

CONVOCATORIA ORDINARIA

27 de mayo de 2021

Apellidos y nombre:

Grupo:

PRIMER PARCIAL

EJERCICIO 1:

Calcula el valor del siguiente determinante por el método de los adjuntos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

(2 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\langle F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \rangle \\ \langle F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1 \rangle \\ \langle F_4 \rightarrow F_4 - 2F_1 \rangle}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & -4 & -7 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ -4 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \\ & \xrightarrow{\substack{\langle F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \rangle \\ \langle F_3 \rightarrow F_3 + (4/3)F_1 \rangle}} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1/3 & 19/3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1/3 & 19/3 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot [(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 7] = 21 \end{aligned}$$

EJERCICIO 2:

Sean A y B dos matrices del espacio vectorial $M_{n \times n}(\mathbb{R})$:

- Estudiar si $A \cdot A^T$ es una matriz simétrica.
- Estudiar si $A^T \cdot A \cdot A^T$ es una matriz simétrica.
- Comprobar si es cierto que $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$.

(0.5 + 0.5 + 0.25 = 1.25 puntos)

Solución:

- Una matriz es simétrica si y solo si $A^t = A$

Estudiemos la matriz transpuesta

$$(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot (A)^t = A \cdot A^t$$

con lo que la matriz $A \cdot A^t$ SÍ es una matriz simétrica.

- De forma análoga al aparatado anterior, estudiemos la matriz transpuesta

$$(A^t \cdot A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot (A)^t \cdot (A^t)^t = A \cdot A^t \cdot A \neq A^t \cdot A \cdot A^t$$

salvo que se de el caso, por ejemplo, de que A sea una matriz simétrica. En el caso general $A^t \cdot A \cdot A^t$ NO es una matriz simétrica.

- Desarrollando el producto

$$(A \cdot B)^2 = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = A \cdot B \cdot A \cdot B \neq A^2 \cdot B^2$$

ya que, salvo casos concretos, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Por lo tanto NO se verifica que $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$

EJERCICIO 3:

Aplicando el método de Gauss, clasificar, en función del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones lineales, resolviéndolo en los casos que sea compatible:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + (a + 2)z = -3a - 5 \\ 4x + 2y + (a + 6)z = -3a^2 - 8 \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución:

Mediante transformaciones elementales de filas intentaremos convertir la matriz ampliada asociada al sistema anterior en una matriz triangular superior:

$$A^* = (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a+2 & -3a-5 \\ 4 & 2 & a+6 & -3a^2-8 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \langle F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \rangle \\ \langle F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \rangle \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & a+1 & -3a-6 \\ 0 & -6 & a+2 & -3a^2-12 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\langle F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & a+1 & -3a-6 \\ 0 & 0 & -a & -3a^2+6a \end{array} \right)$$

Casos posibles:

$a = 0$: $\rightarrow rg(A) = 2 = rg(A^*) < n = 3$ con lo que se trata de un sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y + z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 5z/3 \\ 2 + z/3 \\ z \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R}$$

$a \neq 0$: $\rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) = n$ con lo que se trata de un sistema compatible determinado

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y + (a+1)z = -3a-6 \\ -a \cdot z = -3a^2+6a \end{cases}$$

sistema que resolveremos mediante sustitución regresiva, “de abajo hacia arriba”,

$$\rightarrow z = 3a - 6$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{3}[-3a - 6 - (a+1)(3a-6)] = -\frac{1}{3}(\cancel{-3a} - 6 - 3a^2 \cancel{-3a} + 6a \cancel{-6}) = a^2$$

$$\rightarrow x = 1 - 2a^2 - (3a - 6) = -2a^2 - 3a + 7$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^2 - 3a + 7 \\ a^2 \\ 3a - 6 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4:

Sean los siguientes subespacios de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$V = \text{span}\{S\} \quad \text{donde} \quad S = \{(2-a)x + a, -ax^2 + x, ax^2 + 2ax + (2+a)\}$$

$$T = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) / p(0) = 0\}$$

- ¿Para qué valores de a el sistema S es una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$?
- Calcular las ecuaciones implícitas de V para $a = 1$.
- Calcular $V \cap T$ para $a = 1$.
- Calcular $V + T$ para $a = 1$.
- Completar la base S , para $a = 1$, hasta obtener una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

(0.75 x 5 = 3.75 puntos)

Solución:

a) Teniendo en cuenta que $\dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ y que la familia S está compuesta por tres elementos será suficiente con demostrar que son linealmente independientes. Identificando los polinomios con vectores de \mathbb{R}^3

$$p(x) = ax^2 + bx + c \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

estudiaremos el rango de la matriz formada por los tres vectores

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & a \\ 2-a & 1 & 2a \\ a & 0 & 2+a \end{vmatrix} = -2a^3 - a^2 + a(2-a)(2+a) = -3a^3 - a^2 + 4a = -3a(a-1)(a+4/3)$$

Casos posibles:

- si $a = 0, 1, -4/3$ el rango de la matriz anterior es inferior a 3 lo cual significa que los tres vectores NO son linealmente independientes
 - si $a \neq 0, 1, -4/3$ el rango de la matriz anterior es 3 con lo que los tres vectores SÍ son linealmente independientes y consecuentemente constituyen una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.
- b) Para el caso $a = 1$ uno al menos de los vectores de S depende de los demás

$$S = \{x+1, -x^2+x, x^2+2x+3\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$V = \text{span}\{S\} = \text{span}\{x+1, -x^2+x\} \implies B_V = \{x+1, -x^2+x\} \quad \text{y} \quad \dim(V) = 2$$

de forma que

$$\dim(V) = 2 = \dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) - r = 3 - r \rightarrow r = 1.$$

Para obtener esta ecuación implícita

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = -b - a + c = 0 \rightarrow \boxed{c = a + b}$$

siendo $p(x) = ax^2 + bx + c \in V$

c) En primer lugar estudiaremos el subespacio T

$$T = \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) / p(0) = 0\} \rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\Rightarrow T = \{ax^2 + bx / a, b \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{x^2, x\} \Rightarrow B_T = \{x^2, x\} \text{ y } \dim(T) = 2$$

cumpléndose que $\dim(T) = 2 = \dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) - r = 3 - 1$.

Conociendo las ecuaciones que deben verificar los dos subespacios por separado

$$\begin{aligned} V \cap T &= \{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(x) / p(x) \in V \wedge p(x) \in T\} = \\ &= \{ax^2 + bx + c / c = a + b \wedge c = 0\} = \{ax^2 + bx + c / c = 0 \wedge b = -a\} = \\ &= \{ax^2 - ax / a \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{x^2 - x\} \Rightarrow B_{V \cap T} = \{x^2 - x\} \text{ y } \dim(V \cap T) = 1. \end{aligned}$$

d) Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \dim(V + T) &= \dim(V) + \dim(T) - \dim(V \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \\ \Rightarrow V + T &= \mathbb{P}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

e) A la vista del apartado anterior, consideramos como punto de partida la unión de las bases de cada uno de los subespacios por separado, así “completamos” la base de V

$$B_V \cup B_T = \{x+1, -x^2+x, x^2, x\}$$

Observamos que de los 4 elementos podemos eliminar el cuarto ya que se puede conseguir sumando el segundo con el tercero

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \overline{0} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \underline{0} & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Consecuentemente

$$B_{V+T} = \{x+1, -x^2+x, x^2\} = B_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}.$$

Nota: también cumplen los requisitos del enunciado las bases

$$B_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} = \{x+1, -x^2+x, 1\} \text{ y } B_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})} = \{x+1, -x^2+x, x\}.$$

CONVOCATORIA ORDINARIA

27 de mayo de 2021

Apellidos y nombre:

Grupo:

SEGUNDO PARCIAL

EJERCICIO 1:

Estudiar si la siguiente aplicación define un producto escalar sobre \mathbb{R}^3 :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle (x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t \right\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_1 y_2$$

(1 punto)

Solución:

Estudiemos si se verifican los cuatro axiomas de un producto escalar:

i. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 ?$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cdot y_1 + 2x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + 2x_1 \cdot y_2 \neq$$

$$\neq \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = y_1 \cdot x_1 + 2y_2 \cdot x_2 + y_3 \cdot x_3 + 2y_1 \cdot x_2$$

ya que, en general, $x_1 \cdot y_2 \neq y_1 \cdot x_2$.

Consecuentemente la aplicación dada no define un producto escalar.

Nota: si consideramos, por ejemplo, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \neq \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

EJERCICIO 2:

Definir el concepto de norma en un espacio vectorial euclídeo

(1 punto)

Solución:

Dado un espacio vectorial V , sobre el cuerpo \mathbb{R} , se dice que una aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\rightarrow \|\vec{x}\| \end{aligned}$$

es una **NORMA** si cumple las siguientes propiedades:

- i. $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in V$
- ii. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- iii. $\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- iv. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ (propiedad conocida como desigualdad triangular)

En un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, sobre el cuerpo \mathbb{R} , la aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \end{aligned}$$

verifica las propiedades descritas anteriormente y por lo tanto es una **NORMA**.

EJERCICIO 3:

Resuelve el siguiente sistema incompatible utilizando el método de mínimos cuadrados:

$$\begin{cases} -6x + y = -1 \\ -2x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ 7x + y = 6 \end{cases}.$$

(3 puntos)

Solución:

Teniendo en cuenta que se trata de un sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas y que el enunciado dice que es un sistema incompatible, trabajaremos en $V = \mathbb{R}^4$ como espacio euclídeo y buscaremos la mejor aproximación en el subespacio

$$S = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset V.$$

La base $B_S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es ortogonal, puesto que $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -6 - 2 + 1 + 7 = 0,$

con lo que bastará con hallar la mejor aproximación de $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \notin S$ en S

$$\vec{b}' = \frac{\langle \vec{b}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 + \frac{\langle \vec{b}, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \cdot \vec{u}_2 = \frac{45}{90} \cdot \vec{u}_1 + \frac{8}{4} \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_1 + 2 \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}$$

ya que

$$\langle \vec{b}, \vec{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 - 4 + 1 + 42 = 45, \quad \langle \vec{b}, \vec{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + 2 + 1 + 6 = 8$$

$$\|\vec{u}_1\|^2 = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle = 90, \quad \|\vec{u}_2\|^2 = \langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4.$$



ÁLGEBRA

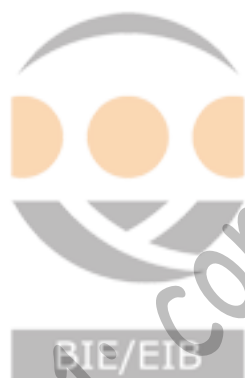
Grado en Ingeniería
Informática de
Gestión y Sistemas
de Información

Ahora solo falta resolver el sistema

$$\begin{cases} -6x + y = -1 \\ -2x + y = 1 \\ x + y = 5/2 \\ 7x + y = 11/2 \end{cases},$$

sistema compatible y determinado, cuya solución es

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 2 \end{cases}.$$



IKASLE
KONTSEILUA
CONSEJO DE
ESTUDIANTES

Curso 2020/21. Convocatoria ordinaria

EJERCICIO 4:

Sean la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$.

- ¿Para qué valores de a y b es diagonalizable? Diagonalizar la matriz cuando sea posible.
- ¿Es ortogonalmente diagonalizable? Razonar la respuesta.
- Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, calcular A^{-1} .

(3 + 1 + 1 = 5 puntos)

Solución:

- Obtención del polinomio característico

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b & b \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda) \cdot (1 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda)$$

Casos posibles:

- si $a \neq \pm 1 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = a$
- si $a = -1 \rightarrow \lambda_1 = -1$ doble, $\lambda_2 = 1$ simple
- si $a = 1 \rightarrow \lambda_1 = -1$ simple, $\lambda_2 = 1$ doble

Estudio de los subespacios propios en cada uno de los casos

Caso $a = -1$ Estudiemos el autovalor doble ya que para el autovalor simple la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica

$\lambda_1 = -1$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$

$$(A - \lambda_1 \cdot I) \cdot \vec{x} = (A + I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} by + bz = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \rightarrow z = 0 \text{ ya que } b \neq 0 \\ \rightarrow y = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1 = -1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_1 = 1$.

Conclusión: puesto que $d_1 = 1 \neq \alpha_1 = 2$ **la matriz A NO es diagonalizable.**

Caso $a = 1$ De forma análoga al caso anterior estudiemos el autovalor doble

$\lambda_2 = 1$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 2$

ÁLGEBRA

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 \cdot I) \cdot \vec{x} &= (A - I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} by + bz &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -2z &= 0 \end{cases} \rightarrow y=0 \text{ ya que } b \neq 0 \rightarrow z=0 \\ \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2=1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_2 = 1$.

Conclusión: puesto que $d_2 = 1 \neq \alpha_2 = 2$ **la matriz A NO es diagonalizable.**

Caso $a \neq \pm 1$ en este supuesto **la matriz SÍ es diagonalizable** porque

$$d_1 = \alpha_1 = 1, \quad d_2 = \alpha_2 = 1, \quad d_3 = \alpha_3 = 1$$

Nota: recordemos que $1 \leq d_i \leq \alpha_i \quad \forall i$

$\lambda_1 = -1$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 \cdot I) \cdot \vec{x} &= (A + I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a+1 & b & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (a+1)x + by + bz &= 0 \\ 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \rightarrow z = -(a+1)x/b \text{ ya que } b \neq 0 \rightarrow y=0 \\ \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -(a+1)x/b \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(a+1)/b \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1 = -1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(a+1)/b \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_1 = 1$.

$\lambda_2 = 1$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 \cdot I) \cdot \vec{x} &= (A - I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a-1 & b & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (a-1)x + by + bz &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -2z &= 0 \end{cases} \rightarrow y = -(a-1)x/b \text{ ya que } b \neq 0 \rightarrow z=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ (1-a)x/b \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ (1-a)/b \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2=1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (1-a)/b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_2 = 1$.

$\lambda_3 = a$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_3 = 1$

$$(A - \lambda_3 \cdot I) \cdot \vec{x} = (A - a \cdot I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} by + bz = 0 & \rightarrow 0+0=0 \\ (1-a)y = 0 & \rightarrow y=0 \text{ ya que } a \neq 1 \\ -(1+a)z = 0 & \rightarrow z=0 \text{ ya que } a \neq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_3 = a) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_3 = 1$.

Conclusión: en el caso $a \neq \pm 1$ y sea quien sea $b \neq 0$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1-a}{b} & 0 \\ -\frac{a+1}{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

b) Teniendo en cuenta que el enunciado dice $b \neq 0$ **la matriz A** no es simétrica en ningún caso y por lo tanto **NO es diagonalizable ortogonalmente**.

c) Teniendo en cuenta el teorema de Cayley-Hamilton el polinomio característico

$$p_A(\lambda) = (a - \lambda) \cdot (1 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda) = -\lambda^3 + a \cdot \lambda^2 + \lambda - a$$

es el polinomio anulador de A

$$p(A) = -A^3 + a \cdot A^2 + A - a \cdot I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

podemos concluir que

$$A \cdot (-A^2 + a \cdot A + I_{3 \times 3}) = a \cdot I_{3 \times 3}$$

y premultiplicando por A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot (-A^2 + a \cdot A + I_{3 \times 3})$$

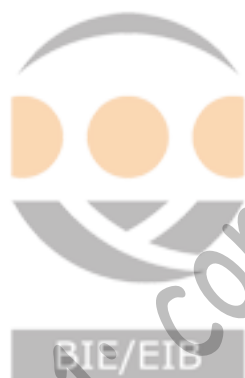
siempre y cuando $a \neq 0$ ya que en caso contrario la matriz A es singular y no tiene inversa

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería
 Informática de
 Gestión y Sistemas
 de Información

$$A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \left[- \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \left[- \begin{pmatrix} a^2 & ab+b & ab-b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \boxed{\begin{pmatrix} 1/a & -b/a & b/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = A^{-1}$$



IKASLE
 KONTSEILUA
 CONSEJO DE
 ESTUDIANTES

Curso 2020/21. Convocatoria ordinaria