

## CONVOCATORIA ORDINARIA

23 de mayo de 2022

**Apellidos:**

**Nombre:**

### PRIMER PARCIAL - TIEMPO: 1hora

#### EJERCICIO 1:

Demostrar que si la matriz  $\frac{I+A}{2}$  es idempotente entonces la matriz  $A$  es involutiva.

(1.5 puntos)

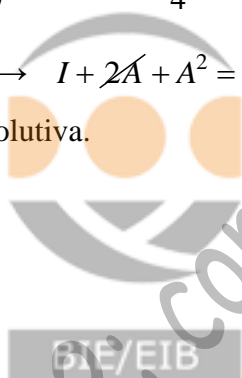
Solución:

Atendiendo a la definición de matriz idempotente

$$\left(\frac{I+A}{2}\right)^2 = \frac{I^2 + I \cdot A + A \cdot I + A^2}{4} = \frac{I + 2A + A^2}{4} = \frac{I+A}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow I + 2A + A^2 = 2I + 2A \Rightarrow \boxed{A^2 = I}$$

de forma que la matriz  $A$  es involutiva.



IKASLE  
KONTSEILUA  
CONSEJO DE  
ESTUDIANTES

Curso 2021/22

## EJERCICIO 2:

Simplificar la siguiente expresión matricial teniendo en cuenta que las matrices  $A$  y  $B$  son simétricas

$$A \cdot (B^{-1}CA)^{-1} B^{-1}C - A^T (C^{-1}A)^{-1} - (B^T B^{-1})^2 + (AC^T)^T A^{-1}$$

(1.5 puntos)

Solución:

Teniendo en cuenta que una matriz simétrica verifica  $A^T = A$

$$\begin{aligned} & A \cdot (B^{-1}CA)^{-1} B^{-1}C - A^T (C^{-1}A)^{-1} - (B^T B^{-1})^2 + (AC^T)^T A^{-1} = \\ & = A \cdot (A^{-1}C^{-1}B) B^{-1}C - A(A^{-1}C) - (BB^{-1})^2 + (CA^T) A^{-1} = \\ & = (AA^{-1}) \cdot C^{-1} \cdot (BB^{-1}) \cdot C - (AA^{-1}) \cdot C - I^2 + (CA) A^{-1} = \\ & = I \cdot C^{-1} \cdot I \cdot C - I \cdot C - I^2 + C \cdot (AA^{-1}) = C^{-1}C - C - I + C \cdot I = I - C - I + C = (0) = (0)_{n \times n}. \end{aligned}$$

## EJERCICIO 3:

Aplicando el método de Gauss, clasificar, en función del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ , el siguiente sistema de ecuaciones lineales, resolviéndolo en el caso  $a=0$  supuesto que sea compatible:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

(3.5 puntos)

Solución:

En primer lugar reordenamos las ecuaciones para que el parámetro no esté en el primer pivote y realizar el menor número de transformaciones posibles

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \\ ax + 7y + 5z = 0 \end{cases}$$

Mediante transformaciones elementales de filas intentaremos convertir la matriz ampliada asociada al sistema anterior en una matriz escalonada:

$$A^* = (A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ a & 7 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\langle F_3 \rightarrow F_3 - aF_1 \rangle} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 7-a^2 & 5-a & -3a \end{array} \right) \xrightarrow{\langle F_3 \rightarrow F_3 - (7-a^2)F_2 \rangle} \\ \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & -2a^2-3a+14 \end{array} \right)$$

Teniendo en cuenta que  $a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$  y  $2a^2 - 3a - 14 = -2(a+7/2)(a-2)$

se obtienen los siguientes casos:

$a \neq -1, 2$ :  $rg(A)=3=rg(A^*)=3=n$  con lo que se trata de un sistema compatible y determinado

$a = -1$ :  $rg(A)=2 < rg(A^*)=3$  con lo que se trata de un sistema incompatible

$a = 2$ :  $rg(A)=2=rg(A^*) < 3=n$  con lo que se trata de un sistema compatible indeterminado

En el supuesto  $a=0$ , ya que se trata de un sistema compatible determinado, lo resolvemos mediante sustitución regresiva

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = -2 \\ -2z = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -7 \\ y = -2 + 7 = 5 \\ x = 3 + 7 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

## EJERCICIO 4:

Sean  $S$  el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 tales que la suma de los elementos de sus columnas es cero y  $T$  el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 tales que la suma de los elementos de sus filas es cero.

- Obtener las ecuaciones implícitas de  $S$  y  $T$ .
- Obtener una base y la dimensión de  $S$  y  $T$ .
- Obtener  $S \cap T$ .
- Obtener  $S + T$ . ¿Son subespacios complementarios?

(1+1+1+0.5 = 3.5 puntos)

### Solución:

Algunas observaciones antes de resolver cada uno de los apartados: la dimensión del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 es 4

$$\dim(\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$$

y la base usual de este espacio vectorial es

$$B_{\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Según dice el enunciado

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a+c=0 \wedge b+d=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / c=-a \wedge d=-b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a+b=0 \wedge c+d=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / b=-a \wedge d=-c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} / a, c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{a) Ecuaciones implícitas: } S: \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases}, \quad r_S = 2 \quad \text{y} \quad T: \begin{cases} a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases}, \quad r_T = 2$$

$$\text{b) } B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(S) = 2 = \dim(\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) - r_S = 4 - 2$$

$$B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(T) = 2 = \dim(\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) - r_T = 4 - 2$$

$$\text{c) } S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a+c=0 \wedge a+b=0 \wedge c+d=0 \wedge b+d=0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / c=-a \wedge b=-a \wedge d=-c=a \wedge d=-d=a \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de forma que  $\dim(S \cap T) = 1$

d) Si tenemos en cuenta que

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3 \neq \dim(\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$$

y que  $S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

podemos decir que no son subespacios complementarios.

Al juntar las bases de los dos subespacios por separado

$$S + T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

observamos inmediatamente que el cuarto elemento es combinación lineal de los tres primeros

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y en consecuencia

$$S + T = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$



IKASLE  
KONTSEILUA  
CONSEJO DE  
ESTUDIANTES

Curso 2021/22

convocatoria ordinaria

## CONVOCATORIA ORDINARIA

23 de mayo de 2022

**Apellidos:**

**Nombre:**

### SEGUNDO PARCIAL - TIEMPO: 1 hora

#### EJERCICIO 1:

Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas o no **razonando la respuestas**

- a) Si  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$  son dos vectores propios de una matriz  $A$  ligados al valor propio  $\lambda_1$  entonces  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$  son linealmente independientes.
- b) La siguiente matriz es una matriz asociada a un producto escalar

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

estudiando todas las condiciones que debería cumplir.

(1+1 = 2 puntos)

Solución:

- a) Con la información del enunciado no se puede asegurar nada ya que
- puede ocurrir que la multiplicidad algebraica de  $\lambda_1$  sea 2 (o mayor) y la multiplicidad geométrica también de forma que  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$  sean dos vectores independientes
  - y puede ocurrir que la multiplicidad aritmética sea 1 y  $\vec{u}_2 = \gamma \vec{u}_1$  que es otro autovector asociado a  $\lambda_1$ , distinto de  $\vec{u}_1$  y no son linealmente independientes.
- b) Si bien la matriz  $G$  tiene todos los elementos de la diagonal estrictamente positivos

$$g_{ii} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle > 0 \quad (\text{propiedad del producto escalar: } \forall \vec{x} \neq 0 \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0).$$

NO puede ser la matriz de Gram para ningún producto escalar debido a que:

- la matriz asociada a un producto escalar debe ser simétrica y en este caso

$$g_{23} = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 1 \neq g_{32} = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_2 \rangle = 2 \quad (\text{propiedad del producto escalar: } \forall \vec{x}, \vec{y} \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle).$$

- la matriz asociada a un producto escalar debe ser definida positiva y en este caso

$$G_1 = |3| = 3 > 0$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$$

$$G_3 = |G| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 2 + 4) - (2 + 6 + 4) = 0 \neq 0$$

resultando además que la matriz no es regular.

## EJERCICIO 2:

Sea el siguiente subespacio vectorial euclídeo

$$T = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(x) / p'(0) = p''(1)\}$$

- Obtener una base ortogonal de  $T$ .
- Obtener el subespacio  $T^\perp$ .

(4 puntos)

Solución:

- Derivando dos veces el polinomio de referencia

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow p'(0) = c$$

$$p''(x) = 6ax + 2b \rightarrow p''(1) = 6a + 2b$$

resulta que

$$\begin{aligned} T &= \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(x) / c = 6a + 2b\} = \{ax^3 + bx^2 + (6a + 2b)x + d \in \mathbb{P}_3(x) / a, b, d \in \mathbb{R}\} = \\ &= \text{span}\{x^3 + 6x, x^2 + 2x, 1\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_T = \text{span}\{x^3 + 6x, x^2 + 2x, 1\} = \text{span}\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}, \quad \dim(T) = 3$$

Consideremos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Paso 1:  $q_1(x) = p_1(x) = x^3 + 6x \cong \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Paso 2:  $q_2(x) = p_2(x) - \alpha q_1(x) = (x^2 + 2x) - \alpha \cdot (x^3 + 6x) \cong \vec{v}_2 - \alpha \cdot \vec{v}_1$

donde el valor de  $\alpha$  lo calcularemos para que  $q_2(x)$  sea ortogonal a  $q_1(x)$

$$\begin{aligned} \langle q_2, q_1 \rangle &= \langle p_2 - \alpha q_1, q_1 \rangle = \langle p_2, q_1 \rangle - \alpha \langle q_1, q_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{12}{37} \\ \Rightarrow q_2(x) &= (x^2 + 2x) - \frac{12}{37}(x^3 + 6x) = -\frac{12}{37}x^3 + x^2 + \frac{2}{37}x \cong \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -12/37 \\ 1 \\ 2/37 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Paso 3:  $q_3(x) = p_3(x) - \beta q_1(x) - \gamma q_2(x) = (1) - \beta \cdot (x^3 + 6x) - \gamma \cdot \left(-\frac{12}{37}x^3 + x^2 + \frac{2}{37}x\right) = 1 \cong \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ya que  $\beta = 0$  y  $\gamma = 0$  como consecuencia de que  $p_3(x)$  ya era ortogonal a  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$

$$\langle q_3, q_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \langle q_3, q_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12/37 \\ 1 \\ 2/37 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

La base ortogonal obtenida quedaría

$$B_T^* = \text{span}\{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\} = \text{span}\left\{x^3 + 6x, -\frac{12}{37}x^3 + x^2 + \frac{2}{37}x, 1\right\}$$

b) Por definición de subespacio ortogonal

$$T^\perp = \left\{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(x) / p(x) \perp q(x) \quad \forall q(x) \in T \right\}$$

y por ser  $T$  un subespacio de dimensión finita se tratará de encontrar los vectores que sean ortogonales a los elementos de la base de  $T$  (bien de la primera base que hemos obtenido o bien de la base ortogonal)

$$p(x) \perp p_1(x) \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = d = 0$$

$$p(x) \perp p_2(x) \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = b + 2c = 0 \rightarrow b = -2c$$

$$p(x) \perp p_3(x) \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = a + 6c = 0 \rightarrow a = -6c$$

Ahora tenemos tres ecuaciones de forma que

$$\dim(T^\perp) = \dim(\mathbb{P}_3(x)) - r = 4 - 3 = 1$$

$$T^\perp = \left\{ -6cx^3 - 2cx^2 + cx / c \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\{-6x^3 - 2x^2 + x\}.$$



## EJERCICIO 3:

Sean la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ c & d & e & 1 \end{pmatrix}$$

siendo  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ .

- Indicar las condiciones que deben cumplir  $a, b, c, d$  y  $e$  para que la matriz sea diagonalizable.
- Para el caso  $a=1, b=2, c=0, d=1, e=0$  diagonalizar  $A$  si es posible. ¿Es  $A$  una matriz ortogonalmente diagonalizable?

(4 puntos)

Solución:

a) Teniendo en cuenta que la matriz  $A$  es triangular inferior (independientemente de los valores de los parámetros)

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = (-1 - \lambda)^2 (1 - \lambda)^2 = (1 + \lambda)^2 (1 - \lambda)^2$$

se obtienen dos autovalores y ambos de multiplicidad algebraica 2

$$\lambda_1 = -1 \text{ con } \alpha_1 = 2 \text{ y } \lambda_2 = 1 \text{ con } \alpha_2 = 2.$$

La condición para que la matriz sea diagonalizable es que la suma de las multiplicidades aritméticas sea 4 (lo cual es cierto para cualesquiera valores de los parámetros) y las multiplicidades geométricas coincidan con las multiplicidades aritméticas (es decir, que también sean 2): estudiemos por lo tanto los subespacios propios

$$V(\lambda_1 = -1)$$

$$(A - \lambda_1 \cdot I) \cdot \vec{x} = (A + I) \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 2 & 0 \\ c & d & e & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ ax + by + 2z & = & 0 \rightarrow z = -(ax + by) / 2 \\ cx + dy + ez + 2t & = & 0 \rightarrow t = -[cx + dy - e(ax + by) / 2] / 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -ax/2 \\ -cx/2 + aex/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -by/2 \\ -dy/2 + bey/4 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1 = -1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/2 \\ -c/2 + ae/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/2 \\ -d/2 + be/4 \end{pmatrix} \right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica  $d_1 = 2$  independientemente de los valores que tomen los parámetros.

$$V(\lambda_2 = 1)$$

$$(A - \lambda_2 \cdot I) \cdot \vec{x} = (A - I) \cdot \vec{x} = A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x & = & 0 \\ & - & 2y & = & 0 \\ ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & + & ez & = & 0 \end{cases}$$

y ahora sí “entran en juego” los valores de los parámetros

✓ mientras que si  $e \neq 0$  resulta que  $V(\lambda_2 = 1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  de forma que  $d_2 = 1 \neq \alpha_2 = 2$

✓ por el contrario, si  $e = 0$  resulta que  $V(\lambda_2 = 1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  con lo cual  $d_2 = 2 = \alpha_2$ .

Conclusión: **la matriz A solamente es diagonalizable cuando  $e=0$ .**

b) Para los valores dados la matriz es diagonalizable pero no ortogonalmente ya que no es simétrica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con los resultados del apartado anterior

$$V(\lambda_1 = -1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}, \quad V(\lambda_2 = 1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de forma que

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad \text{siendo} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$