

INGENIARITZAKO METODO ESTATISTIKOAK

2. Konbinatoria



eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

2. Konbinatoria

2.1. Sarrera

2.2. Aldakuntzak

2.3. Permutazioak

2.4. Konbinazioak

2.5. Errepikaturiko aldakuntzak

2.6. Errepikaturiko permutazioak

2.7. Errepikaturiko konbinazioak



2.1. Sarrera

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Konbinatoria: Multzo finitu baten elementu kopurua zehazteko metodoak ematen dituen teoria matematikoa.

Probabilitatearen azterketaren barruan, konbinatoria erabiltzen da baldintza jakin batzuk betetzen dituzten kasu posible guztien kopurua kalkulatzeko. Kopurua zehazten da, ez kasuak berak.

Konbinatoriako problemetan, eginkizun garrantzitsua duten bi eragiketa daude: multzo baten zati bat **aukeratzea** (lagina) eta multzo bateko elementuak **ordenatzea**.



2.1. Sarrera

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Lagin bat ordenatuta edo ordenatu gabe dagoela esaten da, elementuen ordena kontuan hartzen bada edo ez.

Azkenik, hautatutako elementu bat ordezkari daiteke edo ez, hurrengo erauzketa baino lehen. Horrela, laginak birjarpena bidez edo gabe bereizten dira (errepikapenarekin edo gabe).



2.2. Aldakuntzak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Izan bedi n elementu desberdin dituen multzoa. Orduan, s -naka hartutako n elementuren aldakuntzak deritze n elementu posibleetatik hartutako s elementuen multzoei, non talde horietako bi desberdintzat jotzen diren elementu horietakoren batean edo, elementu horiek izanik, kokapen-ordena desberdinean kokatuta badaude ($n > s$).

s -naka hartutako n elementuren aldakuntza kopurua hau da:

$$V_{n,s} = V_n^s = \frac{n!}{(n-s)!}$$



2.2. Aldakuntzak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Adibidea

- 1) F1-eko lasterketan 20 partehartzaile daude. Zenbat modutan bana daitezke lehenengo, bigarren eta hirugarren postuak?



2.3. Permutazioak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Izan bedi n elementu desberdin dituen multzoa. n elementu horiek antolatzeko modu ezberdin bakoitzari permutazio deritzo.

Aldakuntzetan $n = s$ bada, hau da, hautapen bakoitzak eskuragarri dauden n elementuak baditu, aldakuntza horiei n elementuren permutazio esaten zaie.

n elementuren permutazio kopurua hau da:

$$P_n = n!$$

Hitzarmenez $0!=1$ kontsideratzen da.



2.3. Permutazioak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Adibidea

2) Zenbat modutan kokatu daitezke 8 lagun ilara batean?



2.4. Konbinazioak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Izan bedi n elementu desberdin ditun multzoa. n horietatik s elementu dituzten taldeak osatzen ditugu, non horietako edozein bi talde desberdinak izango dira elementuren batean desberdinak badira; bi talde, berriz, berdinak izango dira elementu berak badituzte, nahiz eta ordena desberdinekoak izan. Hautapen horiei n elementuren s ordenako konbinazioak deritze.

n elementuren s ordenako konbinazioa kopurua hau da:

$$C_{n,s} = C_n^s = \frac{V_{n,s}}{P_s} = \frac{n!}{(n-s)!s!} = \binom{n}{s}$$



2.4. Konbinazioak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Adibidea

3) Ospitale batean 30 erizain daude. Txanda bakoitzeko 4 erizain egon behar badira, zenbat modu daude txanda horiek antolatzeko?



2.5. Errepikaturiko aldakuntzak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

s -naka hartutako n elementuren aldakuntzetan elementuak errepikatu badaitezke, hautapen horiei s -naka hartutako n elementuren errepikaturiko aldakuntzak deritze, eta $s > n$ gerta daiteke.

Errepikapena duten bi aldakuntza desberdintzat hartzen dira elementu desberdinak badituzte edo taldean kokatzeko ordena desberdina bada.

s -naka hartutako n elementuren errepikaturiko aldakuntza kopurua hau da:

$$VR_{n,s} = VR_n^s = n^s$$



2.5. Errepikaturiko aldakuntzak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Adibidea

4) Sei zifrako zenbat zenbaki idatz daitezke 3 eta 6 zifrak erabiliz?



2.6. Errepikaturiko permutazioak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Izan bedi n elementuen multzoa, non horietatik n_1 elkarren artean berdinak eta mota jakin batekoak diren, n_2 ere berdinak baina beste mota batekoak, eta horrela, elkarren artean berdinak baina aurrekoak ez bezalako elementuak dituen n_k talde bateraino. Beraz, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. n elementuren errepikaturiko permutazio deritzo n elementu horiek konbinatzeko modu posible guztiei.

n_1 berdinak, n_2 berdinak eta abar dituen n elementuren errepikaturiko permutazioen kopurua hau da:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = PR_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$



2.6. Errepikaturiko permutazioak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Adibidea

5) Zenbat zenbaki idatz daitezke 111446 zenbakiaren zifra guztiak erabiliz? Zenbat hasiko dira 61-ekin?



2.7. Errepikaturiko konbinazioak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Izan bedi n elementu desberdineko multzoa. n horietatik s elementu dituzten taldeak osatzen badira eta elementuren bat errepikatuta ager badaiteke, hautapen bakoitzari s ordenako errepikaturiko konbinazioa deritzo. Errepikaturiko bi konbinazio berdinak izango dira elementu berdinak badituzte eta elementu horiek kopuru berean errepikatzen badira.

s ordenako errepikaturiko konbinazioen kopurua hau da:

$$CR_{n,s} = CR_n^s = C_{n+s-1,s} = \binom{n+s-1}{s} = \frac{(n+s-1)!}{(n-1)!s!}$$



2.7. Errepikaturiko konbinazioak

Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

Adibidea

6) Zenbat modutan bana daitezke 20 gozoki berdin 12 mutilen artean? Eta gutxienez mutil bakoitzari gozoki bat ematen bazaio?



Sarrera

Aldakuntzak

Permutazioak

Konbinazioak

Errepikapenezko
aldakuntzak

Errepikaturiko
permutazioak

Errepikaturiko
konbinazioak

