Activité 05 - Polynômes

Equipe Pédagogique LU1IN0*1

Consignes : Cette activité se compose d'une première partie guidée, suivie de suggestions. Il est conseillé de traiter en entier la partie guidée avant de choisir une ou plusieurs suggestions à explorer.

L'objectif de cette activité est l'étude de la représentation des polynômes dans le langage du cours, et leur manipulation.

Rappel. Un polynôme en l'indéterminée X sur l'anneau unitaire $\mathcal{A}$ est une expression de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$$

où n est un entier naturel, et où les a_i sont des éléments de $\mathcal{A}$. On dit que a_i est *le coefficient de degré* i du polynôme (par extension, le coefficient de degré i pour $i > n$ est 0).

1 Partie Guidée : Polynômes

Dans un premier temps, on décide de représenter un polynôme en l'indéterminée X sur l'anneau unitaire $\mathbb{Z}$ par **la suite** $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ **de ses coefficients, rangés dans l'ordre de degré croissant**. Ainsi un polynôme sera, en Python, une liste d'entiers.

On définit un alias de type et des exemples de polynômes :

```
Polyn = List[int]

ex1 : Polyn = [3, 0, 2]
ex2 : Polyn = [1, -1, 1, -1, 0]
ex3 : Polyn = [27]
ex4 : Polyn = []
```

Ainsi les constantes `ex1`, `ex2`, `ex3`, `ex4` représentent, respectivement, les polynômes $2.X^2 + 3$, $-X^3 + X^2 - X + 1$, 27 et 0, le polynôme nul.

Question 1. Le *degré*, d'un polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$ est le plus grand entier $i \in [\![0; n]\!]$ tel que a_i est non-nul. Ecrire une fonction `degre`, qui renvoie le degré d'un polynôme.

```
assert degre(ex1) == 2
assert degre(ex2) == 3
assert degre(ex3) == 0
assert degre(ex4) == 0
assert degre([0,0,0,0,0]) == 0
```

Question 2. La somme de deux polynômes se fait terme-à-terme. Ecrire une fonction `somme` qui renvoie la somme de deux polynômes passés en argument.

```
assert somme(ex1, ex1) == [6, 0, 4]
assert somme(ex1, ex4) == ex1
assert somme(ex1, ex2) == [4, -1, 3, -1, 0]
```

Question 3. L'égalité entre deux polynômes ne peut pas être testée directement selon notre représentation. En effet, les listes `[3, 0, 2]` et `[3, 0, 2, 0]` sont différentes, mais représentent le même polynôme. La *forme normale* d'un polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$ est $\sum_{i=0}^{d} a_i.X^i$ où d est le degré du polynôme.

Ecrire une fonction `normalise` qui prend en entrée un polynôme et renvoie sa forme normale.

```
assert normalise(ex1) == ex1
assert normalise(ex2) == [1, -1, 1, -1]
assert normalise([0,0,0,0,0]) == []
assert normalise([]) == []
```

Ainsi, pour tester l'égalité de deux polynômes, on peut maintenant tester l'égalité de leur forme normale.

Question 4. Le produit de deux polynômes $\sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$ et $\sum_{j=0}^{m} b_j.X^j$ est obtenu de manière standard, en développant le terme $(\sum_{i=0}^{n} a_i.X^i).(\sum_{j=0}^{m} b_j.X^j)$

Ecrire une fonction `produit` qui prend en entrée deux polynômes et renvoie un polynôme correspondant à leur produit.

```
assert normalise(produit(ex1, ex4)) == []
assert normalise(produit(ex1, ex1)) == [9, 0, 12, 0, 4]
assert normalise(produit(ex1, ex2)) == [3, -3, 5, -5, 2, -2]
assert normalise(produit(ex1, ex3)) == [27 * 3, 0, 27 * 2]
assert normalise(produit([1, 1], [1, 0, 1])) == [1, 1, 1, 1]
```

2 Suggestion : Autres opérations

On pourra implémenter d'autres opérations sur les polynômes, par exemple :

- la multiplication d'un polynôme par un entier,
- la puissance entière d'un polynôme,
- la dérivation et l'intégration formelle d'un polynôme,
- la division euclidienne de deux polynômes,
- la recherche des racines d'un polynômes,
- la réalisation d'un "tableau d'étude de fonction" (cf. partie suivante),
- ...

```
assert normalise(derivee(ex1)) == [0, 4]
assert normalise(derivee(ex4)) == []
assert normalise(derivee(ex2)) == [-1, 2, -3]
```

3 Suggestion : Fonction associée

Au polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$, on peut associer la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

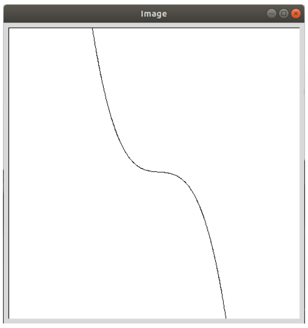
$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i$$

Ecrire une fonction `valeur` qui prend en entrée un polynôme et un flottant x et qui renvoie la valeur de la fonction associée au polynôme calculée en x.

```
assert valeur(ex1, 0) == 3
assert valeur(ex1, -1) == 5
assert valeur(ex4, 2.5) == 0
```

Puis écrire une fonction `courbe_poly` qui prend un polynome P, une borne nx pour les abscisses, une borne ny pour les ordonnées et qui renvoie l'image de la courbe de la fonction associée à P dans la partie du plan comprise entre $(-nx, -ny)$ et (nx, ny).

Image de la courbe de la fonction associée à $-X^3 + X^2 - X + 1$, entre $(-10, -100)$ et $(10, 100)$:



4 Suggestion : Présentation

La présentation sous forme de liste de coefficients croissants n'est pas particulièrement lisible, et on lui préfère une écriture plus "mathématique" qui fait apparaître les degrés et l'indéterminée X.

Ecrire une fonction `cdp` ("chaîne de polynôme") qui prend en entrée un polynôme et renvoie une chaîne de caractères correspondant à une écriture lisible de ce polynôme.
Par exemple (on pourra se restreindre à des présentations moins élégantes) :

```
assert cdp(ex1) == "2.X^2 + 3"
assert cdp(ex4) == "0"
assert cdp(ex2) == "-X^3 + X^2 - X + 1"
assert cdp(ex3) == "27"
assert cdp(produit(ex1, ex2)) == "-2.X^5 + 2.X^4 - 5.X^3 + 5.X^2 - 3.X + 3"
```

Puis écrire la fonction inverse, `pdc` ("polynôme de chaîne").
Par exemple :

```
assert pdc(cdp(ex1)) == normalise(ex1)
assert pdc(cdp(ex2)) == normalise(ex2)
assert pdc(cdp(ex3)) == normalise(ex3)
assert pdc(cdp(ex4)) == normalise(ex4)
assert pdc("-X^2 + 3.X") == [0, 3, -1]
assert pdc("X^4 - 3.X") == [0, -3, 0, 0, 1]
assert pdc("0.X^2 + 3.X") == [0, 3]
```

On pourra ensuite écrire des fonctions qui lisent des polynômes dans un fichier `.txt` et qui écrivent le résultat de la somme de ces polynômes (ou d'une autre opération) dans un autre fichier (ou dans le même fichier, à la fin).

5 Suggestion : Interpolation

Si $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ sont les coordonnées de n points du plan réel d'abscisses toutes différentes, on peut montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $n-1$ interpolant ces points (c'est-à-dire que la fonction associée au polynôme prend la valeur y_i en x_i pour chaque i).

Ecrire une fonction `interpolation` qui prend en entrée une liste d'abscisses x_i et une liste d'ordonnées y_i et qui renvoie, quand c'est possible, le polynôme à coefficients dans $\mathbb{D}$ (les flottants de Python) qui interpole les points $\{x_i, y_i\}$.

On pourra implémenter la résolution d'un système de n équations à n inconnues selon, par exemple, la méthode du *pivot de Gauss* ou utiliser la formule du *polynôme d'interpolation de Lagrange*.

```
assert cdp(int_poly(interpolation([1, 0], [1, 0]))) == "X"
assert cdp(int_poly(interpolation([1, -1, 0], [0, 0, -1]))) == "X^2 - 1"
assert normalise(int_poly(interpolation([i for i in range(4,-1,-1)],
                                        [valeur(ex2, i) for i in range(4,-1,-1)])))
                  == normalise(ex2)
```

(ici `int_poly` est une fonction qui convertit un polynôme à coefficients dans $\mathbb{D}$ en un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$)

6 Suggestion : Polynômes creux

!!! Attention !!! Cette partie utilise des **listes de paires** (vues au Cours 06).

Représenter des polynômes par des listes de coefficients successifs est peu pratique lorsque que le polynôme est "creux", c'est-à-dire lorsqu'il possède de nombreux coefficients nuls, comme $X^{1000} - 1$ (qui est représenté par une liste de taille `1001`).

Une autre manière de représenter les polynômes est l'utilisation d'une liste de couples $\{(c_i, d_i)\}_{0 \leq i \leq n}$ pour le polynôme $\sum_{i=0}^{n} c_i.X^{d_i}$
Par exemple $[(3, 0), (2, 2)]$ représente $3 + 2.X^2$ et $[(1, 1000), (-1, 0)]$ représente $X^{1000} - 1$.

On notera que les d_i peuvent ne pas être tous égaux, par exemple $[(1, 1), (2, 2), (-1, 1)]$ représente le polynôme $2.X^2$

En Python on aura :

```
CPolyn = List[Tuple[int, int]]
# le membre droit de chaque element de la liste est positif

cex1 : CPolyn = [(3, 0), (2, 2)]
cex2 : CPolyn = [(-1, 1), (1, 0), (0, 4), (1, 2), (-1, 3)]
cex3 : CPolyn = [(27, 0)]
cex4 : CPolyn = []
cex5 : CPolyn = [(1, 1), (2, 2), (-1, 1)]
```

Ecrire de nouvelles versions des fonctions de la partie 1 pour cette représentation. Par exemple :

```
assert cdegre(cex1) == 2
assert cdegre(cex2) == 3
assert cdegre(cex3) == 0
assert cdegre(cex4) == 0
assert cdegre(cex5) == 2

assert cnormalise(cex1) == [(2,2), (3,0)]
assert cnormalise(cex2) == [(-1,3), (1,2), (-1,1), (1,0)]
assert cnormalise(cex3) == [(27, 0)]
assert cnormalise(cex4) == []
assert cnormalise(cex5) == [(2, 2)]
```

Ecrire des fonctions `standard_de_creux` et `creux_de_standard` qui permettent de passer d'une représentation à l'autre :

```
assert standard_de_creux(cex1) == normalise(ex1)
assert standard_de_creux(cex2) == normalise(ex2)
assert standard_de_creux(cex3) == normalise(ex3)
assert standard_de_creux(cex4) == normalise(ex4)
assert standard_de_creux(cex5) == [0, 0, 2]

assert creux_de_standard(ex1) == cnormalise(cex1)
assert creux_de_standard(ex2) == cnormalise(cex2)
assert creux_de_standard(ex3) == cnormalise(cex3)
assert creux_de_standard(ex4) == cnormalise(cex4)
assert creux_de_standard([0, 0, 2]) == cnormalise(cex5)
```