eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

# MATEMATIKA APLIKATUA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA
SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

# KALKULUA (EBALUAZIO FINALA)

## EZ-OHIKO DEIALDIA. 2019ko uztailak 2

Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua

### 1. Ariketa

Ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$y''+4y'+4y=\sinh(2x)$$

(1.5 puntu)

*Ebazpena*:

Elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra lortzeko:

Ekuazio karakteristikoa lortzen dugu:

$$r^2+4r+4=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{-4\pm0}{2}=\begin{cases} r=-2 \\ r=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r=-2\,(2)$$

$$y_h=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$$

Orain, ekuazio osoaren soluzio orokorra planteatuko dugu parametroen aldakuntzaren metodoa erabiltzeko:

$$y=L_1(x)e^{-2x}+L_2(x)xe^{-2x}$$

Baldintzak zehazten ditugu:

$$\left.\begin{array}{l} L_1'(x)e^{-2x}+L_2'(x)xe^{-2x}=0 \\ -2L_1'(x)e^{-2x}+L_2'(x)\left(e^{-2x}-2xe^{-2x}\right)=\sinh(2x) \end{array}\right\}$$

Wronskiarra kalkulatzen dugu:

$$W=\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}-2xe^{-2x} \end{vmatrix}=e^{-4x}-2xe^{-4x}+2xe^{-4x}=e^{-4x}$$

$L_1'(x)$ eta $L_2'(x)$ kalkulatuko ditugu Kramerren erregela erabiliz:

$$L_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^{-2x}\\ \sinh(2x) & e^{-2x}-2xe^{-2x}\end{vmatrix}}{W}=\frac{-xe^{-2x}\sinh(2x)}{e^{-4x}}=-xe^{2x}\sinh(2x)=-xe^{2x}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{x}{2}e^{4x}$$

$$L_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^{-2x} & 0\\ -2e^{-2x} & \sinh(2x)\end{vmatrix}}{W}=\frac{e^{-2x}\sinh(2x)}{e^{-4x}}=e^{2x}\sinh(2x)=e^{2x}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)=\frac{e^{4x}-1}{2}$$

$L_1'(x)$ eta $L_2'(x)$ integratuko ditugu $L_1(x)$ eta $L_2(x)$ kalkulatzeko:

$$L_1(x)=\int\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}e^{4x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\int xe^{4x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-I_1\right]$$

non $I_1=\int xe^{4x}dx=\begin{Vmatrix}u=x & du=dx\\ dv=e^{4x}dx & v=\dfrac{e^{4x}}{4}\end{Vmatrix}=\frac{x}{4}e^{4x}-\frac{1}{4}\int e^{4x}dx=\frac{x}{4}e^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}+C$

Beraz, $L_1(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-I_1\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}e^{4x}+\frac{1}{16}e^{4x}+C\right]=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}e^{4x}+\frac{1}{32}e^{4x}+A$

$$L_2(x)=\int\frac{e^{4x}-1}{2}dx=\frac{e^{4x}}{8}-\frac{x}{2}+B$$

$L_1(x)$ eta $L_2(x)$ kalkulatuta daudela, ekuazio osoaren soluzio orokorra hurrengoa izango litzateke:

$$y=L_1(x)e^{-2x}+L_2(x)xe^{-2x}=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}e^{4x}+\frac{1}{32}e^{4x}+A\right]e^{-2x}+\left[\frac{e^{4x}}{8}-\frac{x}{2}+B\right]xe^{-2x}=$$

$$=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}e^{4x}+\frac{1}{32}e^{4x}+\frac{x}{8}e^{4x}-\frac{x^2}{2}\right)e^{-2x}=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+\left(\frac{1}{32}e^{4x}-\frac{x^2}{4}\right)e^{-2x}=$$

$$=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+\frac{1}{32}e^{2x}-\frac{x^2}{4}e^{-2x}$$

$$\boxed{y=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}+\frac{1}{32}e^{2x}-\frac{x^2}{4}e^{-2x}}$$

## 2. Ariketa

Sailkatu eta ebatzi honako ekuazio diferentziala:

$$(2x+y-3)\,dy-(x+2y-3)\,dx=0$$

(1.5 puntu)

---

*Ebazpena*:

Ekuazioa era normalean idatziz:

$$y'=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$$

Beraz, homogeneoen kasura murrizgarria da.

Lehenengo eta behin $x+2y-3$ eta $2x+y-3$ zuzenen arteko ebakidura puntua kalkulatuko dugu:

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \to x=1;\, y=1$$

Ebakidura puntua (1,1) da, beraz hurrengo aldaketa egingo dugu:

$$\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+1 \to y'=Y' \end{cases}$$

Hasierako ekuazioan ordezkatuz:

$$Y'=\frac{X+1+2Y+2-3}{2X+2+Y+1-3}=\frac{X+2Y}{2X+Y}$$

Aldaketa egin ondoren, ekuazioa homogeneoa da (0. gradukoa), beraz, hurrengo eran idatz daiteke:

$$Y'(1,Y/X)=\frac{1+2(Y/X)}{2+(Y/X)}$$

Orain, hurrengo aldaketa egingo dugu:

$$z=Y/X \to z+z'X=Y'$$

Orduan:

$$z + z' X = \frac{1+2z}{2+z}$$
$$z' X = \frac{1+2z-2z-z^2}{2+z} = \frac{1-z^2}{2+z}$$
$$\frac{2+z}{1-z^2} dz = \frac{dX}{X}$$

Lortu dugun ekuazioa aldagai banangarrien ekuazio bat da, beraz, integratuz ebatziko dugu:

$$\int \frac{2+z}{1-z^2} dz = \int \frac{dX}{X}$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{-4-2z}{1-z^2} dz = \ln X + C$$
$$-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-z^2\right) - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] = \ln X + C$$
$$-\frac{1}{2}\ln(1+z) - \frac{1}{2}\ln(1-z) + \ln(1+z) - \ln(1-z) = \ln X + C$$
$$\frac{1}{2}\ln(1+z) - \frac{3}{2}\ln(1-z) = \ln X + C$$

Bukatzeko, aldaketak desegingo ditugu:

$$\frac{1}{2}\ln(1+Y/X) - \frac{3}{2}\ln(1-Y/X) = \ln X + C$$
$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{X+Y}{X}\right) - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{X-Y}{X}\right) = \ln X + C$$
$$\frac{1}{2}\ln(X+Y) - \frac{1}{2}\ln X - \frac{3}{2}\ln(X-Y) + \frac{3}{2}\ln X = \ln X + C$$
$$\frac{1}{2}\ln(X+Y) - \frac{3}{2}\ln(X-Y) = C$$
$$\frac{1}{2}\ln(x-1+y-1) - \frac{3}{2}\ln(x-1-y+1) = C$$
$$\frac{1}{2}\ln(x+y-2) - \frac{3}{2}\ln(x-y) = C$$
$$\ln(x+y-2) - 3\ln(x-y) = D$$
$$\ln\left[(x+y-2)\cdot(x-y)^{-3}\right] = D$$
$$\boxed{\frac{x+y-2}{(x-y)^3} = E}$$

---

## 3. Ariketa

Izan bedi hurrengo integral lerromakurra: $\int_A^B -\frac{1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy$ C kurbaren gainean, non C kurba $A(1,-1)$ eta $B(2,2)$ puntuak lotzen dituen zuzena den:

a) Aztertu bidearekiko independentzia.

b) Ebatzi integral lerromakurra parametrizazioa erabiliz eta posible bada, ebatzi berriro integrala funtzio potentziala erabiliz.

(2 puntu)

*Ebazpena*:

a) Bidearekiko independentzia aztertuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} X(x,y)=\frac{-1}{y}\rightarrow\frac{\partial X}{\partial y}=-\left(\frac{-1}{y^2}\right)=\frac{1}{y^2} \\ Y(x,y)=\frac{x}{y^2}\rightarrow\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\end{array}\right\}\rightarrow \text{Berdinak dira, beraz, integrala bidearekiko independentea da}$$

b) Integrala bidearekiko independentea denez, funtzio potentziala erabiltzea posible da. Lehengo eta behin, funtzio potentziala kalkulatuko dugu:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}X(t,y)\,dt+\int_{y_0}^{y}Y(x_0,t)\,dt=\left\|(x_0,y_0)=(0,1)\right\|=$$

$$=\int_0^x\frac{-1}{y}dt+\int_1^y 0dt=\frac{-1}{y}t\Big]_0^x+C=\boxed{\frac{-x}{y}+C}$$

Funtzio potentziala erabiliz, integrala ebatziko dugu:

$$\int_A^B\frac{-1}{y}dx+\frac{x}{y^2}dy=U(2,2)-U(1,-1)=\frac{-2}{2}+C-\left(\frac{-1}{-1}+C\right)=\boxed{-2}$$

Bukatzeko, integrala, parametrizazioa erabiliz, ebatziko dugu:

C kurba $A(1,-1)$ eta $B(2,2)$ puntuak lotzen dituen zuzena da, beraz, bere ekuazioa hurrengoa izango da:

$$(y-2)=\frac{2+1}{2-1}(x-2)$$
$$(y-2)=3(x-2)$$
$$y=3x-4$$

$$\text{Parametrizazioa} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{y+4}{3} \rightarrow dx=\dfrac{dy}{3} \\ y=y \quad \rightarrow dy=dy \end{cases} \rightarrow y\in[-1,2]$$

Integralean ordezkatuz:

$$\int_{-1}^{2}\frac{-1}{y}\frac{dy}{3}+\frac{y+4}{3y^2}dy=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left(\frac{-1}{y}+\frac{y+4}{y^2}\right)dy=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left(\frac{-1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{4}{y^2}\right)dy=$$
$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\frac{4}{y^2}dy=\left.\frac{-4}{3y}\right]_{-1}^{2}=\frac{-4}{6}-\frac{4}{3}=\boxed{-2}$$

---

## 4. Ariketa

Izan bedi gainazal hauek mugatzen duten [*C*] gorputz homogeneoa:

$$x^2+y^2-z=0, \quad x^2+y^2+z^2-20z+100=16 \ \left(z\geq 10\right)$$

Kalkulatu integral hirukoitza erabiliz:

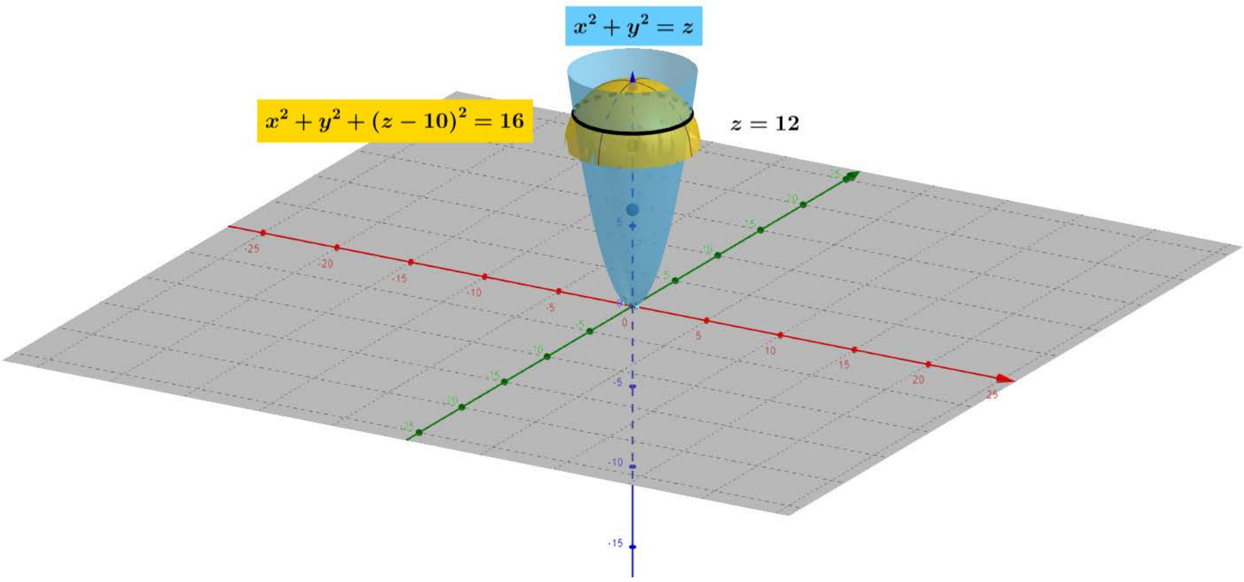
a) *C* gorputzaren bolumena.

b) *C* gorputzaren grabitate zentroa.

(2 puntu)

*Ebazpena*:

a) Irudikapen grafikoan ikus daitekeenez horiz esfera erdi bat ( $x^2+y^2+\left(z-10\right)^2=16$ ) eta urdinez paraboloide bat ( $x^2+y^2=z$ ) ditugu.




Esfera erdiak eta paraboloideak mugatutako [C] gorputzaren bolumena, paraboloidearen barrukoa da esfera erdiak mugatzen duena. Bolumen hori kalkulatzeko lehendabizi ebakidura planoa kalkulatu behar da.

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x^2+y^2+(z-10)^2=16 \end{cases}\right\} z+(z-10)^2=16 \quad \Rightarrow \quad z+z^2-20z+100=16 \quad \Rightarrow \quad z^2-19z+84=0$$

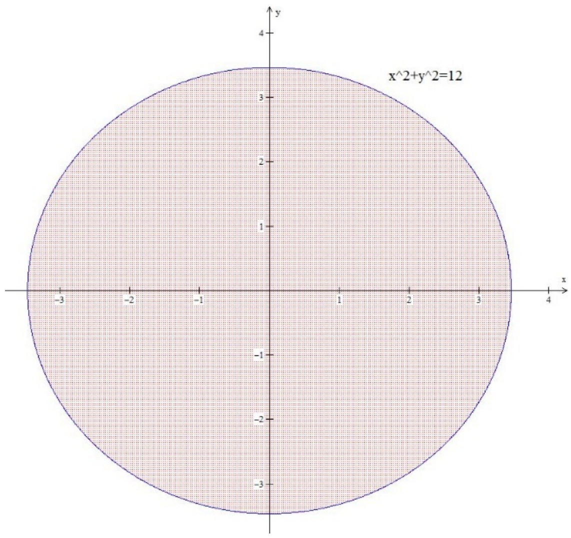
$$\Rightarrow \quad z=\frac{19\pm\sqrt{361-336}}{2} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{19\pm\sqrt{25}}{2} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{19\pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{z=12} \\ z=7 \end{cases}$$

Ebakidura planoa $z = 12$ da, izan ere esfera $z \geq 10$-rako definituta baitago.

Koordenatu zilindrikoetan ebatziko da ariketa. Beraz, hurrengo aldagai aldaketa aplikatzen da:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \\ J(\rho,\theta,z) = \rho \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = z \quad \Rightarrow \quad z = \rho^2 \\ \\ x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 + (z-10)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{z = 10 + \sqrt{16-\rho^2}} \\ z = 10 + \sqrt{16-\rho^2} \end{cases} \end{cases}$$

Behin *z*-ren mugak zehaztuta daudela, *XOY* planoaren gaineko proiekzioa egiten dugu eta hurrengoa ikusten da, $x^2 + y^2 = 12$ zirkunferentzia, zentroa $C(0,0)$ eta $R = 2\sqrt{3}$.




Ditugun hiru aldagaien mugak orduan hauexek izango dira:

$$\theta = [0, 2\pi]; \quad \rho = [0, 2\sqrt{3}]; \quad z = [\rho^2, 10 + \sqrt{16-\rho^2}\,]$$

Orduan, bolumena kalkulatzeko hurrengo integral hirukoitza planteatzen dugu:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int_{\rho^2}^{10+\sqrt{16-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \rho\left(10 + \sqrt{16-\rho^2} - \rho^2\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \left(10\rho + \rho\sqrt{16-\rho^2} - \rho^3\right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left[ 5\rho^2 - \frac{\left(16-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2\sqrt{3}} d\theta = 2\pi \frac{128}{3} = \frac{256\pi}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{256\pi}{3} \quad u^3}$$

b) Behin bolumena kalkulatuta dagoela, grabitate zentroa kalkulatzeko $z_c$ koordenatua soilik lortu behar dugu [$C$] gorputza simetrikoa baita $OX$ eta $OY$ ardatzekiko. Beraz, $z_c = \frac{1}{V}\iiint_C z\,dx\,dy\,dz$ hurrengo integral kalkulatuko dugu lehenik eta behin:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int_{\rho^2}^{10+\sqrt{16-\rho^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \rho\left[\left(10+\sqrt{16-\rho^2}\right)^2 - \rho^4\right] d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{3}} \rho\left[100 + 20\sqrt{16-\rho^2} + 16 - \rho^2 - \rho^4\right] d\rho =$$

$$= \pi\left[58\rho^2 - \frac{20}{3}\left(16-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^{2\sqrt{3}} = \frac{2236\pi}{3}$$

Beraz, $z_c$ koordenatua hurrengoa da:

$$z_c = \frac{1}{V}\iiint_C z\,dx\,dy\,dz = \frac{\frac{2236\pi}{3}}{\frac{256\pi}{3}} = \frac{2236}{256} = \frac{559}{64}$$

Azkenik, grabitatea zentroa $\left(0, 0, \frac{559}{64}\right)$ da.

---

## 5. Ariketa

Izan bedi hurrengo eran definituriko [$D$] domeinu laua:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \geq 2, \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Kalkulatu [$D$] domeinu lauak $x$ ardatzaren inguruan biratzerakoan sortzen duen bolumena **integral mugatuaren kontzeptua erabiliz**.

(1 puntu)

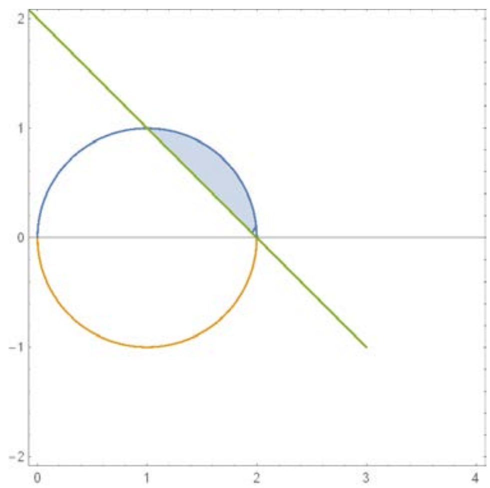
*Ebazpena*:

Lehenengo eta behin, $D$ domeinua marraztuko dugu:

$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \rightarrow (1,0)$ zentroko eta 1 radioko zirkunferentziaren barruan dagoen eskualdea

$x + y \geq 2 \rightarrow x + y = 2$ zuzenaren gainean dagoen eskualdea

Beraz:




$D$ domeinu lauak $x$ ardatzaren inguruan biratzerakoan sortzen duen bolumena hurrengoa izango da:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_1^2 \left( \sqrt{1 - (x-1)^2} \right)^2 dx - \pi \int_1^2 (2-x)^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_1^2 1 - \left( x^2 - 2x + 1 \right) dx - \pi \int_1^2 \left( 4 + x^2 - 4x \right) dx =$$

$$= \pi \left[ \frac{-x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 - \pi \left[ 4x + \frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_1^2 = \boxed{\frac{\pi}{3} u^3}$$

## 6. Ariketa

Kalkulatu honako integral mugagabeak:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-4}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+3}}\,dx$

(2 puntu)

a) *Ebazpena*:

$$\int \frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x^2-4}}\,dx=\int x^{-3}\left(x^2-4\right)^{-1/2}\,dx=\left\|\begin{array}{lll} m=-3 & n=2 & p=-\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z} \\ \dfrac{m+1}{n}=-1\in\mathbb{Z} & & \end{array}\right\|=\begin{pmatrix}\text{binomia}\\ \text{2. kasua}\end{pmatrix}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l} x^2=t\rightarrow x=t^{1/2} \\ dx=\dfrac{1}{2}t^{-1/2}dt \end{array}\right\|=\int t^{-3/2}\left(t-4\right)^{-1/2}\frac{1}{2}t^{-1/2}dt=\frac{1}{2}\int t^{-2}\left(t-4\right)^{-1/2}\,dt=\left\|\begin{array}{l} t-4=z^2\ \Rightarrow\ t=z^2+4 \\ dt=2z\,dz \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(z^2+4\right)^{-2}\cdot z^{-1}\cdot 2z\cdot dz=\int\frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}$$

Hermiteren metodoa erabiltzen da integral ebazteko:

$$\int\frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2}=\frac{Az+B}{z^2+4}+\int\frac{Mz+N}{z^2+4}dz$$

Adierazpen guztia deribatu egiten da.

$$\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2}=\frac{A\left(z^2+4\right)+\left(Az+B\right)2z}{\left(z^2+4\right)^2}+\frac{Mz+N}{z^2+4}$$

$$1=A\left(z^2+4\right)+\left(Az+B\right)2z+\left(Mz+N\right)\left(z^2+4\right)$$

$$z^3: \quad \boxed{M=0}$$
$$z^2: \quad 0 = A - 2A + N \Rightarrow N = A$$
$$z: \quad 0 = -2B + 4M \Rightarrow B = 2M \Rightarrow \boxed{B=0}$$
$$z^0: \quad 1 = 4A + 4N \Rightarrow \boxed{N = A = 1/8}$$

Koefiziente indeterminatuak ordezkatuz:

$$\int \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2} = \frac{1}{8}\frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{8}\int \frac{dz}{z^2+4} = \frac{1}{8}\frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{z}{2}\right) + K =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\sqrt{t-4}}{t} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{\sqrt{t-4}}{2}\right) + K = \boxed{\frac{1}{8}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + K}$$

*b) Ebazpena*

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+3}}\,dx = \left\| \begin{array}{l} x = \sqrt{3}\tan t \\ dx = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt \end{array} \right\| = \int \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t\left(3\tan^2 t+1\right)\sqrt{3\tan^2 t+3}}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 t\left(3\tan^2 t+1\right)\sqrt{\tan^2 t+1}}\,dt = \int \frac{1}{\cos^2 t\left(3\tan^2 t+1\right)\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}}\,dt = \int \frac{1}{\cos t\left(3\tan^2 t+1\right)}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\cos t\left(3\tan^2 t+1\right)}\,dt = \int \frac{1}{\cos t\left(\dfrac{3\sin^2 t}{\cos^2 t}+1\right)}\,dt = \int \frac{1}{\cos t\left(\dfrac{3\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\dfrac{1}{\cos t}\left(3\sin^2 t+\cos^2 t\right)}\,dt = \int \frac{\cos t}{\left(2\sin^2 t+1\right)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\left(\sin^2 t+\dfrac{1}{2}\right)}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\sin t\right) + C =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} x = \sqrt{3}\tan t \\ t = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{array} \right\| = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\sin\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C}$$

Ebazpena sinplifikatzea posiblea da hurrengo aldaketak aplikatuz:

$x=\sqrt{3}\tan t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan t=\frac{x}{\sqrt{3}}}$ dela kontuan izanda, sinuaren adierazpena tangentearenaren menpe utziko dugu eta beraz, *x*-ren menpe geratuko da.

$$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t=\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t=\frac{3}{x^2+3} \quad \Rightarrow$$

$$1-\sin^2 t=\frac{3}{x^2+3} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 t=1-\frac{3}{x^2+3} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 t=\frac{x^2}{x^2+3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}$$

Beraz, integralaren emaitza horrela sinplifika daiteke:

$$\boxed{\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+3}}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\sin\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2+3}}\right)+C}$$