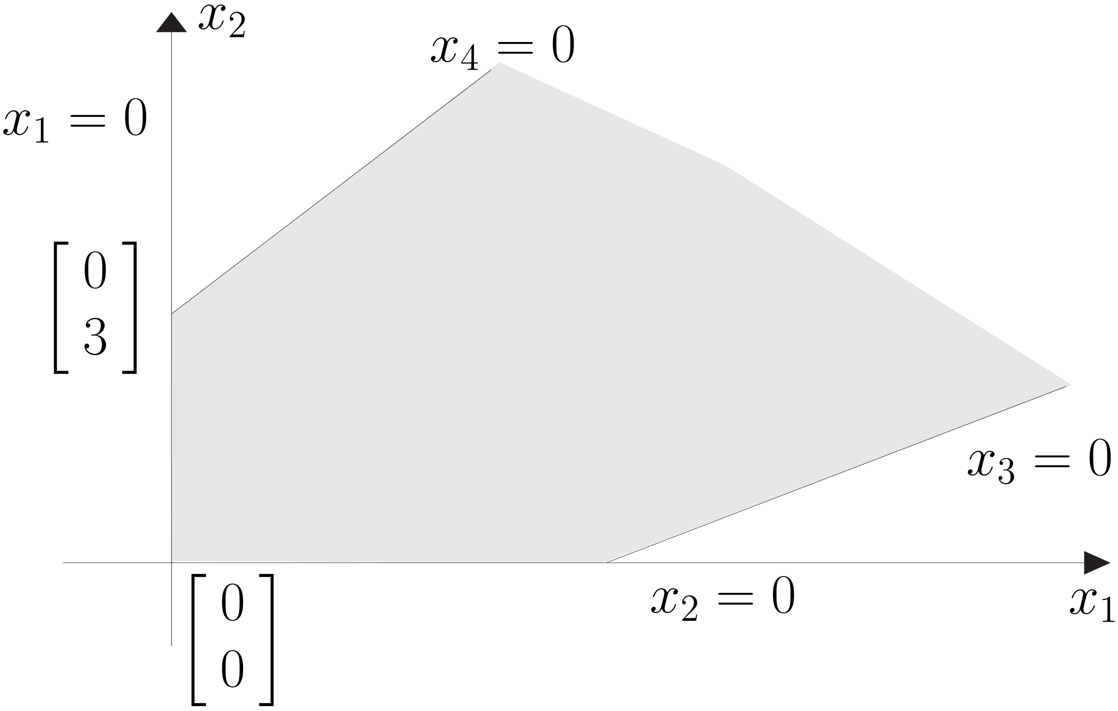
$$x^J = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi = c_I (A_I)^{1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_J &= \pi A_J - c_J \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow x_1 \quad \textit{entra na base} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^I &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = (A_I)^{-1} b - (A_I)^{-1} A_1 x_1 \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 \qquad \rightarrow \textit{solução ilimitada} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x^* &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, \qquad x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$



5 Método Simplex

Algoritmo 1 *Algoritmo para o Método Simplex*

Algoritmo para minimização

$$\begin{array}{ll} \min & z = c'x \\ \text{suj. a} & Ax = b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$A \in \Re^{m \times n}\ , \quad m < n$$

Dados: *Escolha uma base inicial factível, de modo que:*

$I =$ *conjunto de índices das variáveis básicas;*

$J =$ *conjunto de índices das variáveis não-básicas.*

Passo 1: *Determine:*

$$\begin{aligned} x^I &= (A_I)^{-1} b \\ \pi &= c_I'(A_I)^{-1} \\ z_0 &= \pi b = c_I' x^I \end{aligned}$$

Passo 2: *Calcule:*

$$\hat{c}_J = \pi A_J - c_J$$

Passo 3: *Encontre:*

$$k = \arg \max_{j \in J} \{\hat{c}_j \quad : \quad j \in J\}$$

Passo 4: *Se* $\hat{c}_k \leq 0$, *pare: a solução é ótima. De outro modo, continue.*

Passo 5: *Determine:*

$$y^k = (A_I)^{-1} A_k$$

Passo 6: *Se* $y^k \leq 0$, *pare: a solução ótima é ilimitada. Caso contrário, continue.*

Passo 7: *Encontre:*

$$r = \arg \min_{i \in I} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_k^I} \quad : \quad y_k^I > 0 \right\}$$

Passo 8: *Atualize o conjunto I, retirando o índice r e acrescentado o índice k. Retorne ao passo 1.*

Solução ótima:

$$x^* = \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_I^{-1}b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z^* &= c'x^* \\ &= c_I'x^I \\ &= \pi b \end{aligned}$$

- Problema de maximização $\rightarrow$ duas formas:

a) Multiplicar a função objetivo por -1.

b) Resolver diretamente:

b1) No passo 3 (critério de entrada na base):

$$k = \max_{j \in J} \{\hat{c}_J, \quad j \in J\}$$

b2) No passo 4 (critério de parada):
Se $\hat{c}_k \leq 0$, pare: a solução é ótima. De outro modo, continue.

6 Convergência do Método Simplex

Teorema 3 *Na ausência de degenerescência, o método simplex converge em um número finito de passos.*

Prova: Em uma iteração, três situações podem ocorrer:

a) Ponto ótimo é alcançado:

$$\Rightarrow \hat{c}_k \leq 0$$

b) Solução ilimitada:

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{c}_k > 0 \\ y_k \leq 0 \end{cases}$$

c) Uma nova solução básica é gerada:

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{c}_k > 0 \\ y_k > 0 \end{cases}$$

Neste último caso o valor da função objetivo é estritamente decrementado de

$$\Delta z = \hat{c}_k \frac{b_k}{y_k^r} > 0$$

e uma solução melhorada é encontrada. Como o número de soluções básicas factíveis é finito, o método irá convergir em um número finito de passos.

¶

Exemplo 7

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + x_2 \\ \text{suj. a} & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{llrrrrrrl} \min & z = & -x_1 & -x_2 & & & & & \\ \text{suj. a} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 8 \\ & & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 7 \\ & & & x_2 & + & & +x_5 & = & 3 \end{array}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

- *Iteração 1*

$$I = \{3, 4, 5\}$$

$$J = \{1, 2\}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^I = (A_I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \qquad x^J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad z = 0$$

$$\pi = c_I'(A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_J &= \pi A_J - c_J \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 1$, *qualquer um dos dois pode ter tomado.*

Assuma que o índice $k = 1$ *entra na base.*

$$x^I = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = (A_I)^{-1} b - (A_I)^{-1} A_1 x_1$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ \\ x_1 \leq 7 \end{cases} \longrightarrow x_3 \ \ \textit{sai da base}$$

- *Iteração 2*

$$I = \{1, 4, 5\}$$

$$J = \{3, 2\}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies (A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^I = (A_I)^{-1}b \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad z = 4$$

$$\pi = c_I (A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_J \; = \; \pi A_J - c_J$$

$$= \; \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \; \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow x_2 \;\; \textit{entra na base}$$

$$
\begin{aligned}
x^I &= (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_2x_2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 \\
&\qquad \Longrightarrow \begin{cases} x_2 \leq 8 \\ \\ x_2 \leq 2 \longrightarrow x_4 \quad sai\ da\ base \\ \\ x_2 \leq 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- *Iteração 3*

$$I = \{1, 2, 5\}$$

$$J = \{3, 4\}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^I &= (A_I)^{-1} b \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad z = 5 \end{aligned}$$

$$\pi = c_I (A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_J &= \pi A_J - c_J \\
&= \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ *Solução ótima encontrada*

$$
x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad z^* = 5
$$

7 Método Simplex em Formato Tabela

Considere o PPL:

$$\begin{array}{rl} \min & z = c'x \\ \text{suj. a} & Ax = b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

tendo base inicial I, de modo que

$$\begin{array}{rl} \min & z = c_I x^I + c_J x^J \\ \text{suj. a} & A_I x^I + A_J x^J = b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

que é equivalente a:

$$\begin{array}{rl} \min & z \\ \text{suj. a} & z - c_I x^I - c_J x^J = 0 \\ & A_I x^I + A_J x^J = b \\ & x^I \geq \mathbf{0} \\ & x^J \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Logo:

$$x^I + (A_I)^{-1} A_J x^J = (A_I)^{-1} b$$

ou

$$x^I = (A_I)^{-1} b - (A_I)^{-1} A_J x^J$$

Portanto:

$$z + \mathbf{0}\ .\ x^I + \left[c_I(A_I)^{-1}A_J - c_J\right] x^J = c_I(A_I)^{-1}b$$

Como

$$x^J = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x^I \ = \ (A_I)^{-1}b \\ \\ z \ = \ c_I(A_I)^{-1}b \end{cases}$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} \pi &= c_I(A_I)^{-1} \\ \hat{c}_J &= \pi A_J - c_J \end{aligned}$$

temos então que

$$z + \mathbf{0}\ .\ x^I + \hat{c}_J x^J = \pi b$$

$$\begin{cases} x^J \ = \ \mathbf{0} \\ \\ x^I \ = \ (A_I)^{-1}b \\ \\ z \ = \ \pi b \end{cases}$$

A tabela seguinte resume este desenvolvimento:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & z & x^I & x^J & \text{LD} \\ \hline
z & 1 & \mathbf{0} & c_I(A_I)^{-1}A_J - c_J & c_I(A_I)^{-1}b \\
x^I & \mathbf{0} & \mathbf{I} & (A_I)^{-1}A_J & (A_I)^{-1}b \\ \hline
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & z & x^I & x^J & \text{LD} \\ \hline
z & 1 & \mathbf{0} & \hat{c}_J & \pi b \\
x^I & \mathbf{0} & \mathbf{I} & (A_I)^{-1}A_J & (A_I)^{-1}b \\ \hline
\end{array}$$

- Procedimento para método simplex via tabela:

a) Dada a base inicial I, escreva a Tabela inicial.

b) Determine a variável a entrar na base:

$$k = \arg \max_{j \,\in\, J} \{\hat{c}_j \quad : \quad \hat{c}_j > 0\}$$

c) Determine a variável a sair da base:

$$r = \arg \min_{i \,\in\, I} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_k^i} \quad : \quad y_k^i > 0 \right\}$$

d) Realize uma operação de pivoteamento na coluna k:

d1) Divida a linha r por y_k^r;

d2) Para $i \neq r$:

$$l_i \leftarrow l_i + l_r y_k^i \ , \quad i \neq r$$

d3) Para a linha de custo:

$$l_c \leftarrow l_c + l_r \left(-\hat{c}_k\right)$$

Exemplo 8

$$\begin{array}{llrcl}
\min & z = & x_1 + x_2 - 4x_3 & & \\
\text{suj. a} & & x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 9 \\
& & x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 2 \\
& & -x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 4 \\
& & x & \geq & \mathbf{0}
\end{array}$$

$$\min \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\text{suj. a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbf{0}$$

- *Iteração 1*

$I = \{4, 5, 6\}$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
x_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	0	-1	1	1	0	0	1	4

- *Iteração 2*

$I = \{4, 5, 3\}$

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c|}
 & z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & LD \\ \hline
z & 1 & 3 & -5 & 0 & 0 & 0 & -4 & -16 \\ \hline
x_4 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
x_5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
x_3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline
\end{array}$$

- *Iteração 3*

$I = \{1, 5, 3\}$

$$\begin{array}{c|c|cccccc|c|}
 & z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline
z & 1 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & -2 & -17 \\ \hline
x_1 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1/3 \\
x_5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
x_3 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 13/3 \\ \hline
\end{array}$$

$$x^{*'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{13}{3} & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z^* = -17$$

$$A_I^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8 Interpretação da Tabela

Seja a Tabela:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & z & x^I & x^J & \text{LD} \\
\hline
z & 1 & \mathbf{0} & c_I(A_I)^{-1}A_J - c_J & c_I(A_I)^{-1}b \\
x^I & \mathbf{0} & \mathbf{I} & (A_I)^{-1}A_J & (A_I)^{-1}b \\
\hline
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & z & x^I & x^J & \text{LD} \\
\hline
z & 1 & \mathbf{0} & \hat{c}_J & \pi b \\
x^I & \mathbf{0} & \mathbf{I} & (A_I)^{-1}A_J & (A_I)^{-1}b \\
\hline
\end{array}
$$

que equivale às equações

$$
\begin{cases}
z + \left[c_I(A_I)^{-1}A_J - c_J\right] x^J = c_I(A_I)^{-1}b \\
\\
x^I + (A_I)^{-1}A_J x^J = (A_I)^{-1}b
\end{cases}
$$

ou

$$
\begin{cases}
z + \hat{c}_J x^J = \pi b \\
\\
x^I + y_J x^J = (A_I)^{-1}b
\end{cases}
$$

onde

$$y_J = (A_I)^{-1}A_J$$

Escrevendo em função de x^J:

$$\begin{cases} z = c_I(A_I)^{-1}b - \left[c_I(A_I)^{-1}A_J - c_J\right] x^J \\ \\ x^I = (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_J x^J \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} z = \pi b - \hat{c}_J x^J \\ \\ x^I = (A_I)^{-1}b - y_J x^J \end{cases}$$

Portanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x^J} = -\hat{c}_J \qquad \frac{\partial x^I}{\partial x^J} = -y_J$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = \pi \qquad \frac{\partial x^I}{\partial b} = (A_I)^{-1}$$

$$A_J = A_I y_J \quad \longrightarrow \quad A_j = A_I y_j$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -\hat{c}_j \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -y_j^i$$

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \pi_i \qquad \frac{\partial x_i}{\partial b_i} = (A_I)^{-1}_{ij}$$

Exemplo 9 *Interprete o exemplo anterior.*

- *Iteração 1*

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\hat{c}_1 = -1 \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\hat{c}_2 = -1 \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = -\hat{c}_3 = 4$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_1} = -y_1^4 = -1 \quad \frac{\partial x_5}{\partial x_1} = -y_1^5 = -1 \quad \frac{\partial x_6}{\partial x_1} = -y_1^6 = 1$$

$$\frac{\partial x^I}{\partial x_3} = -y_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial b_1} = \pi_1 = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial b_2} = \pi_2 = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial b_3} = \pi_3 = 0$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial b_1} = 1 \qquad \frac{\partial x_5}{\partial b_2} = 0 \qquad \frac{\partial x_4}{\partial b_3} = 0$$

$$(A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Iteração 2*

$$\frac{\partial z}{\partial x^J} = -\hat{c}_J = -\left[\begin{array}{ccc} -3 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\frac{\partial x^I}{\partial x_1} = -y_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial x^I}{\partial x_2} = -y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = \pi = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$(A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Iteração 3*

$$\frac{\partial z}{\partial x^J} = -\hat{c}_J = -\left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\frac{\partial x^I}{\partial x_2} = -y_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2 \\ -2/3 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial x^I}{\partial x_4} = -y_4 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = \pi = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$(A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

9 Solução Básica Inicial Factível

Seja o PPL:

$$
\begin{array}{llrcrl}
\max & z = & -x_1 & + & 2x_2 & \\
\text{suj. a} & & x_1 & + & x_2 & \geq 2 \\
& & -x_1 & + & x_2 & \geq 1 \\
& & & & x_2 & \leq 3
\end{array}
$$

$$x \geq \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\min & z = & x_1 & - & 2x_2 & & & & & & & \\
\text{suj. a} & & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = 2 \\
& & -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & & & = 1 \\
& & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = 3
\end{array}
$$

$$x \geq \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

Não há uma base inicial óbvia

$$\Downarrow$$

Introduz-se variáveis artificiais

$$\begin{array}{llrrrrrrrl}
\min & z = & x_1 & - \; 2x_2 & & & & & & \\
\text{suj. a} & & x_1 & + \;\; x_2 & - \; x_3 & & & + \; x_6 & & = 2 \\
& & -x_1 & + \;\; x_2 & & - \; x_4 & & & + \; x_7 & = 1 \\
& & & x_2 & & & + \; x_5 & & & = 3
\end{array}$$

$$x \geq 0$$

$$x_6, \;\; x_7 : \text{variáveis artificiais}$$

$\longrightarrow I = \{6, 7, 5\}$ forma uma base inicial factível.

Porém, o novo PPL só é equivalente ao original se as variáveis artificiais forem nulas.

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & \mathbf{0} \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{rcl} Ax + x_a & = & b \\ x & \geq & \mathbf{0} \\ x_a & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x_a = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

Método das duas fases

a) Fase I $\rightarrow$ determinar base inicial;

b) Fase II $\rightarrow$ resolver problema original.

- **Fase I**

Objetivo: zerar as variáveis artificiais.

a) Acrescenta-se variáveis artificiais.

b) Monta-se o Problema Artificial (PA):

$$
\begin{array}{llrcl}
(PA) & \min & \varphi = & \mathbf{1}x_a & \\
& \text{suj. a} & Ax + x_a & = & b \\
& & x & \geq & \mathbf{0} \\
& & x_a & \geq & \mathbf{0}
\end{array}
$$

c) Resolver o problema artificial:

c.1) Se $\varphi^* = 0$

$$\Downarrow$$

$$x_a^* = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

Solução ótima correspondente é uma solução básica factível inicial para o problema original.

c.2) Se $\varphi^* > \mathbf{0} \;\Rightarrow\; x_a^* > \mathbf{0}$

$$\Downarrow$$

O problema original é infactível.

c.3) Se $x_a = \mathbf{0}$, mas algum componente de x_a está na base com valor zero:

$$\Downarrow$$

Solução degenerada da fase I.

$$\Downarrow$$

Tentar substituir as variáveis básicas artificiais pelas não-básicas originais.

c.3.1) Caso seja possível $\Rightarrow$ Retornar à Fase II;
c.3.2) Caso não seja possível $\Rightarrow$ Suprimir a linha correspondente.

- **Fase II**

a) Retorna-se ao problema original.

b) Obtem-se $\hat{c}_I = 0$, para a base I encontrada na fase I.

c) Soluciona-se o problema original para a base inicial I determinada.

Exemplo 10 *Considere o exemplo inicial apresentado:*

- *Fase I*

$$\begin{array}{lrl} \min & \varphi = & x_6 + x_7 \\ \text{suj. a} & & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ & & -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ & & x_2 + x_5 = 3 \end{array}$$

$$x_i \geq 0 \ , \quad i = 1, \ldots, 7$$

	φ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
φ	1	0	0	0	0	0	-1	-1	
	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
	0	0	1	0	0	1	0	0	3

Somando-se as linhas 1 e 2 à linha de custo a fim de zerar os coeficientes de custos relativo associados às variáveis artificiais.

	φ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD	
	1	0	2	-1	-1	0	0	0	*3*	
x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2	
x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1	$\leftarrow$
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3	
			$\uparrow$							

$$
\begin{array}{c|c|cccccccc|c|c}
 & \varphi & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & & LD & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & & \mathit{1} & \\
\hline
x_6 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & & 1 & \leftarrow \\
x_2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & & 1 & \\
x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & & 2 & \\
\hline
 & & \uparrow & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc|c|}
 & \varphi & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & LD \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \mathit{0} \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \\
\hline
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ *Solução ótima da Fase I determinada:*

$$\varphi^* = 0$$

$\Longrightarrow$ *Base ótima da Fase I = Base inicial para Fase II*

$$I = \{1, 2, 5\}$$

$\Longrightarrow$ *Solução básica factível inicial.*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$z = -5/2$$

- *Fase II*

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-1	2	0	0	0	0
	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$
	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$3/2$
	0	0	0	$1/2$	$1/2$	1	$3/2$

Zerando os coeficientes de custo relativo associados aos elementos da base:

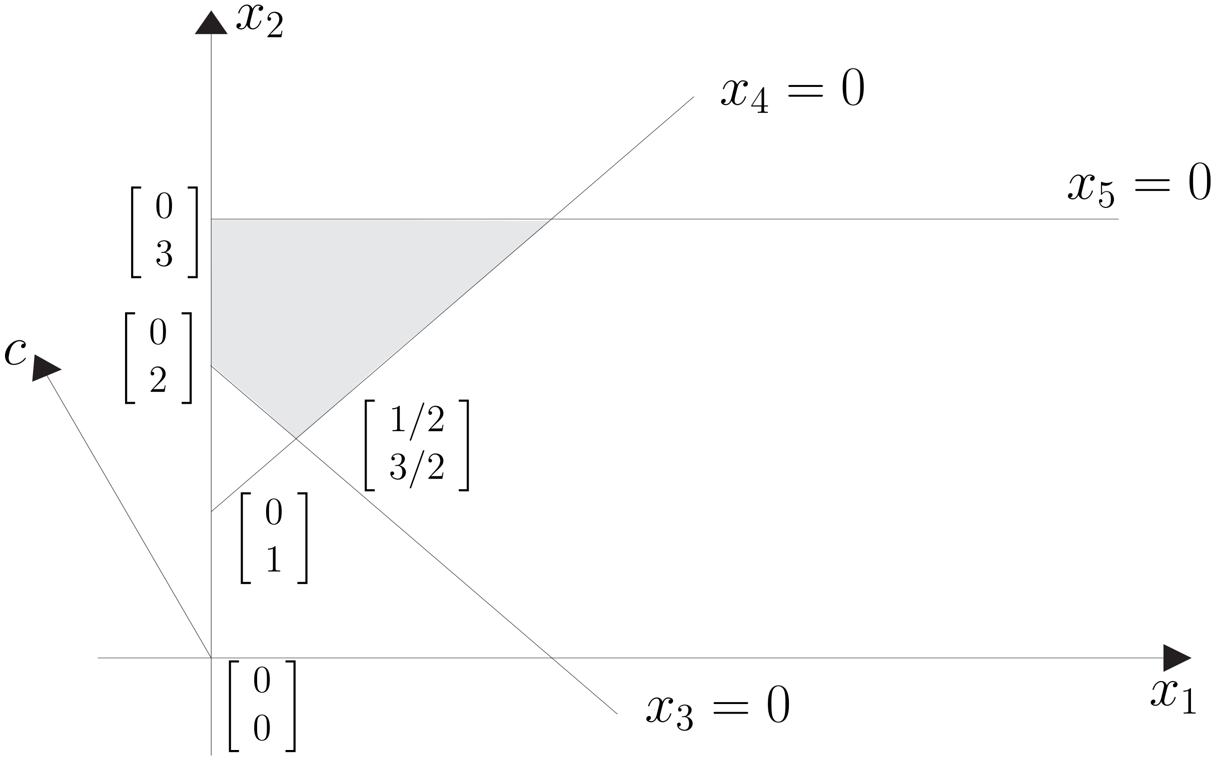
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	
z	1	0	0	$1/2$	$3/2$	0	$-5/2$	
x_1	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$\leftarrow$
x_2	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$3/2$	
x_5	0	0	0	$1/2$	$1/2$	1	$3/2$	
					$\uparrow$			

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	
z	1	-3	0	2	0	0	-4	$\leftarrow$
x_4	0	2	0	-1	1	0	1	
x_2	0	1	1	-1	0	0	2	
x_5	0	-1	0	1	0	1	1	
				$\uparrow$				

$\Longrightarrow$ *Solução ótima:*

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$z^* = -6$$



$\Longrightarrow$ *Cada iteração da fase I gera uma solução infactível para o problema original.*

$\Longrightarrow$ *A fase I termina ao se determinar um vértice do conjunto de soluções factíveis do problema original.*

10 Método Simplex Revisado

Objetivo:
Implementar o método simplex de modo a economizar espaço de memória e diminuir o número de operações aritméticas realizadas.

Justificativa:

- $n \gg m \longrightarrow$ número de variáveis muito maior que o de restrições

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \boxed{\qquad\quad A \qquad\quad} \end{array}$$

- O número de pivoteamentos necessários à solução de um simplex é da ordem de m a $1,5m$.

- Existem colunas que nunca são usadas, apesar de, a cada iteração, cálculos serem efetuados sobre seus elementos.

$\Longrightarrow$ Portanto, existe desperdício de tempo e de memória.

Ponto básico: Calcular somente o que é necessário.

10.1 Método Simplex Revisado - Algoritmo

Dado: Determine uma base inicial factível A_I e sua inversa $(A_I)^{-1}$ e calcule a solução inicial $x^I = (A_I)^{-1}b$.

Passo 1: Escreva a tabela revisada.

	Inversa	LD
z	π	$c'_I x^I$
x^I	$(A_I)^{-1}$	x^I

$$\pi = c'_I (A_I)^{-1}$$

Passo 2: Determine o vetor de custos relativos:

$$\hat{c}_J = \pi A_J - c'_J$$

Se $\hat{c}_J \leq \mathbf{0}$, pare: a solução corrente é ótima. Se não, continue.

Passo 3: Determine a variável não-básica a entrar na base:

$$k = \arg \max_{j \in J} \{\hat{c}_j \quad : \quad \hat{c}_j > 0\}$$

<u>Passo 4</u>: Determine a variável básica a sair da base:

- Calcule:

$$y_k = (A_I)^{-1} A_k$$

Caso $y_k \leq \mathbf{0}$, pare: solução ilimitada. Caso contrário, continue.

- Reescreva a tabela revisada:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & \text{Inversa} & \text{LD} & & x_k \\
\cline{2-3}\cline{5-5}
z & \pi & c_I' x^I & & \hat{c}_k \\
\cline{2-3}\cline{5-5}
x^I & (A_I)^{-1} & x^I & & y_k \\
\cline{2-3}\cline{5-5}
\end{array}$$

- Determine a variável a sair da base:

$$r = \arg \min_{i \,\in\, I} \left\{ \frac{x_i}{y_k^i} \quad : \quad y_k^i > 0 \right\}$$

- Pivotei sobre y_k^r.

- Retorne ao passo 2.

Exemplo 11

$$\begin{array}{llrcrcrcrcl} \max & z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\ \text{suj. a} & & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 8 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & \leq & 7 \\ & & & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \end{array}$$

$$x \geq \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcl} \min & z = & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & & \\ \text{suj. a} & & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 8 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & x_6 & = & 7 \\ & & & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_7 & = & 3 \end{array}$$

$$x \geq \mathbf{0}$$

Inicialização:

$$I = \{5, 6, 7\} \ , \qquad J = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^I = (A_I)^{-1} b = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c'_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteração 1:

$$\pi = c_I'(A_I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_J = \pi A_J - c_J' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|} & & (A_I)^{-1} & & LD \\ \hline z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_5 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ x_6 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\hat{c}_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1 \quad \longrightarrow \quad x_1 \quad \textit{entra na base.}$$

$$y_1 = (A_I)^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|} & & (A_I)^{-1} & & LD \\ \hline z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline x_5 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ x_6 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|} x_k \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ 1 \\ 0 \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \quad r = 5$$

$$\begin{array}{c|ccc|c|} & & (A_I)^{-1} & & LD \\ \hline z & -1/2 & 0 & 0 & -4 \\ \hline x_1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ x_6 & -1/2 & 1 & 0 & 3 \\ x_7 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

<u>*Iteração 2:*</u>

$$I = \{1, 6, 7\}\ , \qquad J = \{5, 2, 3, 4\}$$

$$\hat{c}_J \;=\; \pi A_J - c'_J$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad k = 2$$

$$y_2 = (A_I)^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

	$(A_I)^{-1}$			LD	x_2
z	$-1/2$	0	0	-4	$1/2$
x_1	$1/2$	0	0	4	$1/2$
x_6	$-1/2$	1	0	3	$3/2$
x_7	0	0	1	3	1

$\Longrightarrow \quad r = 6$

	$(A_I)^{-1}$			LD
z	$-1/3$	$-1/3$	0	-5
x_1	$2/3$	$-1/3$	0	3
x_2	$-1/3$	$2/3$	0	2
x_7	$1/3$	$-2/3$	1	1

Iteração 3:

$$I = \{1, 2, 7\} \ , \qquad J = \{5, 6, 3, 4\}$$

$$\hat{c}_J \ = \ \pi A_J - c'_J$$

$$= \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -2 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$\hat{c}_J < 0 \quad \Longrightarrow$ *Solução ótima determinada.*

$$x^* \ = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z^* \ = \ 5$$

10.2 Comparação

SIMPLEX CLÁSSICO	SIMPLEX REVISADO
$\star$ Iteração $k+1$ se apóia totalmente em dados provenientes da iteração k.	$\star$ Iteração $k+1$ se apóia em dados da iteração zero.
$\star$ Estrutura de dados: forma preparada	$\star$ Exige o conhecimento atualizado de $(A_I)^{-1}$, I, c'_I, x_I e z.
$\star$ A informação completa deve ser atualizada a cada iteração	$\star$ Atualizar, a cada iteração, os valores de π e y_k.

<u>Vantagem:</u> Economia de cálculo e de memória.

<u>Problema:</u> Cálculo da inversa $\begin{cases} \text{Forma produto} \\ \\ \text{Decomposição LU} \end{cases}$

<u>Vantagem indireta:</u> Redução de erros de arredondamento.

<u>Grande Vantagem:</u> Problemas com esparcidade.

11 Problema de Programação Linear com Variáveis Limitadas

Seja o PPL:

$$\begin{array}{lrcl} \min & z = c'x & & \\ \text{suj. a} & Ax & = & b \\ & x & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

- Solução básica $\Rightarrow$ variáveis não-básicas assumem o valor zero.

Considere o Problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{lrcl} \min & z = c'x & & \\ \text{suj. a} & Ax & = & b \\ & l \leq x & \leq & u \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Não é possível adotar a mesma caracterização de solução básica.

$\Longrightarrow$ Extensão do conceito de solução básica.

$\Longrightarrow$ Variável não-básica pode assumir os limites l_j ou u_j.

$\Longrightarrow$ Generalização do Problema Padrão de Programação Linear

$\Longrightarrow$ Problema de Programação Linear Canalizado

Seja então o PPL canalizado:

$$\begin{array}{lrcl} \min & z & = & c'x \\ \text{suj. a} & Ax & = & b \\ & l \leq & x & \leq u \end{array}$$

- Primeira solução: Introdução de varáveis de folga

$$\begin{array}{lrcl} \min & z = & c'x & \\ \text{suj. a} & Ax & = & b \\ & x + y & = & u \\ & x - s & = & l \\ & x & \geq & \mathbf{0} \\ & y & \geq & \mathbf{0} \\ & s & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \min & z = c'x \\ \text{suj. a} & \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ u \\ l \end{bmatrix} \\ & x \geq \mathbf{0} \\ & y \geq \mathbf{0} \\ & s \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim\{A\} = m \times n \\ \dim\left\{ \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \right\} = (m+2n) \times 3n \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{Alto custo} \\ \text{computacional}\end{array}$$

- Segunda solução:

  - Especialização do método simplex.

  - Extensão do conceito de soluções básicas.

Considere os conjuntos:

- I: Conjunto de índices das variáveis básicas.

$$I = \{i \quad : \quad l_i \leq x_i \leq u_i \ , \quad j \in J\}$$

- J_1: Conjunto de índices das variáveis não-básicas no limite inferior.

$$J_1 = \{j \quad : \quad x_j = l_j \ , \quad j \in J\}$$

- J_2: Conjunto de índices das variáveis não-básicas no limite superior.

$$J_2 = \{j \quad : \quad x_j = u_j \ , \quad j \in J\}$$

Portanto:

$$I \oplus J_1 \oplus J_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Logo, particionando:

$$\begin{aligned} \min \quad z \;=\; & c'_I x^I + c'_{J_1} x^{J_1} + c'_{J_2} x^{J_2} \\ \text{suj. a} \quad & A_I x^I + A_{J_1} x^{J_1} + A_{J_2} x^{J_2} \;=\; b \\ & l^I \leq x^I \leq u^I \\ & x^{J_1} = l^{J_1} \\ & x^{J_2} = u^{J_2} \end{aligned}$$

- Solução básica:

$$\begin{aligned} x^{J_1} &= l^{J_1} \\ x^{J_2} &= u^{J_2} \\ x^I &= (A_I)^{-1} b - (A_I)^{-1} A_{J_1} x^{J_1} - (A_I)^{-1} A_{J_2} x^{J_2} \end{aligned}$$

- Solução básica factível:

$$\begin{aligned} x^{J_1} &= l^{J_1} \\ x^{J_2} &= u^{J_2} \end{aligned}$$

$$l^I \leq x^I \leq u^I$$

- Solução básica factível degenerada:

$x_i = l_i$ ou $x_i = u_i$, para algum $i \in I$.

Exemplo 12 *Seja o sistema:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ -1 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ -1 \leq x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_3 \leq \infty \\ 0 \leq x_4 \leq \infty \end{cases}$$

Nomeando x_1 *e* x_3 *como variáveis básicas:*

$$\begin{cases} x_1 = -4 + 2x_2 + x_4 \\ x_3 = 1 - 3x_2 - x_4 \end{cases}$$

Atribuindo a x_2 *ou seu valor inferior ou seu valor superior e a* x_4 *seu valor inferior:*

a) $x_2 = -1, \quad x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_3 = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad$ *infactível*

b) $x_2 = 4, \quad x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_3 = -11 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad$ *infactível*

Nomeando x_2 *e* x_4 *como variáveis básicas:*

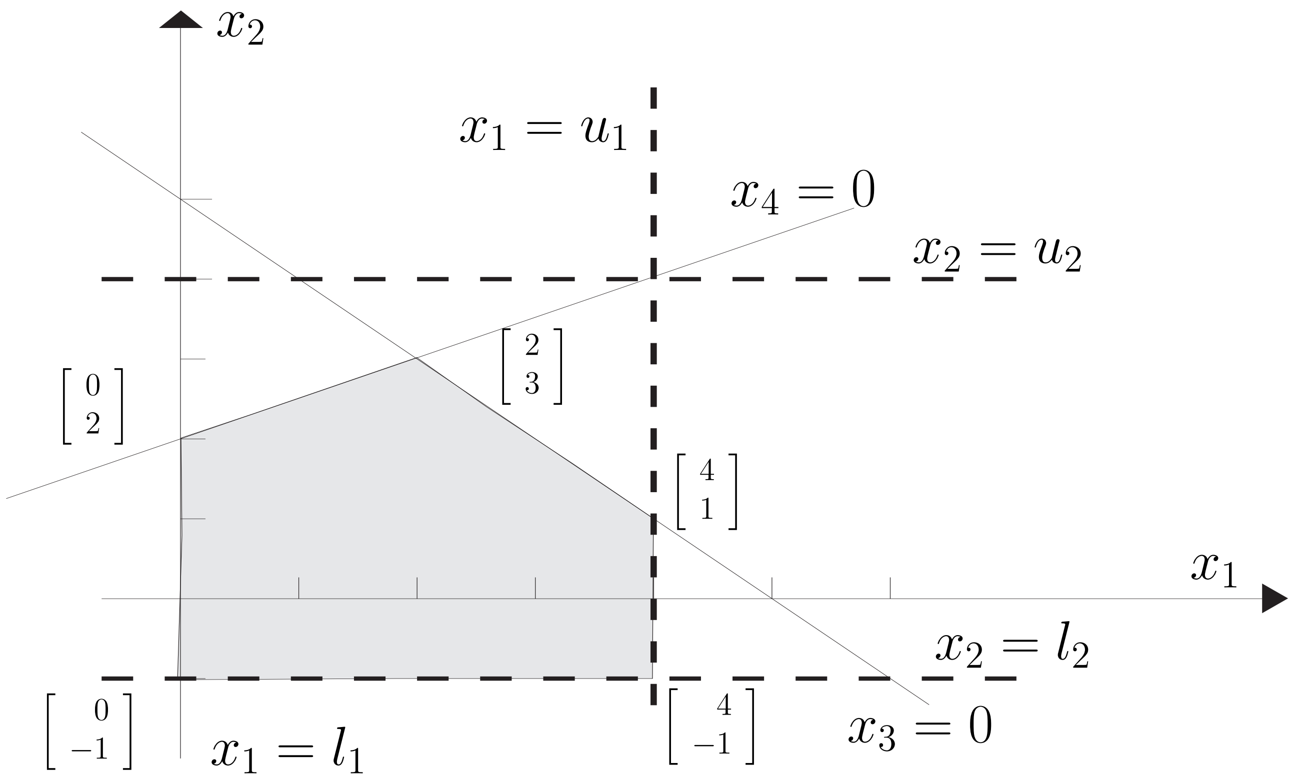
$$\begin{cases} x_2 = 2 + \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_4 \\ \\ x_3 = 3 + \dfrac{3}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

Atribuindo a x_1 *ou seu valor inferior ou seu valor superior e a* x_4 *seu valor inferior:*

a) $x_1 = 0, \quad x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad$ *factível*

b) $x_1 = 4, \quad x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_3 = 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad$ *infactível*

Esse sistema de inequações pode ser representado pela figura abaixo:



- Forma Preparada

$$x_I = (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_{J_1}x_{J_1} - (A_I)^{-1}A_{J_2}x_{J_2}$$

$$\begin{aligned} z &= c'_I x_I + c'_{J_1} x_{J_1} + c'_{J_2} x_{J_2} \\ &= c'_I (A_I)^{-1} b - \left[c'_I (A_I)^{-1} A_{J_1} - c'_{J_1}\right] x_{J_1} - \left[c'_I (A_I)^{-1} - c'_{J_2}\right] x_{J_2} \\ &= \pi b - \left[\pi A_{J_1} - c'_{J_1}\right] x_{J_1} - \left[\pi A_{J_2} - c'_{J_2}\right] x_{J_2} \\ &= \pi b - \hat{c}_{J_1} x_{J_1} - \hat{c}_{J_2} x_{J_2} \end{aligned}$$

	z	x_I	x_{J_1}	x_{J_2}	LD
z	1	0	$\hat{c}_{J_1}$	$\hat{c}_{J_2}$	$\hat{z}$
x_I	0	I	$(A_I)^{-1}A_{J_1}$	$(A_I)^{-1}A_{J_2}$	$\hat{b}$

$\left\{ \begin{array}{l} \hat{z} \\ \hat{b} \end{array} \right. \Longrightarrow$ Valores corretos de z e x_I para a solução básica factível corrente.

- Solução básica factível corrente:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{J_1} &=& l_{J_1} \\ x_{J_2} &=& u_{J_2} \\ x_I &=& \hat{b} \\ z &=& \hat{z} \end{array} \right.$$

- Definição da variável a entrar na base:

$$z = \pi b - \hat{c}_{J_1} x_{J_1} - \hat{c}_{J_2} x_{J_2}$$

- Para $j \in J_1$:
  $\hat{c}_j > 0 \longrightarrow$ aumentar x_j a partir de seu valor l_j.

- Para $j \in J_2$:
  $\hat{c}_j < 0 \longrightarrow$ diminuir x_j a partir de seu valor u_j.

Então:

$$\hat{c}_k = \max \left\{ \max_{j \,\in\, J_1} \{\hat{c}_j \;:\; \hat{c}_j > 0\}, \quad - \max_{j \,\in\, J_2} \{\hat{c}_j \;:\; \hat{c}_j < 0\} \right\}$$

- Caso $\hat{c}_k > 0 \longrightarrow$ a variável x_k entra na base.

- Caso $\hat{c}_k < 0 \longrightarrow$ Solução ótima.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \hat{c}_k < 0 \;, \quad \forall j \in J_1 \\ \\ \hat{c}_k > 0 \;, \quad \forall j \in J_2 \end{cases}$$

- Definição da variável a sair da base

  Quando uma variável x_k não-básica entra na base pelo:

  (a) aumento de x_k, $k \in J_1$, ou
  (b) diminuição de x_k, $k \in J_2$,

  três casos podem ocorrer:

  i) Uma variável básica atinge seu limite inferior:

  $x_r = l_r, \quad r \in I \quad \longrightarrow \quad x_r$ deixa a base.
  $\longrightarrow$ Nova solução básica factível é determinada.
  $\longrightarrow$ Valor da função objetivo é modificado.

  ii) Uma variável básica atinge seu limite superior:

  $x_r = u_r, \quad r \in I \quad \longrightarrow \quad x_r$ deixa a base.
  $\longrightarrow$ Nova solução básica factível é determinada.
  $\longrightarrow$ Valor da função objetivo é modificado.

  iii) A variável x_k não-básica atinge seu outro limite:

$$\left.\begin{array}{l} x_k = l_k, \quad k \in J_1 \\ \\ x_k = u_k, \quad k \in J_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_k \text{ não entra na base}$$

  $\longrightarrow$ Solução básica factível corrente não é alterada.
  $\longrightarrow$ Valor da função objetivo é modificado.

a) Aumento de x_k a partir de $x_k = l_k$

$$x_k = l_k + \Delta_k$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} x_I &= (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_{J_1}l_{J_1} - (A_I)^{-1}A_{J_2}u_{J_2} - \\ &\qquad -(A_I)^{-1}A_k\Delta_k \\ &= \hat{b} - y_k\Delta_k \\ z &= \pi b - \hat{c}_{J_1}l_{J_1} - \hat{c}_{J_2}u_{J_2} - \hat{c}_k\Delta_k \\ &= \hat{z} - \hat{c}_k\Delta_k \end{aligned}$$

- Caso I: variável básica atinge seu limite inferior.

$$\gamma_1 = \text{valor limite de } \Delta_k$$

Então:

$$l_I \leq \hat{b} - y_k\gamma_1$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \text{Se } \ y_k \leq 0 \ \Rightarrow \ \gamma_1 \to \infty \\ \\ \bullet \ \text{Se } \ y_k > 0 \\ \quad \Rightarrow \ \gamma_1 = \min\limits_{i \, \in \, I} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i - l_i}{y_k^i} \ : \ y_k^i > 0 \right\} \\ \\ \quad \Rightarrow \ x_i = x_{r_1} \ \text{ candidato a deixar a base.} \end{array} \right.$$

- Caso II: variável básica atinge seu limite superior.

$$\gamma_2 = \text{valor limite de } \Delta_k$$

Então:

$$\hat{b} - y_k \Delta_k \leq u_I$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Se } \; y_k \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \gamma_2 \to \infty \\ \\ \bullet \text{ Se } \; y_k < 0 \\ \quad \Rightarrow \;\; \gamma_2 = \min\limits_{i \,\in\, I} \left\{ \dfrac{u_i - \hat{b}_i}{-y_k^i} \;\; : \;\; y_k^i < 0 \right\} \\ \\ \quad \Rightarrow \;\; x_i = x_{r_2} \;\text{ candidato a deixar a base.} \end{cases}$$

- Caso III: variável x_k não-básica atinge seu outro limite.

$$\gamma_3 = u_k - l_k$$

Portanto:

$$\Delta_k = \min \{\gamma_1, \;\; \gamma_2, \;\; \gamma_3\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet \; \Delta_k = \infty \;\; \rightarrow \;\text{Solução ilimitada} \\ \\ \bullet \; \Delta_k < \infty \;\; \rightarrow \begin{cases} x_k = l_k + \Delta_k \;\; \text{entra na base} \\ \\ x_r \;\; \text{deixa a base} \end{cases} \end{cases}$$

b) Diminuição de x_k a partir de $x_k = u_k$.

$$x_k = u_k - \Delta_k$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} x_I &= (A_I)^{-1}b - (A_I)^{-1}A_{J_1}l_{J_1} - (A_I)^{-1}A_{J_2}u_{J_2} + \\ &\qquad +(A_I)^{-1}A_k\Delta_k \\ &= \hat{b} + y_k\Delta_k \\ z &= \pi b - \hat{c}_{J_1}l_{J_1} - \hat{c}_{J_2}u_{J_2} + \hat{c}_k\Delta_k \\ &= \hat{z} + \hat{c}_k\Delta_k \end{aligned}$$

- Caso I: variável básica atinge seu limite inferior.

$$\gamma_1 = \text{ valor limite de } \Delta_k$$

Então:

$$l_I \leq \hat{b} + y_k\Delta_k$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Se } \; y_k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \to \infty \\ \\ \bullet \text{ Se } \; y_k < 0 \\ \quad \Rightarrow \;\; \gamma_1 = \min\limits_{i \,\in\, I} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i - l_i}{-y_k^i} \quad : \quad y_k^i < 0 \right\} \\ \\ \quad \Rightarrow \;\; x_i = x_{r_1} \;\text{ candidato a deixar a base} \end{cases}$$

- Caso II: variável básica atinge seu limite superior.

$$\gamma_2 = \text{ valor limite de } \Delta_k$$

Logo:

$$\hat{b} + y_k \Delta_k \leq u_I$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Se } \; y_k \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 \to \infty \\ \\ \bullet \; Se \;\; y_k > 0 \\ \quad \Rightarrow \;\; \gamma_2 = \min\limits_{i \,\in\, I} \left\{ \dfrac{u_i - \hat{b}_i}{y_k^i} \quad : \quad y_k^i > 0 \right\} \\ \\ \quad \Rightarrow \;\; x_i = x_{r_2} \;\; \text{candidato a deixar a base} \end{cases}$$

- Caso III: variável x_k não-básica atinge seu outro limite.

$$\gamma_3 = u_k - l_k$$

Portanto:

$$\Delta_k = \min\{\gamma_1, \;\; \gamma_2, \;\; \gamma_3\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet \; \Delta_k = \infty \; \to \; \text{Solução ilimitada} \\ \\ \bullet \; \Delta_k < \infty \; \to \begin{cases} x_k = u_k - \Delta_k \;\; \text{entra na base} \\ \\ x_r \;\; \text{deixa a base} \end{cases} \end{cases}$$

Exemplo 13

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & z & = & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 10x_5 \\
\text{suj. a} & & & x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\
& & & x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\
& & & 0 \leq x_1 \leq 7 \\
& & & 0 \leq x_2 \leq 10 \\
& & & 0 \leq x_3 \leq 1 \\
& & & 0 \leq x_4 \leq 5 \\
& & & 0 \leq x_5 \leq 3
\end{array}
$$

Iteração 1:

$$I = \{1,2\}\ , \quad J_1 = \{3,4,5\}\ , \quad J_2 = \emptyset$$

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|c|}
 & & & & l & l & l & \\
 & z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\
\hline
 & 1 & -2 & -1 & -3 & 2 & -10 & \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 9 \\
\hline
\end{array}
$$

Zerando os coeficientes de custo relativo associados às variáveis básicas:

$$\begin{array}{c|c|ccccc|c|}
 & & & & l & l & l & \\
 & z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\ \cline{2-8}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 19 \\ \cline{2-8}
x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 9 \\ \cline{2-8}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ x_4 *entra na base a partir de* $x_4 = l_4 = 0$
$\rightarrow$ *crescimento do valor:* $x_4 = l_4 + \Delta_k$

- $\gamma_1 = \dfrac{\hat{b}_2 - l_2}{y_4^2} = \dfrac{9-0}{2} = \dfrac{9}{2} \quad \rightarrow \quad r = 2$
- $\gamma_2 = \dfrac{u_1 - \hat{b}_1}{-y_4^1} = \dfrac{7-5}{-(-1)} = 2 \quad \rightarrow \quad r = 1$
- $\gamma_3 = u_4 - l_4 = 5 - 0 = 5 \qquad \rightarrow \quad r = 4$

Logo:

$$\Delta_k = \min\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\} = 2 \quad \rightarrow \quad r = 1$$

$\Rightarrow$ x_1 *deixa a base.*

Atualizar valores de x_k*,* z*,* x_I*:*

$$\begin{aligned} x_k = x_4 &= l_k + \Delta_k \\ &= 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{c}_k \\ y_k \end{bmatrix} \Delta_k$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Iteração 2:

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|c|}
 & & u & & l & l & l & \\
 & z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\
\hline
z & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1 & \mathit{15} \\
\hline
x_4 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\
x_2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 5 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ x_3 *entra na base a partir de* $x_3 = l_3 = 0$

$\rightarrow$ *crescimento do valor:* $x_3 = l_3 + \Delta_k$

- $\gamma_1 = \dfrac{\hat{b}_2 - l_2}{y_3^2} = \dfrac{5-0}{4} = \dfrac{5}{4} \quad \rightarrow \quad r = 2$
- $\gamma_2 = \dfrac{u_4 - \hat{b}_1}{-y_3^4} = \dfrac{5-2}{-(-1)} = 3 \quad \rightarrow \quad r = 4$
- $\gamma_3 = u_3 - l_3 = 1 - 0 = 1 \quad \rightarrow \quad r = 3$

Logo:

$$\Delta_3 = \min\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\} = 1 \quad \rightarrow \quad r = 3$$

$\Rightarrow$ *não há mudança na base.*

Atualizar valores de x_k*,* z *e* x_I*:*

$$
\begin{aligned}
x_k = x_3 &= l_k + \Delta_k \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{c}_k \\ y_k \end{bmatrix} \Delta_k$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 3:

		u		u		l	
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	2	0	3	0	-1	*12*
x_4	0	-1	0	-1	1	-2	3
x_2	0	2	1	4	0	5	1

$\rightarrow$ *Solução ótima determinada:*

$$x^* = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^* = 12$$

Exemplo 14

$$\begin{array}{llr}
\min & z = & -2x_1 - 4x_2 - x_3 \\
\text{suj. a} & & 2x_1 + x_2 + x_3 \ \leq \ 10 \\
& & x_1 + x_2 - x_3 \ \leq \ 4 \\
& & 0 \leq x_1 \leq 4 \\
& & 0 \leq x_2 \leq 6 \\
& & 1 \leq x_3 \leq 4
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{llr}
\min & z = & -2x_1 - 4x_2 - x_3 \\
suj.\ a & & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
& & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\
& & 0 \leq x_1 \leq 4 \\
& & 0 \leq x_2 \leq 6 \\
& & 1 \leq x_3 \leq 4 \\
& & 0 \leq x_4 \leq \infty \\
& & 0 \leq x_5 \leq \infty
\end{array}$$

Iteração 1:

$$I = \{4,5\} \ , \qquad J_1 = \{1,2,3\} \ , \qquad J_2 = \emptyset$$

		l	l	l			
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	2	4	1	0	0	-1
x_4	0	2	1	1	1	0	9
x_5	0	1	1	-1	0	1	5

$\Rightarrow$ x_2 *entra na base a partir de* $x_4 = l_4 = 0$

$\rightarrow$ *crescimento do valor:* $x_2 = l_2 + \Delta_k$

- $\gamma_{14} = \dfrac{\hat{b}_1 - l_4}{y_2^4} = \dfrac{9-0}{1} = 9 \quad \rightarrow \quad r = 4$
- $\gamma_{15} = \dfrac{\hat{b}_2 - l_5}{y_2^5} = \dfrac{5-0}{1} = 5 \quad \rightarrow \quad r = 5$
- $\gamma_2 = \infty$
- $\gamma_3 = u_2 - l_2 = 6 - 0 = 6 \quad \rightarrow \quad r = 4$

Logo:

$$\Delta_k = \min\{\gamma_{14},\ \gamma_{15},\ \gamma_2,\ \gamma_3\} = 5 \quad \rightarrow \quad r = 5$$

$\Rightarrow$ x_5 *deixa a base.*

Atualizar valores de x_k, z e x_I:

$$\begin{aligned} x_k = x_2 &= l_2 + \Delta_k \\ &= 0 + 5 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{c}_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Delta_2$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 5 = \begin{bmatrix} -21 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>*Iteração 2:*</u>

		l		l		l	
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-2	0	5	0	-4	*-21*
x_4	0	1	0	2	1	-1	4
x_2	0	1	1	-1	0	1	5

$\Rightarrow$ x_3 *entra na base a partir de* $x_3 = l_3 = 1$

$\rightarrow$ *crescimento de valor:* $x_3 = l_3 + \Delta_k$

- $\gamma_1 = \dfrac{\hat{b}_1 - l_4}{y_3^4} = \dfrac{4-0}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad r = 4$
- $\gamma_2 = \dfrac{u_2 - \hat{b}_2}{-y_3^2} = \dfrac{6-5}{-(-1)} = 1 \quad \rightarrow \quad r = 2$
- $\gamma_3 = u_3 - l_3 = 4 - 1 = 3 \quad \rightarrow \quad r = 3$

Logo:

$$\Delta_3 = \min\{\gamma_1, \quad \gamma_2 \quad \gamma_3\} = 1 \quad \rightarrow \quad r = 2$$

$$\Rightarrow \quad x_2 \quad \textit{deixa a base.}$$

Atualizar valores de x_k, z e x_I:

$$x_3 = l_3 + \Delta_3 = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{c}_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \Delta_3$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} -26 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

<u>Iteração 3</u>:

		l	u			l	
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	3	5	0	0	1	-26
x_4	0	3	2	0	1	-1	2
x_3	0	-1	-1	1	0	-1	2

$\Rightarrow \quad x_1$ *entra na base a partir de* $x_1 = l_1 = 0$

$\rightarrow \quad$ *crescimento do valor:* $x_1 = l_1 + \Delta_k$

- $\gamma_1 = \dfrac{\hat{b}_1 - l_4}{y_1^4} = \dfrac{2-0}{3} = \dfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad r = 4$
- $\gamma_2 = \dfrac{u_2 - \hat{b}_2}{-y_1^3} = \dfrac{4-2}{-(-1)} = 2 \quad \rightarrow \quad r = 3$
- $\gamma_3 = u_1 - l_1 = 4 - 0 = 4 \qquad \rightarrow \quad r = 1$

Logo:

$$\Delta_1 = \min\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad r = 4$$

$$\Rightarrow \quad x_4 \quad \textit{deixa a base.}$$

Atualizar valores de z e x_I:

$$x_1 = l_1 + \Delta_1 = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{2}{3} = \begin{bmatrix} -28 \\ 0 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

Iteração 4:

$$\begin{array}{c|c|ccccc|c|}
 & & & u & & l & l & \\
 & z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\
\hline
z & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -28 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\
x_3 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 1/3 & -2/3 & 8/3 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_k &= \max\left\{\max\{\hat{c}_4, \hat{c}_5\}, -\hat{c}_2\right\} \\
&= -3 < 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *Solução ótima determinada*

$$x^* = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 6 \\ 8/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^* = -28$$