DIAGONALIZAZIOA

1. ariketa

Enuntziatua:

Izan bedi matrize erreala $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Lortu A matrizearen polinomio karakteristikoa.
b) Konprobatu Cayley-Hamilton-en teorema betetzen dela
c) Lortu A matrizearen balio propioak bere anizkoiztasun aljebraikoa adieraziz, eta elkartutako azpiespazio propioak, bakoitzaren oinarri bat emanez
d) Posible bada, diagonalizatu A matrizea, arrazoitu erantzuna.

Ebazpena

In[∘]:=
```
Remove["Global`*"]
borra
```

- a) Lortu A matrizearen polinomio karakteristikoa.
  - A matrizea definitu:

In[∘]:=
```
Remove["Global`*"]
borra
```

In[∘]:=
```
A = {{1, 0, 2}, {-1, -1, -1}, {0, 0, -1}}
```

Out[∘]=
```
{{1, 0, 2}, {-1, -1, -1}, {0, 0, -1}}
```

  - Polinomio karakteristikoa:

In[∘]:=
```
p[λ_] = Det[A - λ * IdentityMatrix[3]]
        determinante matriz identidad
```

Out[∘]=

$(-1-\lambda)\left(-1+\lambda^2\right)$

In[∘]:=
```
p2[λ_] = CharacteristicPolynomial[A, λ]
         polinomio característico
```

Out[∘]=

$1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3$

- b) Konprobatu Cayley - Hamilton - en teorema betetzen dela
  - Cayley - Hamilton - en teorema egiaztatzen dela konprobatu:

In[ ]:=
```
IdentityMatrix[3] + A - MatrixPower[A, 2] - MatrixPower[A, 3]
matriz identidad        potencia matricial     potencia matricial
```
Out[ ]=
```
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

- c) Lortu A matrizearen balio propioak bere anizkoiztasun aljebraikoa adieraziz, eta elkartutako azpiespazio propioak, bakoitzaren oinarri bat emanez.
  - Balio propioak:

In[ ]:=
```
Solve[p[λ] == 0, λ]
resuelve
```
Out[ ]=
```
{{λ → -1}, {λ → -1}, {λ → 1}}
```

  - Balio propioak eta bektore propioak:

In[ ]:=
```
s = Eigensystem[A]
    autovalores y autove
```
Out[ ]=
```
{{-1, -1, 1}, {{-1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {-2, 1, 0}}}
```

  - λ_1 = -1 balio propioari elkartutako azpiespazio propioa: $V(\lambda_1)$=L{(-1,0,1),(0,1,0)}
  - λ_2 = 1 balio propioari elkartutako azpiespazio propioa: $V(\lambda_2)$=L{(-2,1,0)}
- d) Posible bada, diagonalizatu A matrizea, arrazoitu erantzuna.
  - A matrizea diagonalizagarria da, balio propioen anizkoiztasun geometrikoa eta aljebrakoa bat direlako. Are gehiago, bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat {(-1,0,1),(0,1,0),(-2,1,0)} da.
  - Ondorioz P eta D matrizeak ondorengoak dira:

In[ ]:=
```
p = Transpose[s[[2]]]
    transposición
```
Out[ ]=
```
{{-1, 0, -2}, {0, 1, 1}, {1, 0, 0}}
```

In[ ]:=
```
MatrixForm[p]
forma de matriz
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
d = DiagonalMatrix[s[[1]]]
    matriz diagonal
```
Out[ ]=
```
{{-1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, 1}}
```

In[∘]:=
```
MatrixForm[d]
```
forma de matriz

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
d == Inverse[p].A.p
```
matriz inversa

Out[∘]=
```
True
```

2. ariketa

Enuntziatua:

Izan bedi matrize erreala $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Lortu A matrizearen polinomio karakteristikoa.
b) Konprobatu Cayley-Hamilton-en teorema betetzen dela
c) Lortu A matrizearen balio propioak bere anizkoiztasun aljebraikoa adieraziz, eta elkartutako azpiespazio propioak, bakoitzaren oinarri bat emanez.
d) Posible bada, diagonalizatu A matrizea, arrazoitu erantzuna

Ebazpena:

In[∘]:=
```
Remove["Global`*"]
```
borra

- a) Lortu A matrizearen polinomio karakteristikoa. Cayley-Hamilton-en teorema betetzen al da?
  - A matrizea definitu:

In[∘]:=
```
Remove["Global`*"]
```
borra

In[∘]:=
```
A = {{2, 0, 2}, {0, -1, 0}, {2, 0, -1}}
```
Out[∘]=
```
{{2, 0, 2}, {0, -1, 0}, {2, 0, -1}}
```

  - Polinomio karakteristikoa:

In[∘]:=
```
p[λ_] = Det[A - λ * IdentityMatrix[3]]
```
determinante matriz identidad

Out[∘]=

$6 + 7\lambda - \lambda^3$

In[∘]:=
```
p2[λ_] = CharacteristicPolynomial[A, λ]
```
polinomio característico

Out[∘]=

$6 + 7\lambda - \lambda^3$

- b) Konprobatu Cayley-Hamilton-en teorema betetzen dela
  - Cayley - Hamilton - en teorema egiaztatzen dela konprobatu:

In[∘]:=
```
6 * IdentityMatrix[3] + 7 * A - MatrixPower[A, 3]
```
matriz identidad potencia matricial

Out[∘]=
```
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

- c) Lortu A matrizearen balio propioak bere anizkoiztasun aljebraikoa adieraziz, eta elkartutako azpiespazio propioak, bakoitzaren oinarri bat emanez.
  - Balio propioak eta bektore propioak:

In[∘]:=
```
s = Eigensystem[A]
```
autovalores y autove

Out[∘]=
```
{{3, -2, -1}, {{2, 0, 1}, {-1, 0, 2}, {0, 1, 0}}}
```

  - Balio propioak:

In[∘]:=
```
s[[1]]
```

Out[∘]=
```
{3, -2, -1}
```

  - Bektore propioak:

In[∘]:=
```
s[[2]]
```

Out[∘]=
```
{{2, 0, 1}, {-1, 0, 2}, {0, 1, 0}}
```

  - $\lambda_1 = 3$ balio propioari elkartutako azpiespazio propioa: $V(\lambda_1)$=L{(2,0,1)}
  - $\lambda_2 = -2$ balio propioari elkartutako azpiespazio propioa: $V(\lambda_2)$=L{(-1,0,2)}
  - $\lambda_3 = -1$ balio propioari elkartutako azpiespazio propioa: $V(\lambda_3)$=L{(0,1,0)}
- d) Posible bada, diagonalizatu A matrizea, arrazoitu erantzuna.
  - A matrizea diagonalizagarria da, balio propioen anizkoiztasun geometrikoa eta aljebrakoa bat direlako. Are gehiago, bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat {(2,0,1),(-1,0,2),(0,1,0)} da.
  - Ondorioz P eta D matrizeak ondorengoak dira:

In[ ]:=
```
p = Transpose[s⟦2⟧]
```
transposición

Out[ ]=
```
{{2, -1, 0}, {0, 0, 1}, {1, 2, 0}}
```

In[ ]:=
```
MatrixForm[p]
```
forma de matriz

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
d = DiagonalMatrix[s⟦1⟧]
```
matriz diagonal

Out[ ]=
```
{{3, 0, 0}, {0, -2, 0}, {0, 0, -1}}
```

In[ ]:=
```
MatrixForm[d]
```
forma de matriz

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
d == Inverse[p].A.p
```
matriz inversa

Out[ ]=
```
True
```