CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO
TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em
Modelagem Matemática e Computacional

Otimização Linear

Professor: Sérgio Ricardo de Souza

Belo Horizonte, novembro de 2023

Sumário

1 Lema de Farkas 3

2 Interpretação Geométrica do Lema de Farkas 5

3 Direção de Minimização 6

4 Condições de Otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker 8

5 Forma Compacta das Condições de Karush-Kuhn-Tucker 12

6 Condições de Karush-Kuhn-Tucker para restrições de igualdade 13

7 Otimalidade e Soluções Básicas Factíveis 14

8 Teorema Fundamental da Otimização Linear 17

1 Lema de Farkas

Lema 1 *Seja $A \in \Re^{m\times n}$ e $c \in \Re^n$. Então, um e somente um dos dois sistemas abaixo possui solução:*

$$(S1) \;:\; Ax \geq \mathbf{0} \quad e \quad c'x < \mathbf{0}$$

$$(S2) \;:\; \pi A = c' \quad e \quad \pi \geq \mathbf{0}$$

Prova:

$$(S1) \quad \rightarrow \quad x \ \text{ é a variável.}$$

$$(S2) \quad \rightarrow \quad \pi \ \text{ é a variável.}$$

Suponha que o sistema $(S1)$ possua solução x.
Se $(S2)$ possui solução π, então:

$$\pi Ax = c'x \geq \mathbf{0}$$

pois $\pi \geq \mathbf{0}$ e $Ax \geq \mathbf{0}$.
Porém, por $(S1)$, $c'x < \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \quad \text{contradição} \quad \Rightarrow \quad (S2) \text{ não possui solução.}$$

Suponha agora que o sistema $(S1)$ não possua solução e considere o problema:

$$(P) \quad \min \{c'x \quad : \quad Ax \geq \mathbf{0}\}$$

A solução desse problema é dada por:

$$x^* = 0$$

Escrevendo o problema (P) no formato padrão:

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & cx' - cx'' \\ & \text{suj. a} & Ax' - Ax'' - y = \mathbf{0} \\ & & x' \geq \mathbf{0}, \quad x'' \geq \mathbf{0}, \quad y \geq \mathbf{0} \end{array}$$

para

$$x = x' - x''$$

A solução ótima de (P) é dada, então, por:

$$\Longrightarrow \begin{cases} x' = \mathbf{0} \\ x'' = \mathbf{0} \\ y = \mathbf{0} \end{cases} \Longrightarrow \text{ Solução ótima de } (P)$$

Portanto, existe uma base ótima na qual todos os custos relativos de (P) são não-positivos.
Seja π o vetor de multiplicadores associados com esta base ótima. Então, pode-se escrever que:

$$\pi \left[\, A \;\; -A \;\; -\mathbf{I} \,\right] - \left[\, c' \;\; -c' \;\; \mathbf{0} \,\right] \leq \mathbf{0}$$

ou seja:

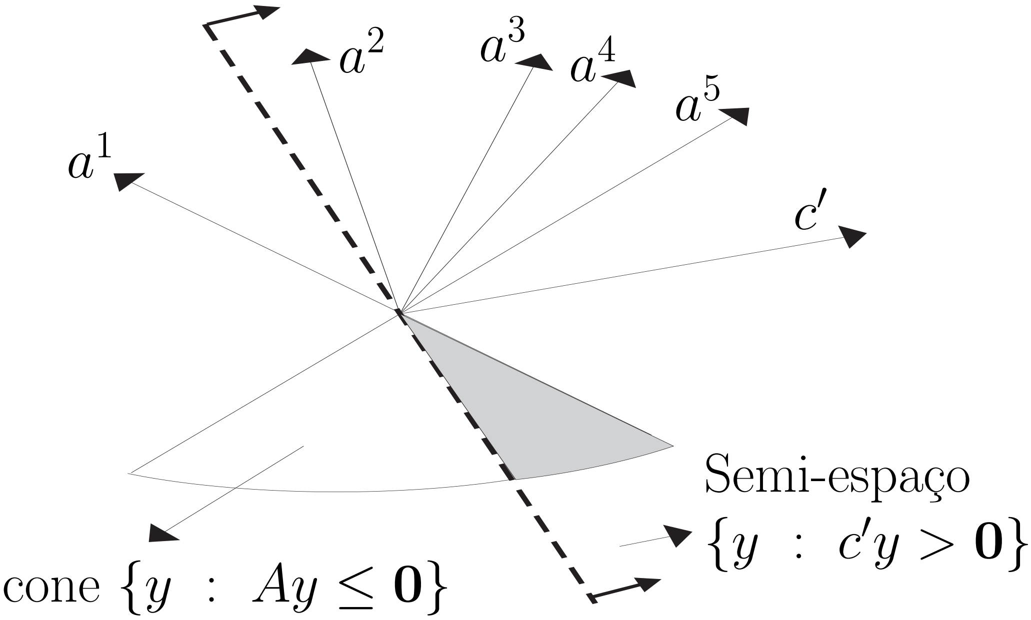
$$\begin{cases} \pi A - c' \leq \mathbf{0} & (x') \\ -(\pi A - c') \leq \mathbf{0} & (x'') \\ -\pi \leq \mathbf{0} & (y) \end{cases}$$

ou:

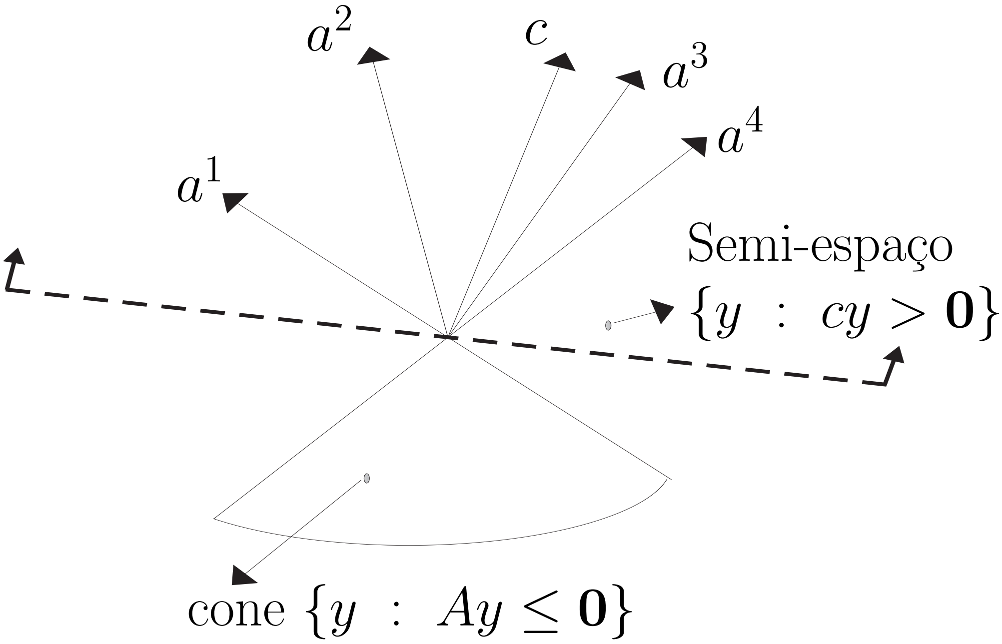
$$\begin{cases} \pi \geq \mathbf{0} \\ \pi A = c \end{cases} \Longrightarrow (S2) \text{ tem solução.}$$

¶

2 Interpretação Geométrica do Lema de Farkas



$(S1)$ tem solução: $Ax \geq \mathbf{0}$ e $c'x < \mathbf{0}$



$(S2)$ tem solução: $\pi A = c$ e $\pi \geq \mathbf{0}$

3 Direção de Minimização

Um vetor d é uma direção factível de minimização para o problema:

$$\begin{array}{lrl} \min & z = & c'x \\ \text{suj. a} & & Ax \geq b \\ & & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

se e somente se:

$$\begin{array}{rcl} d & \geq & \mathbf{0} \\ d & \neq & \mathbf{0} \\ Ad & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

e

$$c'd < 0$$

O conjunto dos pontos factíveis do problema é dado por:

$$S = \{x \quad : \quad Ax \geq b, \ x \geq \mathbf{0}\}$$

Então, um vetor não-nulo d é uma direção de S se e somente se:

$$\begin{array}{rcl} A\left(x + \lambda d\right) & \geq & b \\ x + \lambda d & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

para $\forall\ \lambda \geq 0$ e $\forall\ x \in S$. Como $x \in S$, então $Ax \geq b$ e a primeira inequação está satisfeita para $\forall\ \lambda \geq 0$ arbitrariamente grande se $Ad \geq \mathbf{0}$. De maneira equivalente, $x + \lambda d$ é não-negativo para $\forall\ \lambda \geq 0$ arbitrariamente grande se e somente se $d \geq \mathbf{0}$. Portanto, d é uma direção de S se e somente se $d \geq \mathbf{0}$, $Ad \geq \mathbf{0}$ e $d \neq \mathbf{0}$. Além disso, $\forall\ x \in S$, uma direção de minimização é tal que $c'(x + \lambda d) < c'x$, para $\lambda \geq 0$. Portanto, d é uma direção de minimização do problema acima se e somente se $c'd < 0$.

4 Condições de Otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker

Seja o Problema de Otimização Linear:

$$\begin{array}{lrl} \min & z = & c'x \\ \text{suj. a} & & Ax \geq b \\ & & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

no qual:

$$A \in \Re^{m \times n}\ ,\quad b \in \Re^{m}\ ,\quad c \in \Re^{n}$$

Seja $\bar{x}$ uma solução factível. Portanto:

$$\begin{cases} A\bar{x} \geq b \\ \bar{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned} I &= \text{Conjunto das restrições } A^i x \geq b_i \text{ ativas em } \bar{x}. \\ &= \left\{ i \quad : \quad A^i \bar{x} = b_i \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \text{Conjunto das restrições } x_j \geq 0 \text{ ativas em } \bar{x}. \\ &= \{ j \quad : \quad \bar{x}_j = 0 \} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} G &= \text{Matriz das restrições ativas em } \bar{x} \\ &= \begin{bmatrix} A^I \\ e^J \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sendo:

$$e^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j-ésima posição}}}{1} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Dois casos são, portanto, passíveis de análise:

i) $\bar{x}$ não é solução ótima.

$$\Rightarrow \exists\ d \quad : \quad \begin{cases} \bullet\ c'd < \mathbf{0} & (1) \\ \\ \bullet\ G\,(\bar{x} + \lambda d) = G\bar{x} + \lambda G d\ , \quad \lambda \geq \mathbf{0} & \\ \\ \qquad\qquad = \begin{bmatrix} b^I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda G d \geq \begin{bmatrix} b^I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & (2) \\ \\ \bullet \begin{bmatrix} A^{\bar{I}} \\ e^{\bar{J}} \end{bmatrix} (\bar{x} + \lambda d) \geq \mathbf{0}\ , \quad \lambda > \mathbf{0} & (3) \end{cases}$$

ii) $\bar{x}$ é solução ótima.

$$\Rightarrow \quad \nexists\ d \quad : \quad c'd < \mathbf{0} \quad \text{e} \quad Gd \geq \mathbf{0} \tag{4}$$

Ou seja, o sistema (4) não possui solução para a variável d.

Portanto, utilizando o Lema de Farkas:

$$\exists\ u \geq \mathbf{0} \quad : \quad uG = c'$$

ou seja, o sistema

$$uG = c' \quad \text{e} \quad u \geq \mathbf{0} \tag{5}$$

possui solução para a variável u.

Fazendo

$$u = (\pi_i, \quad i \in I; \quad v_j, \quad j \in J) \tag{6}$$

tem-se que:

- $uG = c' \quad \Rightarrow \quad \sum_{i \in I} \pi_i A^i + \sum_{j \in J} v_j e_j = c' \qquad (7)$

- $u \geq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \pi_i \geq 0, & i \in I \\ v_j \geq 0, & j \in J \end{cases} \qquad (8)$

Além disso, como $\bar{x}$ é factível:

$$\begin{array}{l} A\bar{x} \geq b \\ \bar{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{9}$$

De forma reversa, suponha agora que (7) e (8) sejam verdadeiras e considere $\hat{x}$ uma outra solução factível. Logo:

$$A\hat{x} \geq b \;\; e \;\; \hat{x} \geq \mathbf{0}$$

Pós-multiplicando (7) por $(\hat{x} - \bar{x})$

$$\sum_{i \in I} \pi_i \left(A^i \hat{x} - A^i \bar{x} \right) + \sum_{j \in J} v_j \left(e_j \hat{x} - e_j \bar{x} \right) = c' \left(\hat{x} - \bar{x} \right)$$

Como $A^i \bar{x} = b_i \quad \text{e} \quad e_j \bar{x} = 0$:

$$\sum_{i \in I} \pi_i \left(A^i \hat{x} - b_i \right) + \sum_{j \in J} v_j e_j \hat{x} = c' \hat{x} - c' \bar{x}$$

Porém, $A^i\hat{x} \geq b_i \quad \text{e} \quad e_j\hat{x} \geq \mathbf{0}$. Assim:

$$\sum_{i \in I} \pi_i \left(A^i\hat{x} - b_i\right) + \sum_{j \in J} v_j e_j \hat{x} \geq \mathbf{0}$$

ou seja:

$$c'\hat{x} - c'\bar{x} \geq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c'\hat{x} \geq c'\bar{x} \ , \qquad \forall\ \hat{x} \ \text{ factível}$$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ é uma solução ótima.

$\Rightarrow$ Expressões (7), (8) e (9) são as condições de otimalidade do (PPL).

$\Rightarrow$ A solução factível $\bar{x}$ é ótima para o (PPL) se e somente se o gradiente da função objetivo está contido no cone gerado pelas restrições ativas em $\bar{x}$.

$\Rightarrow$ O vetor c deve ser representado como uma combinação linear não-negativa de A^I e A^J, restrições ativas em $\bar{x}$.

5 Forma Compacta das Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Defina

$$\pi = \left[\begin{array}{cccc} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_m \end{array} \right] \geq \mathbf{0}$$

$$v = \left[\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array} \right] \geq \mathbf{0}$$

sendo

$$\begin{cases} \pi_i = 0 \ , \quad \text{para } i \notin I \\ \\ v_j = 0 \ , \quad \text{para } j \notin J \end{cases}$$

Logo, (7), (8) e (9) levam a:

$$Ax \geq b \ , \qquad x \geq \mathbf{0} \tag{10}$$

$$\pi A + v = c' \ , \qquad \pi \geq \mathbf{0} \ , \quad v \geq \mathbf{0} \tag{11}$$

$$\pi(Ax - b) = \mathbf{0} \ , \quad vx = \mathbf{0} \tag{12}$$

(10) $\longrightarrow$ Factibilidade Primal

(11) $\longrightarrow$ Factibilidade Dual

$$\left.\begin{array}{c} \pi \\ v \end{array}\right\} \text{ variáveis duais ou multiplicadores de Lagrange.}$$

(12) $\longrightarrow$ Folga complementar

$$\{\pi_i = 0 \text{ ou } A^i x = b_i\}$$
$$\{v_j = 0 \text{ ou } x_j = 0\}$$

6 Condições de Karush-Kuhn-Tucker para restrições de igualdade

Seja o problema

$$\begin{array}{ll} \min & c'x \\ \text{suj. a} & Ax = b \\ & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{llcl} \min & c'x & & \\ \text{suj. a} & Ax & \geq & b \\ & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

Condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucher:

$$Ax = b, \quad x \geq \mathbf{0} \tag{13}$$

$$\pi A + v = c', \quad v \geq \mathbf{0}, \quad \pi \text{ irrestrito} \tag{14}$$

$$vx = \mathbf{0} \tag{15}$$

7 Otimalidade e Soluções Básicas Factíveis

Seja:

I = conjunto dos índices das variáveis básicas.

J = conjunto dos índices das variáveis não-básicas.

x : solução básica factível.

Logo:

$$\pi A + v = c'$$

ou

$$\pi A + v - c' = \mathbf{0}$$

ou ainda:

$$\pi \left[A_I \quad A_J \right] + \left[v_I \quad v_J \right] - \left[c'_I \quad c'_J \right] = \mathbf{0}$$

e, desse modo:

$$\begin{cases} \pi A_I + v_I - c'_I = \mathbf{0} & (16) \\ \pi A_J + v_J - c'_J = \mathbf{0} & (17) \end{cases}$$

Também:

$$vx = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad [v_I \;\; v_J] \begin{bmatrix} x_I \\ x_J \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ou:

$$v_I x_I + v_J x_J = \mathbf{0}$$

Como

$$x_J = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad v_I x_I = \mathbf{0}$$

Fazendo $v_I = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad$ (15) é satisfeita.

De (16) - (17):

$$\pi A_I - c'_I = \mathbf{0}$$

$$\pi A_J + v_J - c'_J = \mathbf{0}$$

Portanto:

$$\hat{c}_I = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \pi = c'_I (A_I)^{-1}$$

$$v_J = -\hat{c}_J = -\left(\pi A_J - c'_J\right)$$

Assim, a cada iteração do método simplex, ou seja, a cada solução básica factível:

- $Ax = b \quad \text{e} \quad x \geq \mathbf{0} \qquad \rightarrow$ Factibilidade Primal.

- $\hat{c}_I = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} v_I = \mathbf{0} \\ x_J = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow vx = \mathbf{0} \rightarrow$ Folga complementar.

- $\begin{cases} \pi = c'_I(A_I)^{-1} \\ v_J = -(\pi A_J - c'_J) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi A + v = c'$

- $\hat{c}_J = -v_J$

  i) Se $\hat{c}_j > 0$ para algum $j \in J$:

  $\Rightarrow \; v_j < 0 \;\; \rightarrow$ Factibilidade Dual não é satisfeita.

  ii) Se $\hat{c}_j \leq \mathbf{0} \;\; \forall \, j \in J$:

  $\Rightarrow \;\; v_J \geq \mathbf{0} \;\; \rightarrow \;\; v = [v_I \;\; v_J] \geq \mathbf{0}$

  $\rightarrow$ Factibilidade Dual

  $\rightarrow$ Solução ótima determinada.

8 Teorema Fundamental da Otimização Linear

Considere o Problema de Otimização Linear:

$$\begin{array}{lrl} \min & z = & c'x \\ \text{suj. a} & & Ax = b \\ & & x \geq \mathbf{0} \end{array}$$

no qual

$$A \in \Re^{m \times n}$$

$$\rho(A) = m$$

Teorema 1
(Teorema Fundamental de Otimização Linear).
As afirmações abaixo com relação ao (PPL) acima são verdadeiras:

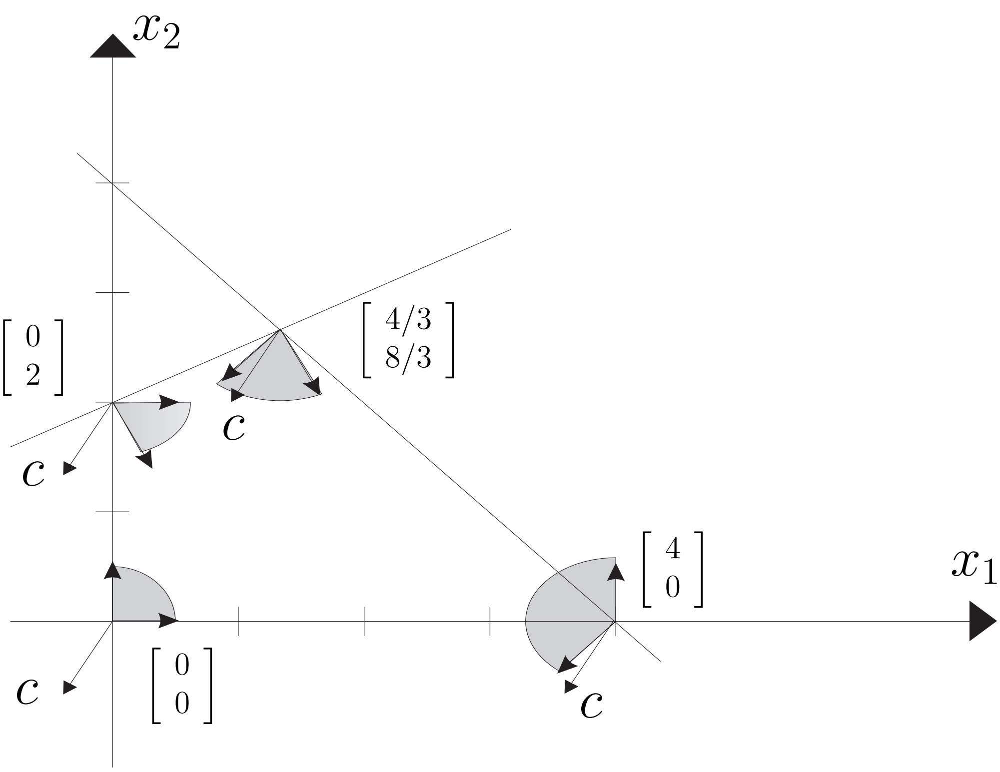
i) *Se existir uma solução factível, então existe uma solução básica factível;*

ii) *Se existir uma solução ótima factível, então existe uma solução ótima básica factível;*

iii) *Se existir uma solução factível e a função objetivo é limitada, então existe uma solução ótima.*

Exemplo 1

$$\begin{array}{ll} \min & z = -x_1 - 3x_2 \\ \text{suj. a} & x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ & -x_1 - x_2 \geq -4 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$



- *Ponto extremo* $[0 \quad 0]'$

  $\pi = [0 \quad 0] \;\Rightarrow\; (11) \;\rightarrow\; v = c' = [-1 \quad -3] < \mathbf{0}$

  $\rightarrow$ *Factibilidade dual é violada*

  $\rightarrow$ c *não pertence ao cone das restrições ativas.*

- *Ponto extremo* $[0 \quad 2]'$

  $\pi = [3/2 \quad 0] \;, \quad v = [-5/2 \quad 0] < \mathbf{0}$

  $\rightarrow$ *Factibilidade dual é violada*

  $\rightarrow$ c *não pertence ao cone das restrições ativas.*

- *Ponto extremo* $[4/3 \quad 8/3]'$

  $$\pi = [2/3 \quad 5/3] \;, \quad v = [0 \quad 0]$$

  $\pi(Ax - b) = \mathbf{0}$

  $\rightarrow$ *Factibilidade dual garantida*

  $\rightarrow$ *Solução ótima*

  $\rightarrow$ c *pertence ao cone das restrições ativas.*