CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO
TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Modelagem
Matemática e Computacional

Otimização Linear

Professor: Sérgio Ricardo de Souza

Belo Horizonte, agosto de 2023

Sumário

1 Introdução

1.1 Otimização de sistemas

Problema de Tomada de Decisões

$$\Downarrow$$

Modelagem Matemática de um sistema
com a finalidade de tomar decisões

$$\Downarrow$$

Problemas Reais do Cotidiano

Características:

* Variáveis inter-relacionadas;
* Vários objetivos, conflitantes entre si;
* Escassez de recursos;
* Grande número de variáveis.

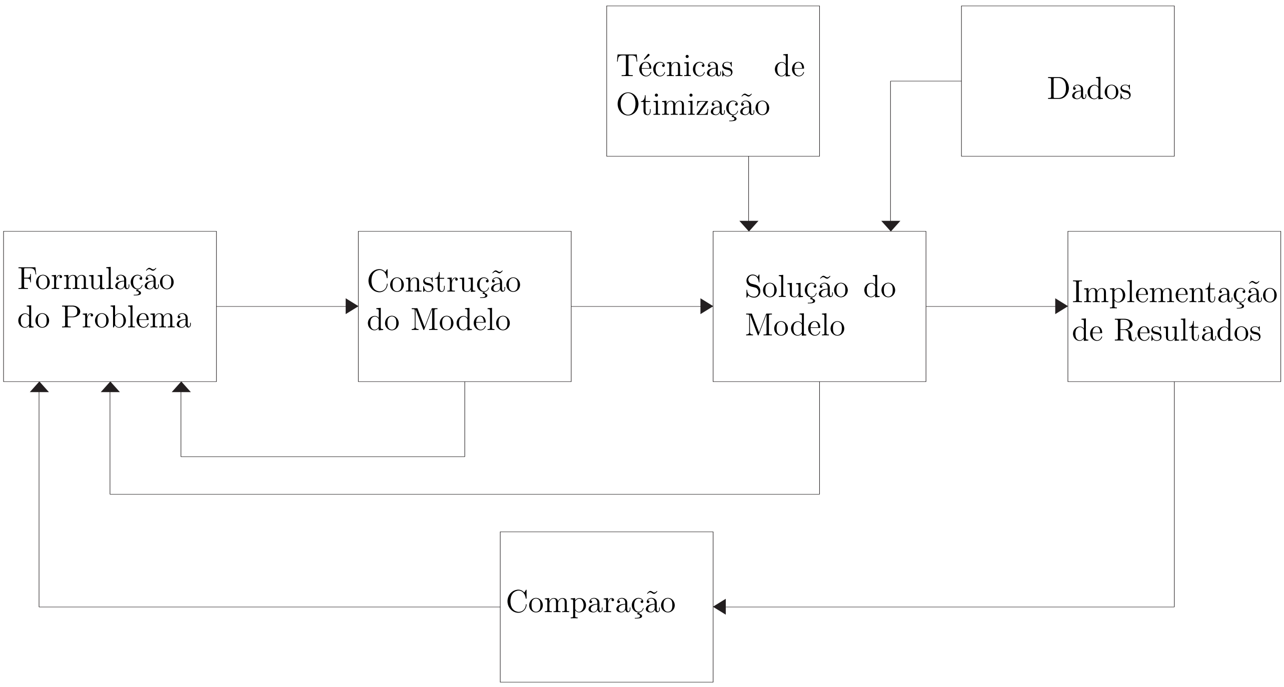
$\Rightarrow$ Buscar o melhor desempenho de um sistema, tendo em vista as diversas restrições que dificultam a escolha desse resultado.

Complexidade dos Problemas Reais X Problemas cuja solução seja possível de ser determinada

$$\text{Significado de Solução} \begin{cases} \text{Ferramentas de Análise} \\ \text{X} \\ \text{Solução Correta} \end{cases}$$

1.2 Pesquisa Operacional

- *"A Pesquisa Operacional é uma ciência aplicada, voltada para a resolução de problemas reais. Tendo como foco a tomada de decisões, aplica conceitos e métodos de outras áreas científicas para concepção, planejamento ou operação de sistemas para atingir seus objetivos. Através de desenvolvimentos de base quantitativa, a Pesquisa Operacional visa também introduzir elementos de objetividade e racionalidade nos processos de tomada de decisão, sem descuidar, no entanto, dos elementos subjetivos e de enquadramento organizacional que caracterizam os problemas."*
- Metodologia para a análise e tomada de decisões.



- Problemas Típicos

    * Filas
    * Estoques
    * Ordenação de Tarefas
    * Distribuição, Transporte e Alocação
    * Redes, Grafos
    * Localização
    * Plano de Produção, etc

- Técnicas usadas em PO

    * Otimização Linear
    * Otimização Não - Linear
    * Otimização Inteira
    * Otimização Dinâmica
    * Otimização Estocástica
    * Otimização Geométrica
    * Otimização Heurística
    * Simulação, etc

1.3 Otimização Linear (História)

- Fonte inicial $\longrightarrow$ Modelos empíricos e teóricos de sistemas econômicos

    * François Quesnay, "*Tableau Economique*"(1758)

    * Leon Walras, "*Elements d'Économie Pure*" (1874)

    * Wassily Leontief, "Modelos de Input-Output de Interligação Tecnológica entre Setores da Indústria" (1936)

    * John Von Neumann, "Modelos Dinâmicos de Equilíbrio Econômico"(1937)

    * Leonid Kantorovich, "Modelos Matemáticos na Organização e Planejamento da Produção"(1939)

- II Guerra Mundial
  - Problemas de fornecimento
  - Problemas de manutenção
  - Treinamento de pessoal
  - Problemas de transporte

$\Longrightarrow$ Problemas de como tomar uma decisão

$\Longrightarrow$ Inspiração militar

- Otimização Linear $\rightarrow$ George B. Dantzig (1947)
  - Método Simplex: Dantzig (1949);
  - Advento do Computador;
  - Ampla classe de aplicações, devido a:
    * Simplicidade do código;
    * Grande número de problemas práticos podem ser descritos como problemas lineares;
    * Possibilidade de se encontrar soluções em um número máximo de iterações;
    * Utilização como parte do algoritmo em diversos métodos de otimização não-linear.

1.4 Classificação dos Problemas de Otimização

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & f(x) & & \\
\text{sujeito a} & g(x) & \leq & 0 \\
& h(x) & = & 0 \\
& x & \geq & 0
\end{array}
$$

- Quanto à existência de restrições:
  - Problemas sem restrições ou irrestritos;
  - Problemas com restrições.

- Quanto à natureza das variáveis de projeto:
  - Problema de Otimização Estática ou Paramétrica;
  - Problema de Otimização Dinâmica ou de Otimização de Trajetórias.

- Quanto à estrutura física do problema:
  - Problema de Controle Ótimo;
  - Problema de Controle Não-Ótimo.

- Quanto à natureza da formulação matemática:
  - Problema de Otimização Não-Linear;
    * Problema de Otimização Geométrica;
    * Problema de Otimização Quadrática.
  - Problema de Otimização Linear.

- Quanto aos valores permitidos para as variáveis de projeto:
  - Problema de Otimização Inteira;
  - Problema de Otimização Real.

- Quanto à natureza determinística das variáveis:
  - Problema de Otimização Determinística;
  - Problema de Otimização Estocástica.

- Quanto à possibilidade de separação das funções envolvidas:
  - Problema de Otimização Separável;
  - Problema de Otimização Não-Separável.

- Quanto ao número de objetivos a serem satisfeitos:
  - Problema de Otimização Mono-Objetivo;
  - Problema de Otimização Multi-Objetivo.

2 Exemplos de Problemas de Otimização Linear

Exemplo 1 *Planejamento do Fornecimento.*

Uma fábrica de alimentos congelados produz batatinhas fritas, picadinho de batatas e flocos para purê de batata.

- *Fases da produção:*
    1. *Compra da batata a partir de duas fontes produtoras;*
    2. *Classificação das batatas por comprimento e qualidade;*
    3. *Distribuição pelas linhas de produção.*

- *As fontes diferem na qualidade das batatas fornecidas:*

Produto	**Produtor 1**	**Produtor 2**
Batatinha Frita	$0,2$	$0,3$
Picadinho de Batata	$0,2$	$0,1$
Flocos de Purê	$0,3$	$0,3$

- *Refugo equivalente a* 30% *para a batata comprada de cada produtor.*

- *Lucro por tonelada das batatas advindas de cada fonte produtora:*

	Produtor 1 ($/ton)	**Produtor 2 ($/ton)**
Lucro	5	6

- *Limitação de mercado:*

Produto	**Limite de Vendas** (ton)
Batatinha Frita	$1,8$
Picadinho de Batata	$1,2$
Flocos de Purê	$2,4$

- **Problema:** *Quantas toneladas de batatas devem ser compradas de cada fonte produtora?*

- *Modelamento:*

x_1 : *quantidade em toneladas que será comprada da fonte produtora 1;*
x_2 : *quantidade em toneladas que será comprada da fonte produtora 2.*

Os valores a serem determinados para x_1 e x_2 são restringidos pelas inequações lineares:

$$
\begin{aligned}
0,2x_1 + 0,3x_2 &\leq 1,8 \qquad \textit{(batatinha frita)} \\
0,2x_1 + 0,1x_2 &\leq 1,2 \qquad \textit{(picadinho de batata)} \\
0,3x_1 + 0,3x_2 &\leq 2,4 \qquad \textit{(flocos de purê)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

O problema somente terá sentido se:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Objetivo do Problema *: Aumentar o lucro da empresa.*

A função que expressa o lucro da empresa é dada por:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2$$

Então, o problema de otimização é:

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & f(x_1 + x_2) & = & 5x_1 + 6x_2 & \textit{(função de lucro)} \\
\text{sujeito a} & 0,2x_1 + 0,3x_2 & \leq & 1,8 & \textit{(batatinha frita)} \\
 & 0,2x_1 + 0,1x_2 & \leq & 1,2 & \textit{(picadinho de batata)} \\
 & 0,3x_1 + 0,3x_2 & \leq & 2,4 & \textit{(flocos de purê)} \\
 & x_1 & \geq & 0 & \textit{(fornecedor 1)} \\
 & x_2 & \geq & 0 & \textit{(fornecedor 2)}
\end{array}
$$

Solução ótima (gráfica):

$$x_1 = 4,5 \; ton$$

$$x_2 = 3 \; ton$$

$\Rightarrow$ **Problema de Otimização Linear**

Exemplo 2 *Companhia de Mineração*

A companhia de mineração Mais Nada Resta possui duas minas de extração de minério de ferro que, após beneficiado, é classificado em três categorias: alto grau, médio grau e baixo grau. A companhia venceu a concorrência para o fornecimento de matéria-prima para uma Usina de Aço, de modo que deve entregar, por semana, 24 ton. de minério de grau baixo, 8 ton. de minério de médio grau e 12 ton. de minério de alto grau. As características de produção das minas são mostradas abaixo:

		Produção (ton/dia)		
Mina	**Custo/Dia** (US$)	Alta	Média	Baixa
X	180	6	4	4
Y	160	1	1	6

Quantos dias por semana cada mina deve ser operada para garantir o contrato de fornecimento?

Algumas formas de tratamento desse problema:

- *Trabalhar um dia por semana nas minas X e Y.*

  Resultado:

Tipo	**Produção**
Alto	7
Médio	4
Baixo	10

  Insuficiente para atender as exigências do contrato ⇒ **Infactível**.

- *Trabalhar 4 dias por semana na mina X e 3 dias por semana na mina Y.*

  Resultado:

Tipo	**Produção**
Alto	27
Médio	15
Baixo	34

Suficiente para atender as exigências do contrato ⇒ **Factível.**

Problema: *É o menor custo ?*

Exemplo 3 *Árvore de Decisão*

Deseja-se contratar um novo funcionário entrevistando-se no máximo três candidatos à vaga.

A partir de experiências anteriores, verificou-se que é possível determinar, a partir da entrevista, se um dado candidato será um funcionário excelente, bom ou regular.

A tabela abaixo mostra os pesos atribuídos a cada um dos casos:

Expectativa de Desempenho	**Peso**
Excelente	3
Bom	2
Regular	1

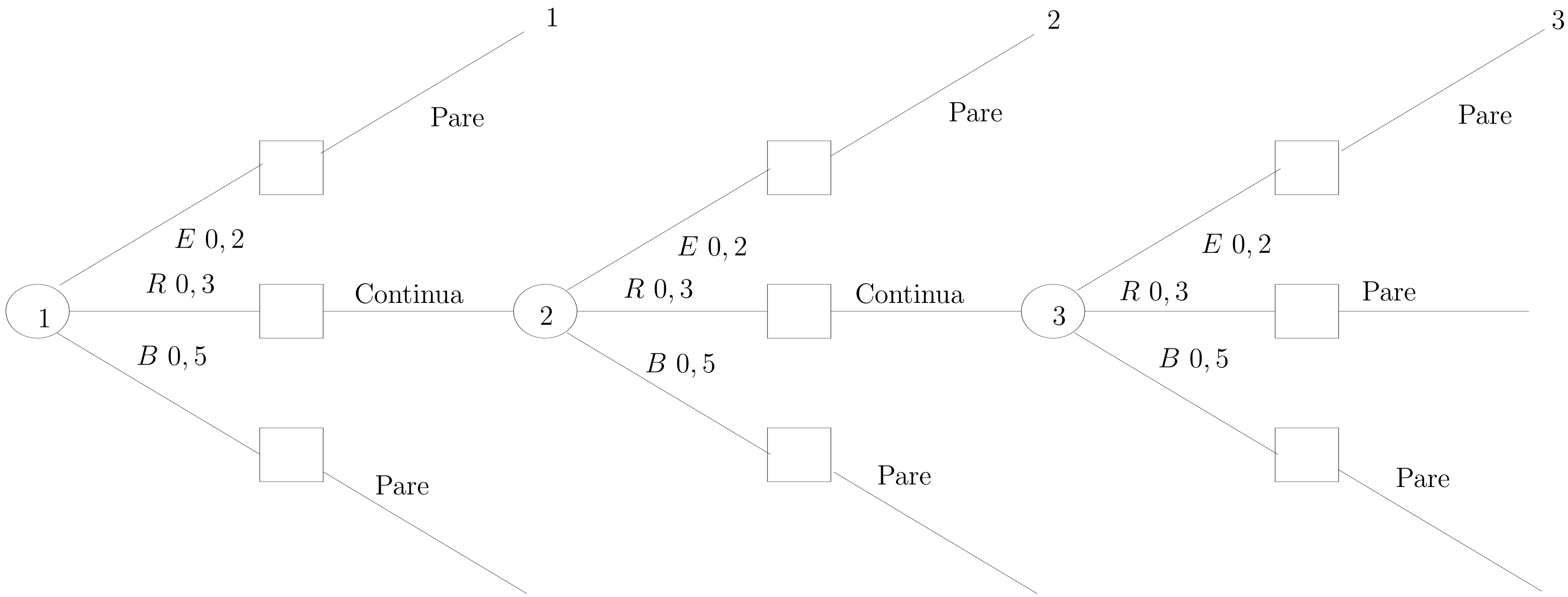
A experiência anterior também informa a respeito das chances de se encontrar um funcionário com as especificações desejadas:

Expectativa de Desempenho	**Chances**
Excelente	0,2
Bom	0,5
Regular	0,3

A decisão deve ser rápida, pois sabe-se que os candidatos também estão concorrendo ao mesmo cargo em outras empresas.

Problema*: Selecionar o melhor candidato, no menor tempo possível.*

- *Modelamento* $\Rightarrow$ *Árvore de Decisão*
  - *nós com círculos: candidatos entrevistados;*
  - *ramos: eventos incertos e suas probabilidades de ocorrência;*
  - *quadrados: pontos de tomada de decisão;*
  - *número no fim de um ramo: valor encontrado caso se interrompa o processo de decisão naquele ponto.*
- *Técnica de solução: Otimização Dinâmica via Indução Reversa.*


1
2
3
Pare
Pare
Pare
E 0,2
E 0,2
E 0,2
R 0,3
Continua
R 0,3
Continua
R 0,3
Pare
1
2
3
B 0,5
B 0,5
B 0,5
Pare
Pare
Pare

Exemplo 4 *Planejamento da Produção*

Matéria Prima	*Sapato*	*Botina*	*Disponibilidade*
Couro	*2*	*1*	*8*
Borracha	*1*	*2*	*7*
Cola	*0*	*1*	*3*
Lucro por unidade	*1*	*1*	—

x_1*: quantidade de sapatos fabricados;*
x_2*: quantidade de botinas fabricadas;*

Logo:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\ & & x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

Função de lucro:

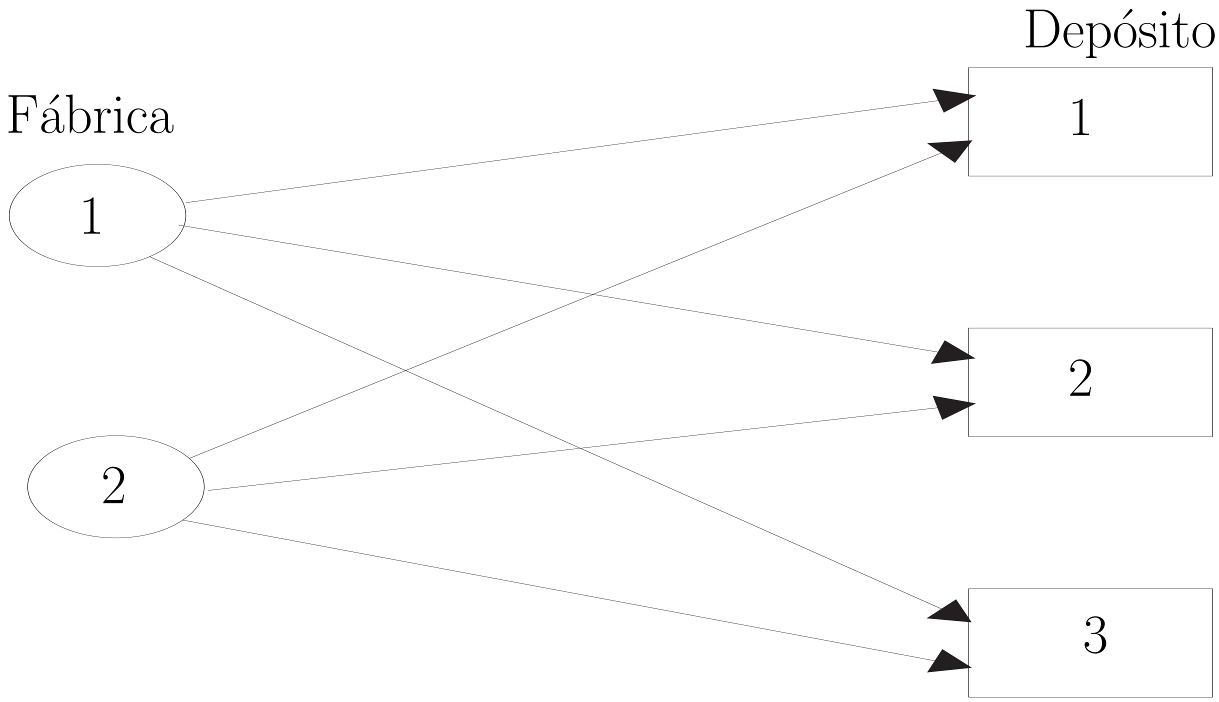
$$z = x_1 + x_2$$

Portanto:

$$\begin{array}{llcll} \textit{(PL)}\ \max & z & = & x_1 + x_2 & \\ \quad\ \textit{suj. a} & & & 2x_1 + x_2 & \leq\ 8 \\ & & & x_1 + 2x_2 & \leq\ 7 \\ & & & x_2 & \leq\ 3 \\ & & & x_1 & \geq\ 0 \\ & & & x_2 & \geq\ 0 \end{array}$$

Exemplo 5 *Problema de Transporte*

Uma empresa fabrica latas de conserva em 2 fábricas e as vende através de 3 depósitos.



a_i : *Capacidade de produção da fábrica* i.

b_j : *Demanda de produtos no depósito* j.

c_{ij} : *Custo por produto transportado da fábrica* i *para o depósito* j.

A empresa deseja saber como distribuir a produção pela rede de modo a:

1. *Respeitar as capacidades produtivas de cada fábrica.*

2. *Respeitar as demandas de cada depósito.*

3. *Minimizar o custo total de transporte.*

Defina x_{ij} *como a quantidade de produto transportado da fábrica* i *para o depósito* j.

Logo:

$$\left.\begin{array}{ll} x_{11}+x_{12}+x_{13} & \leq a_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} & \leq a_2 \end{array}\right\} \textit{Produção}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_{11}+x_{21} & \geq b_1 \\ x_{12}+x_{22} & \geq b_2 \\ x_{13}+x_{23} & \geq b_3 \end{array}\right\} \textit{Demanda}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$$

Função de custo:

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

Porém, surge um transportador, propondo a terceirização deste serviço, na forma:

1. *Transportar toda a mercadoria, respeitando capacidades de produção e de demanda.*

2. *Pagar ao fabricante* π_1 *e* π_2 *reais por unidade a produção das fábricas 1 e 2 e, em seguida, lhe vender por* η_1, η_2 *e* η_3 *reais por unidade em cada um dos depósitos, garantindo, porém, que:*

$$
\begin{aligned}
\eta_j - \pi_i &\leq c_{ij}, \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2,3 \\
\eta_j &\geq 0 \\
\pi_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

De sua parte, o transportador vai procurar estabelecer os preços de modo a maximizar o seu lucro:

Função de receita e despesa do transportador:

$$\phi = \underbrace{(b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)}_{\textit{(Receita)}} - \underbrace{(a_1 \pi_1 + a_2 \pi 2)}_{\textit{(Despesa)}}$$

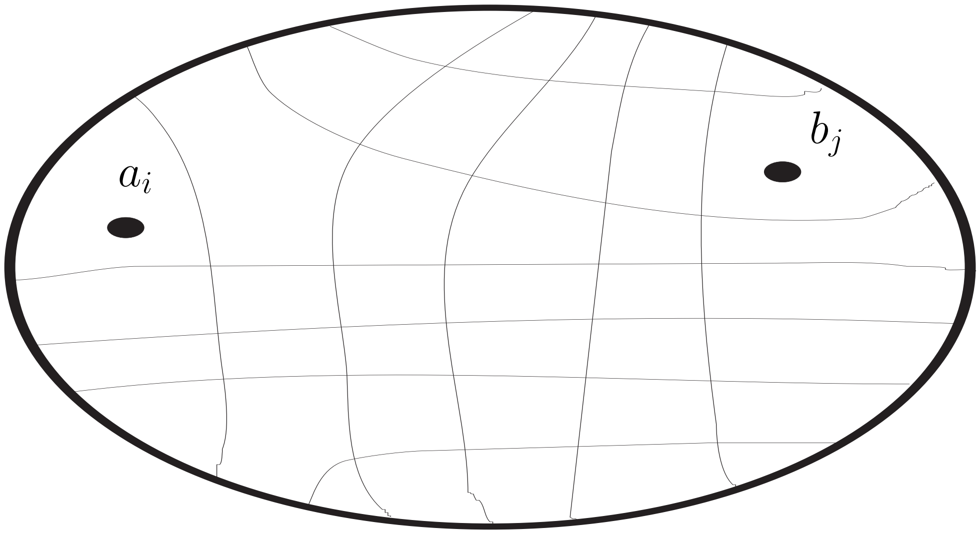
Qual das duas alternativas é mais conveniente ao fabricante?

* *A solução ótima entre o problema 1 e o problema 2, para o fabricante, será aquela que maximiza o seu lucro, ou seja:*

$$z \leq \phi$$

* *Portanto, se o custo com o transporte no problema do transportador for maior que o custo do transporte pelo próprio fabricante, então a solução 1 é a ideal, do ponto de vista do fabricante.*

Exemplo 6 *Problema de transporte: Uma aplicação ao planejamento de Redes Telefônicas.*



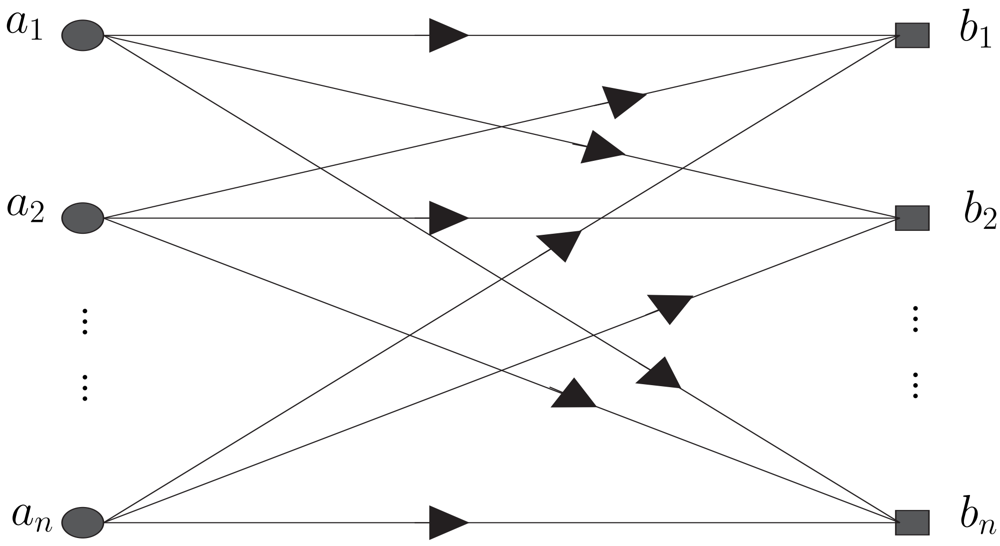
a_i = *Número de assinantes na área* i.

b_j = *Capacidade da central* j.

c_{ij} = *Custo para conectar um assinante da área* i *à central* j.

O problema consiste em alocar assinantes à centrais de modo a minimizar o custo de ligação assinante-central. Trata-se, assim, de um sub-problema do problema-master de localização de centrais.

x_{ij}: *número de assinantes da área i conectados à central j*



$$
\begin{aligned}
\min\ z \;=\; & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
\textit{suj. a} \qquad & \sum_j x_{ij} \;\geq\; a_i \quad , \forall_i \\
& \sum_i x_{ij} \;\leq\; b_j \quad , \forall_j \\
& x_{ij} \;\geq\; 0 \quad , \forall_i,\ \forall_j
\end{aligned}
$$

Exemplo 7 *Problema da Dieta*

Dispõe de 5 tipos de alimentos, com diferentes composições de nutrientes (proteínas e sais minerais). Uma vez conhecido o custo de cada alimento, deseja-se determinar a dieta que satisfaz os padrões nutritivos desejados e que tenha o mínimo custo.

Nutriente	**Alimentos**					**Quant. Mínima**
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	
Proteínas	*3*	*4*	*5*	*3*	*6*	*42*
Sais Minerais	*2*	*3*	*4*	*3*	*3*	*24*
Custo	*25*	*35*	*50*	*33*	*36*	—

x_i: *quantidade de alimento i presente na dieta.*

$$
\begin{array}{llll}
\textit{(PL)} & \min \quad z = & 25x_1 + 35x_2 + 50x_3 + 33x_4 + 36x_5 & \\
& \textit{suj. a} & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 & \geq 42 \\
& & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 & \geq 24 \\
& & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 &
\end{array}
$$

Variações: Problema da ração

Exemplo 8 *O setor de transporte de carga de uma empresa aérea, operando em São Paulo, dispõe de 8 aviões B-727, 15 aviões ELECTRA e 12 aviões Bandeirante para vôos amanhã. Há cargas para remeter para o Rio de Janeiro (150 ton) e Porto Alegre (100 ton). Os custos operacionais de cada avião e suas capacidades são:*

	B-727	*ELECTRA*	*Bandeirante*
SP $\longrightarrow$ *Rio*	*23*	*5*	*1,4*
SP $\longrightarrow$ *PA*	*58*	*10*	*3,8*
Capacidade	*45*	*7*	*4*

Quantos e quais aviões devem ser mandados para o Rio e Porto Alegre a fim de satisfazer a demanda e minimizar os custos?

x_{ij} = *avião de modelo i na rota j.*

$$i = \mathit{1,\ 2,\ 3} \quad \begin{cases} i = 1 \rightarrow \textit{B-727} \\ i = 2 \rightarrow \textit{ELECTRA} \\ i = 3 \rightarrow \textit{Bandeirante} \end{cases}$$

$$j = \mathit{1,\ 2} \quad \begin{cases} j = 1 \rightarrow \textit{Rio} \\ j = 2 \rightarrow \textit{Porto Alegre} \end{cases}$$

Total de aviões:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &\leq 8 \\ x_{21} + x_{22} &\leq 15 \\ x_{31} + x_{32} &\leq 12 \end{aligned}$$

Restrições de demanda:

$$\begin{aligned} 45x_{11} + 7x_{21} + 4x_{31} &\geq 150 \\ 45x_{21} + 7x_{22} + 4x_{32} &\geq 100 \end{aligned}$$

Custo a ser minimizado:

$$z = 23x_{11} + 5x_{21} + 1,4x_{31} + 58x_{12} + 10x_{22} + 3,8x_{32}$$

3 Estrutura de um Problema de PL

A partir dos exemplos apresentados, a estrutura de um problema de Otimização linear é na forma:

$$\begin{array}{lrcl} \min & z & = & c'x \\ \text{suj. a} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

ou seja:

$$\begin{array}{lccccccccc} \min & z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n & \\ \text{suj a} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \\ & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0 & & \ldots & & x_n \geq 0 & & \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcll} z & = & c'x & \rightarrow \text{ função objetivo, linear em x.} \\ & & c & \rightarrow \text{ vetor de custo.} \\ & & c_j & \rightarrow \text{ coeficiente de custo.} \\ & & x & \rightarrow \text{ vetor de variáveis de decisão ou de variáveis} \\ & & & \quad\ \text{de estrutura ou de níveis de atividade.} \\ & & x_i & \rightarrow \text{ variável de decisão.} \\ & & a_{ij} & \rightarrow \text{ coeficiente tecnológico.} \\ & & A & \rightarrow \text{ matriz de restrições.} \\ & & b_i & \rightarrow \text{ exigência a ser satisfeita.} \\ & & b & \rightarrow \text{ vetor do lado direito.} \\ x_j & \geq & 0 & \rightarrow \text{ restrição de não negatividade ou de sinal.} \end{array}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots, a_{in}x_n \geq b_i \ \rightarrow \text{ i-ésima restrição}$$

O problema de programação linear, então, pode ser escrito como:

Otimizar uma função objetivo <u>linear</u> tendo em vista um conjunto de restrições <u>lineares</u>.

Definição 1 (Ponto Factível) *Um conjunto de valores $x_1, \ldots, x_n$ que satisfaça (atenda) a todas as restrições é denominado um ponto factível ou um vetor factível do problema.*

Definição 2 *Espaço ou região de factibilidade: conjunto de pontos factíveis.*

Problema de Otimização Linear: determinar, dentro do região de factibilidade, o vetor que otimiza a função objetivo.

4 Formato do Problema de Otimização Linear

- Formato Padrão:

  - Restrições de igualdade.
  - Todas as variáveis são não-negativas.
  - O método simplex só pode ser aplicado a este formato:

$$
\begin{array}{lrcc}
\min & z & = & c'x \\
\text{suj. a} & Ax & = & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

- Forma Canônica:

  - Todas as restrições na forma maior ou igual (problema de minimização).
  - Todas as variáveis são não-negativas:

$$
\begin{array}{lrcc}
\min & z & = & c'x \\
\text{suj. a} & Ax & \geq & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

5 Manipulação do Problema Linear

Alteração do formato do problema original, reduzindo-o ou à forma padrão ou à forma canônica.

5.1 Transformar desigualdades em igualdades

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$\Big\Downarrow \text{ variável de folga}$$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + y_i &= b_i \\ y_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & y_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & + & y_2 & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & + & y_m & = & b_m \end{array}$$

$$\Big\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= b \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

De forma equivalente:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$\Big\Downarrow \text{ variável de excesso}$$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - y_i &= b_i \\ y_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & - & y_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & - & y_2 & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & - & y_m & = & b_m \end{array}$$

$$\Big\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= b \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

5.2 Transformar igualdades em desigualdades

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \\ \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{in}x_n & \geq & b_i \end{cases}$$

5.3 Eliminação de Variável irrestrita em sinal

1. Considere x_j irrestrita em sinal. Então:

$$\begin{aligned} x_j &= u_j - v_j \\ u_j &\geq 0 \\ v_j &\geq 0 \end{aligned}$$

   Em seguida, substituir x_j em todas as equações.

2. Considere um conjunto $x_1, \ldots, x_k$ de variáveis irrestritas. Então, para $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} x_j &= u_j - v \\ u_j &\geq 0, \\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

   v: variável mais negativa.

   $\Rightarrow$ Introdução de redundância.

3. Expressar a variável irrestrita em função das variáveis restritas em sinal, substituindo-a no conjunto de equações e descartando a equação utilizada.

   $\Rightarrow$ Eliminação da variável irrestrita.

   $\Rightarrow$ Difícil aplicação prática.

   $\Rightarrow$ Diminui o número de variáveis do problema.

Exemplo 9 *Seja o problema de Otimização linear:*

$$\min \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\textit{suj. a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

x_1*: variável irrestrita.*

Portanto, para eliminar x_1:

$$x_1 = -2x_2 - x_3 + 5$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{llcrcl} \min & x_2 & + & 3x_3 & & \\ \textit{suj. a} & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{llcrcl} \min & x_2 & + & 3x_3 & & \\ \textit{suj.a} & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ & x_2 & + & x_3 & \geq & 4 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

5.4 Variável com limitante inferior

$$x_j \ \geq \ l_j$$

$$\Downarrow$$

$$t_j \ = \ x_j - l_j$$

$$t_j \ \geq \ 0$$

$\Rightarrow$ Aumento do número de variáveis.

5.5 Variável com limitante superior

$$x_j \ \leq \ u_j$$

$$\Downarrow$$

$$t_j \ = \ u_j - x_j$$

$$t_j \ \geq \ 0$$

$\Rightarrow$ Aumento do número de variáveis.

6 Formato Matricial de um PL

$$
\begin{array}{rrcl}
\min & z & = & c'x \\
\text{suj. a} & Ax & = & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{l}
\min \ z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{suj. a} \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b \\
\qquad\quad x_j \geq 0 \ , \quad j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

$$c \in \Re^n \ , \quad x \in \Re^n$$

$$A \in \Re^{mxn} \ , \quad b \in \Re^m$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Seja I um conjunto ordenado de índices tal que:

$$I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$$

e seja o vetor x, na forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Se I contiver p elementos, então x^I será o vetor p-coluna cujos componentes são x_i, $i \in I$.

Exemplo 10 *Seja o vetor:*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

e seja o conjunto ordenado:

$$I = \{2, 4, 5\}$$

Então:

$$x^I = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Seja então a matriz A na forma:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

e sejam os conjuntos ordenados de índices:

$$
\begin{aligned}
I &\subseteq \{1, 2, \dots, m\} \\
J &\subseteq \{1, 2, \dots, n\}
\end{aligned}
$$

de modo que:

A^i: i-ésima linha de A.

A_j: j-ésima coluna de A.

a_{ij}: elemento da linha i e coluna j.

A^I: matriz obtida pela união das linhas $A^i, i \in I$.

A_J: matriz obtida pela união das colunas $A_j, j \in J$.

A^I_J: sub-matriz cujos elementos são $a_{ij}, i \in I, j \in J$.

Exemplo 11 *Seja a matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 8 & 3 & 5 & 11 \\ 5 & 9 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

e sejam os conjuntos ordenados:

$$I = \{1, 2\}$$

$$J = \{2, 3, 5\}$$

Então:

$$A^I = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 8 & 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

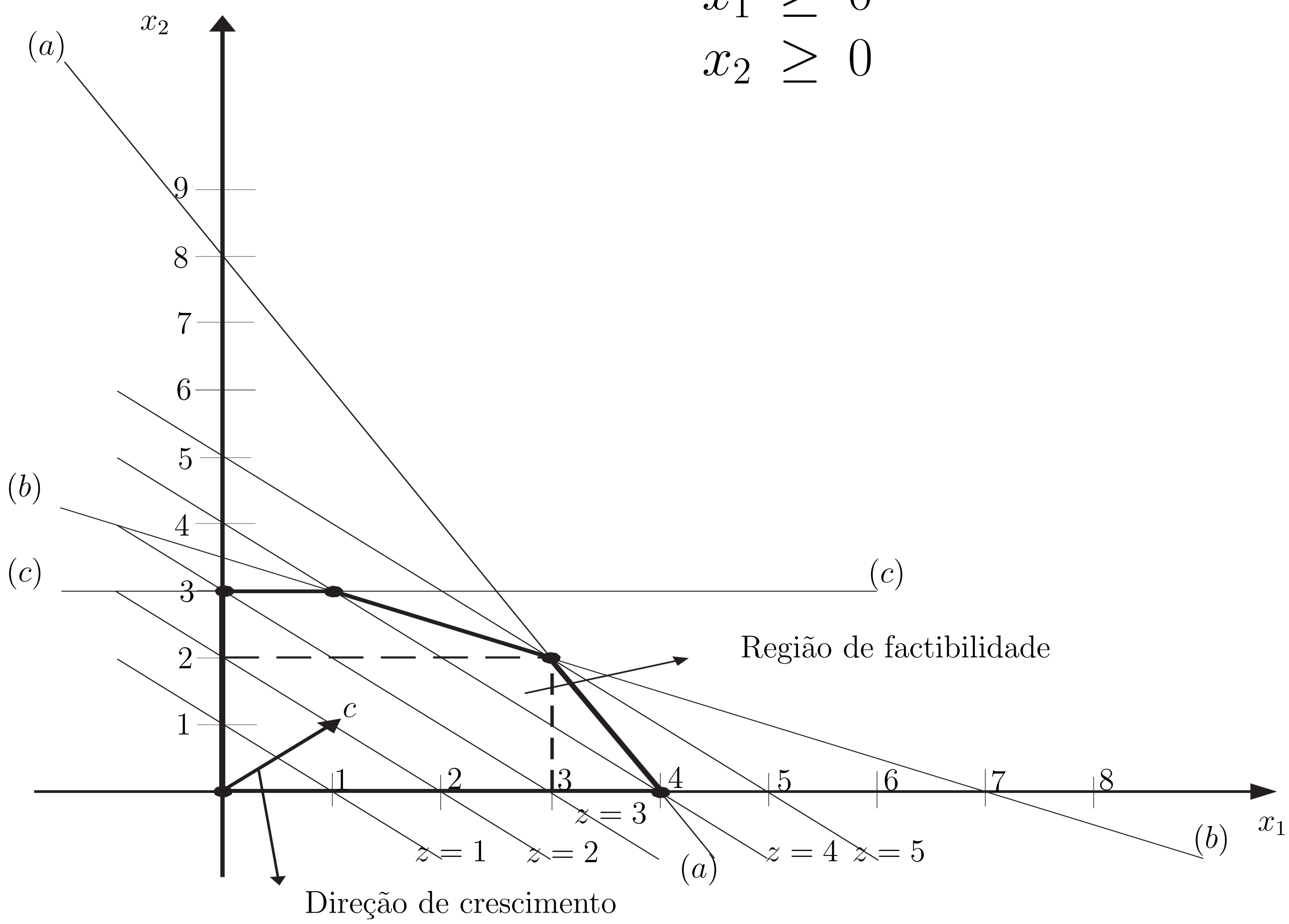
$$A_J = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 8 & 3 & 11 \\ 9 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_J^I = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 8 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

7 Solução Geométrica do Problema de PL

Exemplo 12 *Escala de produção da fábrica de sapato.*

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & z = \; x_1 + x_2 & & & \\
suj.\ a & 2x_1 + x_2 & \leq & 8 & (a) \\
 & x_1 + 2x_2 & \leq & 7 & (b) \\
 & x_2 & \leq & 3 & (c) \\
 & x_1 & \geq & 0 & \\
 & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

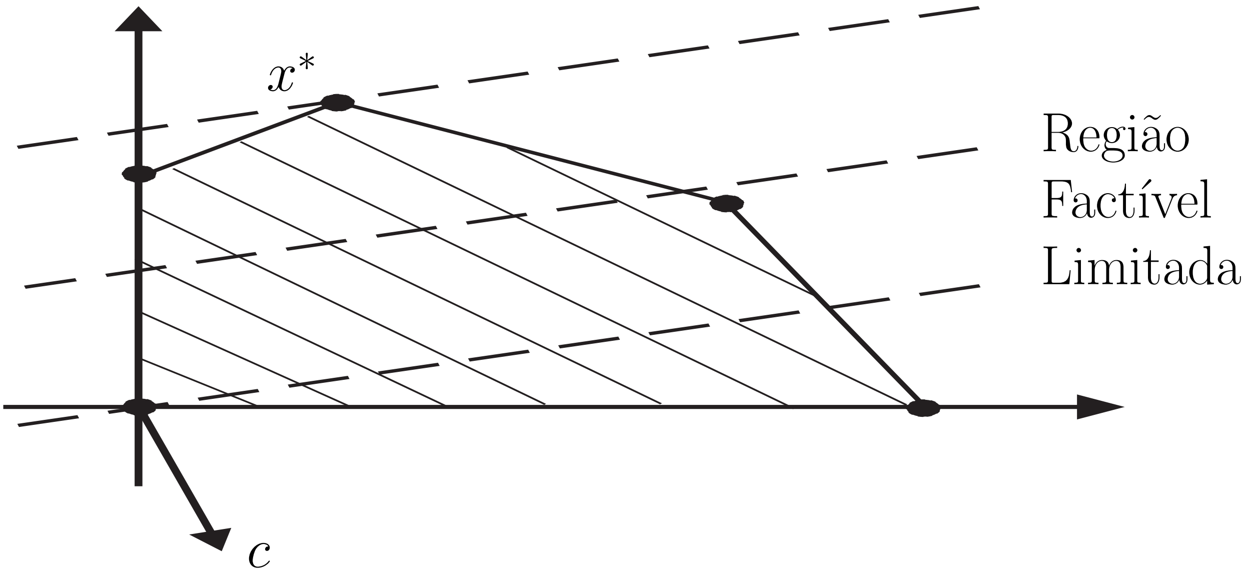


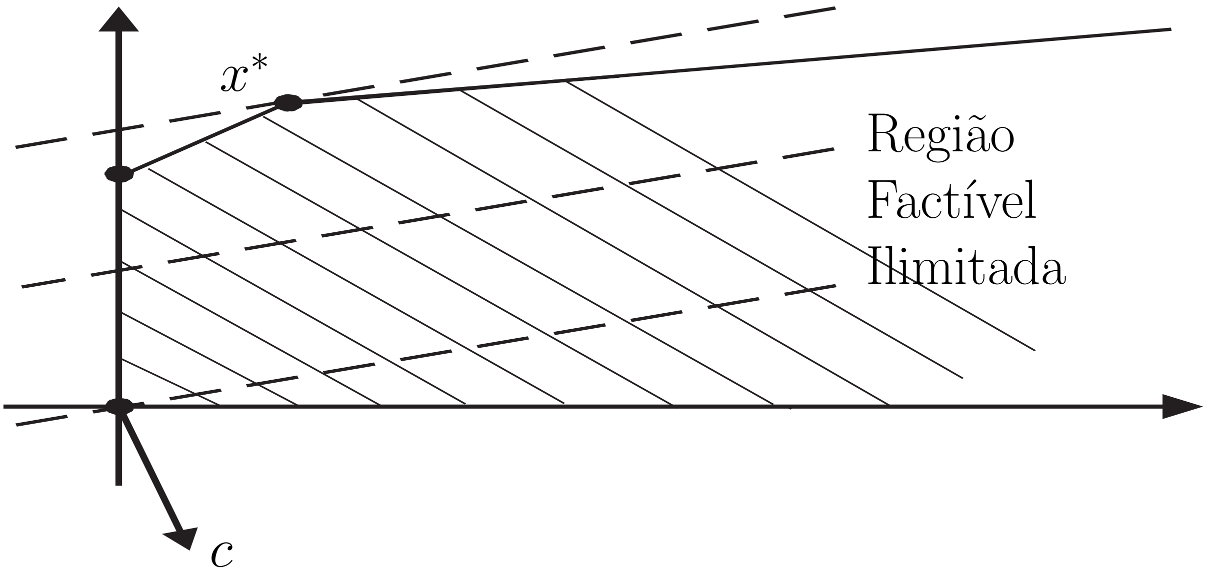
$$
Solução\ ótima: \begin{cases} x_1^* = 3 \\ \\ x_2^* = 2 \end{cases} \Longrightarrow \qquad z^* = 5
$$

8 Tipos de solução de Problemas de PPL (Problema de Min)

1. Solução ótima finita e única:

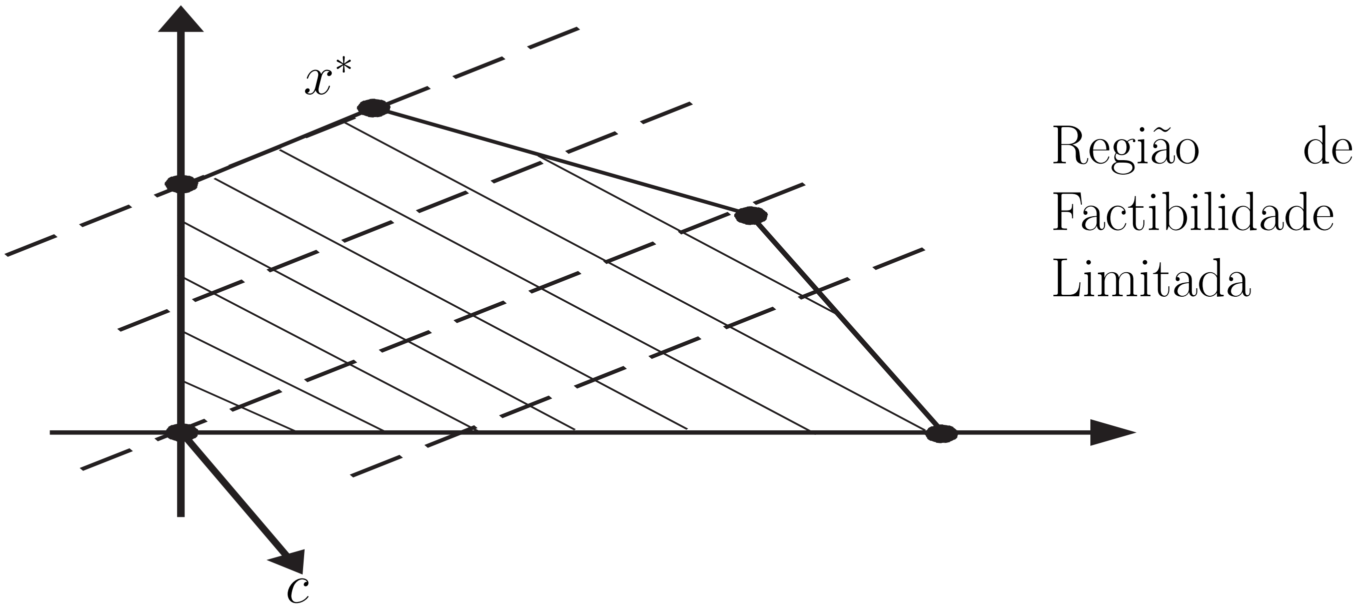
   $\Rightarrow$ Ocorre em um ponto extremo do conjunto dos pontos factíveis.

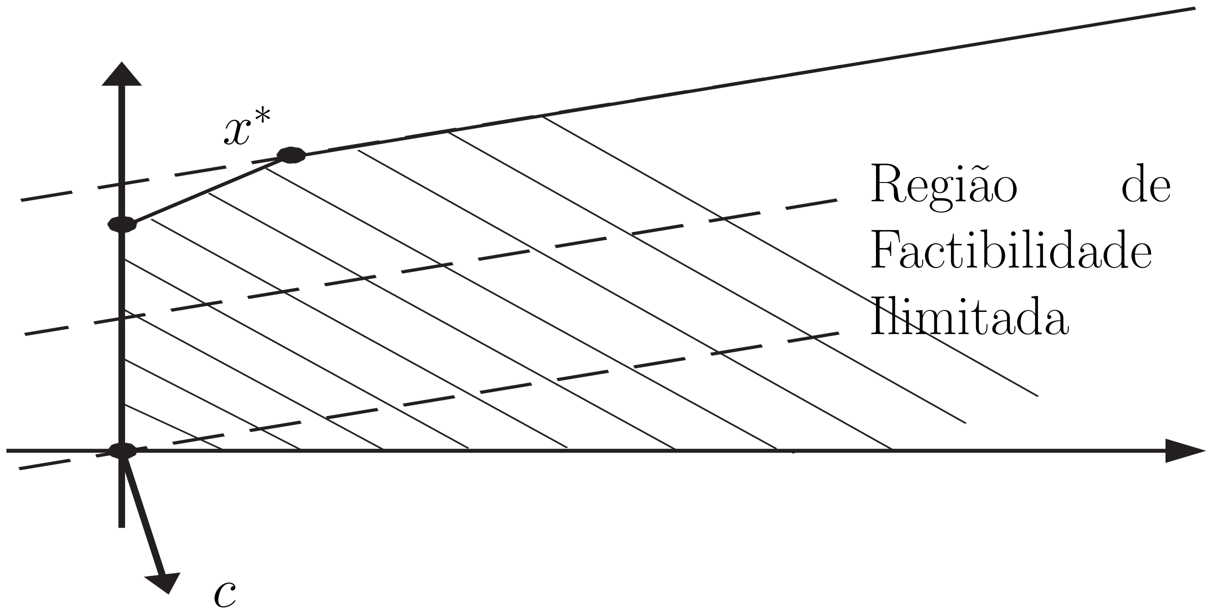




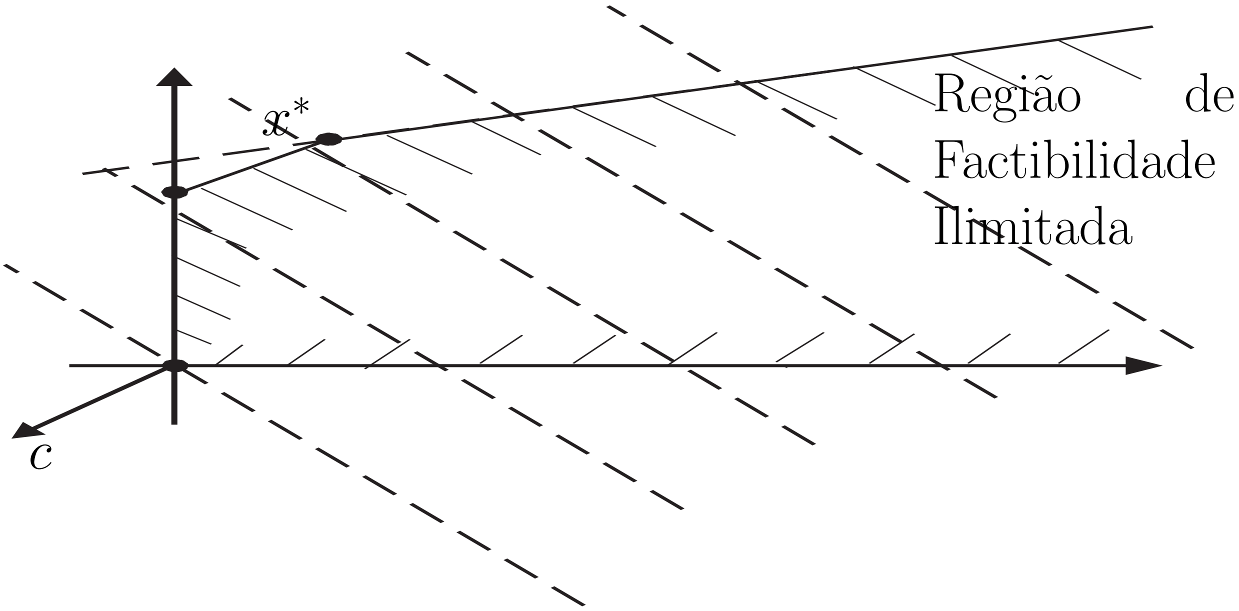
2. Solução ótima finita e múltipla:

$\Rightarrow$ Curvas de nível da função objetivo paralelas a uma das arestas do conjunto dos ponto factíveis.





3. Solução ilimitada:



4. Não existe solução ótima

⇒ Região de factibilidade vazia.

Exemplo 13

$$\begin{array}{llrl}
\min & z = & -2x_1 + 3x_2 & \\
\textit{suj. a} & & -x_1 + 2x_2 & \leq 2 \\
& & 2x_2 - x_2 & \leq 3 \\
& & x_2 & \geq 4 \\
& & x_1 & \geq 0 \\
& & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

⇒ *Problema Infactível ou Inconsistente*

⇒ *Não possui solução.*

9 Espaço das Restrições

- Restrições de Igualdade:

Seja o problema:

$$\begin{array}{lrcl} \text{min} & z = & c'x & \\ \text{suj. a} & & Ax & = b \\ & & x & \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{min} & z = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{suj. a} & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_j x_j & = b \\ & & x_j & \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

O sistema formado por:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \quad \text{para} \quad x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

$$\Downarrow$$

Cone das Restrições

Exemplo 14

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

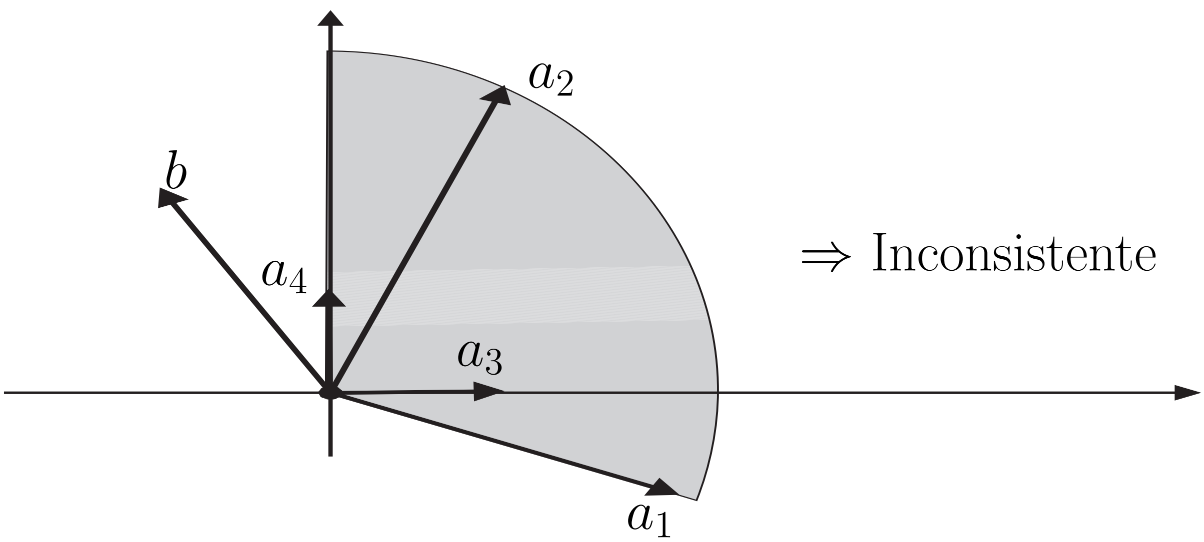
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$



$\Rightarrow$ Inconsistente

Exemplo 15

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

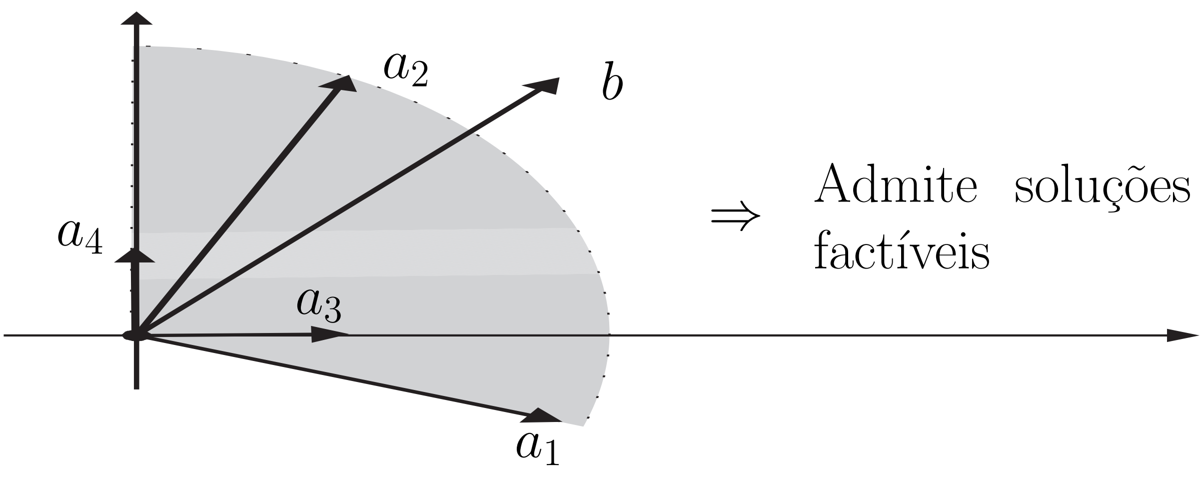
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

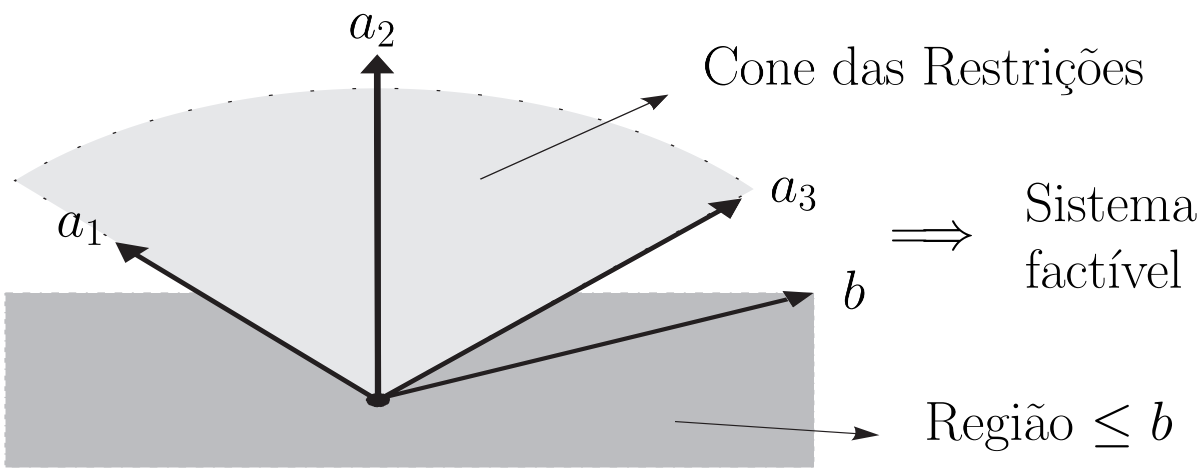
$$x \geq 0$$

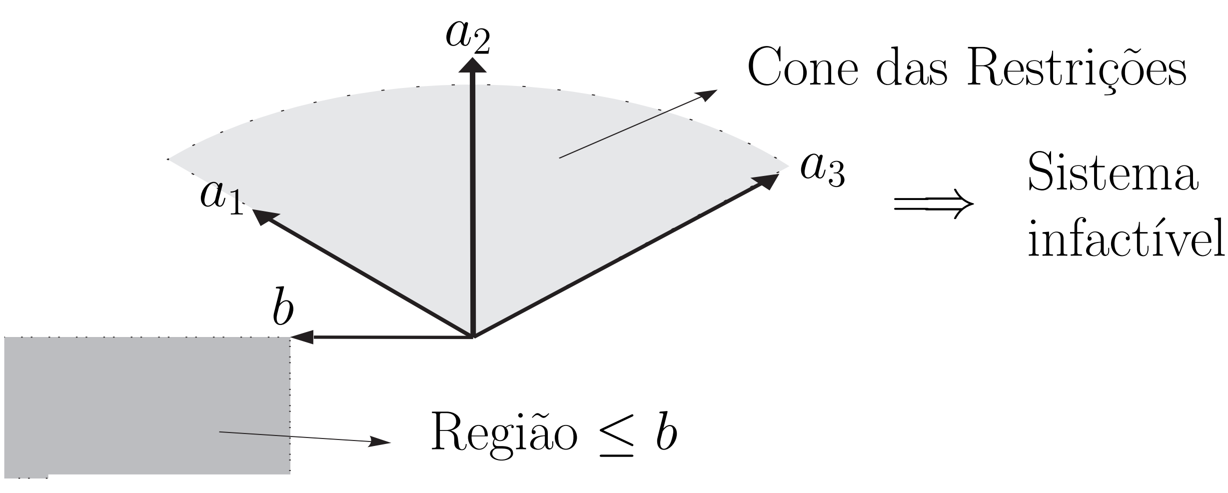


$\Rightarrow$ Admite soluções factíveis

- Restrições de Desigualdade:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \;\leq\; b$$
$$x_j \;\geq\; 0, \quad j = 1, \ldots, n$$





10 Otimalidade no Espaço de Restrições

$$\begin{array}{ll} \min & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{suj. a} & \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b \end{array}$$

$$\Downarrow$$

Determinar escalares não-negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ A_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} c_2 \\ A_2 \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} c_n \\ A_n \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix}$$

e z seja o menor possível.

$$\Downarrow$$

Representar o vetor $\begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix}$ no cone gerado pelos vetores $\begin{bmatrix} c_j \\ A_j \end{bmatrix}$, $j = 1, \ldots, n$ para o menor valor possível de z.

Exemplo 16

$$\begin{array}{lrl} \min & z = & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{suj. a} & & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

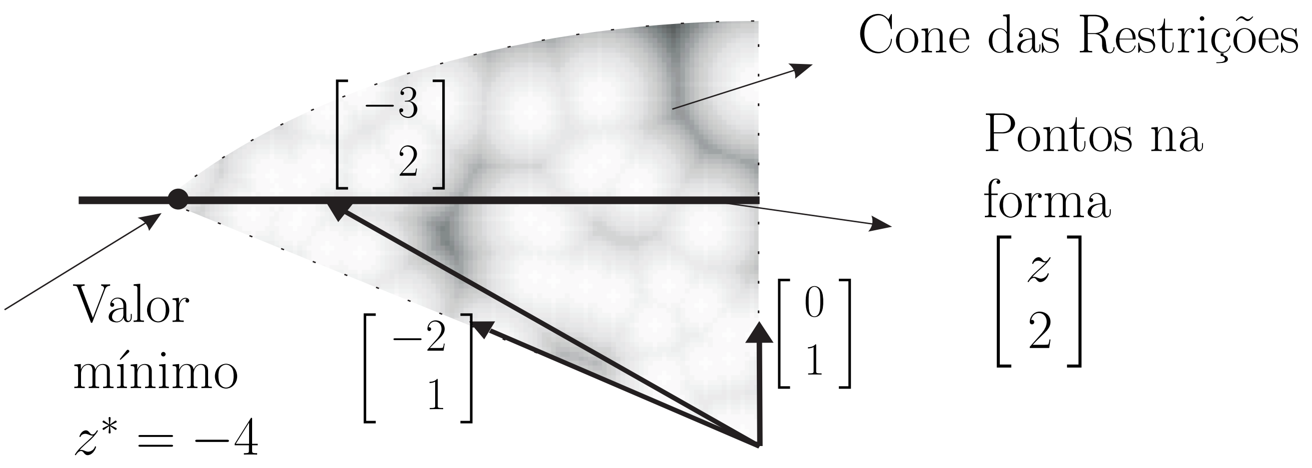
$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{lrl} \min & z = & -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 \\ \text{suj. a} & & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} z \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$



$$x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 17

$$\begin{array}{rl} \min\ z = & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{suj. a} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rl} \min\ z = & -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 \\ \text{suj. a} & x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} z \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$