

前綴和



甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	5	7	10	2	8	1	6		

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	5	7	10	2	8	1	6		

```
int accu = 0;
for (int i = 0; i <= 3; i++) {
    accu += i;
}
cout << accu;
```

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	5	7	10	2	8	1	6		

- 如果我同時要輸出 $arr[2]$ 的值呢？
- 資料量增長到 $n = 100, 10000, 10^9$ 時呢？
- 有辦法降低時間複雜度嗎？

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix									

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix	2								

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix	2	6							

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix	2	6	7						

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix	2	6	7	14					

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix	2	6	7	14	17				

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix	2	6	7	14	17	17			

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix	2	6	7	14	17	17	21		

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 用以高效率解決與連續序列相關的問題
- 一個數列 $arr = \{5, 7, 10, 2, 8, 1, 6\}$ ，
請問 $arr[0]$ 到 $arr[3]$ 之和為？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr	2	4	1	7	3	0	4	2	
prefix	2	6	7	14	17	17	21	23	

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 一組數列 S 有 n 個元素：

S_0, S_1, \dots, S_{n-1} ，其中 $S_0 = A_0$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	4	1	7	3	0	4	2	
S	2	6	7	14	17	17	21	23	

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 一組數列 S 有 n 個元素：

S_0, S_1, \dots, S_{n-1} ，其中 $S_0 = A_0$

- 元素是陣列 A 與數列 S 前項之和，

例如： $S_1 = A_1 + S_0$ 或是 $S_i = A_i + S_{i-1}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	4	1	7	3	0	4	2	
S	2	6	7	14	17	17	21	23	

甚麼是前綴和？

可理解為一種數學數列，概念為：

「 n 項之和； $\sum_{i=0}^n(i)$ 」

- 一組數列 S 有 n 個元素：

S_0, S_1, \dots, S_{n-1} ，其中 $S_0 = A_0$

- 元素是陣列 A 與數列 S 前項之和，

例如： $S_1 = A_1 + S_0$ 或是 $S_i = A_i + S_{i-1}$

- 利用前綴和，將存取複雜度降成 $O(1)$
- 前綴和能同時求得單點之值以及連續值

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	4	1	7	3	0	4	2	
S	2	6	7	14	17	17	21	23	

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

輸 入

```
8 4
3 2 4 5 1 1 5 3
2 4
5 6
1 8
3 3
```

輸 出

```
11
2
24
4
```

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

- 第一行輸入有兩個整數 n 和 q 為元素數量和查詢數量
- 第二行有 n 個整數 x_1, x_2, \dots, x_n 為陣列元素。最後有 q 行查詢
- 每行查詢中，有兩個整數 a 和 b 求解範圍 $[a, b]$ 的總和

輸 入

```
8 4
3 2 4 5 1 1 5 3
2 4
5 6
1 8
3 3
```

輸 出

```
11
2
24
4
```

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

- 第定義兩個整數 n 和 q 為元素數量和查詢數量
- 配置陣列 s 和 arr 的空間
- 每設 $i = 1$ 遍歷到 n 次，輸入到 $s[i]$ 同時運算序列 S_n 之值

輸 入

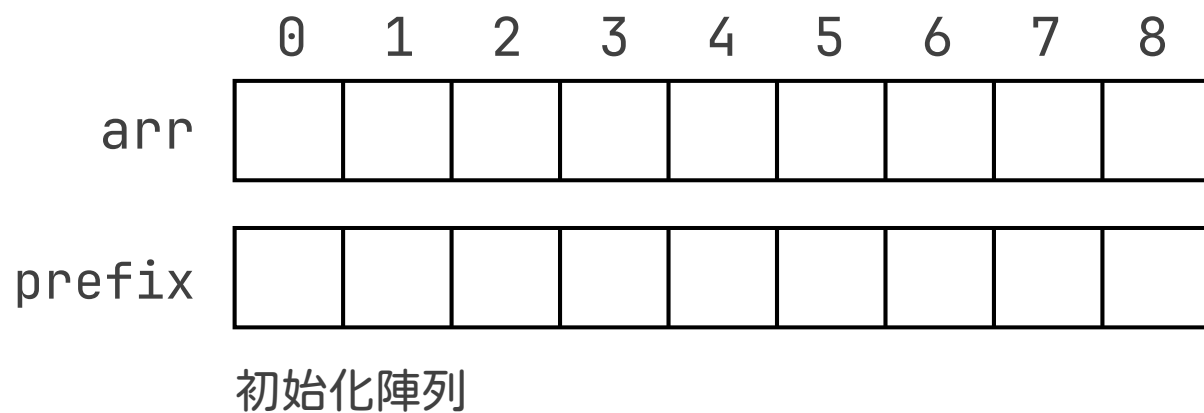
```
8 4
3 2 4 5 1 1 5 3
2 4
5 6
1 8
3 3
```

輸 出

```
11
2
24
4
```

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？



輸入

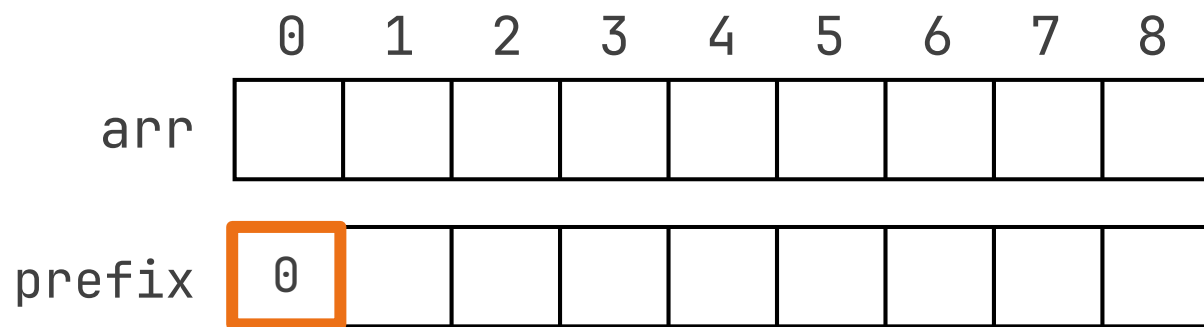
8 4
3 2 4 5 1 1 5 3
2 4
5 6
1 8
3 3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？



設定初始條件， $\text{prefix}[0] = 1$

輸入

8 4
3 2 4 5 1 1 5 3
2 4
5 6
1 8
3 3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，

每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3							
prefix	0								

輸入陣列從 1 開始，開始輸入陣列

輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3							
prefix	0	3							

輸入陣列從 1 開始，開始輸入陣列
同時計算前綴和： $\text{prefix}[i] = \text{prefix}[i-1] + \text{arr}[i]$

輸入

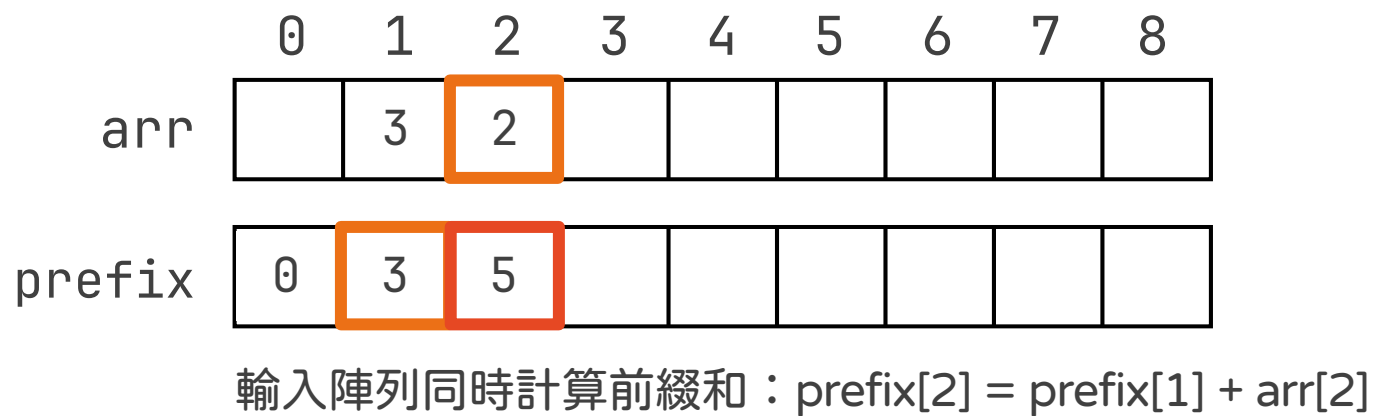
8	4
3	2
4	5
1	1
5	3
3	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？



輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3
2	4
5	6
1	8
3	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4					
prefix	0	3	5	9					

輸入陣列同時計算前綴和： $\text{prefix}[3] = \text{prefix}[2] + \text{arr}[3]$

輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3
3	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，

每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5				
prefix	0	3	5	9	14				

輸入陣列同時計算前綴和： $\text{prefix}[4] = \text{prefix}[3] + \text{arr}[4]$

輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，

每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1			
prefix	0	3	5	9	14	15			

輸入陣列同時計算前綴和： $\text{prefix}[5] = \text{prefix}[4] + \text{arr}[5]$

輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，

每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1		
prefix	0	3	5	9	14	15	16		

輸入陣列同時計算前綴和： $\text{prefix}[6] = \text{prefix}[5] + \text{arr}[6]$

輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，

每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	

輸入陣列同時計算前綴和： $\text{prefix}[7] = \text{prefix}[6] + \text{arr}[7]$

輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，

每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	3
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	24

輸入陣列同時計算前綴和： $\text{prefix}[8] = \text{prefix}[7] + \text{arr}[8]$

輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，

每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	3
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	24

計算完成程式結束，開始區間搜尋

輸入

8 4
3 2 4 5 1 1 5 3
2 4
5 6
1 8
3 3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	3
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	24

$[2,4]$ 的總和就是 $\text{prefix}[4] - \text{prefix}[2-1] = 14 - 3 = 11$

輸入

8	4						
3	2	4	5	1	1	5	3
2	4						
5	6						
1	8						
3	3						

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	3
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	24

[5,6] 的總和就是 $\text{prefix}[6] - \text{prefix}[5-1] = 16 - 14 = 2$

輸入

8	4						
3	2	4	5	1	1	5	3
2	4						
5	6						
1	8						
3	3						

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，

每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	3
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	24

$[1,8]$ 的總和就是 $\text{prefix}[8] - \text{prefix}[1-1] = 24 - 0 = 24$

輸入

8	4						
3	2	4	5	1	1	5	3
2	4						
5	6						
1	8						
3	3						

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	3
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	24

$[3,3]$ 的總和就是 $\text{prefix}[3] - \text{prefix}[3-1] = 9 - 5 = 4$

輸入

8	4
3	2
4	5
1	1
5	3
2	4
5	6
1	8
3	3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	3
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	24

解題完成

輸入

8 4
3 2 4 5 1 1 5 3
2 4
5 6
1 8
3 3

輸出

11
2
24
4

Static Range Sum Queries (CSES)

給定一個包含 n 個整數的陣列，您的任務是處理 q 個查詢，
每個查詢的形式為：範圍 $[a, b]$ 內的數值總和是多少？

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
arr		3	2	4	5	1	1	5	3
prefix	0	3	5	9	14	15	16	21	24

可以注意一點，這題用不到單點值所以能把 arr 省略

輸入

```
8 4
3 2 4 5 1 1 5 3
2 4
5 6
1 8
3 3
```

輸出

```
11
2
24
4
```

“

在演算法中使用前綴和可高效計算區間查詢，降低累積運算的時間複雜度，並作為多種進階資料結構與演算法的基礎工具。

問題：

1. 為甚麼計算區間總和的時候是 $\text{prefix}[i] - \text{prefix}[i-1]$ 呢？
可以一段話摘要這個行為嗎？
2. 整體而言，使用與不使用前綴和的複雜度（Big-O）為多少？

謝謝聆聽



Static Range Sum Queries 原始碼