3. PRAKTIKA

1. ARIKETA

Izan bitez R3-ko ondoko bektore sistema :
$S = \left\{ \vec{u}_1 = (1, 1, 1), \vec{u}_2 = (1, 2, 0), \vec{u}_3 = (-1, -5, 3), \vec{u}_4 = (1, 0, 2) \right\}$
Eta izan bedi espazio euklidearra ohiko biderkadura eskalarrarekin.

a) Lortu W=L(S) azpiespazio bektorialaren BW oinarri bat, W-ren ekuazio parametrikoak eta inplizituak eta W-ren dimentsioa.

In[∘]:=
```
s = {{1, 1, 1}, {1, 2, 0}, {-1, -5, 3}, {1, 0, 2}};
RowReduce[s]
```
reduce filas

Out[∘]=
```
{{1, 0, 2}, {0, 1, -1}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

Lehenengo bi bektoreak linealki independenteak dira. Besteak ez. Beraz, W-ren oinarri bat ondokoa da: Bw = {{1, 1, 1}, {1, 2, 0}} eta dimentsioa: dim (W) = 2.
Beste oinarri bat ondokoa da: Bw = {{1, 0,2}, {0, 1, -1}}

In[∘]:=
```
bw = {{1, 1, 1}, {1, 2, 0}};
```

W-ren ekuazio parametrikoak kalkulatu:

In[∘]:=
```
Solve[{x1, x2, x3} == α * {1, 1, 1} + β * {1, 2, 0}, {x1, x2, x3}]
```
resuelve

Out[∘]=
```
{{x1 → α + β, x2 → α + 2 β, x3 → α}}
```

Beraz, ekuazio parametrikoak ondokoak dira x1=$\alpha+\beta$,x2= $\alpha+2\beta$, x3=α /α, $\beta \epsilon$R
W-ren ekuazio inplizituak kalkulatu:

In[∘]:=
```
Det[{{1, 1, 1}, {1, 2, 0}, {x, y, z}}] == 0
```
determinante

Out[∘]=
```
-2 x + y + z == 0
```

Beraz, ekuazio inplizituak ondokoak dira: -2x+y+z=0

b) Osatu B_W oinarria $\mathbb{R}^3$ – ko B oinarria lortzeko.

In[ ]:=
```
b = {{1, 1, 1}, {1, 2, 0}, {1, 0, 0}};
```

In[ ]:=
```
MatrixRank[b]
```
rango matricial

Out[ ]=
```
3
```

B = {{1, 1, 1}, {1, 2, 0}, {1,0,0}; $\mathbb{R}^3$ – ko oinarria bat da

c) Kalkulatu B_W oinarriarekiko $\vec{w} = (1, -1, 3) \in W$ bektorearen koordenatuak.

In[ ]:=
```
Solve[{1, -1, 3} == a1 * {1, 1, 1} + a2 * {1, 2, 0}, {a1, a2}]
```
resuelve

Out[ ]=
```
{{a1 → 3, a2 → -2}}
```

d) Kalkulatu W – ren oinarri ortogonal bat

In[ ]:=
```
bo = Orthogonalize[bw]
```
ortogonaliza

Out[ ]=

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

e) Kalkulatu $\vec{u}_2$ eta $\vec{u}_3$ – ren arteko distantzia.

In[ ]:=
```
Sqrt[(s[[3]] - s[[2]]).(s[[3]] - s[[2]])]
```
raíz cuadrada

Out[ ]=

$\sqrt{62}$

Beste era batera:

In[ ]:=
```
Sqrt[Dot[(s[[3]] - s[[2]]), (s[[3]] - s[[2]])]]
```
raíz··· producto escalar

Out[ ]=

$\sqrt{62}$

Beste era batera:

In[ ]:=
```
Norm[s[[3]] - s[[2]]]
```
norma

Out[ ]=

$\sqrt{62}$

Beste era batera:

In[ ]:=
```
EuclideanDistance[s[[2]], s[[3]]]
distancia euclídea
```
Out[ ]=
$\sqrt{62}$

f) Lortu $\vec{u}_2$ eta $\vec{u}_3$ – ren arteko angelua radianetan eta graduetan.

Radianetan:

In[ ]:=
```
ArcCos[s[[2]].s[[3]] / (Sqrt[s[[2]].s[[2]]] * Sqrt[s[[3]].s[[3]]])] // N
arco coseno                                          valor numérico
```
Out[ ]=
```
2.55264
```

Graduetan:

In[ ]:=
```
ArcCos[s[[2]].s[[3]] / (Sqrt[s[[2]].s[[2]]] * Sqrt[s[[3]].s[[3]]])] / Degree // N
arco coseno                                          grado      valor numérico
```
Out[ ]=
```
146.255
```

Beste era batera:

In[ ]:=
```
VectorAngle[s[[2]], s[[3]]] // N
ángulo de vector            valor numérico
```
Out[ ]=
```
2.55264
```

Graduetan:

In[ ]:=
```
VectorAngle[s[[2]], s[[3]]] / Degree // N
ángulo de vector            grado     valor numérico
```
Out[ ]=
```
146.255
```

2. ARIKETA

Izan bedi $(R^3, <,>)$ espazio euklidearra, ondoko biderkadura eskalarrarekin:

$$<\vec{x}, \vec{y}> = x_1.y_1 + x_1.y_2 + x_2.y_1 + 2\,x_2.y_2 + x_3.y_3$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ izanik

a) Kalkulatu $\vec{u}_2$ eta $\vec{u}_3$ – ren arteko distantzia.

Biderkadura eskalarraren definizioa:

```
In[∘]:= be[x_, y_] := x[[1]] * y[[1]] + x[[1]] * y[[2]] + x[[2]] * y[[1]] + 2 x[[2]] * y[[2]] + x[[3]] * y[[3]];
```

Distantzia

```
In[∘]:= Sqrt[be[s[[2]] - s[[3]], s[[2]] - s[[3]]]]
        raíz cuadrada
```

Out[∘]= $\sqrt{139}$

b) Lortu $\vec{u}_2$ eta $\vec{u}_3$ – ren arteko angelua radianetan eta graduetan.

Radianetan:

```
In[∘]:= ArcCos[be[s[[2]], s[[3]]] / (Sqrt[be[s[[2]], s[[2]]]] * Sqrt[be[s[[3]], s[[3]]]])] // N
        arco coseno                                                                  va
```

Out[∘]= 2.76032

Graduetan:

```
In[∘]:= ArcCos[be[s[[2]], s[[3]]] / (Sqrt[be[s[[2]], s[[2]]]] * Sqrt[be[s[[3]], s[[3]]]])] / Degree // N
        arco coseno                                                                  grado     valor numérico
```

Out[∘]= 158.155

3. ARIKETA

Izan bitez P2-ko ondoko bektore sistema:
$\{p_1(x) = x^2 - 2,\ p_2(x) = x^2 + x + 1,\ p_3(x) = 3\,x^2 + 2\,x,\ p_4(x) = 2\,x^2 - x - 7\}$

a) Lortu U=L(T) azpiespazio bektorialaren BU oinarri bat, U-ren ekuazio parametrikoak eta inplizituak eta U-ren dimentsioa.

In[ ]:=
```
p1[x_] = x^2 - 2;
p2[x_] = x^2 + x + 1;
p3[x_] = 3 x^2 + 2 x;
p4[x_] = 2 x^2 - x - 7;
x1 = CoefficientList[p1[x], x, 3]
     lista de coeficientes
x2 = CoefficientList[p2[x], x, 3]
     lista de coeficientes
x3 = CoefficientList[p3[x], x, 3]
     lista de coeficientes
x4 = CoefficientList[p4[x], x, 3]
     lista de coeficientes
```

Out[ ]=
```
{-2, 0, 1}
```

Out[ ]=
```
{1, 1, 1}
```

Out[ ]=
```
{0, 2, 3}
```

Out[ ]=
```
{-7, -1, 2}
```

In[ ]:=
```
M = {x1, x2, x3, x4};
MatrixForm[M]
forma de matriz
RR = RowReduce[M]
     reduce filas
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Out[ ]=

$$\left\{\left\{1, 0, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\right\}$$

RowReduce-ren irteera begiratuz azpiespazioaren oinarri bat lortu dugu, eta gainera badakigu azpiespazioaren dimentsioa 2 dela.

In[ ]:=

$$b1 = \left\{1, 0, -\frac{1}{2}\right\};$$

```
bv1[x_] = Sum[b1[[i]] * x^(i - 1), {i, Length[b1]}]
          suma                       longitud
```

Out[ ]=

$$1 - \frac{x^2}{2}$$

In[ ]:=
```
b2 = {0, 1, 3/2};
bv2[x_] = Sum[b2[[i]] * x^(i - 1), {i, Length[b2]}]
```
suma longitud

Out[ ]=
$$x + \frac{3 x^2}{2}$$

In[ ]:=
```
Bv = {bv1[x], bv2[x]}
```

Out[ ]=
$$\left\{1 - \frac{x^2}{2}, x + \frac{3 x^2}{2}\right\}$$

Beste oinarri bat lortzeko, sistema sortzailetik independenteak diren bi polinomio hartuko ditugu:

In[ ]:=
```
MatrixRank[{x2, x3}]
```
rango matricial

Out[ ]=
2

In[ ]:=
```
BV2 = {p2[x], p3[x]}
```

Out[ ]=
$$\left\{1 + x + x^2, 2 x + 3 x^2\right\}$$

Ekuazio inplizituak:

In[ ]:=
```
H = {RR[[1]], RR[[2]], {x, y, z}}
```

Out[ ]=
$$\left\{\left\{1, 0, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}, \{x, y, z\}\right\}$$

In[ ]:=
```
Solve[Minors[H, 3] == 0, {x, y, z}]
```
resue··· menores

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[ ]=
$$\left\{\left\{z \to -\frac{x}{2} + \frac{3 y}{2}\right\}\right\}$$

Ekuazio parametrikoak :

In[ ]:=
```
Solve[{x, y, z} == a {1, 0, -1} + b {0, 1, 3/2}, {x, y, z}]
resuelve
```
Out[ ]=

$$\left\{\left\{x \to a,\ y \to b,\ z \to \frac{1}{2}\,(-2\,a + 3\,b)\right\}\right\}$$

4. ARIKETA

Izan bitez u1=(1,0,1,0), u2=(1,1,0,1) eta v=(1,2,3,4) bektoreak eta ondoko sistema : x*u1+y*u2=v. Egiaztatu sistema bateraezina dela eta, karratu txikien metodoa erabiliz, lortu soluzio hurbildua.

Sistema bateraezina dela egiaztatuko dugu:

In[ ]:=
```
u1 = {1, 0, 1, 0};
```
In[ ]:=
```
u2 = {1, 1, 0, 1};
```
In[ ]:=
```
v = {1, 2, 3, 4};
```

Koefizienteen matrizearen heina kalkulatu:

In[ ]:=
```
A = Transpose[{u1, u2}];
    transposición
MatrixForm[A]
forma de matriz
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
MatrixRank[A]
rango matricial
```
Out[ ]=
```
2
```

Beraz, koefizienteen matrizearen heina 2 da.

Orain, matrize zabalduaren heina kalkulatuko dugu:

In[ ]:=
```
AM = Transpose[{u1, u2, v}];
MatrixForm[AM]
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
MatrixRank[AM]
```
Out[ ]=
```
3
```

Beraz, matrize zabalduaren heina 3 da.
Koefizienteen matrizearen heina eta matrize zabalduaren heina desberdinak direnez, sistema bateraezina da.

Beste era batera:

In[ ]:=
```
Solve[x * u1 + y * u2 == v, {x, y}]
```
Out[ ]=
```
{}
```

Ez dago soluziorik, sistema bateraezina da.

Orain, karratu txikien metodoa aplikatuko dugu sistemaren soluzio hurbildua lortzeko:

In[ ]:=
```
b = {u1, u2};
```

v bektorearen hurbilketarik onena kalkulatu:

In[ ]:=
```
b[[1]].b[[2]]
```
Out[ ]=
```
2
```

In[ ]:=
```
bo = Orthogonalize[b]
```
Out[ ]=

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right\}\right\}$$

In[ ]:=
```
v2 = Sum[Projection[v, bo[[i]]], {i, Length[bo]}]
```
s··· proyección longitud

Out[ ]=
```
{3, 2, 1, 2}
```

Hasierako sisteman v2 bektorea erabiliz (v erabili beharrean) sistema bateragarria da eta soluizo hurbildua ondokoa da:

In[ ]:=
```
Solve[x * u1 + y * u2 == v2, {x, y}]
```
resuelve

Out[ ]=
```
{{x → 1, y → 2}}
```

Soluzio hurbildua: x = 1 eta y = 2

Beste era batera:Karratu txikien metodoa aplikatuko dugu sistemaren soluzio hurbildua lortzeko (era matrizialean):

In[ ]:=
```
Inverse[Transpose[A].A].Transpose[A].v
```
matriz i··· transposición transposición

Out[ ]=
```
{1, 2}
```