2.1. COMBINATORIA:

Es la teoría matemática que proporciona métodos para determinar el número de elementos de un conjunto finito.

Se utiliza para deducir el número total de casos posibles que cumplen determinadas condiciones. Se determinan su número, no los casos mismos.

Hay dos OPERACIONES TRANSCENDENTALES: elegir una parte de un conjunto (muestra) y ordenar los elementos de un conjunto.

Se dirá que una muestra está o no ordenada según se tenga en cuenta o no el orden de los elementos. Se distinguirán muestras CON REPETICIÓN y SIN REPETICIÓN.

$$V_{n,s} = V_n^s = \frac{n!}{(n-s)!} \qquad VR_{n,s} = VR_n^s = n^s$$

$$P_n = n! \qquad P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = PR_n^{n_1, n_2, n_3 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \ldots n_k!}$$

$$C_{n,s} = C_n^s = \frac{V_{n,s}}{P_s} = \frac{n!}{(n-s)!\,s!} = \binom{n}{s}$$

$$CR_{n,s} = CR_n^s = C_{n+s-1,\,s} = \binom{n+s-1}{s} = \frac{(n+s-1)!}{(n-1)!\,s!}$$

Variaciones: en un conjunto de n elementos, se denominan variaciones de n elementos tomados de s en s a los distintos grupos de s elementos tomados de los n posibles.
Se consideran distintos si difieren en algún elemento o en el orden en el que están colocados. Es decir, el ORDEN SÍ IMPORTA.

$$V_{n,s} = V_n^s = \frac{n!}{(n-s)!} \qquad n > s$$

ejemplo: en F1 hay 20 pilotos, ¿de cuántas formas distintas pueden repartirse los tres primeros puestos?

$n = 20$

$s = 3$

$$V_{20,3} = V_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}} = 20 \cdot 19 \cdot 18$$

→ Con REPETICIÓN: si los elementos pueden repetirse. En este caso, es posible que $s > n$. $\quad VR_{n,s} = VR_n^s = n^s$

ejemplo: ¿Cuántos números de seis cifras pueden escribirse utilizando las cifras 3 y 6?

$n = 2$ elementos

$s = 6$ cifras (subconjuntos de seis elementos)

$$VR_{2,6} = VR_2^6 = 2^6 = 64$$

Permutaciones: Son un caso particular de las variaciones, en las que se cogen todos los elementos de la población. Es decir, $n = s$, el subconjunto es igual al conjunto.

Se le denomina permutación a cada una de las distintas formas en las que se pueden ordenar los n elementos.

Por convenio, $0! = 1$. EL ORDEN SÍ IMPORTA.

$$V_{n,s} = \frac{n!}{(n-s)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \rightarrow P_n = n!$$

ejemplo: ¿de cuántas maneras distintas pueden colocarse 8 personas en una fila.

$n = 8 \qquad P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

→ Con REPETICIÓN: si los elementos pueden repetirse:

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Se denominan permutaciones con repetición de n elementos a todas las formas posibles de combinar esos n elementos.

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = PR_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \dots n_k!}$$

ejemplo: ¿Cuántos números pueden escribirse utilizando todas las cifras del número 111 446? ¿Cuántos de ellos empezarán por 61?

$n = 6$ elementos

$n_1 = 3$ veces se repite el 1

$n_2 = 2$ veces el 4

$n_3 = 1$ vez el 6

$$P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 60 \text{ números diferentes}$$

b) $n = 4$; $n_1 = 2$; $n_2 = 2$

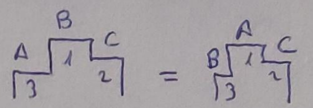
$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6 \text{ casos.}$$

$\underline{6}\ \ \underline{1}\ \ \boxed{\_\ \_\ \_\ \_}$

Combinaciones: Sea un conjunto de n elementos distintos, formamos grupos de s elementos de los n dados, de forma que dos cualesquiera de esos grupos serán diferentes si difieren en algún elemento, mientras que serán considerados el mismo si tienen los mismos elementos aunque en orden distinto.

$$C_{n,s} = C_n^s = \frac{V_{n,s}}{P_s} = \frac{n!}{(n-s)!\,s!} = \binom{n}{s}$$

Es decir, el ORDEN NO IMPORTA.



ejemplo: en un hospital hay 30 enfermeros, si en cada turno deben permanecer 4 enfermeros, ¿de cuántas formas distintas pueden organizarse dichos turnos?

$n = 30$
$s = 4$

$$C_{30,4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{26!\,4!} = 27,405 \text{ formas distintas}$$

→ Con REPETICIÓN: si los elementos pueden aparecer repetidos.

$$CR_{n,s} = CR_n^s = C_{n+s-1,\,s} = \binom{n+s-1}{s} = \frac{(n+s-1)!}{(n-1)!\,s!}$$

ejemplo: ¿de cuántas maneras distintas pueden repartirse 20 caramelos entre 12 niños? ¿Y si a cada niño se le da al menos un caramelo?

$n = 12$ (mi población)
$s = 20$

$$CR_{12,20} = CR_{12}^{20} = C_{12+20-1,\,20} = \binom{31}{20} = \frac{31!}{11!\,20!} = 84.672315$$

$n = 12$
$s = 8$

$$CR_{12,8} = CR_{12}^{8} = C_{12+8-1,\,8} = \binom{19}{8} = \frac{19!}{11!\,8!} = 75.582$$

ejercicio 1:

Sí importa el orden. (puestos de trabajo $\boxed{\text{diferentes}}$)

$$V_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840 \text{ formas distintas.}$$

ejercicio 2:

Sí importa el orden. (no es lo mismo sentarse al lado de Paco que de Juan).

$$V_{10,4} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

ejercicio 3:

No importa el orden. Se cogen de 3 en 3, y ~~el~~ sobrante irá al segundo proyecto.

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4 \text{ maneras distintas.}$$

ejercicio 4:

a) $P_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{5!\,2!\,3!} = 2520$

b) $P_{10} = 10! = 3.628.800$

ejercicio 5:

$$C_{25,4} = \binom{25}{4} = 12.650$$

ejercicio 6:

a) Cogemos 5 matemáticos de 2 en 2. No importa el orden.

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10$$

Cogemos 7 físicos de 3 en 3. No importa el orden.

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = 35$$

Como se dan los dos a la vez, $C_{5,2} \cdot C_{7,3} = 10 \cdot 35 = 350$ formas distintas.

b) $C_{5,2} \cdot C_{6,2} = 10 \cdot \binom{6}{2} = 10 \cdot 15 = 150$ formas distintas.

c) Solo hay una opción de que estén juntos, por tanto:

$(C_{5,2} - 1) \cdot C_{7,3} = 9 \cdot 35 = 315$ formas diferentes.

ejercicio 7:

$$C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 31$$

$$5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

ejercicio 8:

$$C_{100,5} = \frac{100!}{95!\,5!} = 75.287.520.$$

ejercicio 9:

a) $CR_{6,4} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = 126$

b) $C_{6,4} = \binom{6}{4} = 15$

ejercicio 10:

a) $C_{12,6} = \binom{12}{6} = 924$

b) $C_{10,4} = \binom{10}{4} = 210$

c) $C_{8,4} \cdot C_{4,2} = \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2} = 420$

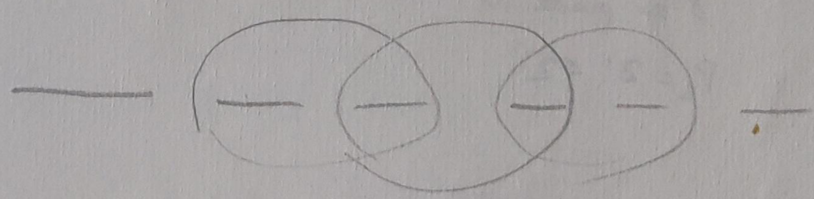
ejercicio 11:

a) $P_5 = 5! = 120$

b) $P_3 \cdot P_2 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$

c) $\sqcup \ \sqcup \ \sqcup \ \sqcup \ \sqcup$ (1 2 3 4 5) Chicas (2,3) (3,4) $\Rightarrow P_2 \cdot P_2 \cdot P_3 = 24$

2



ejercicio 12:

— — —

Fijamos ⟶ Queda fijado! hay 10 opciones.

$10 \cdot 10 = 100$

— — —

10 opciones (0-9)

ejercicio 13:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $V_{5,5} = P_5 = 5!$

ejercicio 14:

$N = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

a) Sin repetición: $V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) _ _ 5 $V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

ejercicio 15:

No importa el orden: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

ejercicio 16:

a) $VR_{3,5} = 3^5 = 243$

b) _ _ _ _ _ $VR_{3,4} = 3^4 = 81$

8 no puede ir

$P_2 = 2! = 2$

$P_2 \cdot VR_{3,4} = 2 \cdot 81 = 162$ números

Serán menores que 60.000.

c) _ _ _ _ _

$VR_{3,4}$

8 ó 2

P_2

$VR_{3,4} \cdot P_2 = 81 \cdot 2 = 162$ números pares.

ejercicio 17:

Sí importa el orden. $V_{12,3} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

ejercicio 18:

$A = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

ya hemos fijado un número al principio

a) $\_\ \ (\_\ \_) \rightarrow V_{6,2}$ ó $VR_{6,2}$

$V_{5,2}$

$V_{6,2} = 30$ $\quad VR_{6,2} = 36$

0 no puede ser

5 opciones

Si se pueden repetir: $5 \cdot VR_{6,2} = 5 \cdot 36 = 180$

Si no se pueden repetir: $5 \cdot V_{6,2} = 5 \cdot 30 = 150$

$V_{5,2} = 5 \cdot 20 = 100$

b) $\_\ \_\ \_$

0 no puede ser

0 ó 5

$5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$

$V_{5,2} = 20$ opciones con 5 último

$V_{5,2} = 20$ opciones con 0 último

$V_{4,1} = 4$ opciones con 0 primero

$20 + 20 - 4 = 36$

ejercicio 19:

a) $\_\ \_\ \_\ \_$ $\quad VR_{2,4} = 2^4 = 16$

b) $\_\ \ (\_\ \_\ \_)$ $\quad VR_{2,3} = 2^3 = 8$

6

ejercicio 20:

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

a) __ __ $VR_{4,2} = 4^2 = 16$ ó $V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$

b) $V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$

c) __ __ $V_{3,1} = \frac{3!}{2!} = 3$ no serán > 30

↑

Si es 2, no será mayor que 30

Por tanto; $12 - 3 = 9$ números serán > 30.

ejercicio 21:

Sí importa el orden: $V_{14,4} = \frac{14!}{10!} = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 24.024$

ejercicio 22:

$$\_\_ \quad \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{V_{10,10} = P_{10} = 10!} \quad \_\_$$

$2 \cdot P_{10} = 2 \cdot 10! = 7.257.600$

ejercicio 23:

$828\ 282 \rightarrow A = \{2, 2, 2, 8, 8, 8\}$

$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

$\underline{8}\ \underline{8}$ __ __ __ __ $\rightarrow A = \{2, 2, 2, 8\}$

$P_4^{3,1} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

ejercicio 24:

a) Sí importa el orden.

$VR_{3,15} = 3^{15} = 14.348.907$.

b) $VR_{2,1} = 2^1 = 2$ opciones por cada partido.

Como hay 15 partidos : $2 \cdot 15 = 30$ posibilidades.

c) $VR_{2,1} = 2^1 = 2$ opciones por cada partido

$V_{15,2} = \frac{15!}{13!} = 15 \cdot 14 \rightarrow 2 \cdot 15 \cdot 14 = 420$

ejercicio 25:

$C_{49,6} = \binom{49}{6} = 13.983.816$

ejercicio 26:

a) $PR_{30}^{12,14,2,2} = \frac{30!}{14!\,12!\,2!\,2!} = 1'588 \cdot 10^{12}$

b) $\underline{B}$ (. . .) $\underline{B}$

$PR_{28}^{12,14,2} = \frac{28!}{14!\,12!\,2!} = 3.650.610.600$.

ejercicio 27:

$C_{30,7} = \binom{30}{7} = 2.035.800$

ejercicio 28:

a) $C_{20,15} = \binom{20}{15} = 15.504$

b) $CR_{20,15} = \binom{20+15-1}{15} = \binom{34}{15} = 1.855.967.520$

ejercicio 29:

Si importa el orden → Permutaciones circulares.

$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$

$PC_{11} = (11-1)! = 10! = 3.628.000$ días

Aproximadamente $\frac{PC_{11}}{365} = 9941'9178$ años

ejercicio 30:

a) $C_{22,11} = \binom{22}{11} = 705.432$

b) 2 posibilidades para la portería

$C_{20,10} = \binom{20}{10} = 184.756$ para el resto.

En total: $2 \cdot 184.756 = 369.512$

ejercicio 31:

No importa el orden → Combinaciones.

C

$PR_{35}^{21,14} = \frac{35!}{21!}$

$P_{35}^{21,14} = \frac{35!}{21!\,14!} = 2.319.959400$