

1. GAIKO ARIKETAK

1. Ariketa: Kalkula itzazu honako zenbaki konplexu hauen modulua eta argumentua:

a) $(1 + \sqrt{3}i)^2$ Sol.: $4_{2\pi/3}$

b) $\frac{1+i}{1-i}$ Sol.: $1_{\pi/2}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ Sol.: $1_{2\pi/3}$

2. Ariketa: Adierazi honako zenbaki konplexuak era binomikoan:

a) $(1+i)^3$ Sol.: $-2+2i$

b) $i^5 + i^{16}$ Sol.: $1+i$

c) $1-i^{200}$ Sol.: 0

d) $(1-i)^{200}$ Sol.: 2^{100}

e) $\frac{8}{(1-i)^5}$ Sol.: $-1-i$

f) $\frac{e^{\frac{1+3\pi i}{4}} \cdot e^{\frac{2+\pi i}{3}}}{e^{\frac{3+4\pi i}{3}}}$ Sol.: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

g) $\frac{1+i}{1-2i}$ Sol.: $\frac{-1}{5} + \frac{3}{5}i$

3. Ariketa: Adierazi honako zenbaki konplexua hau era polarrean eta trigonometrikoan:

h) $\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{(2+2i)^7}$ Sol.: $2^{-15/2}_{-11\pi/4}; 2^{-15/2} \left[\cos\left(\frac{-11\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-11\pi}{4}\right) \right]$

4. Ariketa: Adierazi honako zenbaki konplexuak era trigonometrikoan:

a) $-1-\sqrt{3}i$ Sol.: $2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

b) $2i$ Sol.: $2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

5. Ariketa: Kalkulatu $z = \log_{1-i}(2+2i)$ zenbakiaren balio nagusia.

Sol.: $\frac{6\ln 2 + i\pi}{2\ln 2 - i\pi}$

6. Ariketa: Kalkulatu hurrengo zenbaki konplexu hauek:

$$\text{a) } \log_i(1+i) \quad \text{Sol. } \frac{2\ln 2 + i(\pi + 8k_1\pi)}{2i(\pi + 4k_2\pi)}$$

$$\text{b) } \ln(1 + \sqrt{3}i) \quad \text{Sol. } \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$\text{c) } (1+i)^{-i} \quad \text{Sol. } e^{-\frac{\ln 2}{2}i + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}$$

$$\text{d) } i^{i-1} \quad \text{Sol. } e^{-(1+i)\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

7. Ariketa: Kalkulatu hurrengo zenbaki konplexu hauek eta emaitza era binomikoan adierazi:

$$\text{a) } \frac{(1+i)^9}{1+i^9} \quad \text{Sol. } 16$$

$$\text{b) } (2i)^{42} (1-i)^{-78} \quad \text{Sol. } 8i$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{1}{3-4i}} \quad \text{Sol. } \pm \frac{1}{5}(2+i)$$

8. Ariketa: Ebatzi honako ekuazio hauek:

$$\text{a) } z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \text{Sol. } 1 \pm i$$

$$\text{b) } z^2 + (3-2i)z - 1 - 3i = 0 \quad \text{Sol. } i, -3+i$$

$$\text{c) } (z-2)^5 = 4 \quad \text{Sol. } 2 + \left(\sqrt[5]{4}\right)\frac{2k\pi}{5} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\text{d) } z^3 + (5-3i)z^2 - 15iz = 0 \quad \text{Sol. } 0, -5, 3i$$

9. Ariketa: Lortu $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$ betetzen duen z zenbaki konplexua.

$$\text{Sol. } z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

10. Ariketa: Deskribatu hurrengo baldintzak betetzen dituzten z ($z \in \mathbb{C}$) puntuen leku geometrikoak:

$$\text{a) } |z-1| \leq 4 \quad \text{Sol. } C(1,0) \text{ zentroko eta } r=4 \text{ erradioko zirkunferentzia}$$

$$\text{b) } |z| \leq 1 \quad \text{Sol. } C(0,0) \text{ zentroko eta } r=1 \text{ erradioko zirkunferentzia}$$

$$\text{c) } |z-1| < |z-i| \quad \text{Sol. } x > y \text{ plano}$$

11 . Ariketa: Kalkulatu $x, y \in \mathbb{R}$ honako ekuazio honetan:

$$\frac{1+i}{1-i} = xe^{iy}$$

$$\text{Sol. } \begin{cases} x = 1 \\ y = \pi/2 + 2n\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = \pi/2 + (2n+1)\pi \end{cases}$$

12 . Ariketa: Izan bitez z_1 eta z_2 ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) $z^2 - 8zi - (19 - 4i) = 0$ ekuazioaren erroak. Lortu $z_3 \in \mathbb{C}$, z_1, z_2 eta z_3 zenbaki konplexuen afixuek triangelu angeluzuzen isoszele bat osatzeko, baldin eta angelu zuzenaren erpinak parte irudikari handiena duen erroaren afixua izan behar badu.

$$\text{Sol. } z_3 = 9i; \quad z_3 = -4 + i$$

13 . Ariketa: Adierazi $\cos(3\alpha)$, $\sin \alpha$ eta $\cos \alpha$ -ren funtzio modian

$$\text{Sol. } \cos(3\alpha) = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha$$

14 . Ariketa: Aurkitu $\theta \in \mathbb{C}$, non $\tan \theta = 2i$ (Euler-en formula erabili)

$$\text{Sol. } \theta = \frac{\ln(3)}{2}i + \pi \left(\frac{1}{2} + k \right)$$

Bibliografia:

- “Análisis Matemático” T.M. Apostol- Editorial Reverte S.A.
- “Analisi Matematikoa” Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Graduak Apunteak. Clara Baquerizo, Izaskun Basterrechea, Emilia Martín.
- “Cálculo” Teoría y Ejercicios. Jose Luis Carro Calvo, Inmaculada Lecubarri Alonso, Ernesto Martinez Sagarzazu
- “Cálculo” Problemas de examen. Jose Luis Carro Calvo, Inmaculada Lecubarri Alonso.
- “Apuntes de Cálculo Infinitesimal” EUITI Bilbao, José Llana