4. Gaia. Ariketak.
Espazio bektorial euklidearrak.

KLASEAN EGITEKO ARIKETAK:

1. Kalkulatu, ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, honako bektore, matrize eta polinomioen norma:

a) $\vec{v} = (0,1,4,2)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = (1,2,5,0)$

d) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

Emaitza: a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{31}$ c) $\sqrt{30}$ d) $\sqrt{15}$

2. Izan bitez $\vec{u} = (0,0,2), \vec{v} = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ bektoreak. Kalkulatu bi bektoreek osatzen duten angelua:

a) $\mathbb{R}^3$-ko ohiko biderkadura eskalarra erabiliz

b) Hurrengo biderkadura eskalarra erabiliz:

$$<\vec{u},\vec{v}> = <(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)> = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$$

Emaitza: a) $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ b) $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

3. Izan bitez honako bektore sistemak:

a) $F = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,1,0)\right\}$

b) $G = \{(0,0,1),(-1,0,0),(0,1,0)\}$

c) $H = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$

Adierazi zeintzuk diren ortogonalak eta zeintzuk ortonormalak $\mathbb{R}^3$ ohiko espazio bektorial euklidearrean.

Emaitza: a) Ez da ortogonala; b) Ortonormala da ; c) Ortogonala da

4. $\mathbb{R}^3$ ohiko espazio bektorial euklidearrean kalkulatu $\vec{u} = (2,0,-2)$ bektoreak $\vec{v} = (0,0,4)$ bektorearen gainean duen proiekzio ortogonala. Emaitza grafikoki interpretatu.

Emaitza: (0,0,-2)

5. Izan bedi $W = L\left(\left\{ (1,2,0,0),(1,0,0,2),(1,-1,-1,2) \right\}\right)$ $\mathbb{R}^4$-ko azpiespazioa, ohiko biderkadura eskalarra erabiliz:

a) Lortu *W*-ren oinarri ortonormal bat.

b) Osatu aurreko oinarria $\mathbb{R}^4$-ren oinarri ortonormal bat lortu arte.

Emaitza:

a) $B_W = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,0,5), \frac{1}{\sqrt{42}}(2,-1,-6,-1) \right\}$

b)

$$B_W = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,0,5), \frac{1}{\sqrt{42}}(2,-1,-6,-1), \frac{1}{\sqrt{7}}(2,-1,1,-1) \right\}$$

6. Izan bedi ($\mathbb{P}_2(x)$, <,>) espazio bektorial euklidearra, hurrengo biderkadura eskalarrarekin:

$$< p(x), q(x) >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

a) Lortu oinarri ortonormal bat

b) Lortu Gram-en matrizea oinarri kanonikoarekiko

c) Lortu x^2-1 polinomioaren proiekzio ortogonala $S=L\{(1,x)\}$ azpiespazioaren gainean.

Emaitza: a) $\bar{v} = \left\{ 1/\sqrt{3}, x/\sqrt{2}, (3/\sqrt{6})(x^2 - 2/3) \right\}$ b) $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) -1/3

7. Izan bedi $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = 0 \right\}$ azpiespazio bektoriala. Ohiko biderkadura eskalarra erabiliz:

a) Lortu S-rekiko ortogonala den $S^{\perp} = W$ azpiespazioa.

b) Lortu $S \cap W$ azpiespazioa

c) Emaitzak grafikoki interpretatu.

Emaitza:a) $W = L\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ b) $S \cap W = \overline{0}$

8. Izan bedi bi ordenako matrize karratuen ohiko espazio bektorial euklidearra $\left(\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R}),\ <,>\right)$,

a) Kalkulatu $S=\left\{ A\in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ / \ Traza(A)=0 \right\}$ azpiespazio bektorialaren oinarri ortogonala

b) Kalkulatu $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak S-n duen hurbilketarik onena.

Emaitza:a) $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ b) $B'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Kalkulatu hurrengo bi sistemen emaitzen hurbilketak karratu txikien metodoa erabiliz:

a) $S_1 \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \\ y=1 \end{cases}$

b) $S_2 \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \\ x=1 \end{cases}$

c) Aurreko bi sistemak eta lortutako soluzio hurbilduak geometrikoki interpretatu.

Emaitza: a) $x=0; y=1/3$ b) x=2/3;y=1/2

10. Izan bedi $S=\left\{ p(x)\in \mathbb{P}_3(x) \ / \ p(x)=p(-x) \quad \forall x\in \mathbb{R} \right\}$ azpiespazio bektoriala. $\mathbb{P}_3(x)$-ko ohiko biderkadura eskalarra erabiliz:

a) Lortu $r(x)=x^3+1$ polinomioak S-n duen hurbilketarik onena.

b) Kalkulatu egindako errorea.

Emaitza: p’(x)=1, $\left\|\overline{e}\right\|=1$

11. Karratu txikien metodoa erabiliz $(-1,2)$, $(1,-3)$ eta $(2,5)$ puntuei hoberen doitzen den zuzena $(y=ax+b)$ lortu. Adierazi emaitza grafikoki.

Emaitza:y=(1/2)x+1

ARIKETA PROPOSATUAK:

12. Frogatu $<A,B>= aztarna(AB^T) \quad \forall A,B \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ aplikazioa $M_{nxn}(\mathbb{R})$ gaineko biderkadura eskalar bat dela.

13. Kalkulatu k parametroaren balioak $\bar{u}$ eta $\bar{v}$ bektoreak $\mathbb{R}^3$ ohiko espazio bektorial euklidearrean ortogonalak izateko.

a) $\vec{u} = \{2,1,3\}, \vec{v} = \{1,7,k\}$

b) $\vec{u} = \{k,k,1\}, \vec{v} = \{k,5,6\}$

Emaitza: a) k = -3, k = -2, -3

14. Izan bedi $B = \{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ tridimentsionala den $\mathbb{E}_3$ espazio bektorial euklidear bateko oinarria, non:

$$\|\vec{a}\| = 1; \quad \|\vec{b}\| = 2; \quad \|\vec{c}\| = 3$$

$$ang\,(\vec{a},\vec{b}) = 60º; \quad ang\,(\vec{a},\vec{c}) = ang\,(\vec{b},\vec{c}) = 90º$$

a) Lortu G, Gram-en matrizea B oinarriarekiko.

b) Lortu G', Gram-en matrizea $B' = \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ oinarriarekiko, non:
$\vec{u} = \vec{a}, \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Emaitza: a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ b) $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 16 \end{pmatrix}$

15. $\mathbb{R}^n$-n ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, lortu $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ zuzenak eta koordenatu ardatzek osatzen dituzten angeluak.

Emaitza: $\theta = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

16. Izan bedi $\mathbb{R}^3$ espazio bektorial euklidearra, hurrengo biderkadura eskalarrarekin:

$$<\vec{x},\vec{y}>= x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

Kalkulatu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortonormal bat.

Emaitza: $B = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,0,0), \sqrt{\dfrac{3}{2}}(-2/3,1,0), \dfrac{2}{\sqrt{2}}(0,-1/2,1) \right\}$

17. Izan bedi V 3. mailako edo maila baxuagoko polinomio errealen espazio bektoriala. V-n hurrengo biderkadura eskalarra definitzen da:

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)\, dx \quad \forall p(x), q(x) \in V$$

a) Lortu Gram matrizea *V*-ren oinarri kanonikoarekiko.

b) $U = \{\, p(x) \in V \;\; / \;\; p(-x) = p(x) \,\} \subset V$ azpiespazioa emanda, lortu bere azpiespazio ortogonalaren ($U^{\perp}$) oinarri bat.

Emaitza: a) $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$ b) $B_{U^{\perp}} = \{x^3, x\}$

18. Lortu hurrengo azpiespazio bektorialen oinarri ortonormal bat eta azpiespazio ortogonalak:

a) $\mathbb{R}^3$-ko $S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; x + 2y - z = 0 \,\}$, ohiko biderkadura eskalarra erabiliz.

b) $\mathbb{P}_2(x)$-ko $T = L(\{\, 1 - x, 1 + x \,\})$ honako biderkadura eskalarra erabiliz:

$$< p(x), q(x) >= \int_{0}^{1} p(x)\cdot q(x)\, dx$$

Emaitza: a) $B_S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \right\}; S_{ort} = L\{(1,2,-1)\}$

b) $B_T = \{\sqrt{3}(1-x), 3x-1\}; T_{ort} = L\left\{\left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right)\right\}$

19. Zehaztu hurrengo matrizeetatik zeintzuk diren $\mathbb{R}^3$–ko oinarri kanonikoarekiko biderkadura eskalar bati elkartutako matrizeak.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Emaitza: a) Ez; b) Ez; c) Bai; d) Ez.

20. Izan bedi S sistemaren adierazpen matriziala: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Adierazi zenbat ekuazio eta zenbat ezezagun dituen.

b) Aztertu sistema bateragarria den.

c) Kalkulatu karratu txikien bidezko soluzio hurbildua.

Emaitza: x=y=1/4

21. Lortu biderkadura eskalarraren adierazpena Gram-en honako matrize hau erabiliz:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Emaitza:
$<\overline{x},\overline{y}>= 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$

ARIKETA GEHIGARRIAK:

22. Karratu txikien metodoa erabiliz honako sistemaren soluzio hurbildua lortu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Emaitza: x = - 3/7,y = 9/7

23. Izan bitez $(1,1)$, $(2,4)$ eta $(3,3)$ puntu multzoa.

a) Kalkulatu x gaineko y-ren erregresio-zuzena.

b) Lortu y gaineko x-ren erregresio-zuzena.

c) Emandako puntuak eta aurreko ataletan lortutako zuzenak grafikoki adierazi. Kalkulatu bi zuzenen arteko ebaki-puntua (*oreka-puntua* dena hain zuzen ere).

d) Emandako puntuak eta oreka-puntuaren koordenatuak behatuz, oreka-puntuaren koordenatuak lortzeko modu bat ondorioztatu.

24. Izan bitez $f(x)=x$ eta $g(x)=x+1 \in \left(\mathbb{C}[0,1],\bullet\right)$ funtzioak, non $\bullet$ ikurrak ohiko biderkadura eskalarra adierazten duen:

$$f(x)\bullet g(x)=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$$

a) Aztertu $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak ortogonalak diren.

b) Kalkulatu $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen normak.

c) Kalkulatu bi funtzioen arteko angelua.

25. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=2x\right\}$ azpiespazio bektoriala emanda:

a) Kalkulatu $S\subset\mathbb{R}^3$ azpiespazioaren azpiespazio betegarri ortogonala.

b) Bi azpiespazioak geometrikoki interpretatu.

26. Suposa dezagun zereal zehatz baten landarearen hazkuntza, zentimetrotan, landarea ernamuindu zenetik igarondako asteen menpe aztertzeko hurrengo taulan laburbilduta agertzen den behaketa bat egin dela:

Astea	1	2	3	4	5	6
Zentimetroak	*4*	*11*	*14*	*19*	*29*	*37*

a) Kalkulatu datu bildumari doitzen zaioen erregresio-zuzena.

b) Irudikatu grafikoki datuak eta zuzena.

27. Herri bateko biztanleriak, XX. mendean zehar, honako taulan adierazitako garapena izan du:

URTEA	**BIZTANLEAK**
1900	75.995
1910	91.972
1920	105.711
1930	123.203
1940	131.669
1950	150.697
1960	179.323
1970	203.212

1980	226.515
1990	249.633
2000	281.422

a) Lortu erregresio-zuzena.

b) Iragarri 2010. urteko biztanle kopurua.

28. Izan bedi $S = \left\langle \vec{u}_1(2,0,1), \vec{u}_2(0,3,0) \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$ azpiespazioa

a) *S*-ren oinarri ortonormal bat lortu.

b) $\vec{v}(1,2,3)$ bektorea *S*-ren gainean eta *S*-ren azpiespazio betegarri ortogonalen gainean, $S^{\perp}$, ortogonalki proiektatu

c) Aurreko atala proiekzio matrizeak erabiliz errepikatu.

d) Zehaztu $\vec{v}(1,2,3)$ bektoreak *S*-rekiko duen bektore simetrikoa.