CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

Otimização Linear

Professor: Sérgio Ricardo de Souza

Belo Horizonte, agosto de 2023

Sumário

1 Conjuntos

Definição 1 *Um conjunto é definido como uma agregação de objetos.*

- Pode ser especificado ou listando-se seus elementos entre chaves:
$$\mathbb{C} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
ou evidenciando-se propriedades comuns entre eles:
$$\mathbb{C} = \{x \quad : \quad 0 \leq x \leq 4\}$$
- O estado lógico ou relação de associação de um elemento x a um conjunto qualquer $\mathbb{C}$ é representado por:
$$x \in \mathbb{C} \quad \rightarrow \quad x \text{ pertence a } \mathbb{C}$$
$$x \notin \mathbb{C} \quad \rightarrow \quad x \text{ não pertence a } \mathbb{C}$$

Exemplo 1 *Conjunto de números reais*
Sejam a e b números reais. Então:

$$[a, b] = \{\ x \quad : \quad a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{\ x \quad : \quad a < x < b\}$$

1.1 Operações entre conjuntos

- União:

$$\mathbb{C}_1 \bigcup \mathbb{C}_2 = \{x \quad : \quad x \in \mathbb{C}_1 \;\; \text{ou} \;\; x \in \mathbb{C}_2\}$$

- Intersecção:

$$\mathbb{C}_1 \bigcap \mathbb{C}_2 = \{x \quad : \quad x \in \mathbb{C}_1 \;\; \text{e} \;\; x \in \mathbb{C}_2\}$$

- Complemento:

$$\overline{\mathbb{C}} = \{x \quad : \quad x \notin \mathbb{C}\}$$

- $\mathbb{S}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$ se:

$$x \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C} \supseteq \mathbb{S}$$

Definição 2 *Supremo de um conjunto.*
Se $\mathbb{C}$ *é um conjunto de números reais e* $\exists\ \overline{x} < +\infty$ *tal que:*

$$x \leq \overline{x}\ , \quad \forall\ x \in \mathbb{C}$$

Então o conjunto $\mathbb{C}$ *é limitado superiormente e* $\overline{x}$ *é o menor limitante superior de* $\mathbb{C}$ *ou o supremo de* $\mathbb{C}$*.*

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \sup_{x\ \in\ \mathbb{C}} x \qquad (\sup\ :\ \textit{supremo}) \\ &= \sup\{\ x\ \ :\ \ x \in \mathbb{C}\} \\ &= +\infty\ , \quad \textit{se } \mathbb{C} \textit{ não é limitado superiormente} \end{aligned}$$

Definição 3 *Ínfimo de um conjunto*
Se $\mathbb{C}$ *é um conjunto de números reais e* $\exists\ \underline{x} > -\infty$ *tal que:*

$$x \geq \underline{x}\ , \quad \forall\ x \in \mathbb{C}$$

Então o conjunto $\mathbb{C}$ *é limitado inferiormente e* $\underline{x}$ *é o maior limitante inferior de* $\mathbb{C}$ *ou o ínfimo de* $\mathbb{C}$*.*

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \inf_{x\ \in\ \mathbb{C}} x \qquad (\inf\ :\ \textit{ínfimo}) \\ &= \inf\{\ x\ \ :\ \ x \in \mathbb{C}\} \\ &= -\infty\ , \quad \textit{se } \mathbb{C} \textit{ não é limitado inferiormente} \end{aligned}$$

2 Vetores

Definição 4 *Arranjo ordenado de n elementos em forma de linha ou coluna.*

Exemplo 2

- $x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \textit{vetor linha } (n = 4)$
- $$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \textit{vetor coluna } (n = 3)$$

- $\Re^n$ *: conjunto de todos os vetores reais de tamanho (ordem) n com elementos reais.*

2.1 Vetores Especiais

- Vetor zero ou nulo: todos os componentes são iguais a zero.
- i-ésimo vetor unitário: vetor com elementos iguais a zero, exceto na i-ésima posição.

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_3$$

$\rightarrow$ vetor de coordenadas.

- Vetor soma: todos os elementos são iguais a 1.

3 Espaço Vetorial Linear

Definição 5 *Um espaço vetorial linear* $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$ *consiste de um conjunto* $\mathbb{X}$ *de elementos (vetores) e de um campo* $\mathbb{F}$*, sobre os quais estão definidas as operações:*

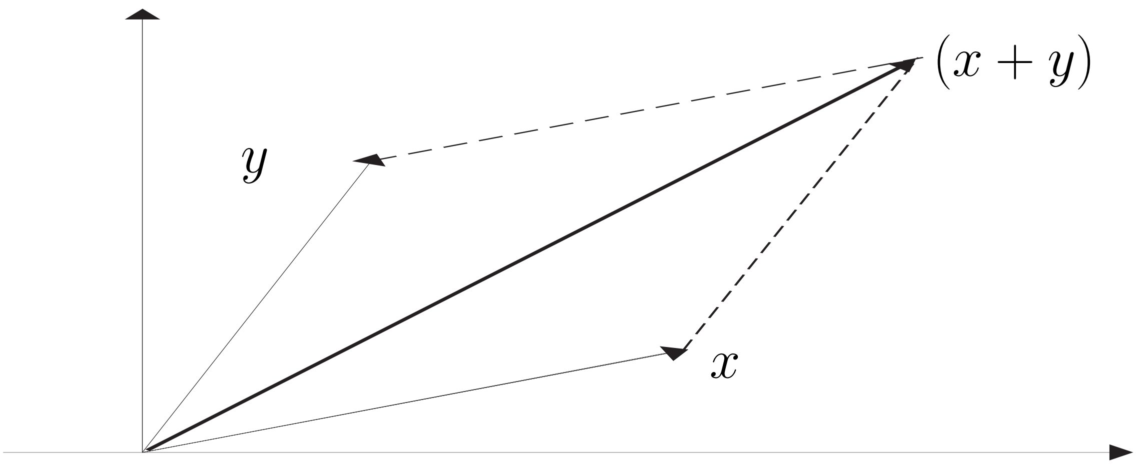
i) Adição vetorial:

$$\forall\ x, \quad y \in \mathbb{X}\ , \quad (x+y) \in \mathbb{X}$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]$$

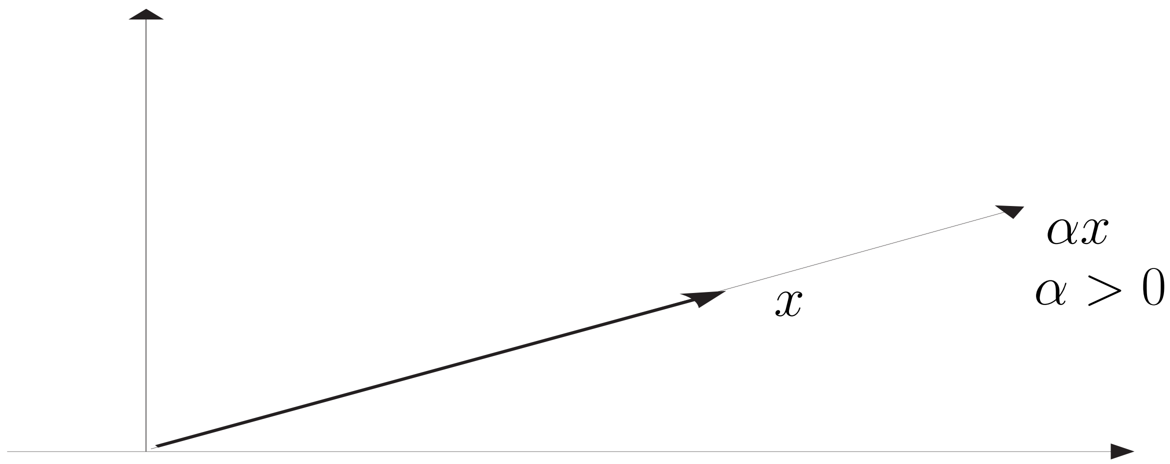
$$(x+y) = [(x_1+y_1) \quad (x_2+y_2) \quad \dots \quad (x_n+y_n)]$$



ii) Multiplicação por escalar:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\ x\ \in\ \mathbb{X} \\ \\ \forall\ \alpha\ \in\ \mathbb{F} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (\alpha, x) \in \mathbb{X}$$

$$\begin{aligned} \alpha x\ &=\ \alpha\left[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\right] \\ &=\ \left[\alpha x_1 \quad \alpha x_2 \quad \dots \quad \alpha x_n\right] \end{aligned}$$



Leis Axiomáticas

a) $x + y = y + x \qquad (x \in \mathbb{X}\ ,\ \ y \in \mathbb{X})$

b) $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (x \in \mathbb{X}\ ,\ \ y \in \mathbb{X}\ ,\ \ z \in \mathbb{X})$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \qquad (x \in \mathbb{X}\ ,\ \ \alpha \in \mathbb{F}\ ,\ \ \beta \in \mathbb{F})$$

c) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \qquad (x \in \mathbb{X}\ ,\ \ y \in \mathbb{X}\ ,\ \ \alpha \in \mathbb{F})$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \qquad (x \in \mathbb{X}\ ,\ \ \alpha \in \mathbb{F}\ ,\ \ \beta \in \mathbb{F})$$

d) $x + 0 = x \qquad (x \in \mathbb{X}\ ,\ \ 0 \in \mathbb{X})$

$$1\ .\ x = x \qquad (x \in \mathbb{X}\ ,\ \ 1 \in \mathbb{X})$$

e) $0\ .\ x = 0 \qquad (x \in \mathbb{X}\ ,\ \ 0 \in \mathbb{F})$

f) $\forall\ x \in \mathbb{X}\ ,\ \ \exists(-x) \in \mathbb{X}\ \ :\ \ x + (-x) = 0$

Consequências dos Axiomas

a) $x + y = x + z \quad \Rightarrow \quad y = z$

b) $\alpha x = \alpha y \quad \text{e} \quad \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$

c) $\alpha x = \beta x \quad \text{e} \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$

d) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

e) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

f) $\alpha \, . \, 0 = 0$

Exemplo 3 *Espaços vetoriais lineares.*

a) $(\Re, \Re)$*: espaço vetorial linear real.*

b) $(\mathfrak{C}, \Re)$

c) $(\Re^n, \Re)$, *sendo cada vetor de* $\Re^n$ *representado como:*

$$x = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n]$$

para

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \quad \in \quad \Re$$

3.1 Subespaço Linear

Seja $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$ um espaço vetorial linear e $\mathbb{S}$ um subconjunto de $\mathbb{X}$. Então $(\mathbb{S}, \mathbb{F})$ é um subespaço linear de $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$ se $\mathbb{S}$ forma um espaço linear sobre $\mathbb{F}$ através das mesmas operações definidas sobre $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$.

Exemplo 4 *Subespaços lineares*

a) $(\{0\}, \Re)$ *subespaço de* $(\Re^n, \Re)$

b) $(\Re^n, \Re)$ *subespaço de* $(\mathfrak{C}^n, \mathfrak{C})$

Propriedades

a) $(\mathbb{Y}, \mathbb{F})$ é um subespaço linear de $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$ se:

$$\forall\ x,\ y \in \mathbb{Y} \quad \Longrightarrow \quad (\alpha x + \beta y) \in \mathbb{Y},\ \ \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$$

b) Se $(\mathbb{S}, \mathbb{F})$ e $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ são subespaços de $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$ então:

b1) $(\mathbb{S}, \mathbb{F}) \ \cap \ (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ é um subespaço de $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$.

b2) $(\mathbb{S}, \mathbb{F}) \ + \ (\mathbb{T}, \mathbb{F})$ é um subespaço de $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$.

4 Norma

Definição 6 *A função que associa a cada $x \in \mathbb{X}$ um número real, representado por $\| x \|$, é chamada de norma de x.*

Axiomas

a) $\| x \| \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{X}$

b) $\| x \| = 0 \iff x = 0$

c) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad \forall\, x,\ y \in \mathbb{X}$

d) $\| \alpha x \| = |\alpha| \ \| x \|, \quad \forall\, x \in x, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{F}$

Exemplos

a) Norma 1: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$

b) Norma 2: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \right)^{1/2}$

c) Norma ∞: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

5 Produto Interno

- Definido sobre $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, associa a cada par de vetores $x,\ y \in \mathbb{X}$, um escalar representado por $< x, y >$.

- O produto interno satisfaz os seguintes axiomas:

  a) $< x, y > = \overline{< y, x >}$

  b) $< x + y,\ z > = < x, z > + < y, z >$

  c) $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$

  d) $< x, x > \geq 0$

  e) $< x, x >= 0 \iff x = 0$

- No $\Re^n$, o produto interno de dois vetores é defindo como:

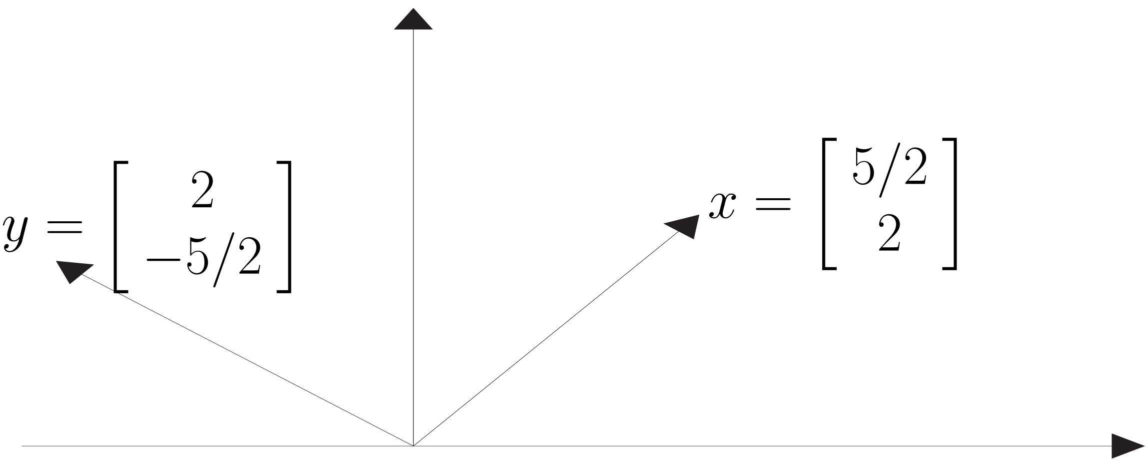
$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

para

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- Dois vetores x, y são ortogonais se:

$$< x, y > = \ 0$$



- Um vetor x é ortogonal a um conjunto $\mathbb{S}$ se,

$$\forall \ s \in \mathbb{S} \quad \Rightarrow \ < x, s >= 0$$

- Norma 2: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \right)^{1/2} \quad = \langle x, x \rangle^{1/2}$

6 Desigualdade de Cauchy-Schwartz

Sejam x e y dois vetores de mesma dimensão. Então:

$$| < x, y > | \ \leq \ \|x\| \ \|y\|$$

- Propriedade: A quantidade $\sqrt{< x, y >}$ é uma norma para $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$

$$\|x\|_2 = \sqrt{< x, y >}$$

- Se $x, y \ \in \ \mathbb{X}$ forem ortogonais, então:

$$\|x + y\|_2^2 \ = \ \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$$

7 Combinação Linear

Seja $\mathbb{S} = \{\ x_1,\ \ x_2, \ldots,\ \ x_n\}$ um subconjunto de um espaço linear $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$. Um vetor y é dito ser uma combinação linear de elementos de $\mathbb{S}$ se

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

sendo

$$\alpha_i \in \mathbb{F}\ , \quad i = 1, \ldots, n$$

- O conjunto de todas as combinações lineares de elementos de $\mathbb{S}$ é chamado de subespaço gerado, representado por $[\mathbb{S}]$.

- Propriedade: $[\mathbb{S}]$ é um subespaço linear de $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$.

8 Dependência e Independência Linear

Um vetor y é linearmente dependente em relação a um conjunto de vetores $\mathbb{S}$ se y puder ser expresso como uma combinação linear de elementos de $\mathbb{S}$, ou seja, se $y \in [\mathbb{S}]$.

Uma coleção de vetores é linearmente dependente se existirem escalares $\alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n$, nem todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Teorema 1 *Independência Linear*
Um conjunto de vetores $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *é linearmente independente se e somente se a expresão*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

for verdadeira unicamente para

$$\alpha_i = 0, \quad \forall\ i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Prova: (Suficiência) Seja $\mathbb{S} = \{\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\}$ um conjunto de vetores. O conceito de dependência linear implica que, para algum $x_r \in \mathbb{S}$, então $x_r \in [\mathbb{S}]$, ou seja,

$$x_r = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} \alpha_i x_i$$

ou ainda:

$$x_r - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Porém, se $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ são linearmente independentes, então a expressão acima implica que $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (Necessidade) Suponha agora que, para algum r, tem-se que $\alpha_r \neq 0$. Então, pela expressão acima

$$x_r = \sum_{i \neq r} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_r} \right) x_i$$

ou seja, o conjunto de vetores é linearmente dependente.

Exemplo 5 *Independência Linear*

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \iff \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

9 Base

Um conjunto finito $\mathbb{S}$ de vetores linearmente independentes forma uma base para $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$ se $\mathbb{S}$ gera $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$ e, se qualquer elemento de $\mathbb{S}$ for retirado, então a coleção de vetores restantes não gera $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$.

Exemplo 6 *Os vetores*

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base para $\Re^2$, pois $\forall\ x \in \Re^2$ pode ser escrito na forma

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

e

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \beta_1 = 0 \ , \quad \beta_2 = 0$$

Propriedades

a) A representação de um vetor numa determinada base é única.

b) Quaisquer bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de elementos.

9.1 Alteração da Base

Considere que o conjunto de vetores

$$x_1,\ x_2,\ \ldots, x_j, \ldots,\ x_n$$

forme uma base para o espaço vetorial $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$.

Deseja-se substituir x_j por y.

Primeiramente, observe que, para $y \in \mathbb{X}$:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Considere, então, que $\alpha_j \neq 0$.

Logo, para que ocorra a substituição, devem existir escalares μ e μ_i $(i \neq j)$ tais que:

$$\sum_{i \neq j}^{n} \mu_i x_i + \mu y = 0$$

pois o conjunto de vetores

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{j-i},\ y,\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_n$$

deve formar uma nova base para o espaço $(\mathbb{X}, \mathbb{F})$.

Substituindo o valor de y:

$$\sum_{i \neq j}^{n} \mu_i x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

ou seja:

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\left(\mu_i+\mu\alpha_i\right)x_i+\mu\alpha_j y=0$$

Mas, como $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ ,x_n$ são LI, então:

$$\begin{aligned}&\mu\alpha_j=0\\&\mu_i+\mu\alpha_i=0\ ,\quad i\neq j\end{aligned}$$

Por hipótese, $\alpha_j\neq 0\Rightarrow\mu=0.$

Conseqüentemente:

$$\mu_i=0\ \text{ para }\ i\neq j$$

Portanto:

$$\sum_{i\neq j}\mu_i x_i+\mu y=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\mu=0\\ \mu_i=0\ ,\quad i\neq j\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{j-i},\ y,\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_n\ \text{ são LI}$$

$$\Longrightarrow\quad \text{uma nova base foi determinada}$$

10 Matrizes

Definição 7 *Arranjo ordenado de* $m \times n$ *elementos* a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ *escrito na forma:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$ com elementos reais é representado por $\Re^{m \times n}$.

Propriedades

a) $(\Re^{m \times n},\ \Re)$ é um espaço vetorial linear.

b) Uma matriz pode ser interpretada como um operador linear que mapeia elementos $\Re^n$ no espaço $\Re^m$:

$$y = Ax,\ \ x \in \Re^n$$
$$y \in \Re^m$$

10.1 Matrizes especiais

- Matriz retangular deitada ($m < n$)

$$A = \begin{array}{cc} n & \\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} & m \end{array}$$

- Matriz retangular de pé ($m > n$)

$$A = \begin{array}{cc} n & \\ \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} & m \end{array}$$

- Matriz quadrada ($m = n$)

$$A = \begin{array}{cc} n & \\ \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} & m \end{array}$$

- Matriz triangular
  - A é uma matriz triangular inferior se é quadrada e $a_{ij} = 0,\ \forall i > j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  - Triangular superior se $a_{ij} = 0,\ \forall i < j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal

  A é diagonal se A é quadrada e $a_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$.

- Matriz simétrica

  A é uma matriz simétrica se $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Matriz identidade

  Matriz diagonal, tendo $a_{ij} = 1, \forall i$

- Matriz nula

  $a_{ij} = 0, \forall i, j$

- Matriz coluna

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \Re^{n \times 1}$$

- Matriz linha

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \in \Re^{1 \times n}$$

10.2 Operações com matrizes

- Adição:

$$A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}\ , \quad \forall i, j$$

$$A \in \Re^{m\times n}, \ \ B \in \Re^{m\times n}$$

- Multiplicação por escalar:

$$\alpha A = \{\alpha a_{ij}\}\ , \quad \forall i, j$$

$$A \in \Re^{m\times n}, \ \ \alpha \in \Re$$

- Multiplicação de matrizes:

$$C = AB = \{c_{ij}\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right\}$$

$$A \in \Re^{m\times n}\ , \quad B \in \Re^{n\times p}\ , \quad C \in \Re^{m\times p}$$

Propriedades:

a) $AB \neq BA$, em geral;

b) $IA = A$;

c) $A(B + C) = AB + AC$;

d) $(B + C)A = BA + CA$;

- Transposta:

$$A' = \{a_{ij}\}' = \{a_{ji}\} \ , \quad A \in \Re^{m \times n}$$

Propriedades:

a) $(AB)' = B'A'$;

b) Se $A = A' \Rightarrow A$ é simétrica;

c) $A = -A' \Rightarrow A$ é anti-simétrica;

d) $(A + B)' = A' + B'$

- Potência:

$$A^k = \underbrace{A \times A \times A \ldots \times A}_{\text{k vezes}}$$

$$A \in \Re^{m \times n}$$

- Traço:

$$\text{Traço de } A = \mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$A \in \Re^{n \times n}$$

Propriedades:

a) $\mathbf{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathbf{Tr}(A) + \beta \mathbf{Tr}(B) \ , \quad \forall \alpha, \quad \beta \in \Re$

b) $\mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(BA) \ , \quad A \in \Re^{m \times n} \ , \quad B \in \Re^{n \times m}$

- Adjunta:

$A \in \Re^{m \times n}$

$$\text{Adjunta de } A = \mathbf{Adj}(A) = \left\{ c'_{ij} \right\}$$

$$c_{ij} \ : \ \text{cofator do elemento } a_{ij} \ , \quad \forall i, j$$

Propriedades:

a) $A \ \mathbf{Adj}(A) = \det(A) \ I$

b) $\mathbf{Adj}(A) \ A = \det(A) \ I$

- Submatriz:

  Matriz resultante da remoção de linhas e/ou colunas completas de uma dada matriz $A \in \Re^{m\times n}$.

- Partição de uma matriz:

  Divisão de uma matriz em submatrizes.

Exemplo 7

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo 8 *Casos Especiais:*

$$A = \begin{bmatrix} A_4 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \textit{Bloco Triangular}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \textit{Bloco Diagonal}$$

Exemplo 9 *Sejam A e B matrizes de mesmas dimensões:*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

– *Adição de submatrizes:*
Se cada par (A_{ij}, B_{ij}) tem as mesmas dimensões;

$$A \pm B = \begin{bmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} \\ \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} \end{bmatrix}$$

– *Multiplicação de submatrizes:*
Se

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$$

e os produtos $A_{11}B_{12}$ e $A_{12}B_{21}$ são possíveis, então:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} \\ \\ &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \end{aligned}$$

10.3 Determinante

10.3.1 Definição

Seja $A \in \Re^{n\times n}$. Então:

$$
\begin{aligned}
\mid A \mid \; &= \; \det(A) \\
&= \; \sum_{i=1}^{n} \; a_{ij} \; C_{ij} \;, \quad \text{para qualquer } j \\
&= \; \sum_{j=1}^{n} \; a_{ij} \; C_{ij} \;, \quad \text{para qualquer } i
\end{aligned}
$$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \rightarrow \quad$ cofator do elemento a_{ij}

$M_{ij} =$ determinante da matriz formada retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Exemplo 10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= (-3)\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + (-2)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 14 \end{aligned}$$

10.3.2 Propriedades

a) $\det(AB) = \det(A)\ \det(B)$;

b) $\det(A') = \det(A)$;

c) $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$ se $\det(A) \neq 0$;

d) $\det(A) \neq 0$ se e somente se as linhas (ou colunas) de A forem LI;

e) Seja B obtida a partir de A, trocando-se duas linhas. Então:

$$\det(B) = -\det(A)$$

f) Seja B obtida a partir de A, multiplicando-se uma linha (ou coluna) por uma constante k. Então:

$$\det(B) = k\ \det(A)$$

g) Seja B obtida a partir de A, adicionando-se uma linha a outra, vezes uma constante. Então:

$$\det(B) = \det(A)$$

h)

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \det(B)\ \det(D)$$

10.4 Espaço Imagem de uma Matriz

10.4.1 Definição

Seja uma matriz $A \in \Re^{m \times n}$. Então, o conjunto

$$\Re(A) = \{\ y \in \Re^m \quad : \quad y = Ax, \qquad x \in \Re^n\ \}$$

é o espaço imagem (range) da matriz A.

Propriedades:

a) $\Re(A)$ é um subespaço do $\Re^m$

b) $y = Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$

c) $\Re(A)$: conjunto de todas as possíveis combinações lineares das colunas de A.

10.4.2 Posto (rank) de uma matriz A

O posto de uma matriz $A \in \Re^{m \times n}$, representado por $\rho(A)$, é o número máximo de colunas LI de A, ou ainda, a dimensão do espaço imagem de A.

Propriedades:

a) $\rho(A) = \rho(A')$

b) $\rho(A) \leq \min(n, m)$

c) $\rho(A) = \dim\{(\Re(A))\}$

10.5 Espaço Nulo de uma Matriz

O espaço nulo ou kernel de uma matriz $A \in \Re^{m \times n}$ é o conjunto definido como:

$$\mathcal{N}(A) = \{\ x \in \Re^n : Ax = 0\ \}$$

Propriedade:

a) $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço do $\Re^n$.

10.5.1 Nulidade de uma matriz A

Dimensão do espaço nulo de uma matriz A, representada por $\nu(A)$.

Propriedades:

a) $\nu(A) = 0 \Longrightarrow \mathcal{N}(A) = \{0\}$;

b) $\nu(A) = \gamma \Longrightarrow Ax = 0$ possui γ soluções LI;

c) $\rho(A) + \nu(A) = n$.

Exemplo 11

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^{a_1} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{a_2} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}^{a_3} +$$

$$+ x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}^{a_4} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}^{a_5}$$

Note que:

$$a_3 = a_1 + a_2; \quad a_4 = 2a_1; \quad a_5 = a_4 - a_3 = a_1 - a_2.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} Ax &= x_1a_1 + x_2a_2 + x_3(a_1 + a_2) + x_4(2a_1) + x_5(a_1 - a_2) \\ &= (x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5)a_1 + (x_2 + x_3 - x_5)a_2 \end{aligned}$$

Como a_1 e a_2 são LI:

$$Ax = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- *Número de incógnitas:* 5

- *Número de equações:* $2 = \rho(A)$

- *Número de graus de liberdade:* $3 = \nu(A)$

$$(x_3, x_4, x_5)' \;=\; (1\ 0\ 0)' \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(x_3, x_4, x_5)' \;=\; (0\ 1\ 0)' \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(x_3, x_4, x_5)' \;=\; (0\ 0\ 1)' \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10.6 Operações Elementares sobre Matrizes

a) Troca de 2 linhas (ou colunas) de A:

Duas linhas i_1 e i_2 $(i_1 < i_2)$ podem ser trocadas pré-multiplicando-se A pela matriz:

$$E^1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (i_1) \\ \\ \\ \\ \\ (i_2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

b) Multiplicar uma linha (ou coluna) de A por uma constante k:

$$E^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

c) Soma de uma linha (ou coluna) i_2 multiplicada por uma constante k com outra linha (ou coluna) i_1:

$$E^3 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \vdots & & \\ & & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i_1) \\ \\ \\ \\ (i_2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ou

$$E^3 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & & & \\ & & \vdots & & 1 & & & & \\ & & \vdots & & & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i_2) \\ \\ \\ \\ (i_1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

10.7 Processo de Eliminação de Gauss

Aplicação sucessiva de operações elementares para reduzir uma matriz $A \in \Re^{m \times n}$ a uma matriz mais simples contendo, em particular, mais zeros que a matriz original.

Exemplo 12

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & -4 & -10 \end{bmatrix}$$

- *Multiplicação da segunda linha por* $\dfrac{-1}{2}$*:*

$$A_1 = E_1^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & -4 & -10 \end{bmatrix}$$

- *Multiplicação da segunda linha por* -4 *e adicionar o resultado à terceira linha:*

$$A_2 = E_2^3 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Troca das duas primeiras linhas:*

$$A_3 = E_3^1 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Multiplicação da segunda linha por 2 e adicionar o resultado à terceira linha:*

$$A_4 = E_4^3 A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Multiplicar a primeira coluna por 3 e adicionar o resultado à quarta coluna:*

$$A_5 = A_4 E_5^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Multiplicar a segunda coluna por* -2 *e adicionar o resultado à terceira coluna:*

$$A_6 = A_5 E_6^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Somar as colunas 2 e 4 e manter o resultado na última:*

$$A_7 = A_6 E_7^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

a) Seja $A \in \Re^{m\times n}$ uma matriz não-nula. Então, existe uma seqüência finita de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_{l+n}$ tal que:

$$E_l \; E_{l-1} \; \ldots \; E, \; A \; E_{l+1} \; E_{l+2} \; \ldots \; E_{l+n}$$

está reduzida a uma das formas:

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; I_n$$

b) Para qualquer matriz $A \in \Re^{m\times n}$, existe uma matriz não-singular $P \in \Re^{m\times n}$ e uma matriz não-singular $Q \in \Re^{m\times n}$ tal que a matriz PAQ está em uma das formas acima.

c) O rank de uma matriz A é k se e somente se esta matriz puder ser reduzida a:

$$\begin{bmatrix} I_k & Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

através de uma seqüência finita de operações elementares.

10.8 Inversa de uma matriz

10.8.1 Definição

Seja $A \in \Re^{n\times n}$. Se existe $B \in \Re^{n\times n}$ tal que $AB = BA = \mathbf{I}$, então B é denominada matriz inversa de A.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \mathbf{I}$$

Se A possui inversa, é denominada matriz não-singular; caso contrário, matriz singular.

10.8.2 Propriedades

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

c) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

d) Condição de existência: $A \in \Re^{n\times n}$ possui inversa se e somente se as linhas (ou colunas) são LI.

10.8.3 Cálculo da inversa:

a) Eliminação de Gauss-Jordan;

b) Decomposição LU;

c) Cofator, adjunta, determinante.

10.8.4 Eliminação de Gauss-Jordan

Seqüência de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada $[A \;\; \mathbf{I}]$, de modo a reduzi-la à matriz $[\mathbf{I} \;\; A^{-1}]$.

Exemplo 13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

a1) Montando a matriz aumentada $[\ A \ \vdots \ \mathbf{I}\ ]$*:*

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 6 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 16 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a2) Pivoteando sobre o elemento indicado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *Equivale à pré-multiplicar a matriz aumentada por:*

$$P(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a3) Pivoteando novamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & \vdots & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *Equivale à pré-mulitiplicar a matriz aumentada por:*

$$P(2,2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a4) Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 & -2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1/2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *Equivale à pré-multiplicar a matriz aumentada por:*

$$P(3,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$P(3,3)P(2,2)P(1,1)\,[\ A \ \ \vdots \ \ \mathbf{I}\ ] = [\ \mathbf{I} \ \ \vdots \ \ A^{-1}\ ]$$

10.8.5 Decomposição LU

$$A = LU$$

L = matriz triangular inferior;
U = matriz triangular superior.

$\Rightarrow$ Solução de sistemas lineares.

10.8.6 Significado Geométrico da Inversa

A partir do exemplo apresentado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}}$$

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} v^i a_j = 1, & \text{para} \;\; i = j \rightarrow \text{normais} \\ \\ v^i a_j = 0, & \text{para} \;\; i \neq j \rightarrow \text{ortogonais} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Os vetores são ortonormais e ordenados.

10.9 Sistemas de Equações Lineares

Considere o sistema de equações lineares:

$$Ax = b$$

sendo

$$\begin{aligned} A &\in \Re^{m\times n} \\ x &\in \Re^{n} \qquad \rightarrow \text{ variável} \\ b &\in \Re^{m} \end{aligned}$$

- O problema central em PL é solucioná-lo

$$\downarrow$$

Sistema de m equações lineares a n variáveis (ou incógnitas)

- Determinar a solução deste sistema corresponde a:

a) Determinar se há inconsistência entre suas equações:

$\rightarrow$ Um sistema é dito inconsistente se existir um vetor $y \in \Re^m$ tal que:

$$yA = 0\ , \quad yb \neq 0\ , \quad y \neq \mathbf{0}$$

Exemplo 14 *Seja o sistema:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Para

$$y = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

tem-se que:

$$\left.\begin{array}{rl} yA & = \mathbf{0} \\ yb & \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \textit{Inconsistência}$$

Teorema 2 *Seja a equação $Ax = b$.*

i) Dados $A \in \Re^{m \times n}$ e $b \in \Re^m$, existe $x \in \Re^n$ tal que $Ax = b$ se e somente se $b \in \Re(A)$, ou seja, se:

$$\rho(A) = \rho\left([A \;\vdots\; b]\right)$$

ii) Dado $A \in \Re^{m \times n}$, para cada $b \in \Re^m$ existe $x \in \Re^n$ tal que $Ax = b$ se e somente se $\Re(A) = \Re^m$, isto é, se:

$$\rho(A) = m$$

b) Determinar se há equações redundantes e eliminá-las.

$\rightarrow$ Uma equação é dita redundante em um sistema linear se é uma combinação linear de outras equações do sistema.

$\rightarrow$ Se existir $y \in \Re^m, \quad y \neq 0$, tal que:

$$yA = 0 \;, \quad yb = 0$$

então, para $y_i \neq 0$, a i-ésima equação é redundante;

$\rightarrow$ Equação redundante não inclui nova informação; portanto, pode ser eliminada;

$\rightarrow$ Dois sistemas:

$$\overline{A}x = \overline{b} \;\text{ e }\; Ax = b$$

são equivalentes se e somente se possuem a mesma solução;

$\rightarrow$ Ao se retirar uma linha redundante em um sistema de equações, está-se obtendo um sistema equivalente ao original.

Exemplo 15 *Seja o sistema E_1:*

$$E_1 \;:\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para

$$y = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$\left.\begin{array}{rcl} yA & = & \mathbf{0} \\ yb & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \textit{Redundância}$$

Eliminando a primeira equação, encontra-se:

$$E_2 \;:\; \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Considere, porém, os sistemas:

$$E_3 \ : \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$E_4 \ : \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$E_5 \ : \ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Há alguma relação entre eles e E_2?

- *Observe que:*

  i) Realize as operações:

$$l_1 \leftarrow l_1 - l_2$$

$$l_2 \leftarrow l_2 - l_1 + l_2$$

  produzindo:

$$E_{2.1} \; : \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

  ii) Em seguida, pivotear sobre o elemento a_{22}:

$$E_{2.2} \; : \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  iii) Equivale a pré-multiplicar o sistema E_2 pela matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 2/3 \end{bmatrix}$$

- *Por fim, note que:*

  Em $E_3 \rightarrow x_3$ variável livre;

  Em $E_4 \rightarrow x_2$ variável livre;

  Em $E_5 \rightarrow x_2$ variável livre.

- Resolver $Ax = b$ equivale, portanto, a:

  a) Determinar inconsistência;

  b) Detectar redundância e eliminá-la;

  c) Determinar soluções para o sistema.

- Três casos são, então, possíveis:

a) $Ax = b\ ,\quad A \in \Re^{m\times n}\ ,\quad b \in \Re^m,\quad m > n$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Ou contém redundância;} \\ \\ \text{Ou é inconsistente;} \\ \\ \text{Ou as duas coisas.} \end{cases}$$

b) $Ax = b,\quad A \in \Re^{m\times n},\quad b \in \Re^m,\quad m < n$

$\Longrightarrow$ Na ausência de inconsistências e eliminadas as redundâncias, existe uma infinidade de soluções.

c) $Ax = b,\quad A \in \Re^{m\times n},\quad b \in \Re^m,\quad m = n$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Ou é inconsistente;} \\ \\ \text{Ou é redundante} \longrightarrow \text{retorna ao caso anterior.} \end{cases}$$

Exemplo 16 *Considere o sistema* E_3 *anterior, para* $m = 2$ *e* $n = 3$*. A variável* x_3 *é uma variável livre.*

O conjunto de todas as soluções é dado por:

$$\mathbb{C}_3 = \left\{ x = \left[\, x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \, \right] \quad : \quad x_1 = -1 + x_3, \;\; x_2 = 3 - x_3 \right\}$$

Já em E_4*,* x_2 *é a variável livre. O conjunto de todas as soluções é:*

$$\mathbb{C}_4 = \left\{ x = \left[\, x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \, \right] \quad : \quad x_1 = 2 - x_2, \;\; x_3 = 3 - x_2 \right\}$$

Para E_5*,* x_2 *também é a variável livre e portanto:*

$$\mathbb{C}_5 = \left\{ x = \left[\, x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \, \right] \quad : \quad x_1 = 2 - x_1, \;\; x_3 = 3 - x_2 \right\}$$

Mas $E_1, \;\; E_2, \;\; E_3, \;\; E_4, \;\; E_5$ *são equivalentes, pois são soluções do mesmo sistema* E_1 *original.*

Considere, então, E_3.

Seja:

$$I = \{1,\ 2\}$$

o conjunto de índices associados às variáveis não-livres.

Seja:

$$J = \{3\}$$

o conjunto de índices associados às variáveis livres.

Assim:

$$A = \left[\ A_I\ \vdots\ A_J\ \right]$$

$$x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix}$$

$$I \oplus J = \{1,\ 2,\ 3\}$$

ou seja:

$$A_I x^I + A_J x^J = b$$

$$\Longrightarrow \quad x^I = A_I^{-1}\left[b - A_J x^J\right]$$

$x^I \Longrightarrow$ *Vetor de variáveis dependentes*

$x^J \Longrightarrow$ *Vetor de variáveis independentes ou livres*

- Note que:

  a) Existem C_n^m maneiras de escolher o conjunto I;

  b) Para cada conjunto I, existem $(n-m)$ variáveis independentes que podem, cada uma, serem arbitradas em qualquer valor (de $-\infty$ a $+\infty$). Existem, portanto, $n - m$ graus de liberdade;

  c) A_I deve ser inversível , ou seja, seus vetores-coluna devem formar uma base.

  A_I : matriz-base;

  I : conjunto de variáveis básicas.

  d) Assim, E_3, E_4 e E_5 são soluções de E_1 com relação aos conjuntos-base $I_3 = \{1, 2\}$, $I_4 = \{1, 3\}$ e $I_5 = \{3, 1\}$, respectivamente.

- Generalizando:

Solucionar $Ax = b$ corresponde a:

a) Verificar consistência;

$$\text{Se} \;\; \rho\left([A \;\; b]\right) > \rho(A) \longrightarrow \text{Inconsistência.}$$

b) Verificar redundância;

$$\text{Se} \;\; \rho\left([A \;\; b]\right) = \rho(A) = k < m \longrightarrow \text{Redundância.}$$

$$\Downarrow$$

Particionar $Ax = b$ de modo que

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \in \Re^{k \times n} \;,\;\; A_2 \in \Re^{(m-k) \times n}$$

$$b_1 \in \Re^{k} \;, \qquad b_2 \in \Re^{m-k}$$

$$\rho\left([A_1 \;\; b_1]\right) = \rho(A) = k$$

$$\Longrightarrow \;\; \text{eliminar} \;\; A_2 x = b_2$$

c) Solucionar

c1) Se $\rho\left([A \;\; b]\right) = \rho(A) = k < n$

$$\longrightarrow \text{Infinitas soluções}$$

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad [A_I \quad : \quad A_J] \begin{bmatrix} x^I \\ x^J \end{bmatrix} = b$$

$A_I \in \Re^{k \times k}$ $\qquad\qquad$ $A_J \in \Re^{k \times (n-k)}$

$A_I =$ matriz base $\qquad$ $A_J =$ matriz não-básica

$x^I =$ variáveis básicas $x^J =$ variáveis não-básicas

$$A_I x^I + A_J x^J = b$$

$$\Rightarrow \quad x^I = A_I^{-1} b - A_I^{-1} A_J x^J$$

c2) Se $\rho\left([A \;\; b]\right) = \rho(A) = k = n$

$$\Longrightarrow \quad \text{Solução única} \quad \Rightarrow A_J = \mathbf{0}$$

$$x = x_I = A_I^{-1} b$$

$\Longrightarrow A_I$ deve ser inversível;

- Solucionar, portanto, corresponde a reduzir

$$Ax = b$$

à forma:

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} A_I^{-1} b_I \\ 0 \end{bmatrix}$$

através de operações elementares, ou a pivotear sobre a matriz aumentada:

$$\left[\, A_I \; \vdots \; A_J \; \vdots \; \mathbf{I} \; \vdots \; b \,\right]$$

$$\Big\downarrow$$

$$\left[\, I \; \vdots \; A_I^{-1} A_J \; \vdots \; A_I^{-1} \vdots \; A_I^{-1} b \,\right]$$

Exemplo 17 *Solucione o seguinte sistema:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 10 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 8 & -1 & 2 \\ 20 & 26 & 2 & 40 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Considerando

$$\begin{aligned} I &= \{6, 1, 3\} \\ J &= \{2, 4, 5\} \end{aligned}$$

determine também $(A_I)^{-1}$.

a) $M = [A_I \quad A_J \quad I \quad b]$

$$M = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c} \boxed{2} & 0 & 4 & 2 & 10 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 8 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 20 & 2 & 26 & 40 & 1 & 0 & 0 & 1 & 34 \end{array}\right]$$

Pivoteando sobre o elemento indicado:

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & -6 & 2 & -2 & -3 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 20 & -10 & 20 & 10 & -5 & -3 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Equivale a pré-multiplicar M por

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_1 = P_1 M$$

b) *Pivotear sobre o elemento indicado:*

$$M_2 = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & -3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{50} & 0 & 30 & 25 & 7 & -10 & 1 & 50 \end{array}\right]$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_2 = P_2 M_1 = P_2 P_1 M$$

c) *Novamente:*

$$M_3 = \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 19/5 & 0 & 11/50 & 2/5 & -1/25 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4/5 & 0 & -2/25 & -1/10 & 3/50 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/5 & 1/2 & 7/50 & -1/5 & 1/50 & 1 \end{array}\right]$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/50 \\ 0 & 1 & 3/50 \\ 0 & 0 & 1/50 \end{bmatrix} \Rightarrow M_3 = P_3 M_2 = P_3 P_2 P_1 M$$

d) *Portanto:*

$$M_3 = \left[\, I_I \;\vdots\; \hat{A}_J \;\vdots\; (A_I)^{-1} \;\vdots\; \hat{b} \,\right]$$

11 Conjuntos Convexos

Definição 8 *Um conjunto* $\mathbb{C}$ *é chamado convexo se, para quaisquer dois pontos* x_1 *e* $x_2 \in \mathbb{C}$*, o segmento de linha unindo-os também pertence ao conjunto.*

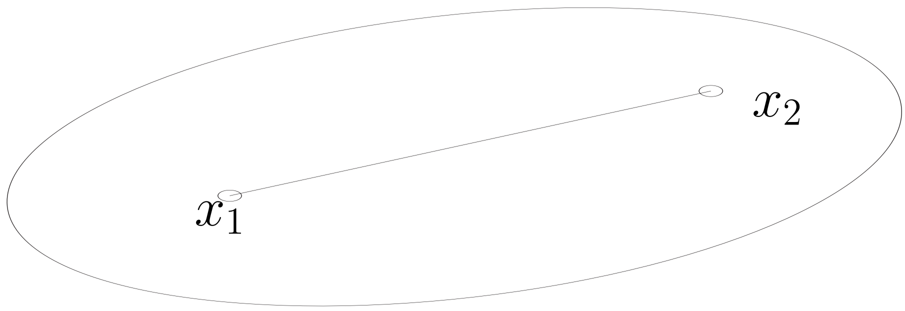


Figura 1: Conjunto Convexo

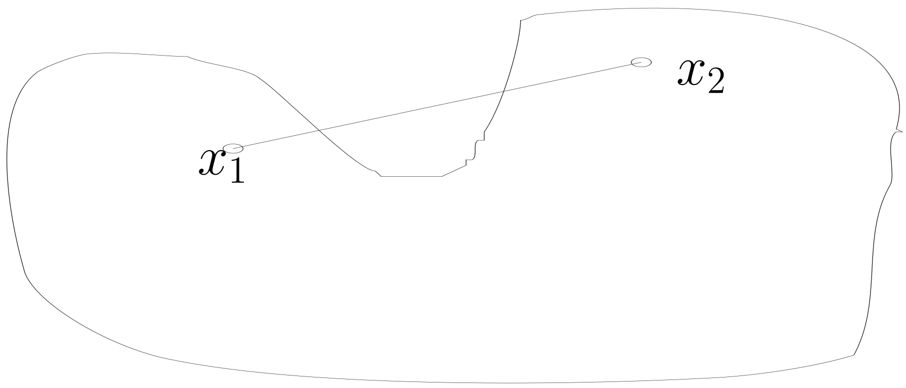


Figura 2: Conjunto Não-Convexo

Portanto, se $\mathbb{C}$ é convexo, $\forall\ x_1 \in \mathbb{C}$, $\forall\ x_2 \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in [0, 1]$:

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)\, x_2 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{C}$$

De forma geral, um conjunto convexo é definido como:

$$\mathbb{C} = \left\{ x \ : \ x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \ , \ \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \ \ \alpha_i \geq 0 \right\}$$

11.1 Propriedades

a) Se $\mathbb{C}$ é um conjunto convexo e β um número real, então:

$$\beta\mathbb{C} = \{x \ \ : \ \ x = \beta y \ , \ \ y \in \mathbb{C}\}$$

é convexo.

b) Se $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ são conjuntos convexos, então:

$$\mathbb{S} = C + D = \{x \ \ : \ \ x = y + z \ , \ \ y \in \mathbb{C} \ , \ \ z \in \mathbb{D}\}$$

é convexo.

c) A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

$$\mathbb{S} = C \ \ \cap \ \ D = \{x \ \ : \ \ x \in \mathbb{C} \ \text{ e } \ x \in \mathbb{D}\}$$

é convexo.

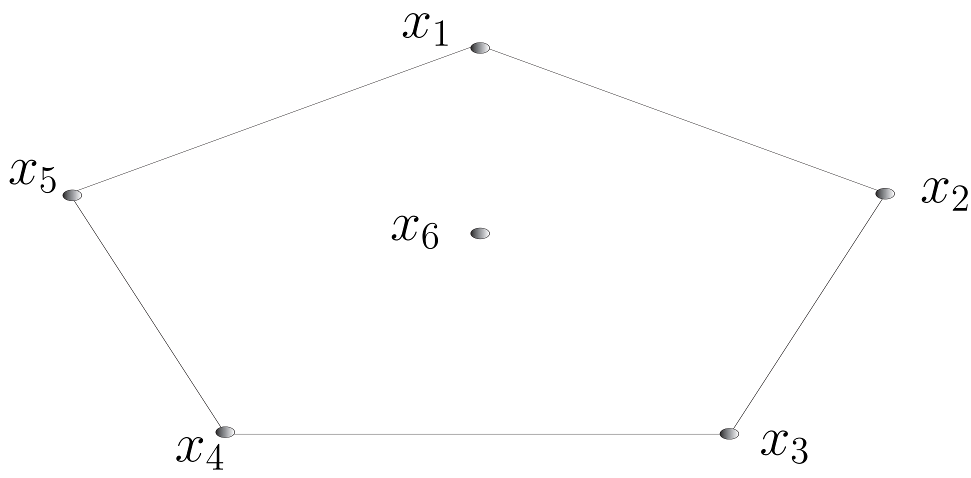
11.2 Ponto Extremo

Definição 9 *Um ponto x em um conjunto convexo $\mathbb{X}$ é chamado um ponto extremo de $\mathbb{X}$ se não puder ser representado como uma combinação convexa estrita de pontos distintos de $\mathbb{X}$.*

Ou seja, para $\forall\ x_1,\ x_2 \in X$, se

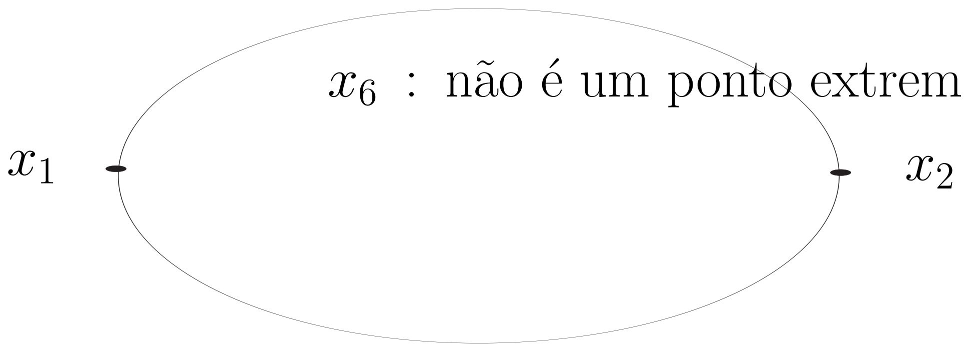
$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \quad \text{para} \quad \lambda \in (0, 1)$$

$\Longrightarrow$ combinação convexa estrita
$\Longrightarrow x = x_1 = x_2 \Longrightarrow x_1$ e x_2 pontos extremos de X.



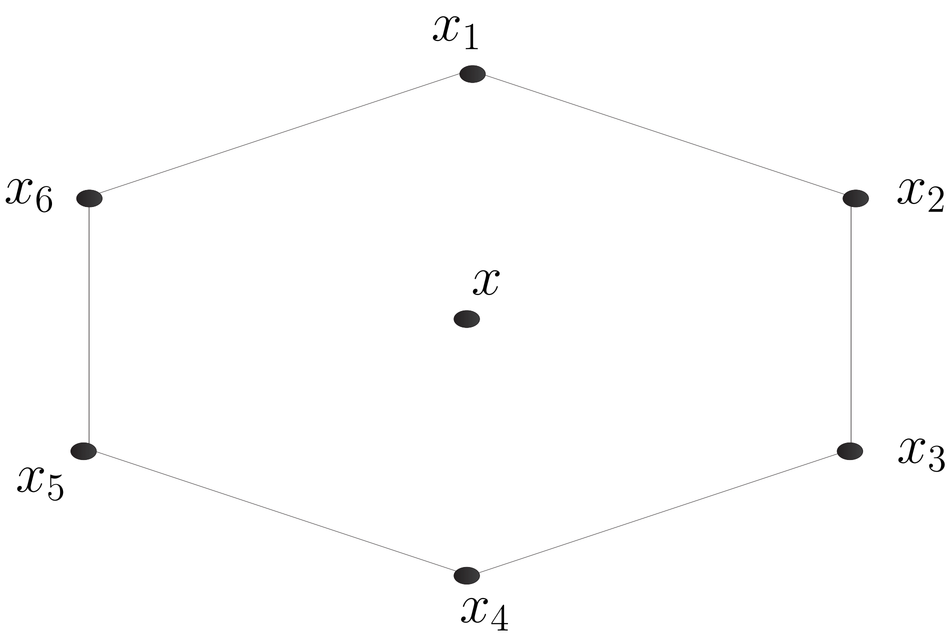
$x_1, \ldots, x_5$: pontos extremos

x_6 : não é um ponto extremo



$x_1,\ x_2$: não são pontos extremos

Qualquer ponto $x \in \mathbb{X}$ pode ser representado como uma combinação convexa entre os pontos extremos (ou vértices) do conjunto $\mathbb{X}$.



$$x = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \, x_i$$

sendo

$$\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geq 0 \ , \quad i = 1, \ldots, 6$$

11.3 Raio

Definição 10 *Um raio é uma coleção de pontos na forma:*

$$\{x_o + \lambda d \quad : \quad \lambda \geq 0\}$$

sendo

x_o *: vértice do raio;*

d*: direção do raio.*

11.4 Direção de um conjunto convexo

Definição 11 *Um vetor não-nulo* d *é denominado uma direção de um conjunto convexo* $\mathbb{C}$ *se, para cada ponto* $x_o \in \mathbb{C}$*, o raio* $\{x_o + \lambda d \quad : \quad \lambda \geq 0\}$ *também pertence ao conjunto.*

Exemplo 18 *Seja o conjunto poliedral não-vazio:*

$$X = \{x \ : \ Ax \leq b, \ x \geq 0\}$$

Então, o vetor $d \neq 0$ *é uma direção de* X *se e somente se:*

$$\begin{aligned} A(x + \lambda d) &\leq b & (1) \\ x + \lambda d &\geq 0 & (2) \end{aligned}$$

para $\lambda \neq 0$ *e* $\forall \ x \in X$*. Assim, note que (1) pode ser escrita como:*

$$Ax + \lambda Ad \leq b$$

Pela definição de X*,* $\forall \ x \in X$*, tem-se que* $Ax \leq b$*. Portanto, (1) é verdadeira se e somente se* $Ad \leq 0$*, para* $\lambda \geq 0$ *tendo valor arbitrariamente alto. Ao mesmo tempo, e do mesmo modo, (2) é verdadeira se e somente se* $d \geq 0$*, para* $\lambda \geq 0$ *tendo valor arbitrariamente alto. Então, d é uma direção (de minimização) de* X *se:*

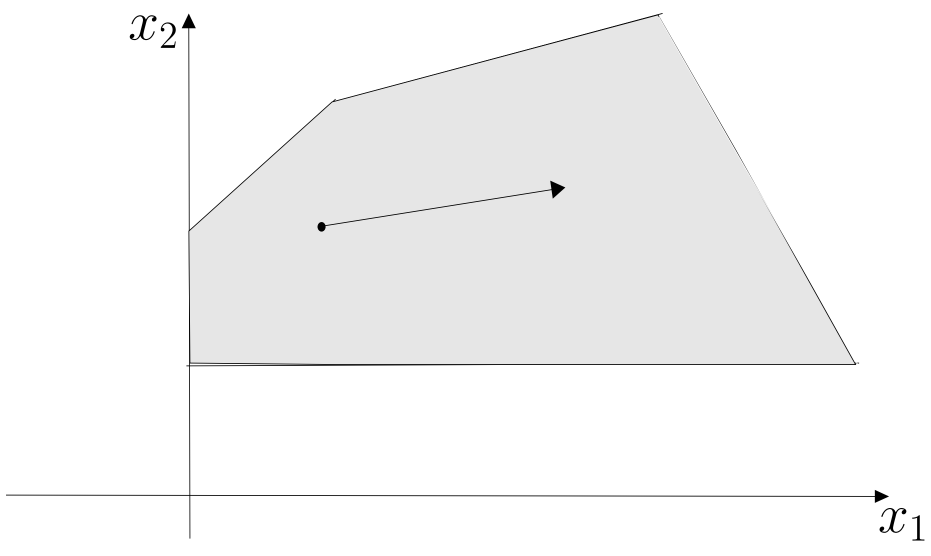
$$\begin{aligned} d &\geq 0 \\ d &\neq 0 \\ Ad &\leq 0 \end{aligned}$$

Exemplo 19 *O conjunto das direções de minimização* $D = \{d \ : \ Ad \leq 0, \ d \geq 0, \ d \neq 0\}$ *é um conjunto convexo.*

11.5 Direção extrema de um conjunto convexo

Definição 12 *Duas direções* d_1 *e* d_2 *são ditas distintas ou não-equivalentes se* d_1 *não pode ser representada como um múltiplo positivo de* d_2*.*

Definição 13 *Uma direção extrema de um conjunto convexo é uma direção que não pode ser representada como uma combinação positiva de duas direções distintas do conjunto.*



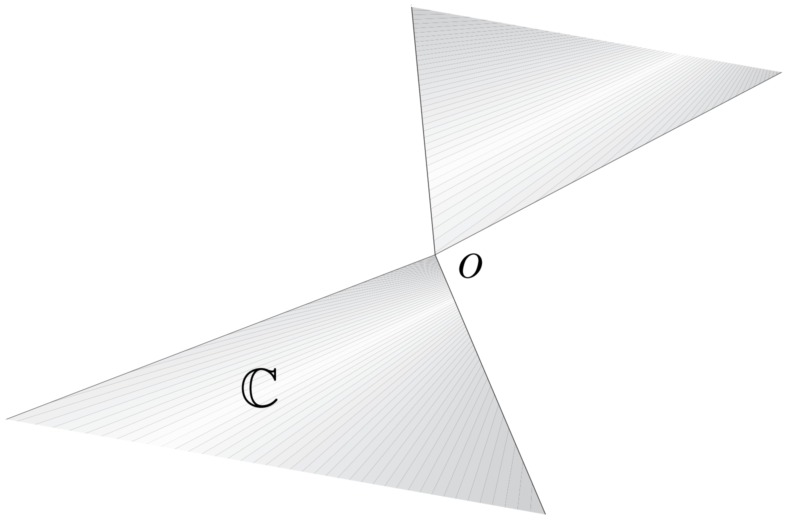
Direções de um conjunto convexo

11.6 Cone Convexo

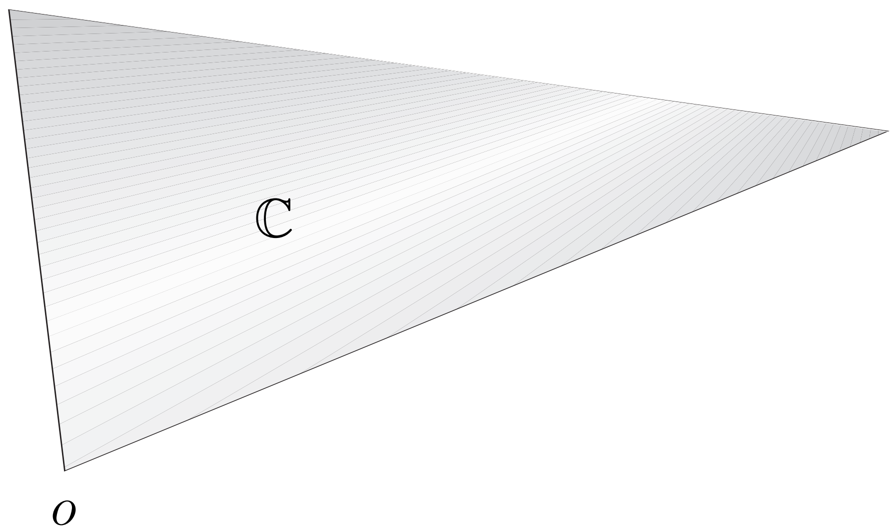
Definição 14 *Um conjunto $\mathbb{C}$ é um cone se:*

$$x \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \alpha x \in \mathbb{C}$$

Caso o conjunto $\mathbb{C}$ seja convexo $\Rightarrow$ Cone convexo.



Conjunto $\mathbb{C}$ não-convexo $\Rightarrow$ Cone Não-Convexo



Conjunto $\mathbb{C}$ convexo $\Rightarrow$ Cone Convexo

11.7 Hiperplano

Um hiperplano é um conjunto da forma

$$H = \{ \ x \quad : \quad p'x = \alpha \ \}$$

para $p \neq 0$ e α um escalar.

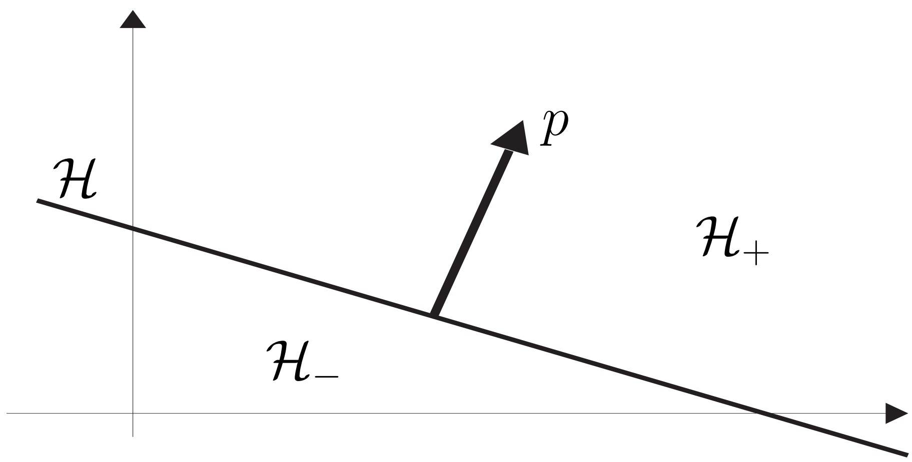
p: vetor normal ou vetor gradiente ao hiperplano.

$\longrightarrow$ Generaliza o conceito de linha no $\Re^2$ e de plano no $\Re^3$.

$\longrightarrow$ Divide o espaço em duas regiões, chamadas de semi-espaços:

$$H_+ = \{ \ x \quad : \quad \rho' x \geq \alpha \ \}$$

$$H_- = \{ \ x \quad : \quad \rho' x \leq \alpha \ \}$$



$\longrightarrow$ Semi-espaços são conjuntos convexos.

11.8 Poliedro Convexo

- Intersecção de um número finito de semi-espaços.

- Politopo: conjunto poliedral limitado.

Exemplo 20 *Poliedro Convexo*

a) *O conjunto*

$$\mathbb{C} = \{x \quad : \quad Ax \leq b\}$$

é um poliedro convexo, pois cada semi-espaço pode ser escrito na forma:

$$A^i x \leq b_i \ , \quad i = 1, \ldots, m$$

Da mesma forma:

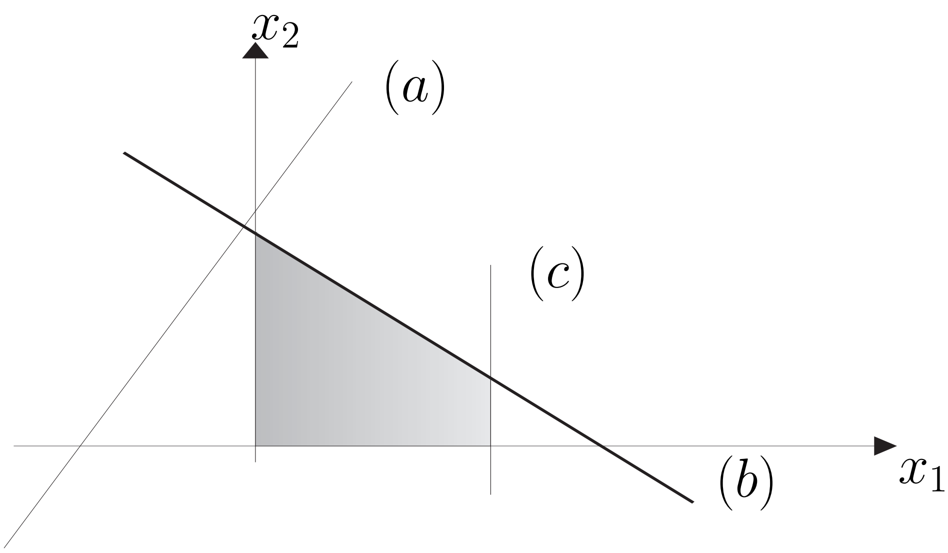
$$\mathbb{C} = \{x \quad : \quad Ax \leq b \ , \quad x \geq 0\}$$

define um poliedro convexo.

b) *Mostre, no plano $x_1 \times x_2$, o conjunto das soluções do sistema de inequações:*

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix}$$

$$x \geq 0$$



$\longrightarrow$ O conjunto das soluções factíveis do problema linear:

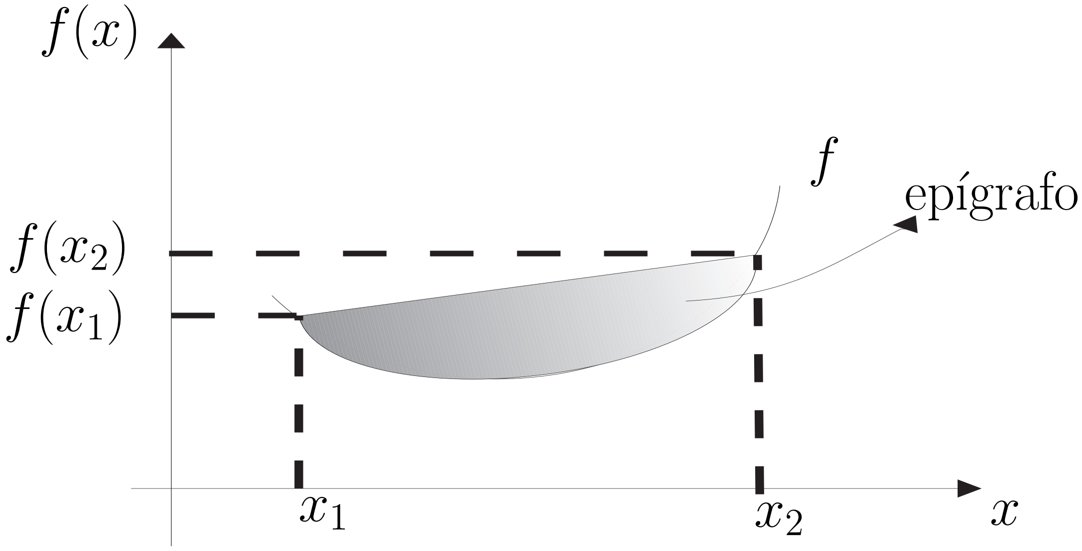
$$\begin{array}{lrcr} \min & z & = & c'x \\ \text{suj. a} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

é um poliedro convexo.

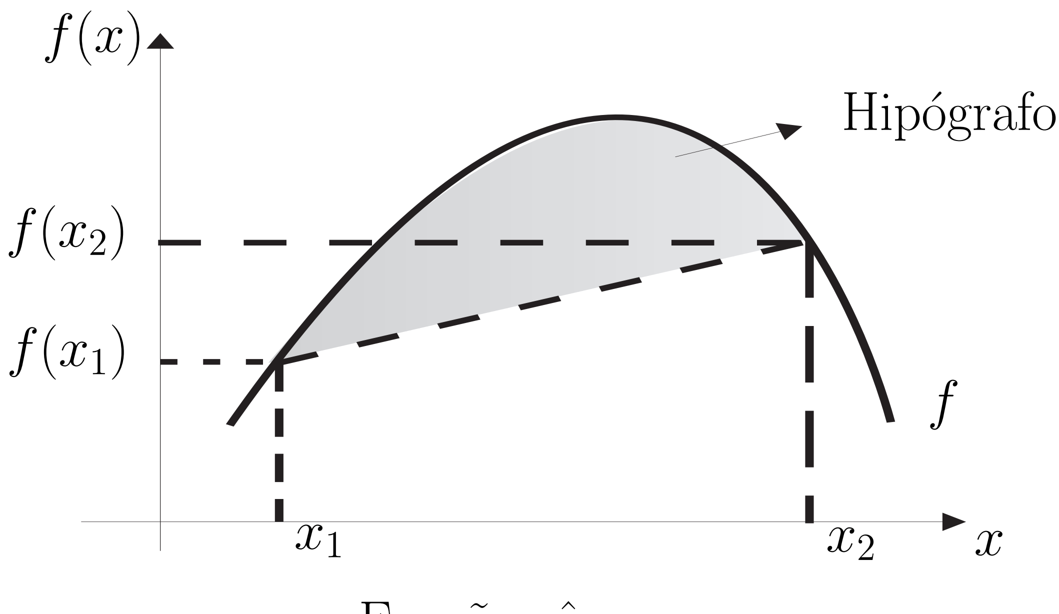
12 Função Convexa

Uma função $f(\cdot)$ definida em um conjunto convexo $\mathbb{C}$ é convexa se, para $\lambda \in [0,1]$, $\forall\ x_1 \in \mathbb{C}$ e $\forall\ x_2 \in \mathbb{C}$

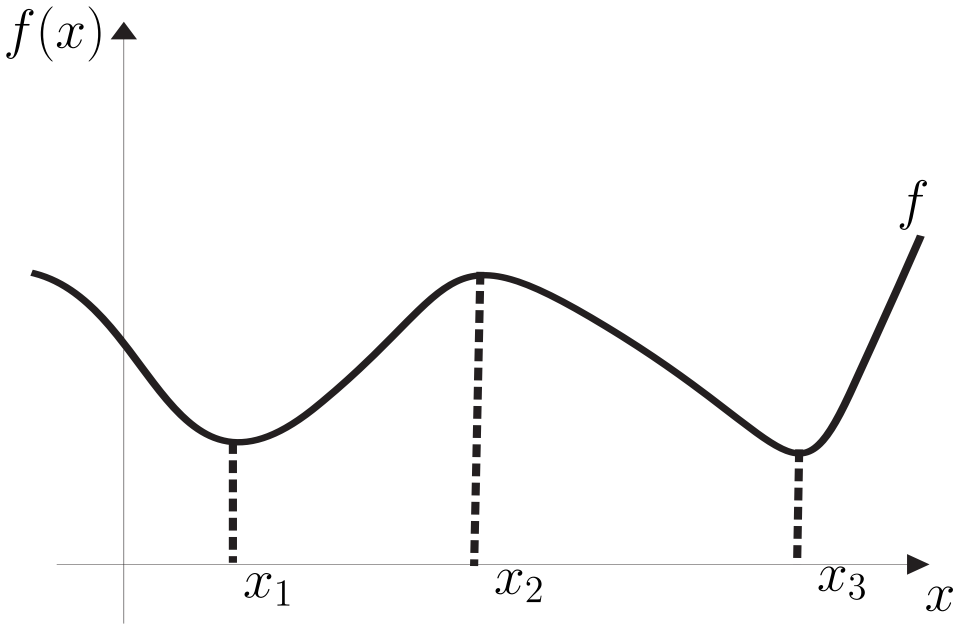
$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



Função convexa



Função côncava



Nem convexa, nem côncava

$$\begin{cases} x_1,\ x_2 : \text{ótimos locais} \\ \\ x_3 : \text{ótimo global} \end{cases}$$

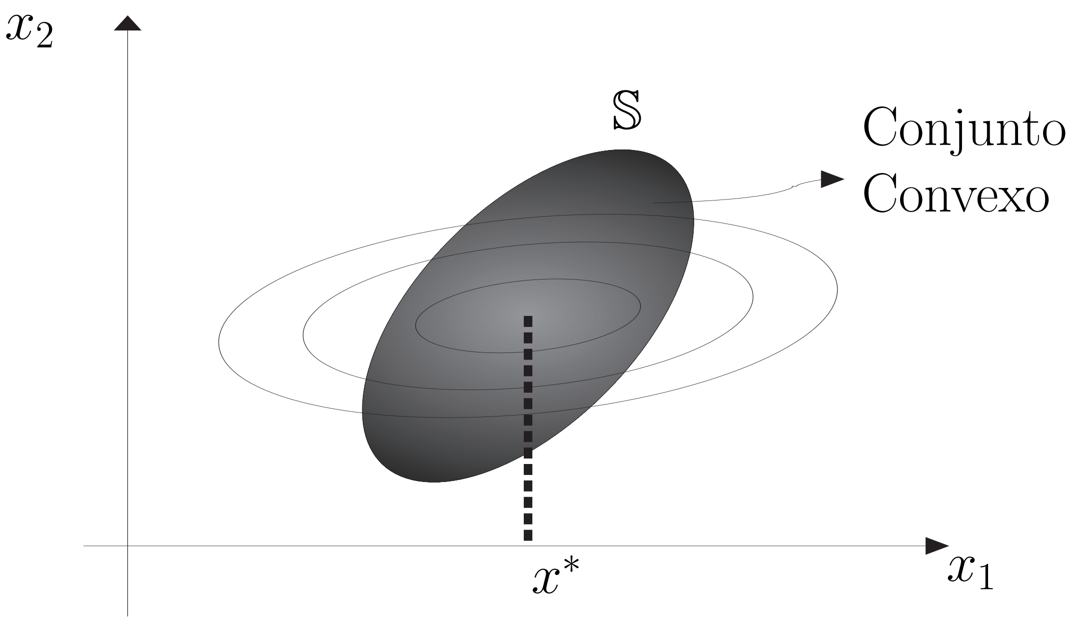
$\longrightarrow$ Uma função é convexa se seu epígrafo é convexo.

$\longrightarrow$ Uma função f é côncava se e somente se $(-f)$ é convexa.

12.1 Problema Convexo

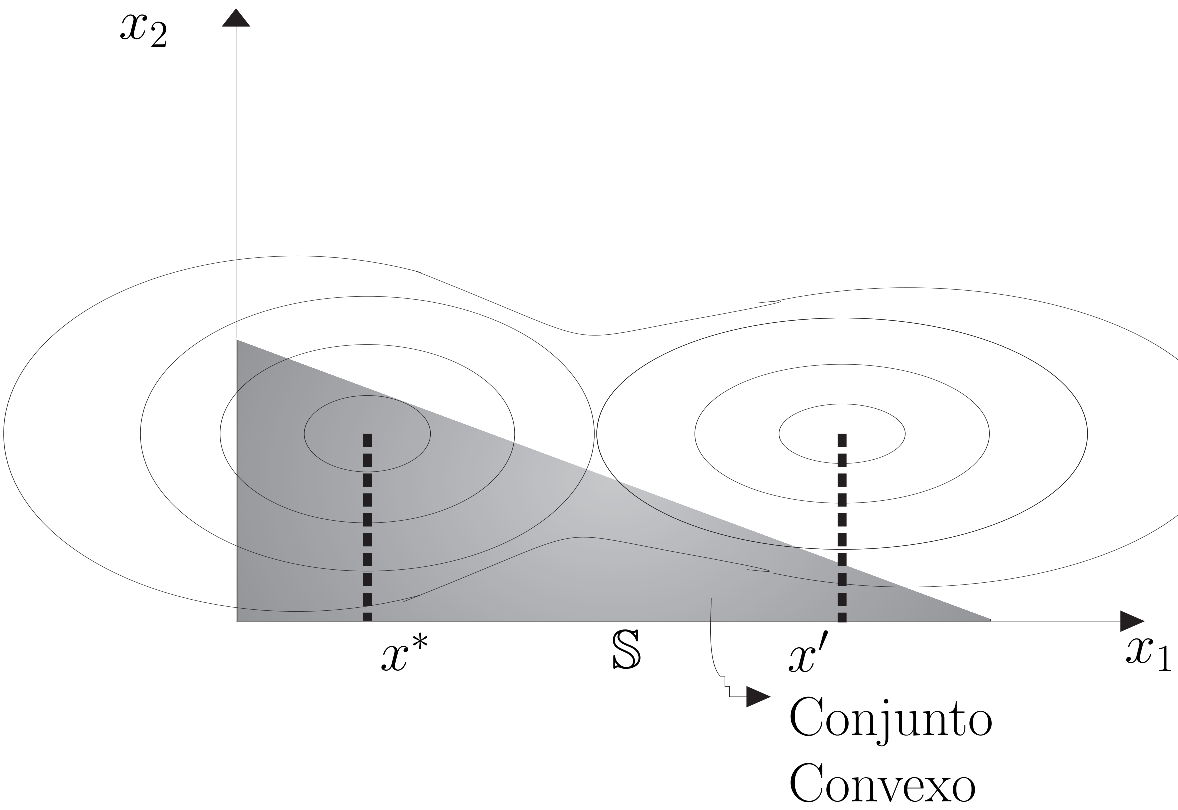
$\longrightarrow$ O problema matemático "determine o mínimo de uma função convexa em um conjunto convexo" é denominado problema convexo.

$\longrightarrow$ Em um problema convexo, um ótimo local é um ótimo global.



$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{S} \;\; \text{conjunto convexo} \\ \\ f(x_1,\; x_2) \;\; \text{convexa} \\ \\ x^* \;\; \text{ótimo global} \end{cases}$$

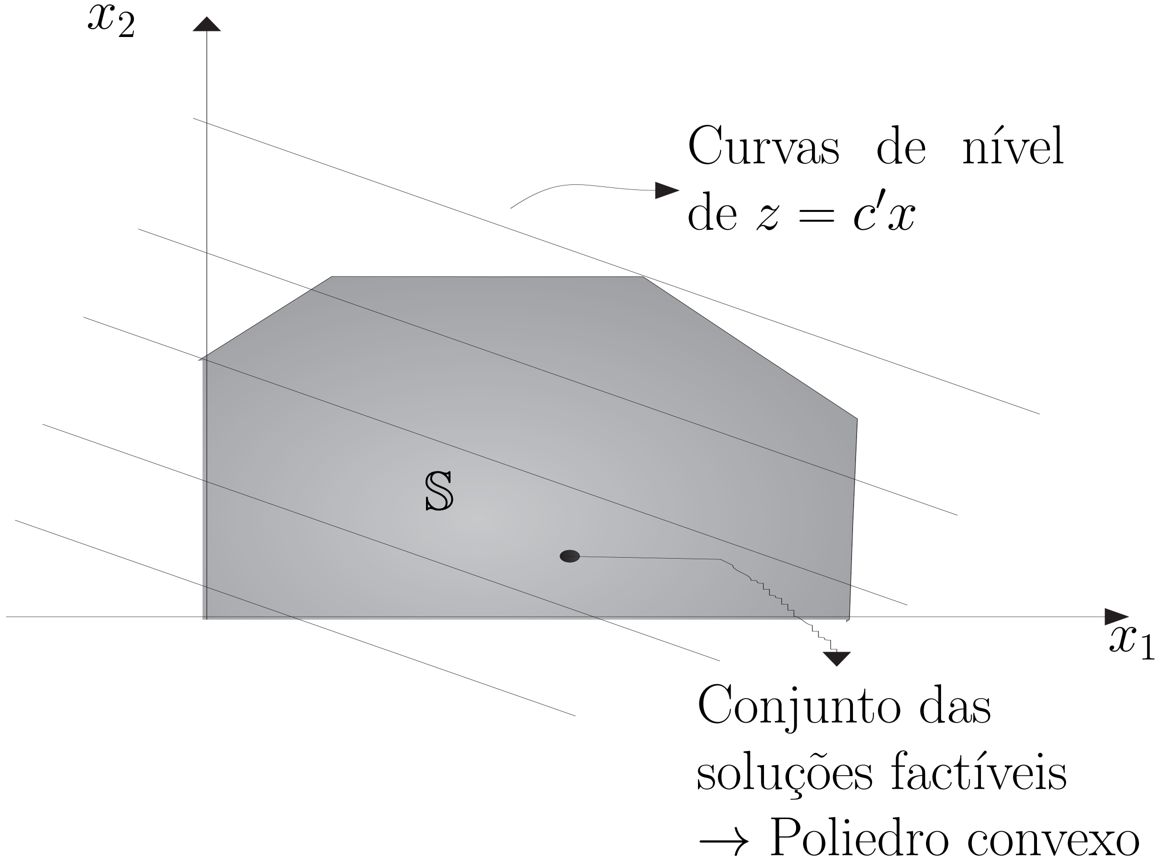


$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(x_1,\ x_2)\ :\ \text{não convexa e nem côncava} \\[2ex] x'\ :\ \text{ótimo focal} \\[2ex] x^*\ :\ \text{ótimo global} \end{cases}$$

12.2 Otimização Linear e Convexidade

⟶ Um problema de otimização linear é um problema convexo.



⟶ Seja $\mathbb{X}$ um conjunto convexo e $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{X}$ um segmento de linha. O conjunto $\mathbb{S}$ será chamado uma "aresta"se, para todo ponto $s \in \mathbb{S}$ tal que

$$s = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \ , \quad \lambda \in (0, 1)$$

então $x_1 \in \mathbb{S}$ e $x_2 \in \mathbb{S}$, sendo $x_1 \in \mathbb{X}$ e $x_2 \in \mathbb{X}$.

⟶ Dois vértices (ou pontos extremos) de um conjunto convexo poliedral são denominados "adjacentes"se existir uma "aresta"que os une.