eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

30 de junio de 2021

Apellidos:	***Nombre:***

PRIMER PARCIAL - TIEMPO: 1hora

EJERCICIO 1:

Calcular el valor de la siguiente expresión, siendo A y B matrices ortogonales:

$$\left(A^2 - B\right)^T - (A \cdot B)^{-1} + B^{-1} - \left(A^{-1}\right)^2 + (A \cdot B)^T .$$

(1 punto)

Solución:

Atendiendo a la definición de matriz ortogonal,

$$A^{-1} = A^T , \quad B^{-1} = B^T$$

y, consecuentemente,

$$\left(A^2 - B\right)^T - (A \cdot B)^{-1} + B^{-1} - \left(A^{-1}\right)^2 + (A \cdot B)^T =$$

$$= \left(A^2\right)^T \cancel{- B^T} - B^{-1} \cdot A^{-1} \cancel{+ B^T} - \left(A^T\right)^2 + B^T \cdot A^T =$$

$$= \cancel{\left(A^T\right)^2} \cancel{- B^T \cdot A^T} - \cancel{\left(A^T\right)^2} \cancel{+ B^T \cdot A^T} = (0) .$$

Otras propiedades utilizadas:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T .$$

EJERCICIO 2:

Obtener el rango de la siguiente matriz en función de los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(1.75 puntos)

Solución:

Mediante transformaciones elementales de filas intentaremos escalonar la matriz del enunciado

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix} \underset{\substack{<F_4 \to F_4 - F_1> \\ <F_5 \to F_5 - F_1>}}{\overset{\substack{<F_2 \to F_2 + \alpha \cdot F_1> \\ <F_3 \to F_3 - F_1>}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \overset{<F_2 \leftrightarrow F_3>}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \overset{<F_3 \to F_3 + F_2>}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \underset{<F_4 \to F_4 + F_3>}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \underset{<F_5 \to F_5 + F_4>}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(\alpha+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Teniendo en cuenta que las matrices A y B tienen el mismo rango, se presentan dos casos:

$\alpha \neq -1$: $rg(A) = rg(B) = 4$

$\alpha = -1$: $rg(A) = rg(B) = 1$

EJERCICIO 3:

Calcular, utilizando el método de Gauss, la inversa de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3.25 puntos)

Solución:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_4 \to F_4 - 2F_1 \rangle]{\langle F_3 \to F_3 - 2F_1 \rangle} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\langle F_3 \to F_3 - (1/2)F_2 \rangle]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/2} & -2 & -2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_4 \to F_4 + 2F_3 \rangle]{\langle F_2 \to F_2 + 2F_3 \rangle}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -2 & -2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\langle F_2 \to F_2 - F_4 \rangle \\ \langle F_3 \to F_3 - F_4 \rangle}]{\langle F_1 \to F_1 + (1/2)F_4 \rangle}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 4 & 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\langle F_3/(-1/2) \rangle \\ \langle F_4/(-2) \rangle}]{\langle F_2/2 \rangle}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1/2 & -1 & -1/2 \end{array}\right) = \left(I | A^{-1}\right) \implies \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -8 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

Nota: Durante el proceso de eliminación gaussiana se ha comprobado que el determinante de la matriz a invertir es 2, no nulo y por tanto la matriz A es invertible (el determinante de la matriz de partida coincide con el determinante de la matriz diagonal obtenida).

EJERCICIO 4:

A) Calcular una base del subespacio vectorial

$$T=\left\{\begin{pmatrix}x+z+t & 2x+y+3z+t & -x+y-2t\end{pmatrix}/\ x,y,z,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

(1.75 puntos)

B) Sea $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\end{pmatrix}\right\}$ una base de un subespacio vectorial U.

i. Calcular los valores de α para los cuales $\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\end{pmatrix}\in U$.

ii. Sea $V=\left\{\begin{pmatrix}x & 0 & x\end{pmatrix}/\ x\in\mathbb{R}\right\}$, ¿está $V\subseteq U$? Razonar la respuesta.

(1.5 + 0.75 = 2.25 puntos)

Solución:

A) Estamos trabajando en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, espacio vectorial de dimensión 3

$$T=\left\{\begin{pmatrix}x+z+t & 2x+y+3z+t & -x+y-2t\end{pmatrix}/\ x,y,z,t\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{x\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\end{pmatrix}/\ x,y,z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

con lo que tendremos que estudiar el rango de la matriz formada por los 4 vectores anteriores

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\underset{<F_3\to F_3+F_1>}{\overset{<F_2\to F_2-2F_1>}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\underset{<F_3\to F_3-F_2>}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

A la vista de los resultados, la matriz es de rango 2, de los 4 vectores solamente dos son linealmente independiente, por ejemplo, los dos primeros, concluyendo que $\dim(T)=2$ y

$$B_T=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

B) $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\end{pmatrix}\right\}$ es base porque los dos vectores que la integran son linealmente independientes

$$rg\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}=2$$

de forma que $\dim(U)=2$.

i. $\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\end{pmatrix}\in U \iff \exists\lambda,\gamma\ /\ \lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\end{pmatrix}$

resultando un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\left\{\begin{array}{lllll}\lambda & + & \gamma & = & 1 \quad\to\quad \gamma=1-\lambda \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to\quad \gamma=-1\\ 2\lambda & + & 3\gamma & = & 1 \qquad\qquad \to\quad 2\lambda+3-3\lambda=-\lambda+3=1\ \to\ \lambda=2\\ -\lambda & & & = & \alpha \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to\quad \boxed{\alpha=-2}\end{array}\right.$$

ii. Para que $V\subseteq U$ se debe verificar que cualquiera que sea x

$$\exists\lambda,\gamma\ /\ \lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0 & x\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll}\lambda & + & \gamma & = & x \qquad\qquad\qquad \to\quad \gamma=x-\lambda=2x\\ 2\lambda & + & 3\gamma & = & 0 \qquad\qquad\qquad \to\quad -2x+6x=4x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0\\ -\lambda & & & = & x \quad\to\quad \lambda=-x\end{array}\right.$$

con lo que el único vector de V que está en U es el vector nulo. Consecuentemente $V\not\subseteq U$.

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

SEGUNDO PARCIAL - TIEMPO: 1hora y 15 minutos

EJERCICIO 5:

A) Obtener una base del subespacio vectorial $S^{\perp}$ siendo S el subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^3$ generado por la familia $\{(2 \quad -1 \quad 1)\}$.

(1 punto)

B) Sea $B=\{(1 \quad 2 \quad -1),(1 \quad 3 \quad 0)\}$ una base de un subespacio vectorial U.

i. Obtener una base ortonormal de U.

ii. ¿Pertenece el vector $\vec{v}=(1 \quad 1 \quad 1)$ al subespacio U? En caso negativo, calcular la mejor aproximación de v en el subespacio U.

(2 + 3 = 5 puntos)

Solución:

A) Por definición

$$S^{\perp}=\{\vec{v}\in\mathbb{R}^3 / \vec{v}\perp\vec{u} \quad \forall\vec{u}\in S\}$$

y por ser S un subespacio de dimensión finita, $B_S=\{(2 \quad -1 \quad 1)\}$, se tratará de encontrar los vectores que sean ortogonales a los elementos de la base de S

$$\vec{v}\perp(2 \quad -1 \quad 1) \iff \langle\vec{v},(2 \quad -1 \quad 1)\rangle=\langle(x \quad y \quad z),(2 \quad -1 \quad 1)\rangle=2x-y+z=0.$$

Observamos que $S^{\perp}$ está caracterizado por una ecuación, $y=2x+z$, con lo que

$$\dim(S^{\perp})=\dim(\mathbb{R}^3)-r=3-1=2$$

$$S^{\perp}=\{(x \quad 2x+z \quad z)\in\mathbb{R}^3 / x,z\in\mathbb{R}\}=\{x(1 \quad 2 \quad 0)+z(0 \quad 1 \quad 1) / x,z\in\mathbb{R}\}=$$
$$=span\{(1 \quad 2 \quad 0),(0 \quad 1 \quad 1)\}.$$

Teniendo en cuenta que los vectores anteriores son linealmente independientes entonces forman una base

$$\boxed{B_{S^{\perp}}=\{(1 \quad 2 \quad 0),(0 \quad 1 \quad 1)\}}.$$

B)

i. Apliquemos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base

$$B_U=\{(1 \quad 2 \quad -1),(1 \quad 3 \quad 0)\}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$$

Paso 1: $\vec{w}_1=\vec{u}_1$

Paso 2: $\vec{w}_2=\vec{u}_2-\alpha\cdot\vec{w}_1$ eligiendo α para que este nuevo vector sea ortogonal al anterior

$$\alpha=\frac{\langle\vec{u}_2,\vec{w}_1\rangle}{\langle\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle}=\frac{\langle(1 \quad 3 \quad 0),(1 \quad 2 \quad -1)\rangle}{\langle(1 \quad 2 \quad -1),(1 \quad 2 \quad -1)\rangle}=\frac{1+6-0}{1+4+1}=\frac{7}{6} \implies$$

$$\implies \vec{w}_2=\vec{u}_2-\frac{7}{6}\cdot\vec{w}_1=(1 \quad 3 \quad 0)-\frac{7}{6}(1 \quad 2 \quad -1)=\left(-\frac{1}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{7}{6}\right).$$

Por otra parte

$$\|\vec{w}_1\| = \sqrt{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \implies \vec{v}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{w}_2\| = \sqrt{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{16}{36}+\frac{49}{36}} = \sqrt{\frac{66}{36}} \implies \vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \end{pmatrix}$$

Nueva base ortonormal: $\boxed{B^* = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \end{pmatrix} \right\}}$.

ii. $(1 \quad 1 \quad 1) \in U \iff \exists \alpha, \beta / \alpha \cdot (1 \quad 2 \quad -1) + \beta \cdot (1 \quad 3 \quad 0) = (1 \quad 1 \quad 1)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 & \to \quad \beta = 1-\alpha = 2 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 & \to \quad 3\beta = 1-2\alpha = 3 \to \beta = 1 \\ -\alpha = 1 \to \alpha = -1 & \end{cases}$$ caso no posible $\Longrightarrow \vec{v} \notin U$.

Proyectemos el vector $\vec{v} \notin U$ en U

$$\vec{v}^* = proy_U \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_2\|^2} \cdot \vec{v}_2 = \frac{2/\sqrt{6}}{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} + \frac{10/\sqrt{66}}{1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-10}{66} & \frac{40}{66} & \frac{70}{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{66} & \frac{84}{66} & \frac{48}{66} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{14}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix} = \vec{v}^*}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle = \left\langle (1 \quad 1 \quad 1), \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1+2-1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle = \left\langle (1 \quad 1 \quad 1), \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{-1+4+7}{\sqrt{66}} = \frac{10}{\sqrt{66}}$$

EJERCICIO 6:

Sean la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ b & -1 & a \end{pmatrix}$$

siendo $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Obtener los valores de a y b para los cuales $\lambda=3$ es un autovalor de A. ¿Quién sería un autovector asociado a ese autovalor?

(1 punto)

b) Obtener los valores de a y b para los cuales $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es un autovector de A. ¿A qué autovalor estaría asociado?

(0.75 puntos)

c) Para $a=3,\ b=0$ ¿es diagonalizable la matriz A?

(1.5 puntos)

d) Para $a=b=0$ calcular todos los autovectores asociados al autovalor $\lambda=0$.

(0.75 puntos)

Observación: todos los resultados del examen deberán ser justificados razonadamente

Solución:

a) Si $\lambda=3$ es un autovalor de A entonces $|A-3I|=0$

$$|A-3I|=\begin{vmatrix} 1-3 & -1 & 0 \\ 2 & -a-3 & 0 \\ b & -1 & a-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -a-3 & 0 \\ b & -1 & a-3 \end{vmatrix}=(a-3)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -a-3 \end{vmatrix}=2(a-3)\cdot(a+4)=0$$

y por lo tanto, independientemente del valor de b, $a=3$ o $a=-4$.

En el primero de los casos, $a=3$, el autovector asociado al autovalor $\lambda=3$ sería

$$(A-3I)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \\ bx - y = 0 \end{cases}\ \rightarrow\ \boxed{\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\quad \forall b\in\mathbb{R},$$

mientras que en el segundo caso, $a=-4$, el autovector asociado al autovalor $\lambda=3$ sería

$$(A-3I)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ b & -1 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \quad\rightarrow\quad y=-2x \\ bx - y - 7z = 0 \quad\rightarrow\quad z=(b+2)\cdot x/7 \end{cases}\ \rightarrow\ \boxed{\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ (b+2)/7 \end{pmatrix}}.$$

b) Si $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es un autovector existirá un λ verificando

$$A\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-a&0\\b&-1&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}2-(-2)=2\lambda\\4-(-2)a=-2\lambda\\2b-(-2)+a=\lambda\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=2\\4+2a=-4\\2b+2+a=2\end{cases}\quad\rightarrow\quad\boxed{\begin{matrix}\lambda=2\\a=-4\\b=2\end{matrix}}$$

c) En el supuesto $a=3,\ b=0$ calculemos el polinomio característico de la matriz resultante

$$|A-\lambda\cdot I|=\left|\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-3&0\\0&-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&0\\2&-3-\lambda&0\\0&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot(\lambda^2+2\lambda-1)=0$$

polinomio cuyas raíces son $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1+\sqrt{2}$ y $\lambda_3=-1-\sqrt{2}$

raíces todas ellas reales y distintas con lo que la multiplicidad algebraica y geométrica será 1 en todos los casos, pudiendo concluir que la matriz *A* es diagonalizable.

d) Considerando ahora $a=b=0$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad|A|=0\quad\rightarrow\quad\lambda=0\ \text{ es un autovalor}$$

$$(A-0\cdot I)\cdot\vec{x}=A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x-y=0\\2x=0\\-y=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\boxed{\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}}$$

de forma que

$$V(\lambda=0)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$