5. Gaia. Ariketak.
Balio propioak eta bektore propioak.

KLASEAN EGITEKO ARIKETAK:

1. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea eta $\mathbb{R}^3$-ko honako bektoreak:

$$\overline{x} = (-1, 1, 0);\ \overline{y} = (1, 1, 1);\ \overline{z} = (-1, 0, 1);\ \overline{t} = (0, 1, 0)$$

Adierazi bektore hauetako zeintzuk diren A matrizearen bektore propioak eta lortu elkartutako balio propioa.

Emaitza: $\overline{x}$ non $\lambda=1$; $\overline{z}$ non $\lambda=2$; $\overline{t}$ non $\lambda=2$

2.

a) Lortu A matrize errealaren balio propioak eta azpiespazio propioak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Emaitza:

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,1,0)\}$
-1	1	$\mathcal{L}\{(1,0,-1)\}$
2	1	$\mathcal{L}\{(2,0,1)\}$

b) Lortu $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ matrizearen polinomio karakteristikoa baldin:

σ(A) = {0, 1, -1}

λ=0 A matrizearen balio propioa bada, k=3 anizkoiztasunarekin.

Emaitza: $p(\lambda) = -\lambda^5 + \lambda^2$

3. Izan bitez $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ matrizeak:

a) Matrize horietatik, adierazi zeintzuk diren diagonalizagarriak $\mathbb{R}$-n eta diagonalizatu ahal denean.

b) Diagonalizatu aurreko A matrizea $\mathbb{C}$ zenbaki konplexuen gorputzean.

Emaitza:

a)

$p(\lambda_A)=\lambda^2+2\lambda+2$

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
-1+i	1	$\mathcal{L}\{(1,i)\}$
-1-i	1	$\mathcal{L}\{(i,1)\}$

A matrizea ez da diagonalizagarria $\mathbb{R}$-n, balio propioak konplexuak direlako.

$p(\lambda_B)=\lambda^2-1$

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
-1	1	$\mathcal{L}\{(1,1)\}$
1	1	$\mathcal{L}\{(3,1)\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=P^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix}=P^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

4. Lortu honako matrize erreal hauen balio propioak eta azpiespazio propioak:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adierazi zeintzuk diren diagonalizagarriak, eta diagonalizatu posible denean.

Emaitza:

a)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$
2	2	$\mathcal{L}\{(1,0,3),(0,1,3)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
-1	1	$\mathcal{L}\{(0,0,1)\}$
1	2	$\mathcal{L}\{(1,1,0),(2,0,1)\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}B\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$
2	1	$\mathcal{L}\{(0,1,0)\}$
3	1	$\mathcal{L}\{(0,0,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}C\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
2	1	$\mathcal{L}\{(0,1,0)\}$
-3	1	$\mathcal{L}\{(1,0,3)\}$
3	1	$\mathcal{L}\{(1,0,-3)\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = P^{-1}D \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Diagonalizatu ortogonalki honako matrize errealak:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Emaitza:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^T A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = P^T B \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(1-\sqrt{2}\right)^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\left(1-\sqrt{2}\right)^2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Izan bedi $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ eta izan bitez $V(\lambda_1) = \mathcal{L}\left(\left\{(0,1,0),(1,0,2)\right\}\right)$ eta $V(\lambda_2) = \mathcal{L}\left(\left\{(2,0,1)\right\}\right)$. Baldin:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

a) Kalkulatu A matrizearen balio propioak, beren anizkoiztasuna adieraziz, eta A matrizearen polinomio karakteristikoa.

b) Arrazoitu A diagonalizagarria den, eta diagonalizatu posible bada.

c) Arrazoitu A ortogonalki diagonalizagarria den, eta ortogonalki diagonalizatu posible bada.

Emaitza:

a) $p(\lambda_A) = (-1)^3 \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 1) = -\lambda^2 + \lambda + 2$

λ_i	k_i
2	2
-1	1

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ez da ortogonalki diagonalizagarria, ez delako simetrikoa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

7. Jakinda honako bektoreak:

$$\overline{v}_1 = (0,1,1); \overline{v}_2 = (1,-1,0); \overline{v}_3 = (1,0,-1)$$

ondorengo egitura duen A matrizearen bektore propioak diizanik

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots \\ 3 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

a) Kalkulatu A matrizea eta lortu A-ren azpiespazio propioak.

b) A diagonalizagarria al da? Erantzuna baiezkoa bada, A diagonalizatu.

c) Posible bada, diagonalizatu A ortogonalki.

d) Kalkulatu $A^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Emaitza:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
0	1	$\mathcal{L}\{(-1,0,1)\}$
2	1	$\mathcal{L}\{(1,-1,0)\}$
6	1	$\mathcal{L}\{(0,1,1)\}$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

Ez, A matrizea ez delako simetrikoa

d)

$$A^n = P \cdot D^n P^T = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

edo

$$A^n = P \cdot D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

AZTERKETETAKO ARIKETAK

8. Izan bedi A matrizea

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

a) Diagonalizatu A.

b) Diagonalizatu A ortogonalki.

c) Posible al da A matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat lortzea? Erantzuna baiezkoa bada, adierazi $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat, erantzuna arrazoituz.

d) Posible al da A matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri ortonormal bat lortzea? Erantzuna baiezkoa bada, adierazi $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat, erantzuna arrazoituz.

Emaitza

a) $$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=P^{-1}A\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=P^{T}A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

c) $\mathrm{B}_{\mathbb{R}^3}=\{(1,2,1),(1,-1,1),(-1,0,1)\}$

d) $\mathrm{B}_{\mathbb{R}^3}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

9. Izan bedi A matrize erreala:

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 2\\ 1 & -5 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

a) Lortu A matrizearen balio propioak eta azpiespazio propioak.

b) Diagonalizatu A ortogonalki.

c) (a) atala erabiliz, zenbat da det(A)?

d) Lortu, posible bada, A matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri ortonormal bat

e) (b) atala erabiliz, zenbat da det(A)?

Emaitza:

a)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
-6	2	$\mathcal{L}\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$
0	1	$\mathcal{L}\{(1,1,2)\}$

b) $$\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=P^T A\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

c) $\det(A)=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=(-6)\cdot(-6)\cdot 0=0$

d) $\mathrm{B}_{\mathrm{R}^3}=\left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

e) $|\mathrm{A}|=|\mathrm{P}^{-1}\cdot\mathrm{D}\cdot\mathrm{P}|=|\mathrm{P}^{-1}|\cdot|\mathrm{D}|\cdot|\mathrm{P}|=|\mathrm{D}|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=0$

10. Izan bedi A matrizea:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Lortu A matrizearen balio propioak eta azpiespazio propioak.

b) A diagonalgarria al da? Erantzuna baiezkoa bada, A diagonalizatu.

Emaitza:

a)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
0	1	$\mathcal{L}\{(1,1,2)\}$
2	1	$\mathcal{L}\{(2,1,-3)\}$
3	1	$\mathcal{L}\{(1,1,-1)\}$

b) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=P^{-1}A\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}$

11. Izan bedi A matrizea:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a) Lortu A matrizearen balio propioak eta azpiespazio propioak.

b) Posible bada, A diagonalizatu.

c) Lortu, posible bada, A matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat.

d) A matrizea, ortogonalki diagonalizagarria al da? Arrazoitu erantzuna. Erantzuna baiezkoa bada, diagonalizatu A ortogonalki.

Emaitza:

a)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
0	2	$\mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,0,1)\}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathrm{B}_{\mathrm{R}^3} = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$

d) Ez, ez delako simetrikoa

12. Izan bedi A matrizea:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Lortu A matrizearen balio propioak eta azpiespazio propioak.

b) Posible bada, A diagonalizatu.

c) Posible bada, diagonalizatu A ortogonalki.

d) Egiaztatu A matrizeak honako ekuazio matriziala betetzen duela:

$$A^3 - 5A^2 + 6A = [0]_{3\times 3}$$

Emaitza:

a)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
0	1	$\mathcal{L}\{(0,-1,1)\}$
2	1	$\mathcal{L}\{(0,1,1)\}$
3	1	$\mathcal{L}\{(3,2,1)\}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Ez da posible, matrizea ez delako simetrikoa.

d) $A^3 - 5A^2 + 6A = [0]_{3\times 3}$ betetzen da.

13. Izan bedi A matrize karratua:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Lortu A matrizearen polinomio karakteristikoa.

b) Kalkulatu A matrizearen espektroa eta lortu azpiespazio karakteristikoak.

c) A diagonalizagarria al da ortogonalki? Erantzuna baiezkoa bada, diagonalizatu A ortogonalki.

Emaitza:

a) $p(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda$

b)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
-3	1	$\mathcal{L}\{(1,1,2)\}$
-1	1	$\mathcal{L}\{(-1,1,0)\}$
0	1	$\mathcal{L}\{(-1,-1,1)\}$

c)

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^T A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

14. Izan bitez honako matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-m \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Lortu A matrizearen balio propioak eta azpiespazio propioak.

b) Posible bada, diagonalizatu A matrizea.

c) $m \in \mathbb{R}$ parametroaren zein baliotarako da B matrizea diagonalizagarria? Arrazoitu erantzuna.

Emaitza:

a)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
4	2	$\mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,1)\}$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,3,-2)\}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

c) Ortogonalki diagonalgarria izateko simetrikoa izan behar da, beraz, m=0.

15. Izan bedi B matrize karratua:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Lortu B matrizearen polinomio karakteristikoa.

b) Lortu B matrizearen espektroa eta azpiespazio propioak karakterizatu.

c) Eman bektore propio ortogonalen oinarri bat.

d) Posible bada, B diagonalizatu.

e) Posible bada, diagonalizatu B ortogonalki.

f) Kalkulatu det(A).

g) Kalkulatu h(F), non:

$$F = \{\overline{v}_1 = (-1,0,0,0), \overline{v}_2 = (0,1,0,1), \overline{v}_3 = (0,0,1,1), \overline{v}_4 = (0,1,1,2)\}$$

Emaitza:

a) $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda$

b)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
0	1	$\mathcal{L}\{(0,-1,-1,1)\}$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,0,0,0)\}$
-1	1	$\mathcal{L}\{(0,1,-1,0)\}$
-3	1	$\mathcal{L}\{(0,1,1,2)\}$

c) $B_{R^3} = \{(0,-1,-1,1),(1,0,0,0),(0,1,-1,0),(0,1,1,2)\}$

d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = P^{-1}B \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = P^{T}B \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

f) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 0 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-3) = 0$

g) h(F)=h(A)=3

16. Lortu honako matrize errealen balio propioak eta azpiespazio propioak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Adierazi zeintzuk diren diagonalizagarriak eta diagonalizatu posible denean.

Emaitza:

a)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,-1,0)\}$
2	1	$\mathcal{L}\{(-2,1,2)\}$
3	1	$\mathcal{L}\{(1,-1,2)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,1,-1)\}$
2	2	$\mathcal{L}\{(2,1,0)\}$

B matrizea ez da diagonalizagarria $\lambda_2 = 2$ balio propioaren anizkoiztasun geometrikoa eta algebraikoa ezberdinak direlako ($k_2 = 2 \neq d_2 = 1$).

17. A matrizea emanda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A matrizea diagonalizagarria al da? Arrazoitu erantzuna eta posible bada diagonalizatu.

Emaitza:

λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$
1	1	$\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$
2	2	$\mathcal{L}\{(0,0,1)\}$

A matrizea ez da diagonalizagarria $\lambda_2 = 2$ balio propioaren anizkoiztasun geometrikoa eta algebraikoa ezberdinak direlako ($k_2 = 2 \neq d_2 = 1$).