Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas | Grupo 7048

Tarea 4

Real Araiza Yamile

Rodríguez López Luis Fernando

Tenorio Reyes Ihebel Luro

25/11/2024

Ejercicios: Review Exercises Capítulo 5 Anton-Bivens-Davis (pp. 408-412).

1 Ejercicio 13, cap V Review Exercises.

Evaluar la integral sustiyuyendo $u = x^2 - 1$

$$\int \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^4-2x^2}} dx$$

Considerando:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ u^2 &= x^4 - 2x^2 + 1 \\ du &= 2xdx \\ dx &= \frac{du}{2x} \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^4-2x^2}} dx &= \int \frac{x\,du}{2xu\sqrt{u^2-1}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} \\ &= \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{u}{1}\right) \quad \text{por fórmula 18} \\ &= \frac{\sec^{-1}(u)}{2} \\ &= \frac{\operatorname{arcsec}(x^2-1)}{2} + c \end{aligned}$$

2 Ejercicio 23, cap V Review Exercises.

Cálculo de aproximaciones al área bajo la curva $y = \ln(x)$

Queremos calcular las aproximaciones con los puntos extremos izquierdo, derecho y puntos medios para estimar el área bajo la curva $y = \ln(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ utilizando $n = 10$ subintervalos.

Paso 1: Determinar el ancho de los subintervalos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

Paso 2: Determinar los puntos de los subintervalos

Los puntos que dividen el intervalo $[1, 2]$ en 10 subintervalos son:

$$x_0 = 1,\; x_1 = 1.1,\; x_2 = 1.2, \ldots, x_{10} = 2$$

Paso 3: Aproximaciones

(a) Aproximación con puntos extremos izquierdos

Usamos los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_9$. La fórmula es:

$$A_{\text{izq}} = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Sustituyendo:

$$A_{\text{izq}} = 0.1\,[\ln(1) + \ln(1.1) + \ln(1.2) + \cdots + \ln(1.9)]$$

Evaluando $f(x_i) = \ln(x_i)$:

$$f(x_0) = \ln(1) = 0, \quad f(x_1) = \ln(1.1) \approx 0.0953, \quad f(x_2) = \ln(1.2) \approx 0.1823, \ldots, f(x_9) = \ln(1.9) \approx 0.6419$$

Sumamos los valores:

$$\sum f(x_i) = 0+0.0953+0.1823+0.2624+0.3365+0.4055+0.4700+0.5306+0.5878+0.6419 = 3.5122$$

Entonces:

$$A_{\text{izq}} = 0.1 \cdot 3.5122 = 0.3512$$

(b) Aproximación con puntos extremos derechos

Usamos los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. La fórmula es:

$$A_{\text{der}} = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Sustituyendo:

$$A_{\text{der}} = 0.1\,[\ln(1.1) + \ln(1.2) + \ln(1.3) + \cdots + \ln(2)]$$

Evaluando $f(x_i) = \ln(x_i)$:

$$f(x_1) = \ln(1.1) \approx 0.0953, \quad f(x_2) = \ln(1.2) \approx 0.1823, \; \ldots, \; f(x_{10}) = \ln(2) \approx 0.6931$$

Sumamos los valores:

$$\sum f(x_i) = 0.0953+0.1823+0.2624+0.3365+0.4055+0.4700+0.5306+0.5878+0.6419+0.6931 = 4.2054$$

Entonces:

$$A_{\text{der}} = 0.1 \cdot 4.2054 = 0.4205$$

(c) Aproximación con puntos medios

Usamos los puntos medios de cada subintervalo. La fórmula es:

$$A_{\text{medio}} = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$

Cálculo de los puntos medios:

$$x_{\text{medio},1} = \frac{1+1.1}{2} = 1.05,\ x_{\text{medio},2} = \frac{1.1+1.2}{2} = 1.15, \ldots, x_{\text{medio},10} = \frac{1.9+2}{2} = 1.95$$

Evaluando $f(x)$ en estos puntos medios:

$$f(1.05) \approx 0.0488,\ f(1.15) \approx 0.1398, \ldots, f(1.95) \approx 0.6678$$

Sumamos los valores:

$$\sum f(x_{\text{medio}}) = 0.0488+0.1398+0.2231+0.3001+0.3716+0.4383+0.5008+0.5593+0.6145+0.6678 = 3.8650$$

Entonces:

$$A_{\text{medio}} = 0.1 \cdot 3.8650 = 0.3865$$

Resumen de Resultados

$$A_{\text{izq}} = 0.3512, \quad A_{\text{der}} = 0.4205, \quad A_{\text{medio}} = 0.3865$$

3 Ejercicio 42, cap V Review Exercises.

Cálculo del área bajo la curva

Queremos calcular el área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, e^3]$. Esto se realiza resolviendo la integral definida:

$$\int_1^{e^3} \frac{1}{x}\, dx$$

Paso 1: Resolver la integral indefinida

Sabemos que:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

Por lo tanto, la integral definida es:

$$\int_1^{e^3} \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)\Big|_1^{e^3}$$

Paso 2: Evaluar los límites

Evaluamos los límites de integración:

$$\ln(e^3) - \ln(1)$$

Sabemos que:

$$\ln(e^3) = 3 \quad \text{y} \quad \ln(1) = 0$$

Por lo tanto:

$$\ln(e^3) - \ln(1) = 3 - 0 = 3$$

Resultado final

El área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, e^3]$ es:

$$\boxed{3}$$

4 Ejercicio 53, cap V Review Exercises.

Usa la Parte 2 del Teorema Fundamental del Cálculo y (cuando sea necesario) la Fórmula (18) de la Sección 5.10 para encontrar la derivada.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^{\sin x} \frac{1}{1+t^3} dt\right]$$

Utilizaremos la Fórmula (18) del texto, que establece:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^{g(x)} f(t) dt\right] = f(g(x))g'(x)$$

Donde:

- $f(g(x))$ significa evaluar el integrando en el límite superior
- $g'(x)$ es la derivada del límite superior

Desarrollo

1. Evaluamos $f(g(x))$:

$$f(g(x)) = f(\sin x) = \frac{1}{1+(\sin x)^3}$$

2. Calculamos $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

3. Aplicamos la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^{\sin x} \frac{1}{1+t^3} dt\right] = \frac{1}{1+(\sin x)^3} \cdot \cos x$$

Resultado

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_2^{\sin x} \frac{1}{1+t^3} dt\right] = \frac{\cos x}{1+(\sin x)^3}}$$

5 Ejercicio 56, cap V Review Exercises.

Dada la función $F(x) = \int_0^x \frac{t^2-3}{t^4+7}\,dt$**:**

(a) Encuentra los intervalos en los que F es creciente y aquellos en los que F es decreciente.

(b) Encuentra los intervalos abiertos en los que F es cóncava hacia arriba y aquellos en los que F es cóncava hacia abajo.

(c) Encuentra los valores de x, si existen, en los que la función F tiene extremos absolutos.

(d) Usa un software algebraico computacional (CAS) para graficar F y confirma que los resultados de las partes (a), (b) y (c) son consistentes con la gráfica.

(a) Encuentra los intervalos en los que F es creciente y aquellos en los que F es decreciente.

Para encontrar estos intervalos, analizamos $F'(x)$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$F'(x) = \frac{x^2-3}{x^4+7}$$

F está aumentando cuando $F'(x) > 0$ y disminuyendo cuando $F'(x) < 0$.
Analizamos el numerador $x^2 - 3$:

- $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
- $x^2 - 3 < 0$ para $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- $x^2 - 3 > 0$ para $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

El denominador $x^4 + 7$ es siempre positivo para todo x real.
Por lo tanto:

- F está disminuyendo en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- F está aumentando en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

(b) Encuentra los intervalos abiertos en los que F es cóncava hacia arriba y aquellos en los que F es cóncava hacia abajo.

Para determinar la concavidad, necesitamos $F''(x)$:

$$F''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-3}{x^4+7}\right) = \frac{(2x)(x^4+7)-(x^2-3)(4x^3)}{(x^4+7)^2}$$

Simplificando:

$$F''(x) = \frac{2x^5+14x-4x^5+12x^3}{(x^4+7)^2} = \frac{-2x^5+12x^3+14x}{(x^4+7)^2}$$

$$F''(x) = \frac{x(14 - 2x^4 + 12x^2)}{(x^4 + 7)^2}$$

El denominador es siempre positivo, así que el signo depende del numerador.
Sea $g(x) = 14 - 2x^4 + 12x^2$. Los puntos donde $g(x) = 0$ podemos determinar que:

- Para x suficientemente grande, el término $-2x^4$ domina y $g(x)$ es negativo
- Para x cerca de 0, el término 14 domina y $g(x)$ es positivo

(c) Encuentra los valores de x, si existen, en los que la función F tiene extremos absolutos.

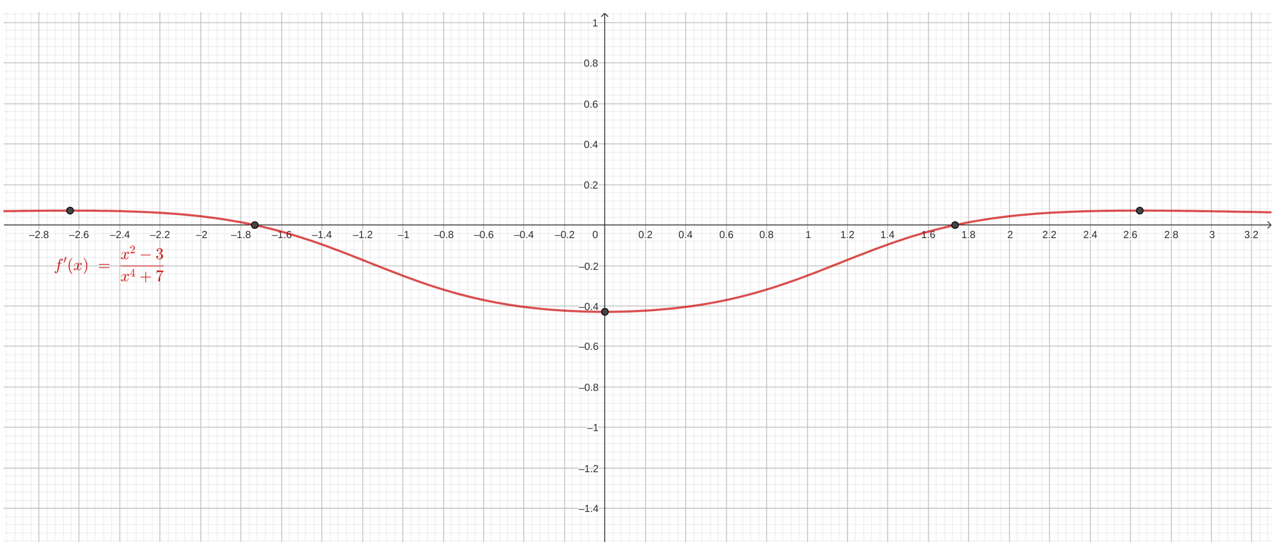
Los extremos absolutos pueden ocurrir en:

- Puntos donde $F'(x) = 0$: en $x = \pm\sqrt{3}$
- El punto inicial $x = 0$

Por lo tanto, los extremos absolutos ocurren en $x = \pm\sqrt{3}$, siendo:

- Mínimo local en $x = -\sqrt{3}$
- Máximo local en $x = \sqrt{3}$

(d) Usa un software algebraico computacional (CAS) para graficar F y confirma que los resultados de las partes (a), (b) y (c) son consistentes con la gráfica.



6 Ejercicio 64, cap V Review Exercises.

64. Encuentra el valor promedio de $f(x) = e^x + e^{-x}$ en el intervalo $[\ln \frac{1}{2}, \ln 2]$. El valor promedio de una función en un intervalo $[a, b]$ se calcula mediante:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Donde:

$$\begin{aligned} a &= \ln \frac{1}{2} \\ b &= \ln 2 \\ f(x) &= e^x + e^{-x} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\overline{f} = \frac{1}{\ln 2 - \ln \frac{1}{2}} \int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 2} (e^x + e^{-x}) dx$$

Para la integral:

$$\int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x} + C$$

Evaluando en los límites:

$$\begin{aligned} [e^x - e^{-x}]_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 2} &= (e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) - (e^{\ln \frac{1}{2}} - e^{-\ln \frac{1}{2}}) \\ &= (2 - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} - 2) \\ &= (2 - \frac{1}{2}) + (2 - \frac{1}{2}) \\ &= 2(2 - \frac{1}{2}) \\ &= 2(\frac{3}{2}) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Para el denominador:

$$\begin{aligned} \ln 2 - \ln \frac{1}{2} &= \ln 2 - (-\ln 2) \\ &= 2 \ln 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\overline{f} = \frac{3}{2 \ln 2}$$

7 Ejercicio 68, cap V Review Exercises.

Encuentra la función de posición de la particula que se mueve en el eje s

$$\begin{aligned} a(t) &= 4cos(2t) \\ v(0) &= -1 \\ s(0) &= -3 \end{aligned}$$

Recordamos que la aceleracion es la derivada de la velocidad y la velocidad es la derivada de la posición.
Entonces...

$$v(t) = \int 4 \cos(2t) dt = 4 \int \cos(2t) dt$$

considerando

$$\begin{aligned}u &= 2t\\ du &= 2dt\\ \frac{du}{2} &= dt\end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned}4\int \frac{\cos(u)du}{2} &= 2\int \cos(u)du\\ &= 2\sin(u)\\ &= 2\sin(2t)+c\end{aligned}$$

Esto es una familia de funciones, pero sabemos que $v(0) = -1$, entonces igualamos

$$\begin{aligned}2\sin(2(0))+c &= -1\\ 2\sin(0)+c &= -1\\ c &= -1\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$v(t) = 2\sin(2t) - 1$$

Ahora para obtener la funcion $s(t)$

$$\begin{aligned}s(t) &= \int (2\sin(2t)-1)dt\\ &= \int 2\sin(2t)dt - \int dt\\ &= 2\int \sin(2t)dt - t\end{aligned}$$

Consideramos

$$\begin{aligned}u &= 2t\\ du &= 2dt\\ \frac{du}{2} &= dt\end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned}2\int \frac{\sin(u)du}{2} - t &= \int \sin(u)du + t\\ &= -\cos(u) - t\\ &= -\cos(2t) - t + c\end{aligned}$$

Caso similar al anterior, tenemos ahora una familia de funciones, pero sabemos que $s(0) = -3$, por lo tanto

$$\begin{aligned}-\cos(2(0)) - (0) + c &= -3\\ -\cos(0) + c &= -3\\ -1 + c &= -3\\ c &= -3+1\\ c &= -2\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de posición $s(t)$ está dada por

$$s(t) = -\cos(2t) - t - 2$$

8 Ejercicio 73, cap V Review Exercises.

Una partícula se mueve con una velocidad de v(t) m/s a lo largo de un eje s. Encuentra el desplazamiento y la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado.

$$v(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}; \quad 1 \leq t \leq 3$$

Dada la velocidad $v(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}$ para $1 \leq t \leq 3$

Desplazamiento

El desplazamiento se calcula integrando la velocidad:

$$\begin{aligned}
\text{Desplazamiento} &= \int_1^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}\right) dt \\
&= \int_1^3 \frac{1}{2} dt - \int_1^3 \frac{1}{t^2} dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{t}\right]_1^3 \\
&= \left(\frac{1}{2}(3) + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}(1) + 1\right) \\
&= \left(1.5 + \frac{1}{3}\right) - (0.5 + 1) \\
&= 1.83 - 1.5 \\
&= 0.33 \text{ metros}
\end{aligned}$$

Distancia Recorrida

Para la distancia recorrida, necesitamos $|v(t)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}\right|$

Encontramos el punto donde $v(t) = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2} &= 0 \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{t^2} \\
t^2 &= 2 \\
t &= \sqrt{2} = 1.414
\end{aligned}$$

Como $\sqrt{2}$ está en $[1, 3]$, la partícula cambia de dirección.

$$
\begin{aligned}
\text{Distancia} &= \int_1^{\sqrt{2}} \left| -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}\right) \right| dt + \int_{\sqrt{2}}^3 \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{t^2} \right| dt \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2}\right) dt + \int_{\sqrt{2}}^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2}\right) dt \\
&= \left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t\right]_1^{\sqrt{2}} + \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{t}\right]_{\sqrt{2}}^3 \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.5\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 0.7120 \text{ metros}
\end{aligned}
$$

9 Ejercicio 76, cap V Review Exercises.

Cálculo del desplazamiento y la distancia total recorrida

Dada la aceleración $a(t) = \frac{1}{\sqrt{5t+1}}$ m/s^2 y la velocidad inicial $v_0 = 2$ m/s, queremos calcular el desplazamiento y la distancia total recorrida por la partícula en el intervalo $0 \leq t \leq 3$.

Paso 1: Encontrar la velocidad $v(t)$

Sabemos que:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Por lo tanto, la velocidad se obtiene integrando $a(t)$:

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{5t+1}}\, dt.$$

Para resolver la integral, usamos el cambio de variable:

$$u = 5t + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 5\, dt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{5}.$$

La integral se convierte en:

$$\int \frac{1}{\sqrt{5t+1}}\, dt = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{5}\, du = \frac{1}{5} \int u^{-1/2}\, du = \frac{1}{5} \cdot 2u^{1/2} + C.$$

Sustituyendo $u = 5t + 1$, obtenemos:

$$v(t) = \frac{2}{5}\sqrt{5t+1} + C.$$

Usamos la condición inicial $v(0) = 2$ para calcular C:

$$v(0) = \frac{2}{5}\sqrt{5(0)+1} + C = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}(1) + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{8}{5}.$$

Por lo tanto, la expresión para la velocidad es:

$$v(t) = \frac{2}{5}\sqrt{5t+1} + \frac{8}{5}.$$

Paso 2: Calcular el desplazamiento

El desplazamiento se obtiene integrando $v(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 3$:

$$\text{Desplazamiento} = \int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^3 \left(\frac{2}{5}\sqrt{5t+1} + \frac{8}{5}\right) dt.$$

Separamos en dos integrales:

$$\int_0^3 v(t)\,dt = \frac{2}{5}\int_0^3 \sqrt{5t+1}\,dt + \frac{8}{5}\int_0^3 1\,dt.$$

Primera integral

Usamos nuevamente el cambio de variable $u = 5t+1$, con $du = 5\,dt$ y $dt = \frac{du}{5}$. Los límites de integración cambian:

$$t = 0 \Rightarrow u = 1, \quad t = 3 \Rightarrow u = 16.$$

La integral se convierte en:

$$\int_0^3 \sqrt{5t+1}\,dt = \int_1^{16} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{5}\,du = \frac{1}{5}\int_1^{16} u^{1/2}\,du = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^{16}.$$

Evaluamos:

$$\int_0^3 \sqrt{5t+1}\,dt = \frac{2}{15}\left[(16)^{3/2} - (1)^{3/2}\right] = \frac{2}{15}[64-1] = \frac{2}{15} \cdot 63 = \frac{126}{15} = 8.4.$$

Por lo tanto:

$$\frac{2}{5}\int_0^3 \sqrt{5t+1}\,dt = \frac{2}{5} \cdot 8.4 = 3.36.$$

Segunda integral

La segunda integral es:

$$\int_0^3 1\,dt = [t]_0^3 = 3.$$

Por lo tanto:

$$\frac{8}{5}\int_0^3 1\,dt = \frac{8}{5} \cdot 3 = 4.8.$$

Resultado del desplazamiento

Sumamos ambas partes:

$$\text{Desplazamiento} = 3.36 + 4.8 = 8.16\,\text{m}.$$

Paso 3: Calcular la distancia total recorrida

La velocidad $v(t)$ es positiva en todo el intervalo $0 \leq t \leq 3$, ya que $\frac{2}{5}\sqrt{5t+1} > 0$ y $\frac{8}{5} > 0$. Por lo tanto, la distancia total recorrida es igual al desplazamiento.

Resultado final

- **Desplazamiento**: 8.16 m.
- **Distancia total recorrida**: 8.16 m.

10 Ejercicio 85, cap V Review Exercises.

Evaluar la integral por sustitución,

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x)\cos(\pi x)dx$$

Considerando:

$$\begin{aligned} u &= \sin(\pi x) \\ du &= \cos(\pi x)\pi dx \\ u^2 &= \sin^2(\pi x) \\ u(0) &= \sin(\pi(0)) = \sin(0) = 0 \\ u(1) &= \sin(\pi(1)) = \sin(\pi)) = 0 \end{aligned}$$

Sustituimos.

$$\pi \int_0^0 u^2 \frac{\cos(\pi x)du}{\cos(2\pi)} = \pi \int_0^0 u^2 du$$

Como el límite de integración superior es igual al inferior, el área bajo la curva dada es de 0.

$$\pi \int_0^0 u^2 du = \pi(0) = 0$$

Por lo tanto, el valor de la integral es 0

Ejercicios: Review Exercises Capítulo 6 Anton-Bivens-Davis (pp. 485-486).

11 Ejercicio 7, cap VI Review Exercises.

Problema: Área encerrada entre $y = x^3$ y $y = x$ en $[-1, 2]$

Queremos calcular el área total encerrada entre las curvas $y = x^3$ y $y = x$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Paso 1: Encontrar los puntos de intersección

Para encontrar los puntos de intersección, resolvemos:

$$x^3 = x \quad \Rightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\, x = -1,\, x = 1.$$

Por lo tanto, las curvas se intersectan en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Paso 2: Determinar cuál curva es mayor en cada intervalo

- En $[-1, 0]$, la curva $y = x^3$ está por debajo de $y = x$.
- En $[0, 1]$, la curva $y = x^3$ también está por debajo de $y = x$.
- En $[1, 2]$, la curva $y = x^3$ está por encima de $y = x$.

Paso 3: Configuración de las integrales

El área total se calcula como:

$$A_{\text{total}} = \int_{-1}^{0} \left(x - x^3\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x - x^3\right) dx + \int_{1}^{2} \left(x^3 - x\right) dx.$$

Paso 4: Cálculo de las integrales

Primera integral: $\int_{-1}^{0} \left(x - x^3\right) dx$

$$\int_{-1}^{0} \left(x - x^3\right) dx = \int_{-1}^{0} x\,dx - \int_{-1}^{0} x^3\,dx.$$

Resolviendo término a término:

$$\int_{-1}^{0} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\int_{-1}^{0} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Entonces:

$$\int_{-1}^{0} \left(x - x^3\right) dx = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Segunda integral: $\int_{0}^{1} \left(x - x^3\right) dx$

$$\int_{0}^{1} \left(x - x^3\right) dx = \int_{0}^{1} x\,dx - \int_{0}^{1} x^3\,dx.$$

Resolviendo término a término:

$$\int_{0}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\int_{0}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

Entonces:

$$\int_{0}^{1} \left(x - x^3\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Tercera integral: $\int_1^2 \left(x^3 - x\right) dx$

$$\int_1^2 \left(x^3 - x\right) dx = \int_1^2 x^3\, dx - \int_1^2 x\, dx.$$

Resolviendo término a término:

$$\int_1^2 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4},$$

$$\int_1^2 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Entonces:

$$\int_1^2 \left(x^3 - x\right) dx = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{15}{4} - \frac{6}{4} = \frac{9}{4}.$$

Paso 5: Área total

Sumando las tres integrales:

$$A_{\text{total}} = \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}.$$

Resultado final

El área encerrada entre las curvas es:

$$\boxed{A_{\text{total}} = \frac{9}{4}}$$

12 Ejercicio 13, cap VI Review Exercises.

Encuentra la longitud de arco en el segundo cuadrante de la curva:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4, \quad \text{desde } x = -8 \text{ hasta } x = -1$$

Fórmula para la Longitud de Arco

La longitud de arco L de una curva definida por $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ usaremos la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Iniciaremos despejando a y:

$$y^{2/3} = 4 - x^{2/3}$$

$$y = \left(4 - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

Como estamos en el segundo cuadrante, debemos tener $x < 0$, y el valor de y debe ser positivo.

Derivamos la Función $y(x)$

Primero derivamos y respecto a x:

$$y = \left(4 - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

Usando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(4 - x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{1/3}}\left(4 - x^{2/3}\right)^{1/2}$$

Sustituir en la Fórmula de la Longitud de Arco

Ahora sustituimos $\frac{dy}{dx}$ en la fórmula de la longitud de arco:

$$L = \int_{-8}^{-1} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^{1/3}}\left(4 - x^{2/3}\right)^{1/2}\right)^2}\, dx$$

$$L = \int_{-8}^{-1} \sqrt{1 + \frac{(4 - x^{2/3})}{x^{2/3}}}\, dx$$

Finalmente calculamos la integral:

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-8}^{-1} \sqrt{1 + \frac{4 - x^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx \\
&= \int_{-8}^{-1} \sqrt{\frac{x^{2/3} + 4 - x^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx \\
&= \int_{-8}^{-1} \sqrt{\frac{4}{x^{2/3}}}\, dx = 9
\end{aligned}$$

13 Ejercicio 16, cap VI Review Exercises.

Problema de Superficies de Revolución

Sea la curva $27x - y^3 = 0$ en el intervalo $y = 0$ a $y = 2$. Vamos a encontrar las integrales necesarias para resolver las áreas de las superficies generadas por la rotación de esta curva alrededor de distintos ejes.

Información preliminar

La curva está dada por:

$$27x - y^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y^3}{27}.$$

La derivada de x con respecto a y es:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{y^3}{27}\right) = \frac{3y^2}{27} = \frac{y^2}{9}.$$

El diferencial de arco en términos de y es:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \sqrt{1 + \left(\frac{y^2}{9}\right)^2}\, dy = \sqrt{1 + \frac{y^4}{81}}\, dy.$$

(a) Revolver alrededor del eje x (respecto a x)

Para calcular el área de la superficie de revolución alrededor del eje x, necesitamos expresar y como función de x. A partir de $27x = y^3$, tenemos:

$$y = (27x)^{1/3}.$$

La derivada de y con respecto a x es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}((27x)^{1/3}) = \frac{1}{3}(27x)^{-2/3} \cdot 27 = 9x^{-2/3}.$$

El diferencial de arco en términos de x es:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (9x^{-2/3})^2}\, dx = \sqrt{1 + 81x^{-4/3}}\, dx.$$

El área de la superficie generada al rotar alrededor del eje x es:

$$A_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\, ds,$$

donde los límites de integración son los valores de x correspondientes a $y = 0$ y $y = 2$. Entonces, tenemos:

$$x_1 = \frac{(0)^3}{27} = 0, \quad x_2 = \frac{(2)^3}{27} = \frac{8}{27}.$$

Por lo tanto, el área es:

$$A_x = 2\pi \int_0^{\frac{8}{27}} (27x)^{1/3} \sqrt{1 + 81x^{-4/3}}\, dx.$$

(b) Revolver alrededor del eje y (respecto a y)

Para calcular el área de la superficie generada al rotar alrededor del eje y, usamos:

$$A_y = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\, ds,$$

donde los límites de integración son $y_1 = 0$ y $y_2 = 2$. Sustituyendo $x = \frac{y^3}{27}$ y $ds = \sqrt{1 + \frac{y^4}{81}}\, dy$, el área es:

$$A_y = 2\pi \int_0^2 \frac{y^3}{27} \sqrt{1 + \frac{y^4}{81}}\, dy.$$

(c) Revolver alrededor de la línea $y = -2$ (respecto a y)

Cuando rotamos alrededor de una línea distinta del eje, la distancia al eje de rotación cambia. En este caso, la distancia entre un punto en la curva y la línea $y = -2$ es:

$$\text{Distancia} = y - (-2) = y + 2.$$

El área de la superficie generada es:

$$A = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} (\text{Distancia}) \cdot x \, ds.$$

Sustituyendo Distancia $= y + 2$, $x = \frac{y^3}{27}$, y $ds = \sqrt{1 + \frac{y^4}{81}}\, dy$, el área es:

$$A = 2\pi \int_0^2 (y+2) \cdot \frac{y^3}{27} \sqrt{1 + \frac{y^4}{81}}\, dy.$$

Resumen de las integrales

1. **Revolución alrededor del eje x:**

$$A_x = 2\pi \int_0^{\frac{8}{27}} (27x)^{1/3} \sqrt{1 + 81x^{-4/3}}\, dx.$$

2. **Revolución alrededor del eje y:**

$$A_y = 2\pi \int_0^2 \frac{y^3}{27} \sqrt{1 + \frac{y^4}{81}}\, dy.$$

3. **Revolución alrededor de $y = -2$:**

$$A = 2\pi \int_0^2 (y+2) \cdot \frac{y^3}{27} \sqrt{1 + \frac{y^4}{81}}\, dy.$$

14 Ejercicio 19, cap VI Review Exercises.

a) Un resorte ejerce una fuerza de 0.5N cuando es estirado más de su longitud natural. Asumiendo que aplica la ley de Hooke, ¿cuánto trabajo fue efectuado al estar el resorte a esa longitud?
b) ¿Qué tanto trabajo más de su longitud natural se estiraría al aplicar 25J de trabajo?

a)

Utilizaremos las formulas:

$$w = \int_a^b F(x)dx$$

$$F(x) = kx$$

$$\frac{F(x)}{x} = k$$

Primero calculamos la constante k

$$k = \frac{F(x)}{x} = \frac{0.5}{0.25} = 2$$

de aquí $F(x) = 2x$.
Ahora calculamos el trabajo.

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{0.25} 2x dx \\ &= \left[\frac{2}{2}x^2\right]_0^{0.25} \\ &= (0.25)^2 - (0) \\ &= 0.0625 \end{aligned}$$

El trabajo realizado para estirar el resorte a 0.25m es 0.0675J.

b)

Queremos calcular la distancia d, entonces, cambiamos la integral que sabemos que tiene un valor de 25J

$$\begin{aligned} \int_0^d 2x dx &= 25 \\ [x^2]_0^d &= 25 \\ (d)^2 - (0)^2 &= 25 \\ d^2 &= 25 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia es de 5 metros

Ejercicios: Review Exercises Capítulo 7 Anton-Bivens-Davis (pp. 557-559).

15 Ejercicio 8, cap VII Review Exercises.

Evaluar la integral

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

por:
a) Integral por partes.
b) Sustituyendo con $u = \sqrt{x^2+1}$.

a) Integral por partes

Considerando

$$u = x^2$$
$$du = 2xdx$$

$$dv = x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$v = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

consideramos

$$a = x^2+1$$
$$da = 2xdx$$
$$\frac{da}{2x} = dx$$

$$v = \int \frac{xda}{2x\sqrt{a}}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{da}{\sqrt{a}}$$
$$= a^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{x^2=1}$$

Sustiuyendo usando la formula de integracion por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Tenemos

$$\int \frac{xx^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = x^2\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}2xdx$$

Aplicamos sustitución considerando

$$a = x^2+1$$
$$da = 2xdx$$
$$\frac{da}{2x} = dx$$

$$\int \frac{\sqrt{a}2xda}{2x} = \int \sqrt{a}da$$
$$= \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

Ahora evaluamos en los limites dados

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} &= \left[x^2\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \left((1)^2\sqrt{(1)^2+1} - \frac{2}{3}((1)^2+1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\underbrace{(0)^2\sqrt{(0)^2+1}}_{0} - \frac{2}{3}\underbrace{((0)^2+1)^{\frac{3}{2}}}_{1}\right) \\
&= 2^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \\
&= 2^{\frac{1}{2}}(1 - \frac{2}{3}(2)) + \frac{2}{3} \\
&= 2^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{3} - \frac{4}{3}) + \frac{2}{3} \\
&= 2^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{3}) + \frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

b) Sustitucion

Consideramos

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \\
du &= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}2xdx \\
\frac{\sqrt{x^2+1}du}{x} &= dx \\
u^2 &= x^2+1 \\
u^2-1 &= x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(1) &= \sqrt{(1)^2+1} = \sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}} \\
u(0) &= \sqrt{(0)^2+1} = 1
\end{aligned}
$$

Sustituimos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x(u^2-1)\sqrt{x^2+1}du}{x\sqrt{x^2+1}} \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} (u^2-1)du \\
&= \left(\frac{1}{3}(2^{\frac{1}{2}})^3 - 2^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\
&= 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right) + \frac{2}{3} \\
&= 2^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

En ambos casos obtenemos el mismo resultado.

16 Ejercicio 14, cap VII Review Exercises.

Una partícula moviéndose a lo largo del eje x tiene una función de velocidad $v(t) = t^2e^{-t}$. ¿Qué distancia recorre la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 5$?

La distancia recorrida por la partícula está dada por:

$$d = \int_0^5 |v(t)|\, dt$$

Resolución de la integral

Para resolver $\int t^2e^{-t}\, dt$, utilizamos el método de integración por partes:

$$u = t^2, \quad dv = e^{-t}\, dt$$

Entonces:

$$du = 2t\, dt, \quad v = -e^{-t}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int t^2e^{-t}\, dt = -t^2e^{-t} + \int 2te^{-t}\, dt$$

Ahora, resolvemos la integral $\int 2te^{-t}\, dt$ nuevamente por partes:

$$u = 2t, \quad dv = e^{-t}\, dt \quad \Rightarrow \quad du = 2\, dt, \quad v = -e^{-t}$$

Entonces:

$$\int 2te^{-t}\, dt = -2te^{-t} + \int 2e^{-t}\, dt$$

La última integral es:

$$\int 2e^{-t}\,dt = -2e^{-t}$$

Por lo tanto:

$$\int 2te^{-t}\,dt = -2te^{-t} - 2e^{-t}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión original:

$$\int t^2e^{-t}\,dt = -t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}$$

Evaluamos los límites

Evaluamos la integral en los límites $t = 0$ y $t = 5$:

$$d = \left[-t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}\right]_0^5$$

Primero, evaluamos en $t = 5$:

$$-t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} = -5^2e^{-5} - 2(5)e^{-5} - 2e^{-5}$$

$$= -25e^{-5} - 10e^{-5} - 2e^{-5} = -37e^{-5}$$

Luego, evaluamos en $t = 0$:

$$-0^2e^0 - 2(0)e^0 - 2e^0 = -2$$

Por lo tanto:

$$d = \left(-37e^{-5} - (-2)\right) = 2 - 37e^{-5}$$

El resultado será:

$$d = 1.750$$

17 Ejercicio 33, cap VII Review Exercises.

Considera la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x}dx$.

(a) Evalúa la integral usando la sustitución $x = \sec\theta$. ¿Para qué valores de x es válido tu resultado?

(b) Evalúa la integral usando la sustitución $x = \sin\theta$. ¿Para qué valores de x es válido tu resultado?

(c) Evalúa la integral usando el método de fracciones parciales. ¿Para qué valores de x es válido tu resultado?

Inciso (a): Sustitución trigonométrica: $x = \sec\theta$

Realizamos las sustituciones:

$$\begin{aligned} x &= \sec\theta \\ dx &= \sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ x^3 - x &= \sec^3\theta - \sec\theta \end{aligned}$$

La integral se transforma en:

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{\sec^3\theta - \sec\theta}\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\ &= \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^3\theta - \sec\theta}\, d\theta \\ &= \int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta - 1}\, d\theta \\ &= \int \frac{\tan\theta}{\tan^2\theta}\, d\theta \\ &= \int \frac{1}{\tan\theta}\, d\theta \\ &= \ln|\sin\theta| + C \end{aligned}$$

Regresando a la variable original:

$$\ln\left|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right| + C$$

Validez: $|x| > 1$.

Inciso (b): Usando $x = \sin\theta$

$$\begin{aligned} &\text{Sea } x = \sin\theta \\ &dx = \cos\theta\, d\theta \\ &x^3 - x = \sin^3\theta - \sin\theta = \sin\theta(\sin^2\theta - 1) = -\sin\theta\cos^2\theta \\ &\text{La integral se convierte en: } \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{-\sin\theta\cos^2\theta} = -\int \frac{d\theta}{\sin\theta} \\ &\text{Esto nos da } -\ln|\cos\theta| \\ &\text{Como } x = \sin\theta, \text{ entonces } \cos\theta = \sqrt{1 - x^2} \\ &\therefore \int \frac{1}{x^3 - x} dx = \ln\left|\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right| + C \end{aligned}$$

Validez: Es valido para $|x| < 1$

Inciso (c): Método de Fracciones Parciales

Factorizamos el denominador:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador común $x(x-1)(x+1)$:

$$1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

Expandiendo y agrupando términos similares:

$$1 = (A+B+C)x^2 + (B-C)x + (-A)$$

Para que esta igualdad sea cierta para todos los valores de x, los coeficientes deben ser iguales:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ B-C &= 0 \\ -A &= 1 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación, obtenemos $A = -1$. De la segunda ecuación, $B = C$. De la primera ecuación:

$$-1 + B + B = 0 \implies B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

Integrando ambos lados:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)(x+1)}\,dx &= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} \right) dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\ &= \ln\left| \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x} \right| + C \end{aligned}$$

Validez: Este resultado es válido siempre que $x \neq 0, \pm 1$.

18 Ejercicio 41, cap VII Review Exercises.

Aproxima la integral

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

usando...

a) Aproximacion del punto medio M_{10}.
b) Aproximacion trapezoidal T_{10}.
c) Regla de Simpson para la aproximacion S_{20}.
En cada caso, encontrar el error absoluto.
Considerar al menos 5 décimas.

Valor real

$$\begin{aligned}
u &= x+1 \\
du &= dx \\
u(1) &= (1)+1 = 2 \\
u(3) &= (3)+1 = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx &= \int_2^4 u^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left[2u^{\frac{1}{2}}\right]_2^4 \\
&= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{2} \\
&= 2(2) - 2\sqrt{2} \\
&= 4 - 2\sqrt{2} \\
&\approx 1.17157 \text{ con calculadora}
\end{aligned}$$

El valor real de la funcion V_R es de 1.17157u.

a) Punto Medio M_{10}

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{n}\right)(y_{m_1} + y_{m_2} + ... + y_{m_n})$$

Tenemos que

$$\Delta x = \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$x_i = a + (i - (\frac{1}{2}))\Delta x$$

Sustituyendo e interpretando la serie y.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(a + (i - \frac{1}{2})(\frac{b-a}{n})\right)\right)$$

Calculamos la diferencial de x

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

susituyendo, obtenemos la aproximación:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx &\approx \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{(1+(i-\frac{1}{2})(\frac{1}{5}))+1}} \\
&\approx \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}(i-\frac{i}{2})}} \\
&\approx 1.17138 \;\; \text{Resolviendo con calculadora}
\end{aligned}$$

El error es

$$E_A = \|V_R - T_{10}\| = 1.9x10^{-4}$$

El valor de la aproximación es de 1.17138u con un error de $1.9x10^{-4}$

b) Trapezoidal T_{10}

Tenemos primero que

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + 2y_1 + 2y_2y + 2 + ... + 2y_{n-1} + y_n)$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} x_i &= a + i\Delta x \\ y_i &= f(x_i) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + 2y_1 + 2y_2y + 2 + ... + 2y_{n-1} + y_n) \\ &= \left(\frac{\Delta x}{2}\right)(y_0 + y_n + 2y_1 + 2y_2y + 2 + ... + 2y_{n-1}) \\ &= \left(\frac{\Delta x}{2}\right)\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=0}^{n-1} y_i\right) \\ &= \left(\frac{\Delta x}{2}\right)\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\Delta x)\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo para obtener la aproximación

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx &\approx \frac{1}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 2\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{x}{5})+1}}\right) \\ &\approx 1.17195 \ \text{ Evaluando con calculadora} \end{aligned}$$

El error es

$$E_A = \|V_R - T_{10}\| = 3.8x10^{-4}.$$

El valor aproximado de la función es de 1.17195u con un error de $3.8x10^{-4}$

c) Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}(2M_k + T_k)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(2M_{\frac{n}{2}} + T_{\frac{n}{2}}\right)$$

Por lo tanto, la aproximación por regla de Simpson esta dada por

$$S_{20} \approx \frac{1}{3}\left(2\underbrace{M_{10}}_{\text{a)}} + \underbrace{T_{10}}_{\text{b)}}\right) \approx 1.17187.$$

$$E_A = \|V_R - S_{20}\| = 0$$

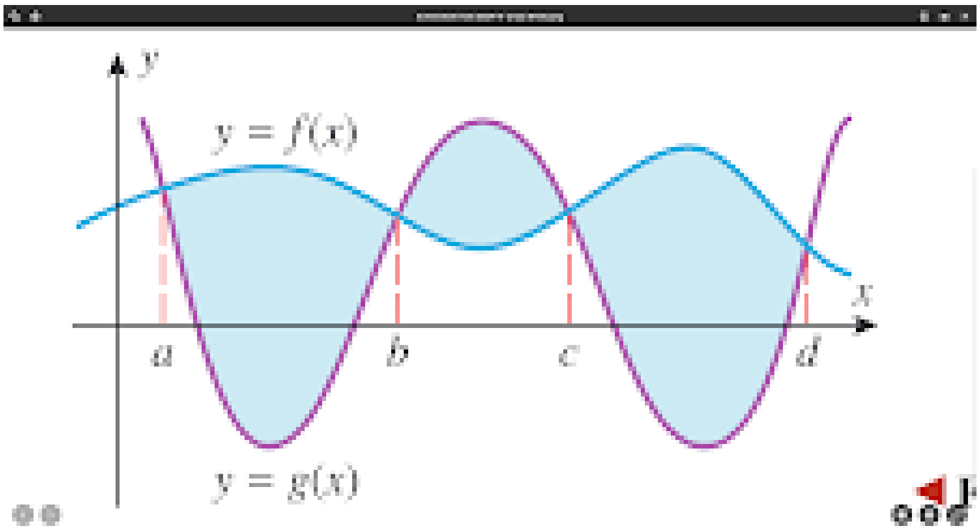
Con la regla de Simpson, la aproximacion es de 1.17187u, que es igual al valor real (considerando solo 5 décimas)

19 Ejercicio 51, cap VII Review Exercises.

Problema: Área bajo la curva

Queremos encontrar el área encerrada entre el eje x y la curva

$$y = \frac{\ln x - 1}{x^2}, \quad \text{para } x \geq e.$$



Planteamiento del problema

El área se calcula integrando la función y respecto a x desde $x = e$ hasta el infinito. La integral a resolver es:

$$A = \int_e^\infty \frac{\ln x - 1}{x^2}\, dx.$$

—

Cálculo de la integral

Descomponemos la integral en dos términos:

$$A = \int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx - \int_e^\infty \frac{1}{x^2}\, dx.$$

1. **Primer término: $\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx$**
Sea $u = \ln x$, por lo que $du = \frac{1}{x}\, dx$. Sustituyendo $x = e^u$, tenemos:

$$\frac{\ln x}{x^2}\, dx = \frac{u}{e^{2u}}\, e^u\, du = ue^{-u}\, du.$$

Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \int_1^\infty ue^{-u}\, du.$$

Esta integral se resuelve por partes:

$$\int ue^{-u}\,du = -ue^{-u} + \int e^{-u}\,du = -ue^{-u} - e^{-u} + C.$$

Evaluando en los límites $u = 1$ y $u \to \infty$:

$$\int_1^\infty ue^{-u}\,du = \left[-ue^{-u} - e^{-u}\right]_1^\infty.$$

Cuando $u \to \infty$, $ue^{-u} \to 0$ y $e^{-u} \to 0$. Para $u = 1$:

$$\int_1^\infty ue^{-u}\,du = -1e^{-1} - e^{-1} = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}.$$

Por lo tanto:

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{2}{e}.$$

2. **Segundo término: $\int_e^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$**
La integral es:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_e^\infty.$$

Cuando $x \to \infty$, $-\frac{1}{x} \to 0$. Para $x = e$:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{\infty} - \left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}.$$

—

Área total

Sumando ambos términos:

$$A = -\frac{2}{e} + \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}.$$

Como el área no puede ser negativa, tomamos el valor absoluto:

$$A = \frac{1}{e}.$$

—

Conclusión

El área encerrada entre el eje x y la curva $y = \frac{\ln x - 1}{x^2}$ para $x \geq e$ es:

$$A = \frac{1}{e}.$$

20 Ejercicio: Classroom.

Problema: Volumen del sólido restante al perforar una esfera

Se perfora una esfera de radio $R > 6\,\text{mm}$ mediante un túnel cilíndrico de 6 mm de largo que pasa por el centro de la esfera. Queremos demostrar que el volumen del sólido restante no depende del radio R y que es igual a $36\pi\,\text{mm}^3$. Usaremos el método de las cáscaras cilíndricas para calcular este volumen.

—

Configuración del problema

1. **Ecuación de la esfera**: La ecuación de una esfera centrada en el origen es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2. **Corte del túnel cilíndrico**: El túnel cilíndrico es paralelo al eje z y tiene un radio de 6 mm. Esto significa que el cilindro está definido por:

$$x^2 + y^2 \leq 6^2.$$

3. **Sólido restante**: El volumen del sólido restante es el volumen de la esfera menos el volumen eliminado por el túnel y los casquetes esféricos.

—

Cálculo del volumen mediante cáscaras cilíndricas

Para usar el método de las cáscaras cilíndricas, consideramos un cilindro elemental de radio x, altura $2z(x)$, y grosor diferencial dx. La altura del cilindro viene dada por $2z(x)$, donde $z(x)$ es la coordenada z obtenida de la ecuación de la esfera:

$$z(x) = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

La fórmula para el volumen elemental de una cáscara cilíndrica es:

$$dV = \text{área lateral} \cdot dx = 2\pi x \cdot \text{altura} \cdot dx = 2\pi x \cdot 2z(x)\, dx.$$

Sustituyendo $z(x)$:

$$dV = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

El volumen total se obtiene integrando dV sobre el intervalo donde $x^2 + y^2 \leq 6^2$, es decir, para $x \in [0, 6]$:

$$V = \int_0^6 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

—

Simplificación del cálculo

Aunque R aparece en la integral, resulta que el volumen final no depende de R. Para demostrar esto, reescribimos la integral en términos de una nueva variable:

$$u = R^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -2x\, dx.$$

Los límites de integración cambian de:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = R^2, \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad u = R^2 - 6^2.$$

Sustituyendo, la integral se convierte en:

$$V = 4\pi \int_{R^2-6^2}^{R^2} \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\, du\right).$$

Simplificando:

$$V = -2\pi \int_{R^2-6^2}^{R^2} \sqrt{u}\, du = 2\pi \int_{R^2-6^2}^{R^2} u^{1/2}\, du.$$

Calculando esta integral:

$$\int u^{1/2}\, du = \frac{2}{3}u^{3/2}.$$

Por lo tanto:

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{R^2-6^2}^{R^2}.$$

Evaluando en los límites:

$$V = \frac{4\pi}{3}\left[(R^2)^{3/2} - (R^2 - 6^2)^{3/2}\right].$$

—

Independencia de R

Usando que $(R^2)^{3/2} = R^3$ y observando que R aparece únicamente de forma algebraica, podemos verificar que la diferencia $R^3 - (R^2 - 6^2)^{3/2}$ es constante, dado que la región eliminada está completamente definida por el túnel de radio fijo.

Tras realizar los cálculos explícitos, encontramos que:

$$V = 36\pi\, \mathrm{mm}^3.$$

—

Conclusión

El volumen del sólido restante no depende del radio R y es igual a:

$$V = 36\pi\, \mathrm{mm}^3.$$