INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK

4. Zorizko aldagai jarraitua

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

4. Zorizko aldagai jarraitua

4.1. Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

- 4.1.1. Banaketa funtzioa
- 4.1.2. Dentsitate funtzioa
- 4.1.3. Batezbestekoa edo itxaropena
- 4.1.4. Bariantza eta desbiderazio tipikoa
- 4.1.5. Tchebyshev-en teorema
- 4.1.6. Aldagai tipifikatuak

4.2. Banaketa garrantzitsu batzuk

- 4.2.1. Banaketa Uniformea
- 4.2.2. Banaketa Esponentziala
- 4.2.3. Banaketa Normala

4. Zorizko aldagai jarraitua

4.3. Banaketen arteko konbergentzia

4.3.1. Limite zentralaren teorema

4.3.2. Lindeberg-Lévy-ren teorema

4.3.3. Moivre-ren teorema

4.3.4. Banaketa binomialaren eta banaketa normalaren arteko erlazioa

4.3.5. Poisson-en banaketaren eta banaketa normalaren arteko erlazioa

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

Zorizko aldagai jarraitua

Aurreko gaian X zorizko aldagai bat Ω lagin-espazioan definitutako funtzio bat bezala definitzen zen non lagin-espazioko gertaera bakoitzari zenbaki bar egokitzen zion.

X aldagai horrek tarte bateko edo hainbat tarteko edozein balio har badezake, X aldagai hori zorizko aldagai jarraitua da.

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

4.1.1 Banaketa funtzioa:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua Ω lagin-espazioan definiturik.

Hurrengo aplikazioa, X zorizko aldagaiaren banaketa funtzioa da:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

Banaketa funtzioak hurrengo propietateak betetzen ditu:

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1$

2) $F(x)$ eskuinetik jarraitua da.

3) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

4) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

5) $F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

4.1.2 Dentsitate funtzioa:

$F(x)$ banaketa funtzioa deribagarria bada, X zorizko aldagai jarraituaren dentsitate funtzioa $f(x)$ hurrengoa da:

$$f(x) = F'(x)$$

$f(x)$ funtzioa dentsitate funtzioa da baldin hurrengo propietateak betetzen baditu:

Propietateak:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Bestalde:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;\; x_1 < x_2$$

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

Beraz, izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. Orduan,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Oharra:

X zorizko aldagai jarraitua bada: $P(X = x) = 0$

$$P(X = x) = P(x \leq X \leq x) = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0$$

Hau da, X zorizko aldagai jarraituak balio finko bat hartzeko probabilitatea nulua da.

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

Propietateak:

1) $$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2)$$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2)$$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

2) $$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) =$$

$$= P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$

3) $$P(X > x) = 1 - P(X \le x)$$

$$P(X \ge x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \le x) = P(X > x)$$

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

Adibidea

1) Izan bitez $k>0$ konstantea eta

$$f(x)=\begin{cases} kx(1-x) & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

a) Kalkula ezazu k konstantearen balioa $f(x)$ funtzioa dentsitate funtzioa izan dadin.

b) k konstantea aurreko atalean lortutako baliora finkatu ondoren. Izan bedi X, $f(x)$ dentsitate funtzioa duen zorizko aldagai jarraitua. Kalkula itzazu $F(x)$, $P(X\ge 3)$, $P(X>0.3)$

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

4.1.3 Batezbestekoa edo itxaropen matematikoa:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. X zorizko aldagai jarraituaren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa, μ , hurrengoa da:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Adibidea

Aurreko adibidean,

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{0}^{1} x \cdot 6x\left(1 - x\right) dx = \frac{1}{2}$$

Esperimentua egin aurretik espero dugun emaitza.

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

Oharra: (Kasu diskretuan gertatzen den bezala)

μ batezbesteko edo itxaropen matematikoa **teorikoa** da, $\overline{x}$ aldiz, batezbesteko **enpirikoa** (datuak erabiliz lortzen dena) da.

Propietateak:

Zorizko aldagai diskretuetarako dituen propietateak mantentzen dira:

1) $E(k)=k,\ \ k$ konstantea izanik

2) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai jarraituak

$$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)$$

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

3) Izan bitez k konstantea, eta X zorizko aldagai jarraitua:

$$E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$$

4) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai jarraituak eta k_i konstanteak $\forall i = 1, \ldots, n$

$$E(k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot X_2 + \ldots + k_n \cdot X_n) = k_1 \cdot E(X_1) + k_2 \cdot E(X_2) + \ldots + k_n \cdot E(X_n)$$

5) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai jarraitu independenteak

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \ldots \cdot E(X_n)$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.1.4 Bariantza eta desbiderazio tipikoa:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua. X zorizko aldagai jarraituaren bariantza, σ_x^2 edo $Var(X)$ denotatzen dena:

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx$$

Kalkuluak errazteko:

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu_x^2$$

Bariantzaren erro karratu positiboa desbiderazio tipikoa da:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$$

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

Propietateak:

Bariantzak zorizko aldagai diskretuetarako betetzen dituen propietateak mantentzen dira.

1) $Var(X) \geq 0$, X edozein zorizko aldagai jarraitua izanik

2) $Var(k) = 0$, k edozein konstante izanik

3) Izan bitez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai jarraitu independenteak

$$Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)$$

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

4) Izan bitez k konstantea eta X zorizko aldagai jarraitua

$$Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X)$$

5) Izan bitez k konstantea eta X zorizko aldagai jarraitua

$$Var(X + k) = Var(X)$$

Adibidea Aurreko adibidean

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu_x^2 = 0.05$$

Ondorioz, desbiderazio tipikoa:

$$\sigma = 0.2236$$

4.1.5 Tchebyshev-en teorema:

Izan bedi X zorizko aldagai jarraitua, zeinek μ batezbestekoa eta σ desbiderazio tipiko finitua dituen. Orduan, ondokoa beteko da:

$$P(|X-\mu|<k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2} \quad \forall k>0$$

Teorema honen bidez, zorizko aldagai diskretuan gertatzen zen bezalaxe, X zorizko aldagaiaren balioak $(\mu-k\sigma, \mu+k\sigma)$ tartean izateko probabilitatearen behe-bornea kalkula daiteke.

4.1 Zorizko aldagai jarraituaren ezaugarriak

Zorizko aldagai Jarraituaren ezaugarriak

Banaketa funtzioa

Dentsitate funtzioa

Batezbestekoa edo itxaropena

Bariantza eta desbiderazio tipikoa

Tchebyshev-en teorema

Aldagai tipifikatuak

Banaketa garrantzitsu batzuk

Banaketen arteko konbergentzia

4.1.6 Aldagai tipifikatuak:

Izan bedi X, μ batezbestekoa eta σ desbiderazio tipikoa dituen zorizko aldagai jarraitua.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z zorizko aldagai jarraituak 0 batezbestekoa eta 1 desbiderazio tipikoa ditu.

Z aldagaiari X aldagaiaren tipifikazioa deritzo.

Oharra:

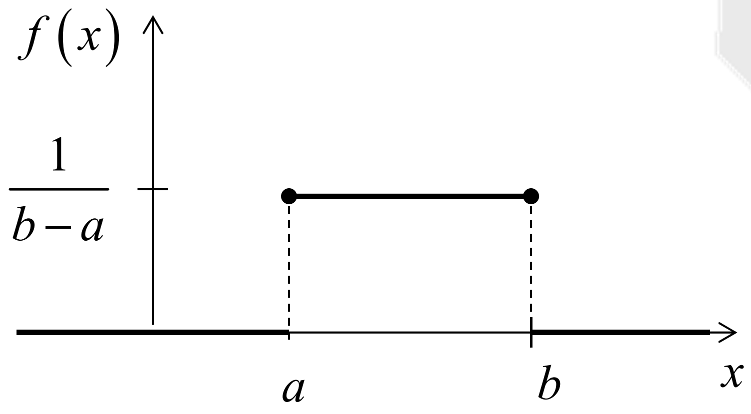
Edozein zorizko aldagai tipifika daiteke, bai zorizko aldagai diskretuak, bai zorizko aldagai jarraituak ere.

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.1. Banaketa uniformea $X \sim U[a,b]$

X zorizko aldagai jarraituak $[a,b]$ tartean Banaketa Uniformea du, baldin eta ondoko dentsitate-funtzioa badu:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$



Zorizko aldagai Jarraituaren ezaugarriak

Banaketa garrantzitsu batzuk

Banaketa uniformea

Banaketa esponentziala

Banaketa normala

Banaketen arteko konbergentzia

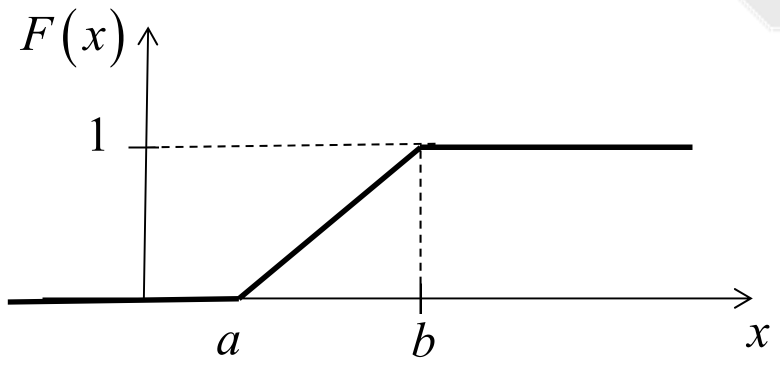
4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.1. Banaketa uniformea $X \sim U[a,b]$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P\left(X \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(t\right) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = P\left(X \le x\right) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.1. Banaketa uniformea $X \sim U[a,b]$

Batezbestekoa:

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}$$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.1. Banaketa Uniformea

Adibidea

2) Konpainia batean asteko telefono-gastuak, uniformeki 100 euro eta 150 euro bitartekoak dira.

a) Kalkulatu konpainiaren asteko batezbesteko telefono gastua eta desbiderazio tipikoa.

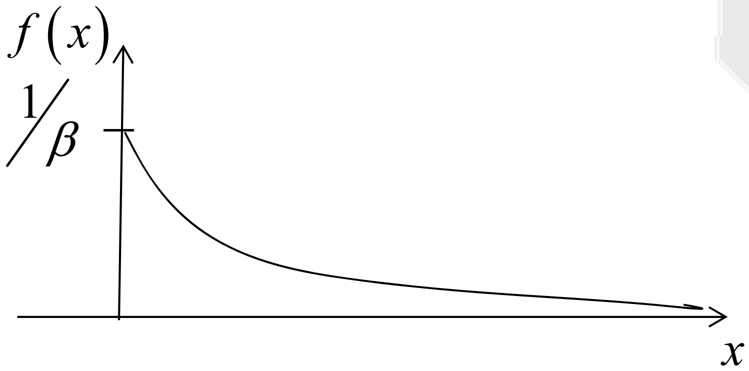
b) Zein da aste batean 120 euro baino gutxiagoko telefono gastua izateko probabilitatea?

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.2. Banaketa esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

X zorizko aldagai jarraituak β parametrodun banaketa esponentziala du baldin eta bere dentsitate-funtzioa hurrengoa bada:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad \beta > 0 \; izanik$$



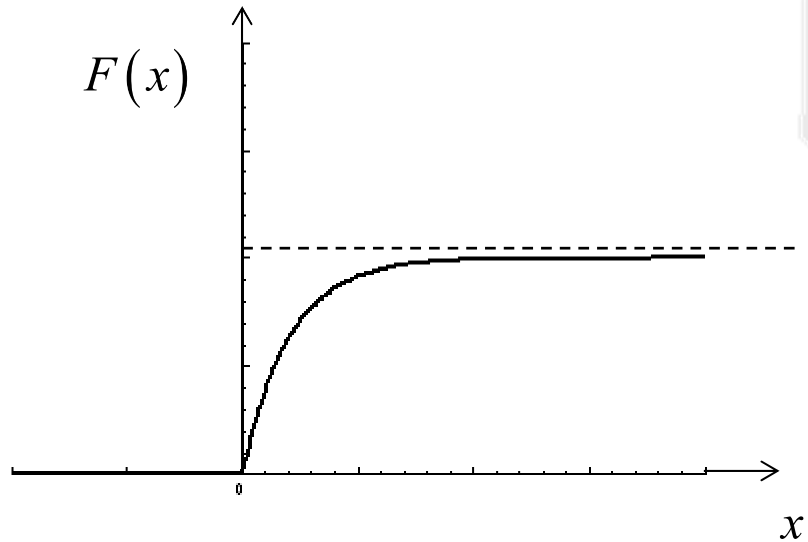
4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.2. Banaketa esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = P\left(X \le x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(t\right)\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-x/\beta} & x > 0 \end{cases}$$



4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

Zorizko aldagai Jarraituaren ezaugarriak

Banaketa garrantzitsu batzuk

Banaketa uniformea

Banaketa esponentziala

Banaketa normala

Banaketen arteko konbergentzia

4.2.2. Banaketa esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

Batezbestekoa:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \beta$$

Bariantza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu_x^2 = \beta^2$$

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.2. Banaketa Esponentziala $X \sim \varepsilon(\beta)$

Adibidea

3) Substantzia erradiaktibo baten bizitza-aldiak 5 minutuko batezbesteko banaketa esponentziala du.

a) Zein da substantzia horrek 4 minutu eta 6 minutu arteko bizitza-aldia izateko probabilitatea?

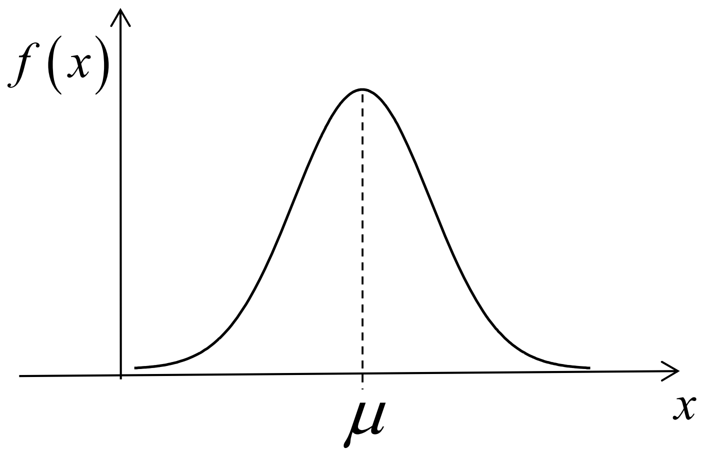
b) Jakinda substantziaren bizitza-aldia gutxienez 4 minutukoa dela, zein da 5 minutu baino gutxiagoko bizitza-aldia izateko probabilitatea?

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa normala $X \sim N(\mu,\sigma)$

X zorizko aldagai jarraituak μ eta σ parametrodun banaketa normala du, baldin eta ondoko dentsitate-funtzioa badagokio:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$



Gaussen kanpaia

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

Propietateak:

1) Dentsitate funtzioa $x = \mu$ balioarekiko simetrikoa da, $x = \mu$-n maximoa hartzen duelarik.

2) Banaketa mesokurtikoa da (g_2=0)

3) Moda,mediana eta batezbestekoa berdinak dira.

Batezbestekoa: $E(X) = \mu_x = \mu$

Bariantza: $\sigma_x^2 = Var(X) = \sigma^2$

Ondorioz, banaketaren parametroak μ batezbestekoa eta σ desbiderazio tipikoa dira.

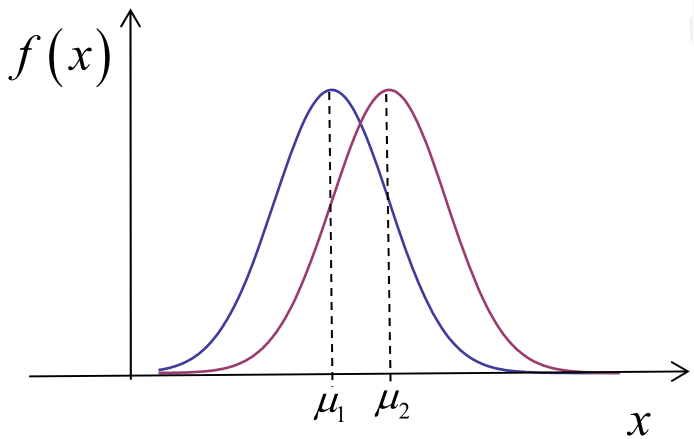
4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

Interpretazio geometrikoa:

- μ batezbestekoa translazio faktorea bezala uler daiteke:

Honela, desbiderazio tipiko berdina izanik batezbesteko desberdina duten banaketa normalen dentsitate-funtzioen kurbak berdinak dira, baina balio desberdinetan zentratuak daude.



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

Zorizko aldagai Jarraituaren ezaugarriak

Banaketa garrantzitsu batzuk

Banaketa uniformea

Banaketa esponentziala

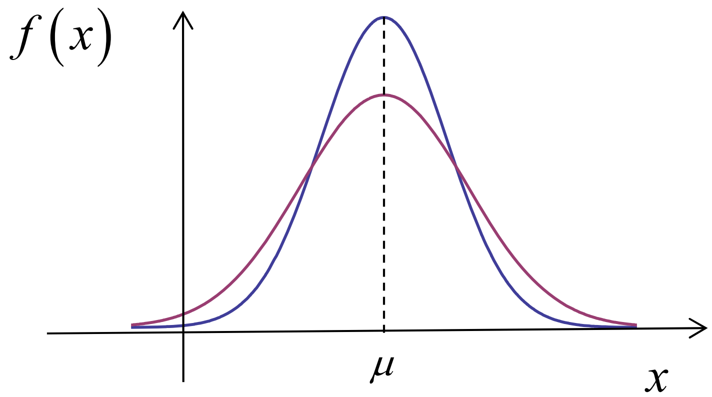
Banaketa normala

Banaketen arteko konbergentzia

4.2.3. Banaketa normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

- σ desbiderazio tipikoa eskala faktorea bezala uler daiteke:

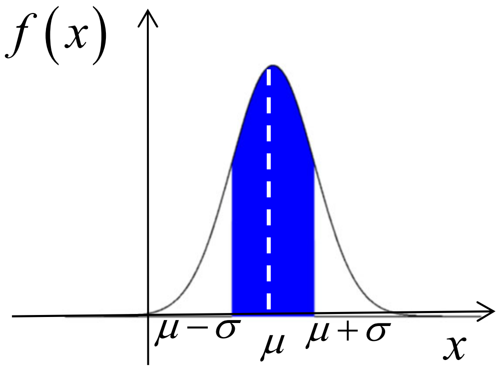
Gogoratu desbiderazio tipikoak, μ batezbestekoarekiko dagoen sakabanaketa neurtzen duela. Ondorioz, desbiderazio tipikoa altua bada, sakabanaketa handia da eta desbiderazio tipikoa txikia bada berriz sakabanaketa txikia da. Honela, batezbesteko berdina baina desbiderazio tipiko desberdina duten banaketa normalak balio berdinean zentratuak daude baina anplitude desberdina dute.

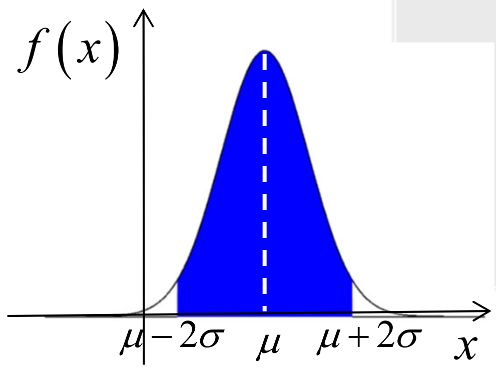


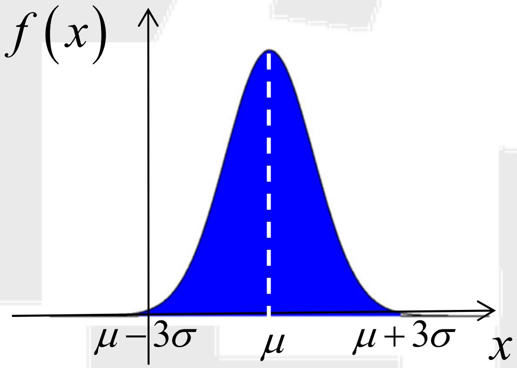
4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

Interpretazio probabilistikoa:







- $(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma)$ balioen artean probabilitatea %68a
- $(\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma)$ balioen artean probabilitatea %95a
- $(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$ balioen artean probabilitatea %99a

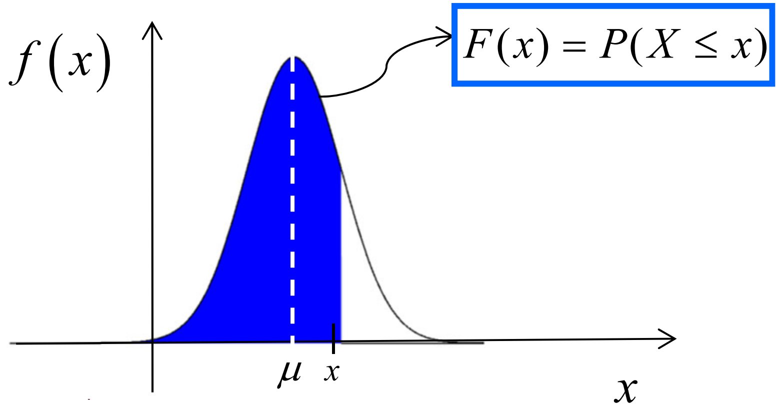
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3. Banaketa normala $X \sim N(\mu, \sigma)$

Banaketa funtzioa:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dt$$



Integral hau zenbakizko metodoen bidez kalkulatu beharra dago. Eragozpen hau gainditzeko Z aldagai tipifikatua erabiliko dugu.

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

4.2.3.1. Banaketa normal tipikoa edo estandarra

Izan bedi $X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Z zorizko aldagai jarraituak $\mu_Z = 0$ eta $\sigma_Z = 1$ parametroko banaketa normal tipikoa edo estandarra da, bere dentsitate funtzioa hurrengoa izanik:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

Ondorioz:

R erabiliz kalkulatuko dugu

$$P(X \le x) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \le \underbrace{\frac{x-\mu}{\sigma}}_{z}\right) = P(Z \le z)$$

4.2 Banaketa garrantzitsu batzuk

Adibideak

4) Populazio jakin batean 18 urte dituzten gazteen pisuak N(66,8) banaketa du. Kalkula itzazu:

a) 80 kg baino gehiago pisatzeko probabilitatea.

b) 70 kg baino gutxiago pisatzeko probabilitatea.

c) 50 kg baino gehiago eta 80 kg baino gutxiago pisatzeko probabilitatea.

5) Zorizko aldagai batek $\mu = 65.6$ batezbestekodun banaketa normala du.

a) Aldagaiak 60 baino txikiagoak diren balioak hartzeko probabilitatea 0.352 dela jakinda, kalkula bedi aldagai horren desbiderazio tipikoa.

b) Zein x baliok uzten du banaketaren %87.9 eskuinean?

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.1. Limite zentralaren teorema

Izan bedi $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ batezbesteko finituak, $\mu_i = E(X_i)$, eta bariantza finituak $\sigma_i^2 = Var(X_i), \forall i = 1, 2, \ldots, n$ dituzten zorizko aldagai independenteren segida bat. Orduan, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ zorizko aldagaiak $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ batezbestekoa

eta $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ bariantza izango ditu.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.1. Limite zentralaren teorema

$$Z = \frac{X - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$ zorizko aldagaia kontsideratuz:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z < z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz, \quad \forall z_1 \in \mathbb{R}$$

Hau da, edozein izanik X_i zorizko aldagai idependenteren banaketak, bai diskretuak bai jarraituak, n nahikoa handia bada, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ asintotikoki banaketa normal bat jarraituko du.

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.1. Limite zentralaren teorema

Beste era batera, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ zorizko aldagaiak, $n \to \infty$,

$$N\left(\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$ banaketa normalarekin bat

egiten du.

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.2. Lindeberg-Lévy-ren teorema

Izan bedi $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ berdinki banatuak dauden eta batezbestekoa μ eta bariantza σ^2 finituak dituzten zorizko aldagai independenteren segida bat. Orduan, $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ zorizko aldagaiak $n\mu$ batezbestekoa eta $n\sigma^2$ bariantza ditu.

Limite zentralaren teorema aplikatuz, $Z=\dfrac{X-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ zorizko aldagaia, $n\to\infty$, $N(0,1)$ banaketara hurbilduko da.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.2. Lindeberg-Lévy-ren teorema

Beraz, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ zorizko aldagaiak asintotikoki $N\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right)$ banaketa normala jarraituko du.

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.3. Moivre-ren teorema

Lindeberg-Lévy-ren teoremaren kasu partikularra da. $X \sim Bin(n, p)$ banaketa binomiala jarraitzen duen X zorizko aldagai diskretua, p parametrodun Bernoulliren banaketa jarraitzen duten n zorizko aldagai independenteren batuketa bezala kontsideratu daiteke, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Hauetako zorizko aldagai bakoitzak batezbesteko, $\mu_i = p$, eta bariantza, $\sigma_i^2 = pq, \forall_i = 1, 2, \ldots, n$ berdinak dituzte.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.3. Moivre-ren teorema

Lindeberg-Lévy-ren teorema erabiliz, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p)$ zorizko aldagaiak asintotikoki ondorengo banaketa normala, $N\left(\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}\right)$ jarraituko du.

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.4. Banaketa binomialaren eta banaketa normalaren arteko erlazioa:

$X \sim Bin(n, p)$ bada eta n infiniturantz doanean Moivre-ren teoremagatik banaketa binomiala banaketa normal baten bidez hurbildu daiteke non $\mu = np$ eta $\sigma = \sqrt{npq}$.

$$n \ \text{"handia"} \ \left. n \to \infty \right\} \Rightarrow Bin(n, p) \cong N\left(np, \sqrt{npq}\right)$$

Hurbilketa hau geroz eta hobea da n handiagoa denean eta p 0.5 baliotik hurbilago dagoenean. Praktikan, $np > 5$ eta $nq > 5$ betetzen denean onartuko da.

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

4.3.5. Poisson banaketaren eta banaketa normalaren arteko erlazioa:

$X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ bada eta λ infiniturantz doanean Lindeberg-Lévy-ren teoremarengatik Poisson-en banaketa banaketa normal bate bidez hurbildu daiteke, non $\mu = \lambda$ eta $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathscr{P}(\lambda) \\ \lambda \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{P}(\lambda) \cong N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

Hurbilketa hau geroz eta hobeagoa da λ geroz eta handiagoa denean. Praktikan, hurbilketa hau $\lambda > 18$ denean onartuko da.

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

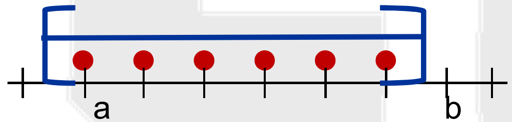
4.3 Banaketen arteko konbergentzia

Oharra:

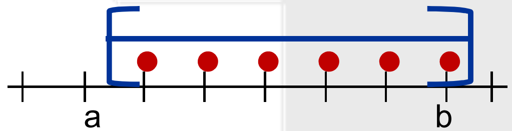
Kasu hauetan banaketa diskretuak banaketa jarraituen bidez hurbiltzen direnez, 0.5-eko faktorearen bidezko **jarraitutasun-zuzenketa** aplikatuko da, hau da:

$X = a$ gertaeraren probabilitatea $a - 0.5 \leq X \leq a + 0.5$ gertaeraren probabilitatea erabiliz kalkulatuko da.

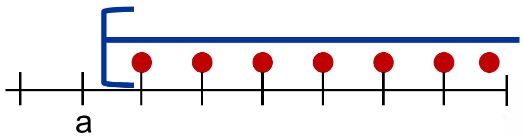
$$P[a \leq X < b] = P[a - 0.5 \leq X < b - 0.5]$$



$$P[a < X \leq b] = P[a + 0.5 \leq X < b + 0.5]$$



$$P[a < X] = P[a + 0.5 < X]$$



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

4.3 Banaketen arteko konbergentzia

Adibideak

6) Kalkula ezazu dado orekatu bat 200 aldiz jaurtitzean bat balioa gutxienez 25 aldiz eta gehienez 35 aldiz ateratzeko probabilitatea.

7) Hozte-sistemak konpontzen dituen enpresa batek hilero, batezbeste, 20 hozte-sistema konpontzen ditu. Kalkula bedi hilabete batean enpresak duen:

   a) Zortzi hozte-sistema konpontzeko probabilitatea

   b) Gutxienez bost hozte-sistema konpontzeko probabilitatea.

   c) Gehienez sei hozte-sistema konpontzeko probabilitatea