2.2. PROBABILIDAD:

Basándose en la estadística inferencial, se pueden extrapolar los resultados obtenidos a toda la población mediante la teoría de la probabilidad.

Esta estudia el comportamiento de los experimentos aleatorios con el fin de cuantificar la incertidumbre en el resultado de dichos experimentos aleatorios.

Dos tipos de fenómenos:

1) Fenómeno determinista: resultado final PREDECIBLE, ya que las condiciones lo determinan perfectamente.

2) Fenómeno aleatorio: IMPREDECIBLE, las condiciones conducen a diferentes resultados.

Un experimento aleatorio es cualquier acción sujeta a incertidumbre, cumpliendo las siguientes condiciones:

i) El experimento se puede repetir en las mismas condiciones.

ii) No se puede conocer el resultado del experimento de antemano.

iii) Todos los posibles resultados son conocidos.

iv) Al repetir en infinitas ocasiones el mismo experimento, la frecuencia relativa de los diferentes resultados se estabiliza (PROBABILIDAD)

Espacio muestral (Ω) y Sucesos:

→ Espacio muestral (Ω): conjunto de todos los resultados posibles de un experimento.

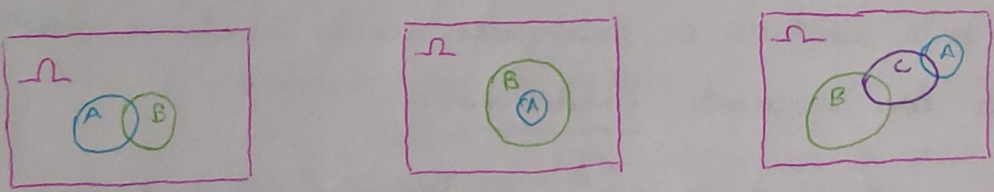
También denominado SUCESO SEGURO, y puede ser finito, infinito numerable (se puede contar) o infinito no numerable (no se puede contar).

→ Sucesos: cualquier subconjunto del espacio muestral. Se denominan con letras mayúsculas.

Un suceso formado por un único elemento → SUCESO ELEMENTAL.

Por lo tanto, un suceso es un conjunto de sucesos elementales.

→ Diagramas de Venn: el Ω se representa por un rectángulo y cada suceso como un recinto incluido en él.



ejemplo: definir el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios:

a) Lanzamiento de una moneda.

C = cara
X = cruz

$$\Omega = \{C, X\}$$

b) Lanzamiento de un dado.

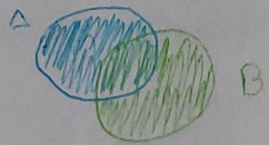
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

c) Lanzamiento de dos dados.

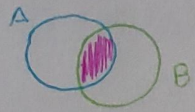
$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in (1, 2, 3, 4, 5, 6)\}$$

→ Definiciones y operaciones entre sucesos :

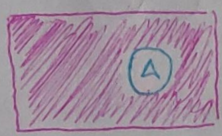
- Unión : $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \lor x \in B\}$



- Intersección : $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \land x \in B\}$



- Complementario : $A^c = \bar{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$



- Suceso seguro : un suceso A es seguro si el experimento siempre reproduce ese resultado.

Por ejemplo: $A \cup \bar{A} = \Omega$; $A \cup \bar{A}$ es un suceso seguro.

- Suceso imposible: complementario al suceso seguro, $\emptyset$.

Es decir, $\bar{\Omega} = \emptyset$. El experimento no puede dar ese resultado, por lo que es un suceso imposible (el suceso es un conjunto vacío).

- Sucesos incompatibles: la intersección de dos sucesos A y B es un suceso imposible (conjunto vacío $\emptyset$), entonces A y B se denominan incompatibles. $A \cap B = \emptyset$

- Inclusión : la inclusión de un suceso A en B ocurre si y sólo si todos los sucesos elementales de A lo son de B ; y se denota $A \subseteq B$.

- Diferencia : la diferencia de A y B es el conjunto de todos los elementos que se encuentran en A pero no en B.

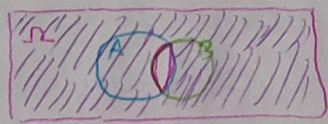
Si $A \subseteq B$, $B-A$ <u>diferencia propia</u>. $A-B = A \cap B^c = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$

→ Propiedades de las operaciones con sucesos:

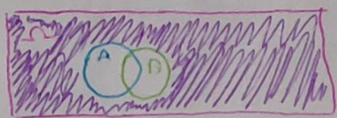
- Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
- Asociatividad: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \Omega = A$
- Distributividad: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

→ Leyes de Morgan:

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$



PROBABILIDAD

→ Límite de frecuencia relativa: definido por Richard Van Misses como el límite de las frecuencias relativas. Es decir, al realizar un experimento infinitas veces la frecuencia relativa de un suceso se estabiliza y a ese valor se le denomina probabilidad de dicho suceso.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(A)}{n}$$

→ Definición de LAPLACE: si Ω es el espacio muestral finito de cierto experimento aleatorio, se puede considerar la unión de n sucesos elementales INCOMPATIBLES DOS A DOS y EQUIPROBABLES y un suceso A como la unión de m de los sucesos elementales de Ω.

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad ; \quad A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

Consecuentemente, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$.

→ Axiomática (axiomas de Kolmogorov): Se denomina probabilidad a una función $P: \Omega \to \mathbb{R}$, que cumple las siguientes propiedades:

- Axioma I: $0 \leq P(A) \leq 1, \ \forall A \subseteq \Omega$
- Axioma II: $P(\Omega) = 1$
- Axioma III: $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} : A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j \to P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
  (Incompatibles dos a dos)

Propiedades derivadas:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2) $A \subseteq B \to P(A) \leq P(B)$
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

4) $P(\emptyset) = 0$
5) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

ejemplo 2: Calcule la probabilidad de obtener un resultado para lanzar un dado no trucado.

1) Definir el suceso: A: "Obtener un resultado par al lanzar un dado no trucado".

2) ¿Se puede aplicar LAPLACE?

¿P(A)? $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ → equiprobables → incompatibles dos a dos (no se pueden obtener al mismo tiempo dos de ellos)

Sí → $A = \{2, 4, 6\}$ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ejemplo 3: en una urna hay 10 pilas de las cuales una es defectuosa. Se eligen tres pilas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las tres pilas elegidas se encuentre la defectuosa?

1) Definir el suceso; A: "que se encuentre la pila defectuosa entre las tres escogidas".

2) "Sin reemplazamiento" → sin repetición → equiprobables.

Aplicaremos LAPLACE: $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$

Casos totales $= C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$ casos totales

Casos favorables $= C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36$ casos favorables

$P(A) = \frac{36}{120} = 0'3$

ejemplo 4: Si la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda trucada es de 0'3, calcule la probabilidad de obtener cruz.

A: "Obtener cruz" Axiomas de Kolmogorov: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

C: cara $\Omega = \{C, X\}$ $P(\bar{A}) = 0'3$ → $P(A) = 1 - 0'3 = 0'7$

X: cruz

ejemplo 5: la probabilidad de que Paula apruebe estadística es de $2/3$ y de aprobar álgebra de $4/9$. Si la probabilidad de aprobar ambas asignaturas es de $1/4$, ¿cuál es la probabilidad de aprobar al menos una asignatura?

1) A: "aprueba ESTADÍSTICA" $P(A) = 2/3$ $P(A \cap B) = 1/4$

B: "aprueba ÁLGEBRA" $P(B) = 4/9$

Aprobar al menos una asignatura: estadística Ó álgebra $\rightarrow P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{31}{36} = 0'861$$

ejemplo 6: Sabiendo que al lanzar dos dados hay 36 posibles resultados, calcule la probabilidad de obtener entre ambos dados 7 u 11.

1) A: "Obtener 7 u 11".

Por convenio, los dados serán VARIACIONES: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ posibles resultados. Por tanto, el orden importa y podemos asegurar la equiprobabilidad de los distintos sucesos.

2) ¿Cuántas formas de obtener 7 y 11?

6+1
5+2
4+3
3+4
2+5
1+6
} 6

6+5
5+6
} 2

} 8

$$P(A) = \frac{8}{36} = 2/9$$

Ejemplo 7: en una urna hay diez pilas de las cuales una es defectuosa. Se eligen al azar tres pilas. ¿Cuál es la probabilidad de que la pila defectuosa no se encuentre entre las elegidas?

1) A: "La pila defectuosa no se encuentre entre las elegidas".

2) Casos totales $= 120$

Casos desfavorables (antes favorables) $= 36$ $\quad P(A) = \frac{84}{120} = 0'7$

Casos favorables $= \overline{36} = 84$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sean A y B dos sucesos de Ω. Entonces sabiendo que se ha producido el suceso A, la probabilidad de que ocurra B se denomina probabilidad del suceso B condicionado a A:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A) > 0$$

La probabilidad condicionada es la medida de la parte de A (o B) que se encuentra en B (o A) normalizada a 1.

ejemplo 9: La probabilidad de que un vuelo despegue a la hora es de 0'83 mientras que la probabilidad de que aterrice puntual es de 0'82. Además, se sabe que la probabilidad de que se den ambos sucesos simultáneamente es de 0'78.

a) Sabiendo que un vuelo ha despegado a la hora asignada, ¿cuál es la probabilidad de que aterrice puntual?

A: "despega puntual" $\quad P(A) = 0'83$

$P(A \cap B) = 0'78$

B: "aterriza puntual" $\quad P(B) = 0'82$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0'78}{0'83} = 0'939759$$

b) Sabiendo que un vuelo ha aterrizado puntual, ¿probabilidad de que haya despegado en hora?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0'78}{0'82} = \frac{39}{41} = 0'\overline{95121}$$

INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Dos sucesos A y B son independientes si y sólo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Cuando esto sucede, significa que uno de ellos suceda no ofrece información ni condiciona al otro suceso:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \\ P(B|A) = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \end{cases}$$

Tres sucesos A, B y C son independientes si y sólo si:

i) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ii) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

iii) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

iv) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

En general: $P(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j}) = P(A_{k_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{k_j})$ para $2 \leq j \leq n$ y $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_j \leq n$

En total, se han de verificar $\sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} = 2^n - n - 1$ igualdades.

ejemplo 10: en el experimento aleatorio de lanzar un dado no trucado se definen los siguientes sucesos A y B:

A := "El resultado es mayor que 3".

B := "El resultado es un número cuadrado".

¿Cuál es la probabilidad de A condicionada a B? ¿Son A y B independientes?

$\Omega = \{1, 2, 3, \underbrace{4, 5, 6}\}$ $\qquad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/6}{1/3} = \dfrac{1}{2} = P(A)$

$P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad P(A \cap B) = 1/6 = ¿\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3}?$ Sí

$P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Son independientes. $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$

$P(A|B) = \frac{1}{2} = P(A)$

REGLA del PRODUCTO

Como consecuencia de la probabilidad condicionada se pueden definir la intersección de dos sucesos A y B aplicando la regla del producto.

$$\begin{cases} P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ \\ P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A) \\ P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A|B) \end{cases}$$

Con tres sucesos:

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$$

En general:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot \ldots \cdot P\left(A_n \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

ejemplo 12: en el equipo directivo de una universidad hay 80 profesores de los cuales 16 pertenecen a la facultad de medicina. Se pretenden repartir dos cargos de forma aleatoria de entre todos los profesores de dicho equipo.

Calcule la probabilidad de que dichos cargos sean ocupados por profesores de la facultad de medicina si:

a) Cada profesor solo puede ocupar un cargo.

M_1: "Primer cargo ocupado por un profesor de la facultad de medicina".

M_2: "Segundo cargo ...".

$$P(M_1\cap M_2) = P(M_1)\cdot P(M_2/M_1) = \frac{16}{80}\cdot\frac{15}{79} = 0'038$$

b) Un mismo profesor puede ocupar los dos cargos.

$$P(M_1\cap M_2) = P(M_1)\cdot P(M_2/M_1) = \frac{16}{80}\cdot\frac{16}{80} = \frac{1}{25} = 0'04$$

TEOREMA de la PROBABILIDAD TOTAL

Sea una colección de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ que forman una partición del espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, es decir,

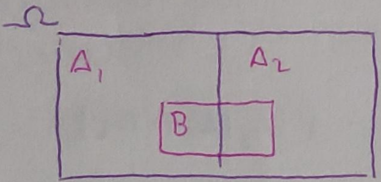
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $\forall i \neq j$.

Sea además un suceso B del mismo espacio muestral, entonces por el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i) \quad \text{donde } P(A_i) > 0$$

Es decir, $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

$= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$



$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$

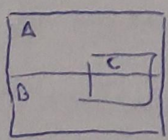
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$

$= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)$

ejemplo 13: el 70% de una clase binaria son mujeres de las cuales el 10% son fumadoras. Por otro lado, el 20% de los hombres de esa clase son fumadores. ¿Cuál es el porcentaje de fumadores?

A: "Ser mujer" $\quad B = \bar{A}$ = "Ser hombre".

C: "Ser fumador" $\quad P(A) = 0'7 \quad P(C/A) = 0'1 \quad P(C/B) = 0'2$



$C = (A \cap C) \cup (B \cap \bar{C})$

$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$

$P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = 0'13$

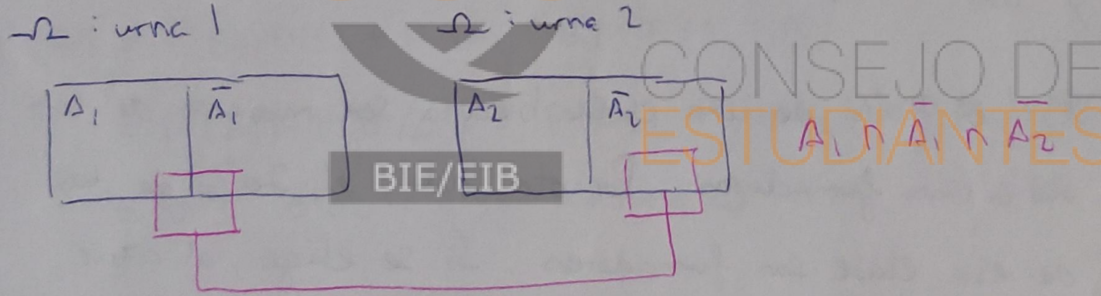
Porcentaje de fumadores: 13%

ejemplo 14: se tienen dos cajas conteniendo la primera de ellas cuatro bolas azules y tres negras; y la segunda caja tres bolas azules y cinco negras. Se ha extraído una bola de la primera caja y sin reparar en el color se ha introducido en la segunda. ¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener una bola negra de la segunda caja?

A_1: "Sacar bola azul de la caja 1" $\quad \bar{A_1}$: "... bola negra ..."

A_2: "... caja 2".

$$P(\bar{A_2}) = P(A_1)\cdot P(\bar{A_2}/A_1) + P(\bar{A_1})\cdot P(\bar{A_2}/\bar{A_1}) =$$
$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{P(\bar{A_2}\cap A_1)}{P(A_1)} + \frac{3}{7}\cdot\frac{P(\bar{A_2}\cap\bar{A_1})}{P(\bar{A_1})} =$$
$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{7}\cdot\frac{6}{9} = \frac{38}{63}$$



TEOREMA de BAYES :

Sea una colección de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ que forman una partición del espacio muestral Ω de un experimento aleatorio, es decir, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $\forall i \neq j$.

Sea además un suceso B del mismo espacio muestral y sean conocidos $P(A_i)$ y $P(B|A_i)$ $\forall A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

entonces se puede calcular las probabilidades A_i condicionadas a B aplicando el teorema de Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(B|A_i)} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; P(A_i), P(B) > 0$$

Posibilita el cálculo de probabilidades $P(A_i|B)$, conociendo las $P(A_i)$ y las $P(B|A_i)$.

ejemplo 15: el 70% de una clase binaria son mujeres de las cuales el 10% son fumadoras. Por otro lado, el 20% de los hombres de esa clase son fumadores. Si se elige, al azar, a una persona de la clase y resulta ser fumadora, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

A: "Ser mujer" $\quad P(A) = 0'7 \quad P(C/A) = 0'1$

B: "Ser hombre" $\quad P(B) = 0'3 \quad P(C/B) = 0'2$

C: "Ser fumador"

$$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \; ; \text{ Teorema de Bayes } ; = \frac{P(C|B) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B)} =$$

$$= \frac{0'3 \cdot 0'2}{0'7 \cdot 0'1 + 0'3 \cdot 0'2} = \frac{0'3 \cdot 0'2}{0'13} = 0'4615$$

Teorema de la probabilidad total.

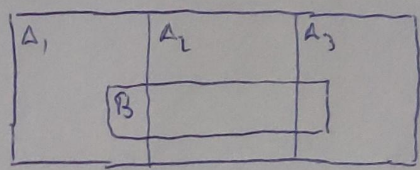
ejemplo 16: en una fábrica hay tres máquinas. La primera realiza el 30% de la producción, la segunda el 45% y la tercera el 25% restante. Se sabe que el 2% de los productos producidos por la primera máquina son defectuosos, el 3% de la segunda y el 2% de la tercera.

a) Si se elige al azar un producto, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

A_1: "producto hecho por la máquina 1"

A_2: "... 2"

A_3: "... 3"



B: "producto defectuoso"

$P(A_1) = 0'3$; $P(A_2) = 0'45$; $P(A_3) = 0'25$

$P(B/A_1) = 0'02$; $P(B/A_2) = 0'03$; $P(B/A_3) = 0'02$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$
$$= P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + P(A_3)\cdot P(B/A_3)$$
$$= 0'3 \cdot 0'02 + 0'45 \cdot 0'03 + 0'25 \cdot 0'02 = 0'0245$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto defectuoso elegido al azar haya sido producido por la segunda máquina?

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \text{ ; Teorema de Bayes ; } = \frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{P(B)} =$$

$$= \frac{0'45 \cdot 0'03}{0'0245} = 0'5510$$

Teorema Probabilidad Total

Ejercicio 1

A: "Obtener resultado par"

B: "Obtener una cara"

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

sea $x = P(B)$

$P(\Omega) = 1 = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + \dots + \dots$

$= x + 2x + 3x + 4 + 5x + 6x$

$= 21x = 1 \rightarrow \boxed{x = 1/21}$

$P(\{2\}) = 2 \cdot P(B)$

$P(\{4\}) = 4 \cdot P(B)$

...

a) $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$

$$= 2 \cdot \frac{1}{21} + 4 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{7}$$

b) C: "Obtener un resultado superior a cuatro".

$$P(C) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = 5 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{11}{21}$$

c) D: "obtener resultado impar".

$$P(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C) \rightarrow 5 \rightarrow P(\{5\}) = 5/21$$

$$= \left(1 - \frac{4}{7}\right) + \frac{11}{21} - \frac{5}{21} = \frac{5}{7}$$

Ejercicio 2

U_1: "Extraer una bola de la primera urna". $P(U_1) = 1/3$

U_2: "Extraer una bola de la segunda urna". $P(U_2) = 2/3$

B_1: "Extraer bola blanca de la primera urna". $P(B_1) = 3/5$

N_1: "Extraer bola negra de la segunda urna". $P(N_1) = 2/5$

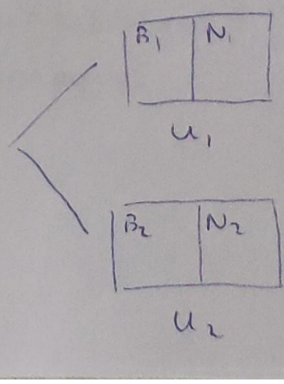
B_2: "..." $P(B_2) = 2/5$

N_2: "..." $P(N_2) = 3/5$

a) $(B_1 \cap U_1) \cup (B_2 \cap U_2) = X$

$$P(X) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

b) $$P(U_1 \mid X) = \frac{P(U_1 \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{7/15} = 3/7$$



Ejercicio 3:

$P(A) = 1/4$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A|B) = \frac{1}{4}$

a) ¿A y B son incompatibles?

$P(A \cap B) = 0 \rightarrow A \cap B = \emptyset$

$P(A|B) = \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \rightarrow P(A \cap B) \neq 0$

A y B no son incompatibles.

b) ¿A y B son independientes?

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \longrightarrow \frac{1}{8} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ Sí

$P(A|B) = \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/4 \longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

A y B son independientes.

c) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

d) $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A) \cdot P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A) \rightarrow$ Se aplica la INDEPENDENCIA de SUCESOS

$\boxed{P(A|\bar{B}) = 1/4 = P(A)}$

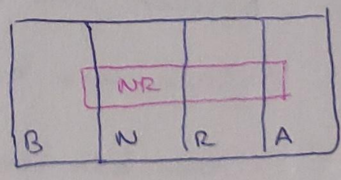
Ejercicio 4:

B: "Sacar una bola blanca" $P(B) = 1/4$

N: "... negra" $P(N) = 1/4$

R: "... roja" $P(R) = 1/4$

A: "... azul" $P(A) = 1/4$



NR: "no se repite color"

$NR = (NR \cap B) \cup (NR \cap N) \cup (NR \cap R) \cup (NR \cap A)$

T. Probabilidad Total: $P(NR) = P(NR \cap B) + P(NR \cap N) + P(NR \cap R) + P(NR \cap A)$

- $P(NR \cap B) = P(B) \cdot P(NR/B)$

$P(B \cap N \cap R \cap A) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{39} \cdot \frac{10}{38} \cdot \frac{10}{37} = 4'559 \cdot 10^{-3}$

Es un caso concreto; podría ser $(B \cap R \cap A \cap N)$ ó $(R \cap N \cap B \cap A)$ ...

$P_4 = 4!$ $\quad P_4 \cdot 4'559 \cdot 10^{-3} = 0'1094$

Probabilidad de que se repita algún color:

$$1 - 0'1094 = 0'8906.$$

$$\frac{40}{40} \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{10}{37} = 0'1094$$

ejercicio 5:

$\Omega = \{(DD), (AAAA), (AAAD), (AADA), (ADAA), (DAAA), (ADD), (DAD), (AD,D)\}$

D: Defectuoso

A: Apto

ejercicio 6:

$P(A \cup B \cup C)$

$P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(C \cap B) = \frac{1}{10}$; $P(A \cap B \cap C) = \frac{4}{300}$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{4}{300} = 31/75$$

ejercicio 7:

C_1: "Obtener cara al lanzar la moneda 1"

C_2: " ... 2 "

M_1: "Escoger la primera moneda" $P(M_1) = 1/2$

M_2: "...segunda" $P(M_2) = 1/2$

M_1: | C_1 | $\bar{C_1}$ |

M_2: | C_2 | $\bar{C_2}$ |

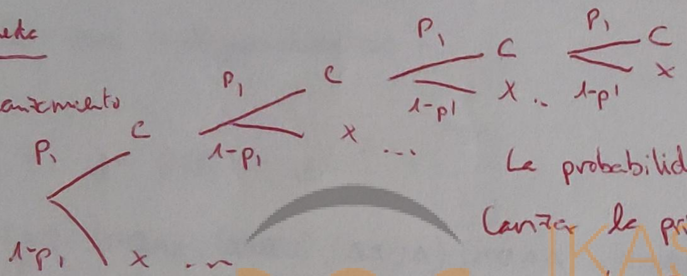
$P(C_1) = p_1$; $P(C_2) = p_2$

$P(M_1/CCC) =$

Casos favorables: { (CCCx), (CCxC), (CxCC), (xCCC) }

Primera moneda

1er lanzamiento



La probabilidad de obtener 3 caras al lanzar la primera moneda:

$4 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot p_1 \cdot (1-p_1) = \boxed{p_1^3(1-p_1) \cdot 4}$

Segunda moneda: $p_2^3(1-p_1) \cdot 4$

Laplace: $\dfrac{4 \cdot p_1^3(1-p_1)}{4 \cdot p_1^3(1-p_1) + 4 \cdot p_2^3(1-p_2)} = \dfrac{p_1^3(1-p_1)}{p_1^3(1-p_1) + p_2^3(1-p_2)}$

ejercicio 8:

A: "Obtener 1, 2 o 3 al lanzar un dado = escoger la caja A". $P(A) = \frac{1}{2}$

B: "Obtener 4 al lanzar ... = ... B" $P(B) = 1/6$

C: " ... 5 o 6 ... = ... C" $P(C) = \frac{1}{3}$

B_A: "Obtener bola blanca de la caja A" $\Rightarrow P(B_A) = P(A) \cdot 1/3 = 1/6$

N_A: " ... negra"

a) $P(B_A \cup B_B \cup B_C) = P(B_A) + P(B_B) + P(B_C)$

B_B: " ... "

N_B: " ... "

B_C: " ... "

N_C: " ... "

• $P(B_B) = P(B) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$

• $P(B_C) = P(C) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P(B_A \cup B_B \cup B_C) = 1/6 + 1/9 + 1/6 = 4/9$

b) $P(B/\text{es blanca})$

es blanca = Z = "Extraer una bola blanca"

$P(Z) = 4/9$ (apartado A)

$$P(B/Z) = \frac{P(B \cap Z)}{P(Z)} = \frac{P(B_B)}{P(Z)} = \frac{1/9}{4/9} = \frac{1}{4}$$

ejercicio 9:

A y B dos sucesos independientes.

$P(A \cap B) = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$

$P(\overline{A \cup B}) = 1/3 = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (\bar{A} \cap \bar{B})$

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$\rightarrow \left. \begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) = 1/6 \\ (1-P(A)) \cdot (1-P(B)) = 1/3 \end{array} \right\}$

Sustitución: $P(B) = \dfrac{1}{6P(A)}$

$$(1-P(A)) \cdot \left(1 - \frac{1}{6P(A)}\right) = 1/3$$

$1 - \frac{1}{6P(A)} - P(A) + \frac{1}{6} = 1/3 \rightarrow -\frac{1}{6P(A)} - P(A) = -5/6$

$-1 - 6P^2(A) = -5P(A) \rightarrow \boxed{-6x^2 + 5x - 1 = 0}$

$P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$

$P(A) = 1/3$; $P(B) = 1/2$

ejercicio 10:

Posibilidades totales de extraer dos monedas: $V_{10,2} = \frac{10!}{8!} = 90$

Posibilidades totales de obtener 10:

1+9
2+8
3+7
4+6
5+5
6+4
7+3
2+8
9+1

9, pero es sin reemplazamiento: 5+5 no es posible. 9-1 = 8 casos favorables.

$$P(S) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

Ejercicio 11:

A y B dos sucesos incompatibles.

$P(A) = 0'4$; $P(B) = 0'1$

C otro suceso: $P(C/A) = 0'65$; $P(C|B) = 0'75$

a) $\boxed{P(C \cap A) =}$ $0'26$

$$P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} \rightarrow P(C \cap A) = P(C/A) \cdot P(A)$$

$$P(C \cap A) = 0'65 \cdot 0'4 = 0'26$$

b) $\boxed{P(C \cap B)}$

$$P(C \cap B) = P(C/B) \cdot P(B) = 0'75 \cdot 0'1 = 0'075$$

c) $\boxed{P(C|A \cup B)}$

$$P(C|A \cup B) = \frac{P(C \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \rightarrow (C \cap A) \cup (C \cap B) \rightarrow$$ Suma pq son incompatibles.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'4 + 0'1 + \underbrace{0}_{\text{INCOMPATIBLES.}} = 0'5$$

$(A \cup B) = Z$

$$\frac{P(C \cap Z)}{P(Z)} = \frac{0'335}{0'5} = 0'67$$

$$P(C/A \cup B) = \frac{P(C \cap A) + P(C \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0'26 + 0'075}{0'5} = 0'67.$$

ejercicio 12:

$P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Para que sean independientes: $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$\hookrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$1/2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$ Sí

Por tanto, A y B son dos sucesos COMPATIBLES e INDEPENDIENTES.

$P(A|B) = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$; $P(B|A) = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}$

b) No son incompatibles.

c) Sí son independientes.

ejercicio 13:

C := "Estar bajo control".   D := "Que la pieza sea defectuosa".

$P(C) = 0'92$ $P(D/C) = 0'02$

$P(D/\overline{C}) = 0'15$

$\boxed{P(C/D)\ ?} = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0'0184}{0'0304} = \boxed{0'605263\ldots}$

$P(D/C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{P(D \cap C)}{0'92} = 0'02 \rightarrow P(D \cap C) = 0'0184$.

$P(D) \rightarrow$ T. Probabilidad Total $\rightarrow P(D) = P(D \cap C) + P(D \cap \overline{C})$

$P(D|\overline{C}) = \frac{P(D \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(D \cap \overline{C})}{0'08} = 0'15 \rightarrow P(D \cap \overline{C}) = 0'012$

$P(D) = 0'0184 + 0'012 = 0'0304$

ejercicio 14:

$VR_{6,2} = 6^2 = 36$

$p(\text{Sacar 2 seises}) = \frac{1}{36} \rightarrow p(\overline{\ldots}) = \frac{35}{36}$ } un lanzamiento.

n lanzamientos: $p(\text{2 seises}) = 1 - \left[\frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdots \frac{35}{36}\right] = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$

ii) $p = \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \rightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2} \rightarrow n \cdot \ln\left(\frac{35}{36}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

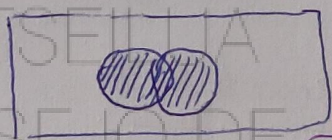
$n = \frac{\ln(1/2)}{\ln(35/36)} = 24'60509772 \simeq 25$ veces.

ejercicio 15:

$P(A) = a$; $P(B) = b$; $P(A \cap B) = c$

a) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$= (1-a) + (1-b) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$



$1 - a - b + P(A \cap B) = 1 - a - b + c$

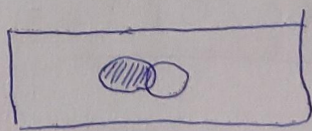
hay que sumar porque al restar A y B, hay valores (la intersección) que se han restado dos veces.

$= (\cancel{1}-\cancel{a}) + (\cancel{1}-\cancel{b}) - \cancel{1} + a + b - c = \boxed{1-c}$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - a - b + c$

c) $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$

$= 1 - a + b - (b - c) = 1 - a + c$



ejercicio 16:

Repartir cosas → Combinaciones $\boxed{CR_{3,5}}$

a) $V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades.

0 bolas (___ ___) $V_{5,2} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ posibilidades de que la primera urna esté vacía.

$$\frac{20}{60} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Siempre que se reparten cosas → combinaciones:

$$CR_{3,5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ casos totales.}$$

Casos con primera (cualquiera) urna vacía:

$$CR_{2,5} = \binom{6}{5} = \frac{6!}{1!\,5!} = 6 \qquad a)\ P = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Dos urnas vacías:

$$CR_{1,5} = \binom{5}{5} = \frac{5!}{5!} = 1 \qquad b)\ P = \frac{1}{21} \cdot 3 \text{ urnas} = \frac{1}{7}$$

Dos bolas en la tercera urna:

$$CR_{2,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4 \qquad c)\ P = \frac{4}{21}$$

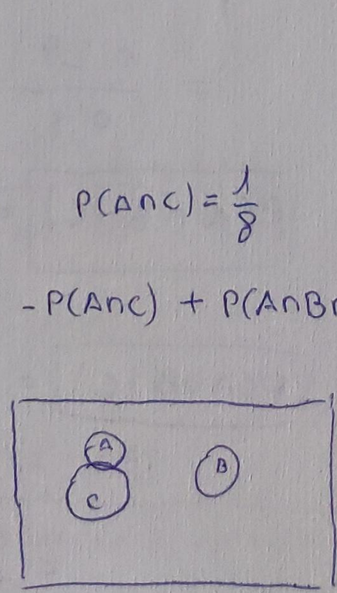
ejercicio 17:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4} \qquad P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0 \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{4} - 0 \cdot 2 - \frac{1}{8} + P(A \cap B \cap C) =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + 0 = \frac{5}{8} = 0'625$$



$P(A \cap B \cap C) = 0$

Ejercicio 18:

$P(A) = 0'4 \qquad P(B) = 0'41 \qquad P(C) = 0'53$

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = 0'11 \quad ; \quad P(B \cap C) = 0'23 \quad ; \quad P(A \cap B \cap C) = 0'01$

a) No, dado que $P(A \cap B \cap C) \neq 0$.

b) $\boxed{P(A|B)}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0'11}{0'41} = 0'2683$$

$\boxed{P(B|A)}$

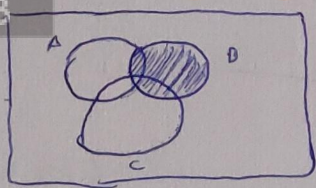
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0'11}{0'40} = 0'275$$

$\boxed{P(A|C)}$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0'11}{0'53} = 0'207547\ldots$$

$\boxed{P(\bar{B}|A)}$

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)}$$

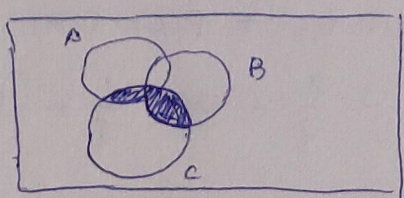


$$P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = 0'4 - 0'11$$

$$= \frac{0'29}{0'4} = 0'725$$

$$\boxed{P(A \cap B|C)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{0'01}{0'53} = 0'0189$$

$$\boxed{P(A \cup B|C)} = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)}$$



$$= \frac{0'33}{0'53} = 0'6226$$

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0'11 + 0'23 - 0'01$$
$$= 0'33$$

Ejercicio 19:

a) $P(A) \geq 0'32$

$P(A \cup B) = 0'27$ no es posible porque $P(A \cup B) \geq P(A)$

b) $P(A) = 0'35$

$P(A \cap B) = 0'42$ no es posible porque $P(A \cap B) \leq P(A)$

Ejercicio 20:

a) $P(A_1) = \frac{81}{100} = 0'81$; $P(A_2) = \frac{80}{99} = 0'\overline{80}$; $P(A_3) = \frac{79}{98} = 0'80\overline{61}$

$P(A_4) = \frac{78}{97} = 0'8041237113$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99} \cdot \frac{79}{98} \cdot \frac{78}{97} = 0'4242908785$.

b) $P(A_1)^4 = \left(\frac{81}{100}\right)^4 = 0'43046721$

Ejercicio 21:

$P(M) = 0'57$; $P(P) = 0'38$; $P(O) = 0'05$

$\cancel{P(E_M) = 0'99}$; $\cancel{P(E_P) = 0'95}$; $\cancel{P(E_O) = 0'93}$

$P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0'5643}{P(E_M \cap E_P \cap E_O)} = \frac{0'57 \cdot 0'99}{0'99 \cdot 0'95 \cdot 0'93} =$

$P(E/M) = 0'99 = \frac{P(M \cap E)}{P(M)} \rightarrow P(M \cap E) = 0'57 \cdot 0'99$

$P(E/P) = 0'95$

$P(E/O) = 0'93$

$P(M|E) = \frac{P(M) \cdot P(E|M)}{P(M) \cdot P(E/M) + P(P) \cdot P(E/P) + P(O) \cdot P(E/O)} = \frac{0'57 \cdot 0'99}{0'57 \cdot 0'99 + 0'38 \cdot 0'95 + 0'05 \cdot 0'93} =$

$= 0'580675036 \rightarrow 58'07\%$

Ejercicio 22:

E: "un producto cualquiera que supere el control de calidad"

$P(E) = 0'74$

$P(A) = 0'40$

$P(B) = 0'30$

$\Big\} \; P(C) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - 0'7 = 0'3$

$P(E|A) = 0'8$

$P(E|B) = 0'6$

a) $P(E|C) = \dfrac{P(C \cap E)}{P(C)} = \dfrac{0'24}{0'3} = \boxed{0'8}$

$P(E|A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)} \rightarrow P(E \cap A) = P(E|A) \cdot P(A)$

$= 0'8 \cdot 0'4 = 0'32$

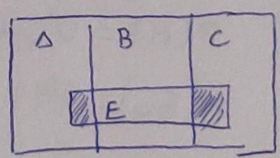
$P(E|B) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(E \cap B) = P(E|B) \cdot P(B)$

$= 0'6 \cdot 0'3 = 0'18$

$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C) \rightarrow P(E \cap C) = P(E) - P(E \cap A) - P(E \cap B)$

$P(E \cap C) = 0'74 - 0'32 - 0'18 = 0'24$

b) $P(\bar{B}|E) = \dfrac{P(\bar{B} \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E \cap A) + P(E \cap C)}{0'74}$



$= \dfrac{0'32 + 0'24}{0'74} = 0'7568$

ejercicio 23:

$P(M) = 0'35 \qquad \cancel{P(M \cap P)} = 0'16 = P(P/M)$

$P(E) = 0'65 \qquad P(E \cap P) = 0'24 = P(P/E)$

$$P(M \mid P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{0'16}{0'4} =$$

X $P(M \cap P) = -P(M \cup P) + P(M) + P(P) \rightarrow 0'16 = -P(M \cup P) + 0'35 - P(P)$

$P(E \cap P) = -P(E \cup P) + P(E) + P(P) \rightarrow 0'24 = -P(E \cup P) + 0'65 - P(P)$

Teorema de la Probabilidad Total: $P(P) = P(M \cap P) + P(E \cap P) = 0'16 + 0'24 = 0'4$

$$P(P/M) = \frac{P(P \cap M)}{P(M)} \rightarrow P(P \cap M) = 0'16 \cdot 0'35 = 0'056$$

$$P(P/E) = \frac{P(P \cap E)}{P(E)} \rightarrow P(P \cap E) = 0'24 \cdot 0'65 = 0'156$$

$$P(M/P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{0'056}{P(M) \cdot P(P/M) + P(E) \cdot P(P/E)} = \frac{0'056}{0'35 \cdot 0'16 + 0'65 \cdot 0'24} = 0'\overline{26415094}\ldots$$

ejercicio 24:

A: "Predecir de manera correcta" los día soleados".

S: "Día soleado". $\quad P(\bar{S}) = 0'8 \; ; \; P(S) = 0'2$

$$P(A/S) = 0'99 = \frac{P(A \cap S)}{0'2} \rightarrow P(A \cap S) = 0'198$$

$$P(A/\bar{S}) = 0'03 = \frac{P(A \cap \bar{S})}{P(\bar{S}) = 0'8} \Longrightarrow P(A \cap \bar{S}) = 0'024$$

a) $\boxed{P(A) =}$

b) P(

→

S: "Que el día sea soleado".

PS: "Predecir que sea soleado".

$P(PS \mid S) = 0'99 = \frac{P(PS \cap S)}{P(S)} \rightarrow P(PS \cap S) = 0'99 \cdot 0'2 = 0'198$

$P(PS \mid \bar{S}) = 0'03 = \frac{P(PS \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} \rightarrow P(PS \cap \bar{S}) = 0'03 \cdot 0'8 = 0'024$

$P(\bar{S}) = 0'8$

a)

$$P(PS) = P(S) \cdot P(PS \mid S) + P(\bar{S}) \cdot \underbrace{P(\overline{PS} \mid \bar{S})} = 0'2 \cdot 0'99 + 0'8 \cdot 0'03$$
$$= 0'222$$

b) $P(S/PS) = \frac{P(S \cap PS)}{P(PS)} = \frac{0'198}{0'222} = 0'8918918919$

$$P(S/PS) + P(\bar{S}/\overline{PS}) = \frac{P(S \cap PS)}{P(PS)} + \frac{P(\bar{S} \cap \overline{PS})}{P(\overline{PS})} =$$

$$= \frac{0'198}{0'222} + \frac{[illegible]}{0'778} =$$

$P(PS \mid \bar{S}) = 0'03 \Rightarrow \quad P(\overline{PS} \mid \bar{S}) = 1 - P(PS \mid \bar{S})$