eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA

ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

ÁLGEBRA

ALJEBRA

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

EZOHIKO DEIALDIA

2018/2019 ikasturtea **2019ko uztailak 1**

Izen abizenak:	***Taldea:***

1. ARIKETA (2.5 puntu)

Izan bedi $\left(\mathbb{P}_3(x),<,>\right)$ espazio bektorial euklidearra honako biderkadura eskalarrarekin:

$$\left\langle p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,,q(x)=a'x^3+b'x^2+c'x+d'\right\rangle=aa'+bb'+cc'+cd'+dc'$$

eta izan bitez honako azpiespazioak:

$$S\equiv\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,p(x)\perp x^2\quad\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$
$$T\equiv\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,p'(0)=p''(1)\quad\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

(1.) Zehaztu S azpiespazio bektorialaren oinarri bat eta dimentsioa. **(0.5 puntu)**

$$\left\langle ax^3+bx^2+cx+d,x^2\right\rangle=b=0$$

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d=ax^3+cx+d\Rightarrow S\equiv\mathfrak{L}\left(\left\{x^3,x,1\right\}\right)$$

$$B_S=\left\{x^3,x,1\right\}\quad\dim(S)=3$$

(2.) Zehaztu $S\cap T$ azpiespazio bektorialaren oinarri bat eta dimentsioa. **(puntu 1)**

T-ren oinarri lortuko dugu lehendabizi:

$$\left.\begin{array}{l}p'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow p'(0)=c\\ p''(x)=6ax+2b\Rightarrow p''(1)=6a+2b\end{array}\right\}\Rightarrow c=6a+2b$$

$$T\equiv\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,c=6a+2b\right\}=$$
$$=\left\{p(x)=ax^3+bx^2+(6a+2b)x+d\in\mathbb{P}_3(x)\right\}=$$
$$=\left\{p(x)=a\left(x^3+6x\right)+b\left(x^2+2x\right)+d\in\mathbb{P}_3(x)\right\}=$$
$$=\mathfrak{L}\left(\left\{\left(x^3+6x\right),\left(x^2+2x\right),1\right\}\right)$$

$$B_T=\left\{\left(x^3+6x\right),\left(x^2+2x\right),1\right\}\quad\dim(T)=3$$

$$S \cap T \equiv \left\{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(x) \,/\, b = 0 \wedge c = 6a + 2b \right\} =$$
$$= \left\{ p(x) = ax^3 + 6ax + d \in \mathbb{P}_3(x) \right\} =$$
$$= \left\{ p(x) = a\left(x^3 + 6x\right) + d \in \mathbb{P}_3(x) \right\} =$$
$$= \mathfrak{L}\left(\left\{ \left(x^3 + 6x\right), 1 \right\} \right)$$
$$B_{S\cap T} = \left\{ \left(x^3 + 6x\right), 1 \right\} \quad \dim\left(S \cap T\right) = 2$$

(3.) Lortu $S+T$ .azpiespazio bektorialaren oinarri bat eta dimentsioa. **(0.5 puntu)**

$$S + T = \mathfrak{L}\left(\left\{ x^3, x, 1, \left(x^3 + 6x\right), \left(x^2 + 2x\right), 1 \right\} \right)$$
$$h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$
$$B_{S+T} = \left\{ x^3, x, \left(x^2 + 2x\right), 1 \right\} \quad \dim\left(S + T\right) = 4$$

(4.) S eta T betegarriak al dira? Arrazoitu erantzuna. **(0.5 puntu)**

Ez dira betegarriak ebakidura ez delako polinomio nulua.

2. ARIKETA (2.5 puntu)

Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1.) Kalkulatu $a \in \mathbb{R}$ parametroaren zein baliotarako den A matrizea diagonalizagarria. **(puntu 1)**

$$\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(a-\lambda)\cdot(-1-\lambda)$$

Balio propioak hauek dira: $\sigma = \left\{ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = a, \lambda_4 = -1 \right\}$

1. $\boxed{a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -1}$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & k_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 & k_2 = 1 \\ \lambda_3 = a & k_3 = 1 \\ \lambda_4 = -1 & k_4 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} d_1 = 1 \\ d_2 = 1 \\ d_2 = 1 \\ d_4 = 1 \end{array}$$

A matrizea diagonalizagarria da

2. $\boxed{a = 2}$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & k_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 & k_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 & k_3 = 1 \end{array}\right.$$

- $\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h(M) = 3 \Rightarrow \dim(S(\lambda = 2)) = 1$$

A matrizea ez da diagonalizagarria

3. $\boxed{a = 1}$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & k_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 & k_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 & k_3 = 1 \end{array}\right.$$

- $\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h(M) = 3 \Rightarrow \dim(S(\lambda = 1)) = 1$$

A matrizea ez da diagonalizagarria

4. $\boxed{a=-1}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 & k_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 & k_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 & k_3 = 2 \end{cases}$$

- $\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h(M)=3 \Rightarrow \dim\big(S(\lambda=-1)\big)=1$$

A matrizea ez da diagonalizagarria

(2.) Ba al dago A matrizearen bektore propiorik $A\cdot\overline{x}=\overline{0}$ betetzen duenik? Erantzuna baiezkoa bada, lortu A matrizeari elkartutako bektore propioen multzoa $A\cdot\overline{x}=\overline{0}$ betetzen dutenak. Erantzuna ezezkoa bada arrazoitu erantzuna. **(0.5 puntu)**

$A\cdot\overline{x}=\overline{0}$ betetzen duten bektore propioak $\lambda=0$ balio propioari elkartutako bektore propioak dira. Balio propio bat nulua izateko $a=0$ izan behar da. Beraz, $A\cdot\overline{x}=\overline{0}$ betetzen duten bektore propioak $\lambda=a=0$ balio propioari elkartutakoak dira:

$$A\big|_{a=0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma = \{\lambda_1 = 2,\, \lambda_2 = 1,\, \lambda_3 = 0,\, \lambda_4 = -1\}$$

- $S(\lambda=0)=\left\{\vec{x}\,/\,(A-0\cdot I)\cdot\vec{x}=\vec{0}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z=t \end{cases} \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow S(0)=\mathfrak{L}\left(\left\{\overline{v}_1=(0,0,1,1)\right\}\right)$$

(3.) Izan bedi A matrizearen zutabeetan dauden bektoreek sortzen duten S azpiespazio bektoriala. Kalkulatu S azpiespazioaren dimentsioa $a\in\mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera. Lortutako kasu ezberdinetarako lortu S-ren Bs oinarri bat eta bere dimentsioa. **(0.5 puntu)**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = -2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

1. $\boxed{a\neq 0}$

$$h(M)=4 \Rightarrow S=\mathfrak{L}\left(\left\{\, (2,1,0,0),\, (0,1,1,0),\, (0,0,a,1), (0,0,0,-1)\,\right\}\right)$$

$$\dim(S)=4 \Rightarrow B_S=\{(2,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,a,1),(0,0,0,-1)\}$$

2. $\boxed{a=0}$

$$h(M)=3 \Rightarrow S=\mathfrak{L}(\{(2,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1),(0,0,0,-1)\})$$

$$\dim(S)=3 \Rightarrow B_S=\{(2,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$$

(4.) a=1 kasurako lortu $\mathbb{R}^4$-ko oinarri kanonikotik Bs oinarrirako koordenatu-aldaketaren iragaite matrizea.

(0.5 puntu)

$$B_S=\{(2,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,0,0,-1)\}$$

$$B_{R^4}=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

$$C_{B_S}(\vec{x})=P_{B_{R^4}\to B_S}\cdot C_{B_{R^4}}(\vec{x})$$

$$(1,0,0,0)=\alpha_1\cdot(2,1,0,0)+\alpha_2\cdot(0,1,1,0)+\alpha_3\cdot(0,0,1,1)+\alpha_4\cdot(0,0,0,-1)$$
$$(0,1,0,0)=\beta_1\cdot(2,1,0,0)+\beta_2\cdot(0,1,1,0)+\beta_3\cdot(0,0,1,1)+\beta_4\cdot(0,0,0,-1)$$
$$(0,0,1,0)=\gamma_1\cdot(2,1,0,0)+\gamma_2\cdot(0,1,1,0)+\gamma_3\cdot(0,0,1,1)+\gamma_4\cdot(0,0,0,-1) \quad \alpha_1$$
$$(0,0,0,1)=\delta_1\cdot(2,1,0,0)+\delta_2\cdot(0,1,1,0)+\delta_3\cdot(0,0,1,1)+\delta_4\cdot(0,0,0,-1)$$

$$P_{B_{R^4}\to B_S}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1&\delta_1\\\alpha_2&\beta_2&\gamma_2&\delta_2\\\alpha_3&\beta_3&\gamma_3&\delta_3\\\alpha_4&\beta_4&\gamma_4&\delta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&0&0\\-1/2&1&0&0\\1/2&-1&1&0\\1/2&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

3. ARIKETA	(2.5 puntu)

Izan bedi $\left(\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R}),<,>\right)$ espazio bektorial euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekin, eta izan bedi honako azpiespazio bektoriala:

$$U \equiv \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2x2}(R) \,/\, A \textit{ matrizea antisimetrikoa da} \right\}$$

(1.) Zehaztu U azpiespazio bektorialaren oinarri eta dimentsioa. **(0.75 puntu)**

$$A = -A^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -a \\ b = -c \\ c = -b \\ d = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d = 0 \\ c = -b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \mathfrak{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \quad \dim(U) = 1$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim(U) = 1$$

(2.) Kalkulatu $U^{\perp}$, U azpiespazioarekiko ortogonala den azpiespazio bektorialaren oinarri bat eta dimentsioa **(0.75 puntu)**

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U^{\perp} = \mathfrak{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$B_{U^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim(U^{\perp}) = 3$$

(3.) Lortu $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen hurbilketa onena $U^{\perp}$ azpiespazioaren gainean. Kalkulatu hurbilketan egindako errorea. **(puntu 1)**

Aurreko atalean lortutako oinarria ortogonala da:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$X' = P_{U_1}(X) + P_{U_2}(X) + P_{U_3}(X) = \frac{\langle X, U_1 \rangle}{\|U_1\|^2} \cdot U_1 + \frac{\langle X, U_2 \rangle}{\|U_2\|^2} \cdot U_2 + \frac{\langle X, U_3 \rangle}{\|U_3\|^2} \cdot U_3$$

$$\langle X, U_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \quad \|U_1\|^2 = \langle U_1, U_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

$$\langle X, U_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \quad \|U_2\|^2 = \langle U_2, U_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2$$

$$\langle X, U_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \quad \|U_1\|^2 = \langle U_1, U_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

$$X' = \frac{2}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \|X - X'\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

4. ARIKETA (2.5 puntu)

Erantzun itzazu hurrengo galderak erantzuna arrazoituz:

(1.) Izan bedi $A=\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}$ matrizea **(0.9 puntu)**

a) Lortu m eta n-ren balioak A idenpotentea izateko

A idenpotentea: $A=A^2$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 1 & m+m\cdot n \\ n+1 & m & n^2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} m=2m \\ 0=m^2 \\ 0=m \\ m=m\cdot(1+n)\Rightarrow\begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases} \\ 1=n+1 \\ 0=m \\ n=n^2 \end{cases}$$

b) Lortu m eta n-ren balioak A inbolutiboa izateko

A inbolutiboa: $A^2=I$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 1 & m+m\cdot n \\ n+1 & m & n^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I\Rightarrow\begin{cases} m=0 \\ n=-1 \end{cases}$$

c) Lortu m eta n-ren balioak A periodikoa izateko, periodoa 2 izanik

A periodikoa, periodoa bi izanik: $A^3=A$

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 1 & m+m\cdot n \\ n+1 & m & n^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2+1 & 3m & 2m^2+m^2n \\ m(2+n) & m^2+1 & m+m\cdot n(1+n) \\ n^2+n+1 & m(1+n) & m^2+n^3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases}\vee\begin{matrix} m=0 \\ n=-1 \end{matrix}$$

(2.) Izan bedi ekuazio linealetako honako sistema: $\begin{cases} x-y=2 \\ a\cdot x+y+2z=0 \\ x-y+a\cdot z=1 \end{cases}$ **(0.4 puntu)**

Klasifikatu sistema a parametroaren balioen arabera.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{E_2-aE_1 \\ E_3-E_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1+a & 2 & -2a \\ 0 & 0 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$|A| = a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \vee \\ a = -1 \end{cases}$$

- $a = 0$

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad h(A) = 2 \neq 3 = h(AM) \Rightarrow Bateraezina$$

- $a = -1$

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad h(A) = 2 = h(AM) \Rightarrow S.B.I.$$

- $a \neq -1 \wedge a \neq 0 \qquad h(A) = h(AM) = 3 \Rightarrow S.B.D.$

(3.) Izan bedi $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & m+4 & -4 \end{pmatrix}$ matrizea. **(0.4 puntu)**

m-ren zein baliotarako existitzen da B^{-1}?

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & m+4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & m \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & m+4 & -4 \end{vmatrix} = (m+4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(m+4) \cdot (m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ \vee \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\exists B^{-1} \quad \forall m \neq \{-4, 2\}$$

(4.) Izan bedi S azpiespazioko $\vec{x}$ bektorea eta $\vec{x}'$ bektorea $\vec{x}$-ren hurbilketa onena $S^{\perp}$ azpiespazioan. $\vec{x}'$ lortzerakoan zer nolako berezitasunaz ohartzen gara? **(0.4 puntu)**

S azpiespazioko bektoreak $S^{\perp}$ azpiespazioko bektoreekiko ortogonalak direnez, beraien arteko ebakidura bakarra bektore nulua izango da, beraz, hurbilketarik onena lortzerakoan lortuko dugun bektorea, bektore nulua izango da.

(5.) 3 ezezagun eta 4 ekuazio dituen sistema bat, sistema bateragarri indeterminatua al da? **(0.4 puntu)**

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} 1 \le h(A) \le 3 \\ 1 \le h(AM) \le 4 \end{array}$$

$$h(A)=1 \wedge h(AM)=1 \Rightarrow S.B.I.$$
$$h(A)=1 \wedge h(AM)=2 \Rightarrow S.Bateraezina$$
$$h(A)=2 \wedge h(AM)=2 \Rightarrow S.B.I.$$
$$h(A)=2 \wedge h(AM)=3 \Rightarrow S.Bateraezina$$
$$h(A)=3 \wedge h(AM)=3 \Rightarrow S.B.D.$$
$$h(A)=3 \wedge h(AM)=4 \Rightarrow S.Bateraezina$$