examenes 2012-2017.pdf

qaz

Métodos Estadísticos de la Ingeniería

2º Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao - Campus Bizkaia
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

eman ta zabal zazu
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

Departamento de Matemática Aplicada
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

EXAMEN DE ESTADÍSTICA
INFORMÁTICA DE GESTIÓN

ADELANTO DE CONVOCATORIA (16 de enero de 2012)

1) **Se trata de estimar el tiempo medio que se necesita para efectuar una determinada operación manual en el hardware de un ordenador. Suponiendo que el tiempo empleado sigue una distribución normal de desviación típica 0.3, se pide: 1º) Obtener un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio si se ha tomado una muestra de 30 tiempos y ha resultado una media de 2.6 segundos. 2º) Tamaño de la muestra necesario para que el intervalo de confianza tenga una amplitud de 0.15, como máximo.** [2 ptos/ 10]

2) **Una ruleta genera al azar los dígitos 0, 1 y 2 con las probabilidades siguientes:**

0	1	2
p^2	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$

Con objeto de comprobar el funcionamiento de la ruleta se efectuaron 1000 lanzamientos, obteniéndose las siguientes frecuencias absolutas:

0	1	2
595	10	395

Estimar p por el método de máxima verosimilitud y contrastar si la ruleta funciona correctamente, tomando α= 0.05. [2 ptos/ 10]

3) **Sea la variable aleatoria continua X cuya función de densidad es**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^2} & si\ x\in[1,b] \\ 0 & si\ x\notin[1,b] \end{cases}$$

$$donde\ a>1,\ b>1$$

Se pide: 1º) Obtener b en función de a. 2º) Calcular la varianza de X. [2 ptos/ 10]

→

eman ta zabal zazu
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

Departamento de Matemática Aplicada
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

4) **A) Calcular el número medio de caras que se obtienen al lanzar una moneda equilibrada 2m veces.**
B) Una encuesta realizada a 75 trabajadores del sector forestal dio como resultado que el tiempo medio de duración de un empleo en ese sector es de 6.2 años, con una desviación típica de 4.1 años. ¿Se puede aceptar que el tiempo medio de empleo en ese sector es, como se creía hasta el momento, 5.5 años, o hay evidencias de que ha aumentado? Justificar la respuesta calculando el valor-p del contraste. [2 ptos/10]

5) **La variable aleatoria bidimensional (X,Y) se distribuye de acuerdo a la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:**

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+mxy & \text{si } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular: a) El valor de la constante m. b) P(X<1/2,Y<1/4). [2 ptos/10]

DATOS AUXILIARES:
qt(0.025,5)=-2.57; qchisq(0.025,5)=0.83; qt(0.975,5)=2.57;
pchisq(16.8,6)=0.99; pchisq(9.24,5)=0.9; pchisq(15.1,5)=0.99;
ppois(2,2.1)=0,65; pt(6.507,5)=0.9994; pchisq(7.29,2)=0.974;
ppois(0,2.1)=0.122; qchisq(0.95,2)=5.991; qchisq(0.95,1)=3.841;
dbinom(2,10,0.21)=0.301; pbinom(10,1000,0.021)=0.003;
ppois(0,3.1)=0.045; qpois(0.95,2.1)=5; pt(6.507,6)=0.9997

INDICACIONES:
- **Duración del examen: 2h 30m.**
- **Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la addenda.**
- **Las notas se publicarán el próximo miércoles 18 a las 14:00 en el blog de la asignatura: http://estadistica-ing-eguzkitza.blogspot.com/**

Escanea, regístrate
y podrás ganar

LADRÓN

¿GANAS DE QUE TERMINEN LOS EXÁMENES?

VIAJA CON LADRÓN

¡TAMBIÉN PODRÁS GANAR UN AÑO DE PRODUCTO GRATIS!

Invitar a tus colegas a un viaje después de exámenes. ¡Eso si que es revolucionar el corral!

* Participa en el sorteo para el viajazo que podrás pegarte con algún colega y además disfruta de nuestros productos durante 1 año.

Ladrón de Manzanas recomienda el consumo responsable. Promoción disponible desde el 1 de Diciembre de 2024 hasta el 31 de Enero de 2025. Bases legales depositadas ante notario.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

Bilboko Industria Ingeniaritza Teknikoko *U.E./* E.U. de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao

Métodos Estadísticos de la Ingeniería

Informática de Gestión y Sistemas de Información

Bilbao, 31 de enero de 2013

1. Las notas del último examen de inglés de un colegio aparecen en la siguiente tabla:

Nota	[30,40)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80]
Frecuencia	1	3	11	51	43

Se pide:

a) Histograma de frecuencias acumuladas, mediana y varianza.

b) ¿Podemos afirmar que el 36% de las notas son inferiores a 65? Razona la respuesta.

(2 puntos)

2. Se tienen 50 dados, 30 normales y 20 cargados, de forma que en estos últimos la probabilidad de sacar un seis es el triple de la de sacar cualquier otro resultado. Si se elige un dado al azar entre los 50, se lanza y se obtiene un seis, calcular la probabilidad de que el dado elegido sea normal.

(2 puntos)

3. La variable aleatoria continua X tiene por función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} m(1+\frac{x}{2}) & si\ 0 \le x \le a \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Sabiendo que la media de X es 7/3 calcular *m* y *a*.

(2 puntos)

4. De una población N(μ,σ) se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 10 obteniéndose los siguientes valores: 40, 45, 39, 46, 58, 52, 50, 45, 57 y 49. Obtener un intervalo de confianza al 98% para la media suponiendo

a) que la varianza poblacional es desconocida,

b) que la varianza poblacional es 49.

(2 puntos)

5. Una empresa de automóviles compra los motores en lotes de tamaño 40. Para aceptar un lote toma 8 motores y los prueba, aceptándolo si no hay ningún motor defectuoso. Si sabemos que en un determinado lote hay dos motores defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de rechazarlo?

(2 puntos)

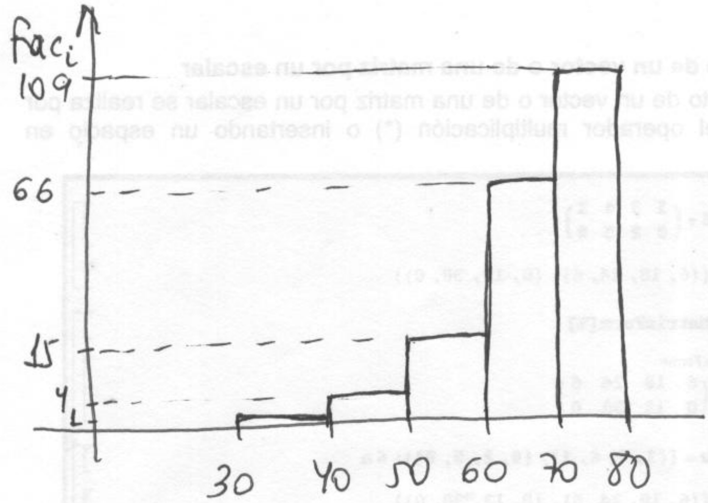
Duración del examen: 2 h

DATOS AUXILIARES:

```
qt(0.025,5)=-2.57; qchisq(0.025,5)=0.83; qt(0.975,5)=2.57;
pchisq(16.8,6)=0.99; pchisq(9.24,5)=0.9; pchisq(15.1,5)=0.99;
ppois(2,2.1)=0,65;pt(6.507,5)=0.9994;pchisq(7.29,2)=0.974;
ppois(0,2.1)=0.12; qchisq(0.95,2)=5.991; qchisq(0.95,1)=3.841;
dbinom(2,10,0.21)=0.301; pbinom(10,1000,0.021)=0.003
```

1

2)



Nota	X_i	X_i^2	f_i	Fac_i	f'_i	fac_i	$X_i f_i$	$X_i^2 f_i$
[30,40)	35	1225	1	1	0,009	0,009	0,32	11,24
[40,50)	45	2025	3	4	0,028	0,037	1,24	55,73
[50,60)	55	3025	11	15	0,101	0,138	5,55	305,28
[60,70)	65	4225	51	66	0,468	0,606	30,41	1976,83
[70,80)	75	5625	43	109	0,394	1	29,59	2219,04
			109		1		67,11	4568,12

$$\frac{N}{2} = \frac{109}{2} = 54{,}5 \Rightarrow \text{la mediana estará en el intervalo } [60,70)$$

$$Me = 60 + \frac{54{,}5 - 15}{66 - 15} \cdot (70-60) = 67{,}75$$

$$S^2 = \Sigma X_i^2 f_i - \bar{X}^2 = \Sigma X_i^2 f_i - (\Sigma X_i f_i)^2 =$$

$$= 4568{,}12 - 67{,}11^2 = 64{,}368$$

b) Calculemos el P_{36}:

$$\frac{109}{100} \cdot 36 = 39{,}24 \Rightarrow \text{Intervalo } [60,70)$$

$$P_{36} = 60 + \frac{\frac{109}{100} \cdot 36 - 15}{66 - 15} \cdot (70-60) = 64{,}75 \simeq 65$$

Luego no se puede hacer tal afirmación

② Dados cargados:

$$P(\text{obtener } i) = p_i, \quad i = 1,2,3,4,5$$

$$P(\text{obtener } 6) = p_6$$

$$\left.\begin{array}{l} 5p_1 + p_6 = 1 \\ p_6 = 3p_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{p_1 = 1/8}, \quad \underline{p_6 = 3/8}$$

$$P(\text{normal}/\text{obt}6) = \frac{P(\text{obt}6/\text{normal}) \cdot P(\text{normal})}{P(\text{obt}6/\text{normal}) \cdot P(\text{normal}) + P(\text{obt}6/\text{carg}) \cdot P(\text{carg})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{30}{50}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{30}{50} + \frac{3}{8} \cdot \frac{20}{50}} = \frac{2}{5} = \underline{\underline{0,4}}$$

③ $$\left.\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 7/3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \int_0^a m(1+\frac{x}{2})dx = 1 \\ \int_0^a x m (1+\frac{x}{2}) dx = 7/3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} m\left[\left(x + \frac{x^2}{4}\right)\right]_0^a = 1 \\ m\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^a = \frac{7}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m\left(a + \frac{a^2}{4}\right) = 1 \\ m\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}\right) = \frac{7}{3} \end{array}\right\} \xRightarrow[m]{\text{despejando}} \frac{1}{a + \frac{a^2}{4}} = \frac{7/3}{\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}} \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6} = \frac{7a}{3} + \frac{7a^2}{12} \Rightarrow$$ Dividiendo entre a eliminamos la solución a=0, que no es válida $\Rightarrow$

$$\frac{a}{2} + \frac{a^2}{6} = \frac{7}{3} + \frac{7a}{12} \Rightarrow 6a + 2a^2 = 28 + 7a \Rightarrow$$

$$2a^2 - a - 28 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{a = 4}} \Rightarrow m = \frac{1}{a + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{4 + \frac{4^2}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}} \\ a = -7/2 \end{array}\right.$$

4) $s = 6,4$; $\bar{x} = 48,1$; $n = 10$

a) $\left(\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2}\, s/\sqrt{n}\right)$

$t_{n-1;\alpha/2} = t_{9;0.01} = qt(0.99, 9) = 2,82$

Sustituyendo:

$\left(48,1 \pm 2,82 \cdot \frac{6,4}{\sqrt{10}}\right) = (42,39 ; 53,81)$

b) $\left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}\right)$

$z_{\alpha/2} = z_{0.01} = 2,33$

$\left(48,1 \pm 2,33 \frac{7}{\sqrt{10}}\right) = (42,94 ; 53,26)$

5)

$\boxed{\begin{matrix}\text{2 defect.} \\ \text{38 no defect.}\end{matrix}} \rightarrow$ 8 motores

$N = 40$

X = "nº de motores defectuosos entre los 8 extraídos"

$X \rightarrow H(40, 8, 2/40)$

$P(\text{rechazar el lote}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$

$= 1 - \frac{\binom{2}{0}\binom{38}{8}}{\binom{40}{8}} = \underline{0,364}$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA
Informática de Gestión y Sistemas de Información
Bilbao, 15 de enero de 2014

EJERCICIO 1

Se realiza un estudio en dos centros de enseñanza, uno público y otro privado, sobre la nota global de bachillerato de cada uno de los alumnos que van a acudir a los exámenes de selectividad. Los resultados se han presentado en la forma siguiente:

Centro privado		*Centro público*	
Nota global	*Frecuencias*	*Nota global*	*Frecuencias*
5,5	10	[5 , 6]	250
6,5	15	(6 , 7]	150
7,5	20	(7 , 9]	100
8,5	30	(9, 10]	20
9,5	15		

1) Obtener la media y la mediana de las dos distribuciones y hallar el porcentaje de alumnos que en cada centro tiene una nota global superior a 7.

2) Un alumno del centro privado y otro del centro público solicitan una beca para continuar sus estudios en la universidad. El primero tiene una nota global de 8.5 y el otro de 7. Si solo se concede una beca, ¿quién sería el candidato a obtenerla aplicando el criterio de comparación de las variables tipificadas?

EJERCICIO 2

En el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{A},P)$ se consideran los sucesos A y B tales que $P(A) = 0.15$ y $P(A \cap B) = 0.12.$ Se pide:

3) $P(\overline{A} \cup B).$

4) $P(\overline{B} \mid A).$

EJERCICIO 3

La proporción de fracaso escolar en bachillerato, en una determinada región, es del 40%. Sobre un total de 1.000 individuos, se pide:

5) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de fracasos esté entre 380 y 430, sabiendo que está por encima de 370?

6) ¿Qué valor de la variable habría que elegir para hacer dos grupos (muchos fracasos, pocos fracasos), con la condición de que en el primer grupo estuvieran el 30% del colectivo, y en el segundo el 70% restante?

euskal herriko unibertsitatea / universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EJERCICIO 4

La variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de densidad, dependiente del parámetro θ: $f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}$ si $x \in [0,1]$; 0 en otro caso.

7) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de θ.
8) Aplicar ese estimador a la muestra: 0.1, 0.7, 0.1, 0.1, 0.5, 0.3, 0.7, 0.9, 0.2, 0.2.

EJERCICIO 5

La tabla muestra el número de plantas de una determinada especie encontradas en cada uno de los cuadrados en que se ha dividido una cierta zona:

Número de plantas	Frecuencia observada
0	9
1	9
2	10
3	14
4	2
5	2
6	2

9) Contrastar al nivel de significación α=0.05 si los datos se ajustan a una distribución de Poisson.
10) Obtener el valor-p del contraste.

DATOS AUXILIARES:

```
qt(0.025,5)=-2.571; qchisq(0.025,5)=0.831; qt(0.975,5)=2.571;
pchisq(6.24,3)=0.8995; pchisq(6.24,4)=0.818; ppois(2,2.1)=0.65;
pchisq(15.1,5)=0.99;pt(6.51,5)=0.9994; pchisq(7.29,2)=0.974;
ppois(0,2.1)=0.122; qchisq(0.95,4)=9.49; qchisq(0.95,3)=7.81;
dbinom(2,10,0.21)=0.301; pbinom(10,1000,0.021)=0.006;
qchisq(0.025,4)=0.484; qchisq(0.975,5)=12.83;
qchisq(0.025,5)=0.831; qf(0.95,5,5)=5.05; qt(0.95,6)=1.943;
dbinom(2,10,0.167)=0.291; pbinom(10,100,0.2)=0.006;
ppois(0,3.1)=0.045; qpois(0.95,2.1)=5; pbinom(2,6,0.5)= 0.344
```

INDICACIONES:

- *Duración del examen: 2,5 h.*
- *Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la adenda.*
- *Publicación de notas: 23 de enero a las 14:00 horas.*
- *El examen resuelto se publicará en el blog de la asignatura.*

① 1) Centro privado: $\boxed{\bar{x} = 7{,}78}$; $\boxed{\text{mediana} = 8}$

Centro público: $\boxed{\bar{x} = 6{,}42}$;

$$\boxed{\text{mediana} = 6 + \frac{260-250}{400-250}(7-6) = 6{,}07}$$

Porcentaje de alumnos con más de 7:

Centro privado: $\frac{20+30+15}{90} = 0{,}7222 = \boxed{72{,}22\%}$

Centro público: $\frac{100+20}{520} = 0{,}2308 = \boxed{23{,}08\%}$

2) $S_{privado} = 1{,}239$

$S_{público} = 1{,}12$

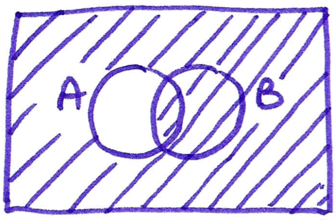
$$\boxed{Z_{pri}(8{,}5) = \frac{8{,}5-7{,}78}{1{,}239} = 0{,}581}$$

$$\boxed{Z_{pub}(7) = \frac{7-6{,}42}{1{,}12} = 0{,}518}$$

El candidato sería, por tanto, el del centro privado

② 3) $\bar{A} \cup B = [\bar{A} \cup (A \cap B)]$

Incompatibles



$\boxed{P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(A \cap B) =}$
$= (1-0{,}15) + 0{,}12 = \boxed{0{,}97}$

4) $\boxed{P(\bar{B}/A)} = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - \frac{0{,}12}{0{,}15} = \boxed{0{,}2}$

③ 5) X = "nº de fracasos entre 1000"

$$X \longrightarrow B(1000, 0{,}4) \simeq N\left(1000\cdot 0{,}4, \sqrt{1000\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}\right) =$$

$np > 5$
$nq > 5$

$$= N(400, 15.49)$$

$$\boxed{P(380 \leq X \leq 430 / X > 370)} \simeq$$

$$= \frac{P[(380 \leq X \leq 430) \cap (X > 370)]}{P(X > 370)} = \frac{P(380 \leq X \leq 430)}{P(X>370)} =$$

$$= \frac{P\left(\frac{379{,}5-400}{15.49} \leq Z_1 \leq \frac{430{,}5-400}{15.49}\right)}{P\left(Z_1 > \frac{370{,}5-400}{15.49}\right)} =$$

$$= \frac{P(-1.32 \leq Z_1 \leq 1.97)}{P(Z_1 > -1{,}9)} = \frac{0{,}9756-(1-0{,}9066)}{0{,}9713} = \boxed{0{,}908}$$

6) $P(X > a) = 0{,}3 \Rightarrow P\left(Z_1 > \frac{a+0{,}5-400}{15{,}49}\right) \simeq 0{,}3$

$$\frac{a+0{,}5-400}{15{,}49} = 0{,}525$$

↑
Tabla

$$a = 0{,}525 \cdot 15{,}49 + 400 - 0{,}5 = 407{,}6$$

El valor frontera sería $\boxed{408}$

4) 7) $f_\theta(x_1, x_2 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta (1-x_i)^{\theta-1} =$

$= \theta^n [(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)]^{\theta-1}$

$\ln f_\theta(x_1, x_2 \dots x_n) = n \ln \theta + (\theta-1) \ln [(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)] =$

$= n \ln \theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)$

$$\frac{d \ln f_\theta(x_1, x_2 \dots x_n)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i) = 0$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)}}$$

Además,

$$\frac{d^2 \ln f_\theta(x_1, x_2 \dots x_n)}{d\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

8) Para la muestra dada:

$$\hat{\theta} = \frac{-10}{\ln(1-0.1) + \ln(1-0.7) + \dots + \ln(1-0.2)} = \boxed{1{,}533}$$

$\rightarrow$

5

9)

x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i-np_i)^2/np_i$
0	9	0,122	5,856	1,688
1	9	0,257*	12,336	0,902
2	10	0,270	12,96	0,676
3	14	0,189	9,072	2,677
4	2	0,099	4,752	
5	2	0,042	2,016	$\}=7,488$ ⊗ 0,296
6	2	0,015	0,720	
	48	$\simeq 1$		6,239

$$\hat{\mu} = \frac{0\cdot 9 + 1\cdot 9 + 2\cdot 10 + \ldots + 6\cdot 2}{48} = 2,1$$

*Por ejemplo, este valor se calcula así:

$$\frac{e^{-2,1}\, 2,1^{1}}{1!} = 0,257$$

⊗ Se juntan tres clases en una al no alcanzar frecuencias esperadas de valor como mínimo igual a 5.

Los grados de libertad son (se ha estimado 1 parámetro):

$$5-1-1=3$$

qchisq(0.95, 3) = 7,815

Como 6,239 < 7,815 no se puede rechazar H_0 y se concluye que los datos SÍ se ajustan a una distribución de Poisson

10) $\boxed{\text{valor-p}} = 1 - \text{pchisq}(6.24, 3) = 1 - 0,8995 =$

$= \boxed{0,1005}$

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA
Informática de Gestión y Sistemas de Información
Bilbao, 9 de julio de 2013

EJERCICIO 1

Se han medido las abscisas de las coordenadas de 20 árboles elegidos al azar, que se encuentran situados en un cierto bosque, y se han obtenido los valores siguientes:

0.58, -2.76, -4.19, -5.29, 8.43, 2.75, -4.48, 4.80, 11.41, 7.11,
-1.38, 0.49, -13.21, 2.05, 3.21, -8.36, 2.92, 5.60, 0.00, 4.37.

Se pide:

1) Media y varianza muestrales, sin agrupar por intervalos.
2) Estudiar la posible existencia de valores atípicos.

EJERCICIO 2

Dos jugadores lanzan un dado cada uno. El primero de ellos lanza el dado A, que es un dado equilibrado, y el segundo lanza el dado B, cuyas probabilidades son:

$$P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{6} + \alpha;$$

$$P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6} - \alpha,$$

$$\text{con } 0 < \alpha < \frac{1}{6}$$

Gana una apuesta el jugador que obtiene la máxima puntuación y en caso de empate no hay ganador. Se pide:

3) Probabilidad de que el jugador que lanza el dado A gane una apuesta.
4) Si se realizan 6 apuestas calcular la probabilidad de que haya al menos 2 empates.

EJERCICIO 3

El tiempo de funcionamiento en horas de un componente de un sistema electrónico es una variable aleatoria exponencial de media 510. Por motivos de seguridad cada componente se sustituye por uno nuevo cuando el sistema lleva funcionando 300 horas. Determinar:

5) Probabilidad de que un componente falle antes de ser sustituido.
6) Si hay instalados 10 componentes que funcionan de forma independiente, cuál es la probabilidad de que no falle ninguno antes de ser sustituido.

euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco

EJERCICIO 4

Un fabricante de una marca de automóviles de lujo sabe que el consumo de gasolina de sus coches sigue una distribución normal. Se toma una muestra de 6 coches, obteniéndose a los 100 km los siguientes consumos: 19.2, 19.4, 18.4, 18.6, 20.5, 20.8.

7) Obtener, con un nivel de confianza del 95%, el intervalo en el que se encuentra la varianza de la población.
8) Con el mismo nivel de confianza, calcular el error cometido al estimar la media de la población mediante otro intervalo de confianza.

EJERCICIO 5

La vida de un virus en determinadas condiciones biológicas es una variable aleatoria X con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^3} \text{ si } x>1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

9) Determinar el valor de k y la función de distribución.
10) ¿Cuál es la vida media del virus?

DATOS AUXILIARES:

```
qt(0.025,5)=-2.57; qchisq(0.025,6)=1.237; qt(0.975,5)=2.57;
pchisq(16.8,6)=0.99; pchisq(9.24,5)=0.9; pchisq(15.1,5)=0.99;
ppois(2,2.1)=0,65; pt(6.507,5)=0.9994; pchisq(7.29,2)=0.974;
ppois(0,2.1)=0.122; qchisq(0.975,4)=11.14;
qchisq(0.025,4)=0.484; qchisq(0.975,5)=12.83;
qchisq(0.025,5)=0.831;qf(0.95,5,5)=5.05,qt(0.95,6)=1.943;
dbinom(2,10,0.167)=0.29; pbinom(10,1000,0.021)=0.0059;
ppois(0,3.1)=0.045; qpois(0.95,2.1)=5; pbinom(2,6,0.5)= 0.34375
```

INDICACIONES:

- *Duración del examen: 2h.*
- *Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la addenda.*
- *Publicación de notas: 12 de julio a las 14:00 horas.*
- *El examen resuelto se publicará en el blog de la asignatura.*

① 1) $\boxed{\bar{X} = 0{,}7025}$; $\boxed{s^2 = 33{,}31}$

2) $Q_1 = \dfrac{-4{,}19 - 2{,}76}{2} = -3{,}475$

$Q_3 = \dfrac{4{,}37 + 4{,}80}{2} = 4{,}585$

$RIQ = 4{,}585 - (-3{,}475) = 8{,}06$

$\left(Q_1 - \frac{3}{2} RIQ,\ Q_3 + \frac{3}{2} RIQ\right) = (-15{,}565 ; 16{,}675)$

No hay datos atípicos

② 3)

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	-	B	B	B	B	B
2	A	-	B	B	B	B
3	A	A	-	B	B	B
4	A	A	A	-	B	B
5	A	A	A	A	-	B
6	A	A	A	A	A	-

← Ganador

$\boxed{P(\text{gane } A) = 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \alpha\right) + 3 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - \alpha\right) = \frac{5}{12} + \frac{3}{2}\alpha}$

4) $P(\text{empatar}) = 3 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \alpha\right) + 3 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{6}$

$X =$ "nº de empates en 6 apuestas"

$X \to B(6, 1/6)$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=$$

$$=1-\binom{6}{0}(1/6)^0(5/6)^6-\binom{6}{1}(1/6)^1(5/6)^5=\boxed{0{,}263}$$

3 5) X = "vida en horas del componente"

$$X\rightarrow Exp(510)$$

$$\boxed{P(X<300)}=P(X\leq 300)=F(300)=$$

$$=1-e^{-300/510}=\boxed{0{,}445}$$

6) Y = "nº componentes, entre 10, que fallan antes de ser sustituidas"

$$Y\longrightarrow B(10,0.445)$$

$$\boxed{P(Y=0)}=\binom{10}{0}0{,}445^0(1-0{,}445)^{10}=\boxed{0{,}0028}$$

4 7)

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right]$$

$n=6$; $S^2=0{,}962$

$\chi^2_{n-1;\alpha/2}=\chi^2_{5;0.025}=$ qchisq $(0.975,5)=12{,}83$

$\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}=\chi^2_{5;0.975}=$ qchisq $(0.025,5)=0{,}831$

Sustituyendo: $\boxed{[0.375,5.788]}$

8) El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2}\, S/\sqrt{n}\right)$$

por lo que el error de estimación es

$$t_{n-1;\alpha/2}\, S/\sqrt{n}$$

$n=6$; $S=\sqrt{0{,}962}=0{,}981$

$t_{n-1;\alpha/2}=t_{5;0.025}=qt(0.975,5)=2{,}57$

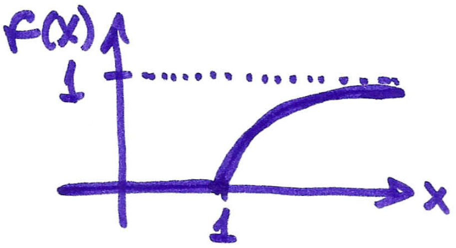
Sustituyendo, el error será:

$$2{,}57 \cdot \frac{0{,}981}{\sqrt{6}} = \boxed{1{,}029}$$

5 9) $\int_1^\infty \frac{K}{x^3}dx = K\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty = K\left[0+\frac{1}{2}\right]=1 \Rightarrow \boxed{K=2}$

Para $x>1$: $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,dt=\int_{-\infty}^1 0\,dt+\int_1^x \frac{2}{t^3}dt=$

$=\left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^x=-\frac{1}{x^2}+1=1-\frac{1}{x^2}$



$$\boxed{F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1-\frac{1}{x^2} & \text{si } x\geq 1\end{cases}}$$

10) $\boxed{E(X)}=\int_{-\infty}^\infty x f(x)\,dx=\int_1^\infty x\,\frac{2}{x^3}dx=2\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}=$

$=2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty=2\left[0+1\right]\boxed{=2}$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA
Informática de Gestión y Sistemas de Información
Bilbao, 24 de junio de 2014

EJERCICIO 1

En una asignatura virtual, que se imparte en la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, una de las actividades principales es la intervención en los foros. Al acabar el curso el profesor de la asignatura hizo un recuento de las intervenciones de cada uno de los 40 alumnos matriculados y obtuvo los siguientes valores:

3,2,11,13,11,4,6,1,2,0,15,6,2,4,2,14,7,1,7,6,4,4,4,9,24,0,15,30,15,30,15,8,40,8,2,6,5,0,1,9

1) Obtener el diagrama de tallos y hojas.
2) Estudiar los datos atípicos, si existen. Definir un criterio coherente para adjudicar una nota entre 0 y 10 según el número de intervenciones. Según ese criterio, qué nota sobre 10 obtendrían los alumnos que han intervenido en 6, 8, 15, 24, 30 y 40 ocasiones.

EJERCICIO 2

Una cesta contiene 20 cerezas, de las cuales 4 están podridas, y otra cesta contiene 6 cerezas podridas y 18 sanas. Se extrae de la primera cesta una cereza y sin mirarla se introduce en la segunda. Finalmente, se extrae una cereza de la segunda cesta. Se pide:

3) Probabilidad del siguiente suceso: "Pasar de la primera cesta a la segunda una cereza podrida y, a continuación, extraer de la segunda otra también podrida".
4) Sabiendo que la cereza extraída de la segunda cesta está sana, calcular la probabilidad de que la extraída de la primera estuviera sana.

EJERCICIO 3

Considérese una variable aleatoria continua X cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5) Calcular $P(X>0{,}5|X>0{,}3)$.
6) Obtener la esperanza matemática de la variable aleatoria $Y= X^2-X-1$.

euskal herriko unibertsitatea / universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EJERCICIO 4

La contaminación atmosférica origina problemas respiratorios. Con objeto de cuantificar a qué proporción de gente afecta esta circunstancia se eligen al azar 100 personas, de las cuales 18 presentan dificultades para respirar. Se pide:

7) Estimar, mediante un intervalo de confianza, la proporción de personas que tienen problemas respiratorios, con un nivel de confianza del 99%.
8) ¿Con qué nivel de confianza se puede decir que la diferencia entre la proporción de la población y la de la muestra es como mucho del 9%?

EJERCICIO 5

Se desea conocer si la proporción de votantes a un determinado partido político ha sufrido una reducción significativa durante el último año. Para ello se eligieron al azar 200 personas, de las cuales 60 afirmaron que votarían a ese partido. Si la proporción de votantes obtenida hace un año fue del 40%, cuando se preguntó a 100 personas, se pide:

9) Contrastar al nivel de significación α=0,05 si la reducción observada es significativa.
10) Obtener el valor-p del contraste.

DATOS AUXILIARES:

```
qt(0.025,5)=-2.571; qchisq(0.025,5)=0.831; qt(0.975,5)=2.571;
pchisq(6.24,3)=0.8995; pchisq(6.24,4)=0.818; ppois(2,2.1)=0.65;
pchisq(15.1,5)=0.99;pt(6.51,5)=0.9994; pchisq(7.29,2)=0.974;
ppois(0,2.1)=0.122; qchisq(0.95,4)=9.49; qchisq(0.95,3)=7.81;
dbinom(2,10,0.21)=0.301; pbinom(10,1000,0.021)=0.006;
qchisq(0.025,4)=0.484; qchisq(0.975,5)=12.83;
qchisq(0.025,5)=0.831; qf(0.95,5,5)=5.05; qt(0.95,6)=1.943;
dbinom(2,10,0.167)=0.291; pbinom(10,100,0.2)=0.006;
ppois(0,3.1)=0.045; qpois(0.95,2.1)=5; pbinom(2,6,0.5)= 0.344
```

INDICACIONES:

- *Duración del examen: 2,5 h.*
- *Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la adenda.*
- *Publicación de notas en GAUR: 27 de junio a las 14:00 horas.*
- *El examen resuelto se publicará en el blog de la asignatura.*

① 1)

0	00011122222344444
0	566666778899
1	1134
1	5555
2	4
2	
3	00
4	0
4	

2) $Md = 6$; $Q_1 = 2$; $Q_3 = \frac{11+13}{2} = 12$; $RIQ = Q_3 - Q_1 = 10$

$$\left[Q_1 - \frac{3}{2} RIQ, Q_3 + \frac{3}{2} RIQ\right] = [-13, 27]$$

Por tanto, 30 y 40 son puntuaciones atípicas.

Para definir la nota según el número de intervenciones (la interpretación es libre) se podría razonar así:

Las puntuaciones "normales" van de 0 a 24. Por tanto:

$0 \to 0$

$24 \to 10$

Entonces:

$6 \to 6 \cdot \frac{10}{24} = 2{,}5$; $8 \to 8 \cdot \frac{10}{24} = 3{,}33$

$15 \to 15 \cdot \frac{10}{24} = 6{,}25$; $24 \to 24 \cdot \frac{10}{24} = 10$

Evidentemente, las notas correspondientes a 30 y 40 intervenciones serían:

$30 \to 10$; $40 \to 10$

② 3) Sea S_i = "la cereza extraída de la cesta i está sana"

$i = 1, 2$

$$P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2) = P(\bar{S}_2 / \bar{S}_1)\cdot P(\bar{S}_1) = \frac{7}{25}\cdot\frac{4}{20} = 0{,}056$$

4) Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(S_1/S_2) = \frac{P(S_2/S_1)\cdot P(S_1)}{P(S_2/S_1)\cdot P(S_1) + P(S_2/\bar{S}_1)\cdot P(\bar{S}_1)} =$$

$$= \frac{\frac{19}{25}\cdot\frac{16}{20}}{\frac{19}{25}\cdot\frac{16}{20} + \frac{18}{25}\cdot\frac{4}{20}} = 0{,}809$$

3 5) $$P(X>0{,}5 / X>0{,}3) = \frac{P(X>0{,}5 \cap X>0{,}3)}{P(X>0{,}3)} =$$

$$= \frac{P(X>0{,}5)}{P(X>0{,}3)} = \frac{\int_{0,5}^{1}\frac{3}{2}x^2dx}{\int_{0,3}^{1}\frac{3}{2}x^2dx} = \frac{[x^3/2]_{0,5}^{1}}{[x^3/2]_{0,3}^{1}} =$$

$$= \frac{[x^3]_{0,5}^{1}}{[x^3]_{0,3}^{1}} = \frac{1^3-0{,}5^3}{1^3-0{,}3^3} = 0{,}899$$

6) $$E[Y] = E[X^2-X-1] = \int_{-\infty}^{\infty}(x^2-x-1)\,f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^2-x-1)\frac{3}{2}x^2dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^4-x^3-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{5}$$

4 7) $$\hat{p} = \frac{18}{100} = 0{,}18;\ n=100;\ z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2{,}58$$

$$\left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = [0{,}081;\ 0{,}279]$$

8) La diferencia máxima, al nivel de confianza $(1-\alpha)$, entre p y $\hat{p}$ es:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$. Entonces,

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0{,}18\cdot(1-0{,}18)}{100}} = 0{,}09 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}343$$

$$z_{\alpha/2} = 2{,}343 \Rightarrow \alpha/2 = 1-0{,}9905 \Rightarrow \alpha = 0{,}019$$

El nivel de confianza pedido es: $1-\alpha = 0{,}981 = 98{,}1\%$

5 9) $H_0: p_1 = p_2 \mid H_a: p_1 > p_2$

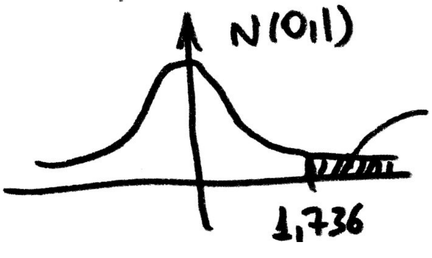
$\hat{p}_1 = 0{,}4$; $\hat{p}_2 = \frac{60}{200} = 0{,}3$; $\hat{p} = \frac{x+y}{n+m} = \frac{40+60}{100+200} = 0{,}33$

$$R.C.: \left\{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > \underset{\underset{z_{0.05}=1{,}645}{\parallel}}{z_\alpha}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}\right\} =$$

$$= \left\{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 1{,}645\sqrt{0{,}33\cdot 0{,}67\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{200}\right)}\right\} = \left\{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0{,}0947\right\}$$

Como $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$ se rechaza H_0 y se concluye que ha habido una reducción significativa.

10) $$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} = \frac{0{,}4-0{,}3}{\sqrt{0{,}33\cdot 0{,}67\cdot\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{200}\right)}} = 1{,}736$$



valor-p $= P(Z > 1{,}736) = 1 - 0{,}959 = 0{,}041$

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA
Informática de Gestión y Sistemas de Información
Bilbao, 20 de enero de 2015

EJERCICIO 1

El siguiente diagrama de tallos y hojas refleja la edad de los individuos de una muestra que se encuentran paseando por un parque un día determinado a una hora concreta:

3|0 0 1 1
4|0 1 1 2 2 3 3
5|6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7
6|1 1 2 2 2
7|9 9
8|
9|8 8 9 9

1) Calcular moda, media y desviación típica, sin agrupar los datos por intervalos, y dibujar el diagrama de barras correspondiente.
2) Diagrama boxplot indicando los datos atípicos, si existen.

EJERCICIO 2

Un fabricante debe elegir entre dos máquinas que producen piezas cuyas longitudes en cm son variables aleatorias que vienen dadas por las siguientes funciones de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^4} & \text{si } x\geq 1\\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}\qquad g(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{y^5} & \text{si } y\geq 1\\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}$$

3) Si las piezas válidas deben tener longitudes entre 1 y 2 cm, ¿qué máquina produce un porcentaje mayor de piezas válidas? Razonar la respuesta.
4) Si se elige al azar una de las dos máquinas y se fabrica una pieza, calcular la probabilidad de obtener una pieza válida.

EJERCICIO 3

Los siguientes datos representan los tiempos de duración (se supone normalidad) de dos muestras de películas producidas por dos compañías cinematográficas:

Compañía 1	102	86	114	109	92		
Compañía 2	81	165	97	134	92	87	98

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

5) ¿Se puede afirmar que las varianzas de los tiempos de las películas de ambas compañías son iguales? Nivel de significación 0,01.

6) ¿Se puede afirmar, con el mismo nivel de significación, que el tiempo medio de duración de las películas que produce la compañía 2 excede al de las que produce la compañía1?

EJERCICIO 4

Dada una m.a.s. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ correspondiente a una variable aleatoria continua que sigue una distribución de Rayleigh, cuya función de densidad es

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\theta}\right) \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

7) Obtener el estimador de máxima verosimilitud de θ.

8) Aplicar ese estimador a la muestra: 0.1, 0.7, 0.1, 0.1, 0.5, 0.3, 0.7, 0.9, 0.2, 0.2.

EJERCICIO 5

Un software para la generación de dígitos aleatorios ha producido 1000 bits obteniéndose los siguientes resultados:

Bit	Frecuencia observada
0	826
1	174

9) Contrastar al nivel de significación α=0,05 si el software funciona bien, suponiendo que debe generar el 0 con probabilidad 0,8 y el 1 con probabilidad 0,2.

10) Obtener el valor-p del contraste y comentar el resultado.

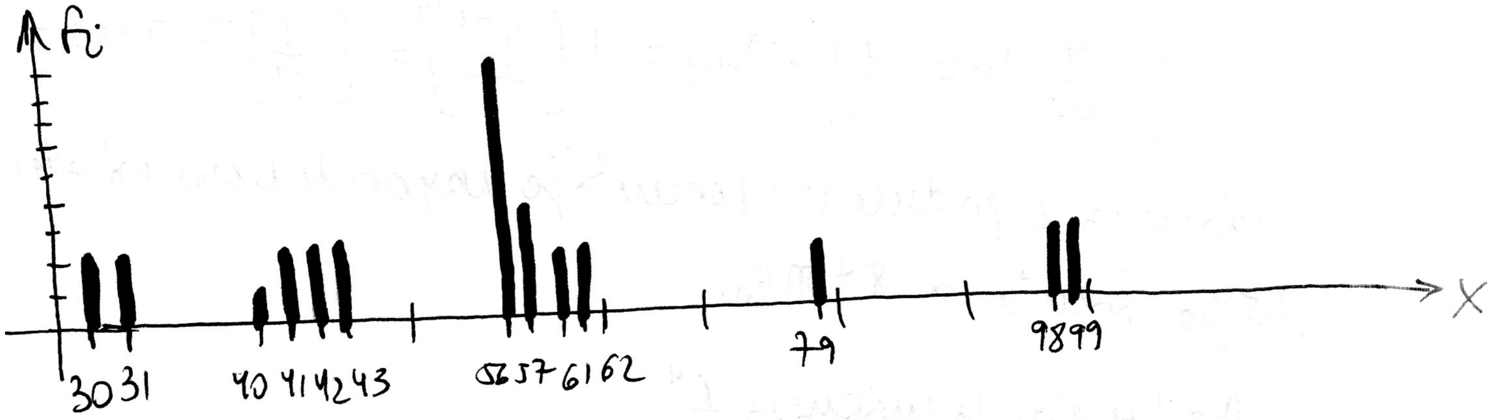
DATOS AUXILIARES:

```
qf(0.005,4,6)=0.0455; qchisq(0.025,5)=0.831; qt(0.995,10)=3.169;
pchisq(6.24,3)=0.8995; pchisq(4.23,1)=0.96; ppois(2,2.1)=0.65;
pchisq(15.1,5)=0.99;pt(6.51,5)=0.9994; pchisq(7.29,2)=0.974;
qchisq(0.95,1)=3.84; qf(0.95,5,5)=5.05; qf(0.995,4,6)=12.03;
dbinom(2,10,0.167)=0.291; qchisq(0.95,2)=5.991; pt(3,10)=0.993;
pbinom(10,100,0.2)=0.006;qt(0.99,10)=2.764; qt(0.99,9)=2.821;
ppois(0,3.1)=0.045; qpois(0.95,2.1)=5; pbinom(2,6,0.5)= 0.344
```

INDICACIONES:

- *Duración del examen: 2,5 h.*
- *Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la adenda.*
- *Publicación de notas: 23 de enero a las 14:00 horas.*
- *El examen resuelto se publicará en el blog de la asignatura.*

① 1) Moda = 56 ; $\bar{x} = 57{,}31$; $s = 18{,}84$



2) $n = 35$

25% de 35 es 8,75 $\Rightarrow$ 8º 8,75º 9º ; 42 42 → 42

$Q_1 = 42$

50% de 35 es 17,5 $\Rightarrow$ 17º 17,5º 18º ; 56 56 → 56

$Q_2 = 56$

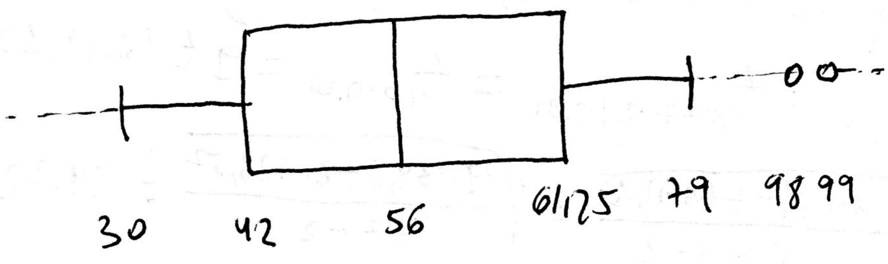
75% de 35 es 26,25 $\Rightarrow$ 26º 26,25º 27º ; 61 62 → 61,25

$Q_3 = 61{,}25$

$RIQ = Q_3 - Q_1 = 61{,}25 - 42 = 19{,}25$

$Q_1 - \frac{3}{2} RIQ = 13{,}125$; $Q_3 + \frac{3}{2} RIQ = 90{,}125$

$Q_1 - 3\,RIQ = -15{,}75$; $Q_3 + 3RIQ = 119$



Atípicos : Los valores 98 y 99

② 3) $\int_1^2 \frac{3}{x^4}dx = 3\int_1^2 x^{-4}dx = 3\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right] = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^2 = 0{,}875$

$\int_1^2 \frac{4}{y^5}dy = 4\int_1^2 y^{-5}dy = 4\left[\frac{y^{-4}}{-4}\right] = \left[-\frac{1}{y^4}\right]_1^2 = 0{,}9375$

La máquina 2 produce un porcentaje mayor de piezas válida. 93,75% frente a 87,50%.

4) A = "se elige la máquina 1"

B = " " " " 2"

V = "se obtiene pieza válida"

$P(V) = P(V/A)\cdot P(A) + P(V/B)\cdot P(B) = 0{,}875\cdot\frac{1}{2} + 0{,}9375\cdot\frac{1}{2} = 0{,}906$

③ 5) $S_1'^2 = 134{,}8$; $S_2'^2 = 928{,}57$; $S_1'^2/S_2'^2 = 0{,}145$

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 / H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

R.C.: $\left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} \notin \left[F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}, F_{n-1,m-1;\alpha/2}\right] \right\}$

$F_{n-1,m-1;1-\alpha/2} = F_{4,6;0.995} = qf(0.005,4,6) = 0{,}0455$

$F_{n-1,m-1;\alpha/2} = F_{4,6;0.005} = qf(0.995,4,6) = 12{,}03$

Como $0{,}145 \in [0{,}0455; 12{,}03]$ no se puede rechazar H_0 y se concluye que las varianzas son iguales

6) $H_0: \mu_1 = \mu_2 / H_a: \mu_2 > \mu_1$

R.C.: $\left\{ \bar{x}_2 - \bar{x}_1 > t_{n+m-2;\alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \right\}$

$t_{n+m-2;\alpha} = t_{5+7-2;0.01} = t_{10;0.01} = qt(0.99,10) = 2{,}764$

$S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} = \sqrt{\frac{4\cdot 134{,}8 + 6\cdot 928{,}57}{5+7-2}} = 24{,}72$

Sustituyendo: R.C.: $\{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > 40\}$

Como $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 107{,}7 - 100{,}6 = 7{,}1$ no se rechaza H_0 y la compañía 2 no excede en duración a la compañía 1.

④ 7) $f_\theta(x_1,x_2 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\theta}\right)$

$\ln f_\theta(x_1,x_2 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln x_i - \ln\theta - \frac{x_i^2}{2\theta}\right] = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n\ln\theta - \frac{\Sigma}{2}$

$\frac{d \ln f_\theta(x_1,x_2 \dots x_n)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i^2}{2\theta^2} = 0$

$\frac{-2n\theta + \sum x_i^2}{2\theta^2} = 0 \Rightarrow -2n\theta + \sum x_i^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{\sum x_i^2}{2n}}$ E.M.V.

$\frac{d^2 \ln f_\theta(x_1,x_2 \dots x_n)}{d\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} + \frac{\sum x_i^2}{2}\left(\frac{-2\theta}{\theta^4}\right) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{\sum x_i^2}{\theta^3}$

Particularizando esta 2ª derivada en $\frac{\sum x_i^2}{2n}$ se obtiene:

$\frac{n}{\frac{(\sum x_i^2)^2}{4n^2}} - \frac{\sum x_i^2}{\frac{(\sum x_i^2)^3}{8n^3}} = \frac{4n^3}{(\sum x_i^2)^2} - \frac{8n^3}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{-4n^3}{(\sum x_i^2)^2} < 0 \Rightarrow$ Máximo

8) $\hat{\theta} = \frac{0{,}1^2+0{,}7^2+0{,}1^2+0{,}1^2+0{,}5^2+0{,}3^2+0{,}7^2+0{,}9^2+0{,}2^2+0{,}2^2}{2 \cdot 10} = 0{,}1$

⑤ 9) Es un contraste χ^2 de bondad de ajuste

	n_i	p_i	np_i	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
0	826	0,8	800	0,845
1	174	0,2	200	3,38
	1000	1	1000	4,225

$\chi^2_{1;0.05} = \text{qchisq}(0.95, 1) = 3{,}84$

Como $4{,}225 > 3{,}84$ se rechaza H_0 y se concluye que el software no funciona bien, al nivel de significación 0,05

10) p-valor $= 1 - \text{pchisq}(4{,}23, 1) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$, lo que significa que no hay seguridad en rechazar H_0 y habría que extraer una muestra de tamaño superior

⑤ (Solución alternativa)

9) $H_0: p = 0{,}8 \; / \; H_a: p \neq 0{,}8$

$$R.C: \left\{ |\hat{p} - p_0| > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\}$$

$$p_0 = 0{,}8 \; ; \; n = 1000 \; ; \; z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1{,}96$$

$$|\hat{p} - p_0| = \left| \frac{826}{1000} - 0{,}8 \right| = 0{,}026$$

$$z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0{,}025$$

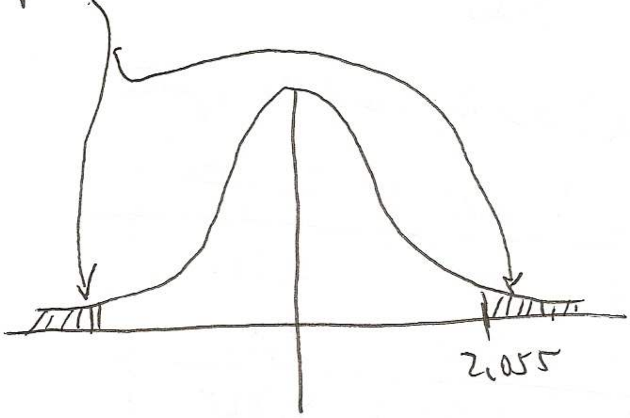
$\Rightarrow$ Como $0{,}026 > 0{,}025$ se rechaza H_0 y se concluye que no funcionaba bien el software

10) $$\frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{826/1000 - 0{,}8}{\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{1000}}} = 2{,}055$$

$$p\text{-valor} = 2 \cdot (1 - \text{pnorm}(2.055)) = 0{,}04$$

$\Downarrow$

No hay seguridad en rechazar H_0; habría que extraer una muestra de mayor tamaño



euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco
eman ta zabal zazu

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA
Informática de Gestión y Sistemas de Información
Bilbao, 22 de junio de 2015

EJERCICIO 1

En el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ considérense los sucesos A y B tales que $P(A) = 0.3$, $P(A\cup B) = 0.9$ y $P(B) = p$.

1) Determinar el valor de p en caso de que A y B sean sucesos independientes.
2) Ídem en caso de que A y B sean sucesos incompatibles.

EJERCICIO 2

Las notas de un examen al que se presentaron 325 alumnos se distribuyen según un modelo normal de media 4,8 y varianza 1,9. Se conoce por experiencia de años anteriores que a la revisión acuden el 5% de los alumnos con una calificación menor o igual a 4, el 76% de los que han obtenido una calificación entre 4 y 5 puntos, y el 1% de los que aprueban.

3) Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a la revisión?
4) Si un alumno ha ido a la revisión, ¿qué probabilidad existe de que esté aprobado?

EJERCICIO 3

Una planta dedicada al montaje de grandes motores industriales ha puesto en funcionamiento un nuevo sistema de montaje. Con el fin de conocer cómo son los tiempos medios de montaje en ambos sistemas, se seleccionan dos muestras aleatorias de tamaño 9 de cada uno de los tipos, resultando en el sistema antiguo: media 35,22 y varianza 24,44; y en el nuevo: media 31,56 y varianza 20,02.

5) Admitiendo que los tiempos medios de montaje en ambos sistemas son normales con varianzas iguales, hallar el intervalo de confianza de la diferencia de medias (antiguo menos nuevo) con un nivel de confianza del 98%.
6) Si el nivel de confianza disminuye al 95% comentar si hay cambios significativos en el intervalo de confianza.

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EJERCICIO 4

Considérense las variables aleatorias continuas X, exponencial de media 2, y $Z = X^2 + X - 20$. Se pide:

7) F(4) siendo F la función de distribución de X.
8) Media de Z.

EJERCICIO 5

La v.a. X tiene por función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} \text{ si } x \in (0,\theta) \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$

Para contrastar H_0: θ =2 frente a H_1: θ >2, empleándose una muestra aleatoria simple de tamaño 1 y cuyo valor es x, se adopta la siguiente regla de decisión:

Si x<*c*, no se puede rechazar H_0; si x≥*c*, se rechaza H_0

9) Calcular *c* sabiendo que el error de tipo I debe ser menor o igual que 0,05.
10) Con el valor de *c* calculado en el apartado anterior obtener el error de tipo II si θ =3.

DATOS AUXILIARES:

```
qf(0.005,4,6)=0.0455; qchisq(0.025,5)=0.831; qt(0.975,16)=2.12;
pchisq(6.24,3)=0.8995; pchisq(4.23,1)=0.96; ppois(2,2.1)=0.65;
pchisq(15.1,5)=0.99;pt(6.51,5)=0.9994; pchisq(7.29,2)=0.974;
qchisq(0.95,1)=3.84; qf(0.95,5,5)=5.05; qf(0.995,4,6)=12.03;
dbinom(2,10,0.167)=0.291; qchisq(0.95,2)=5.991; pt(3,10)=0.993;
pbinom(10,100,0.2)=0.006;qt(0.99,16)=2.583; qt(0.99,9)=2.821;
ppois(0,3.1)=0.045; qpois(0.95,2.1)=5; pbinom(2,6,0.5)= 0.344
```

INDICACIONES:

- *Duración del examen: 2,5 h.*
- *Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la adenda.*
- *Publicación de notas en GAUR: 24 de junio a las 14:00 horas.*
- *El examen resuelto se publicará en el blog de la asignatura.*

① 1) Si A y B son independientes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$0{,}9 = 0{,}3 + p - 0{,}3 \cdot p$$

$$0{,}7p = 0{,}6 \Rightarrow p = \frac{0{,}6}{0{,}7} = 0{,}857$$

2) Si A y B son incompatibles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0{,}9 = 0{,}3 + p$$

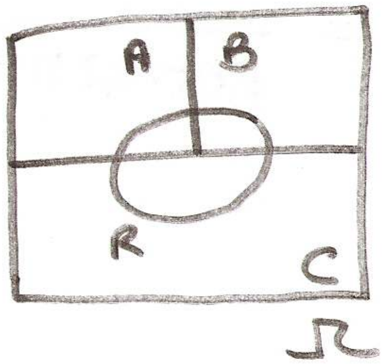
$$p = 0{,}6$$

(2) 3) Sea la v.a. X = nota de un alumno;

$X \to N(4{,}8; \sqrt{1{,}9})$

Sean los sucesos:

A = "$X \leq 4$"
B = "$4 < X \leq 5$"
C = "$X \geq 5$"
R = "acude a la revisión"



$$P(A) = P(X \leq 4) = P\left(\frac{X-4{,}8}{\sqrt{1{,}9}} \leq \frac{4-4{,}8}{\sqrt{1{,}9}}\right) = P(Z \leq -0{,}58) =$$
$$= 1 - 0{,}719 = 0{,}281$$

$$P(B) = P(4 < X \leq 5) = P\left(\frac{4-4{,}8}{\sqrt{1{,}9}} < \frac{X-4{,}8}{\sqrt{1{,}9}} \leq \frac{5-4{,}8}{\sqrt{1{,}9}}\right) =$$
$$= P(-0{,}58 < Z \leq 0{,}15) = 0{,}5596 - 0{,}281 = 0{,}2786$$

$$P(C) = P(X \geq 5) = P\left(\frac{X-4{,}8}{\sqrt{1{,}9}} \geq \frac{5-4{,}8}{\sqrt{1{,}9}}\right) = P(Z \geq 0{,}15) =$$
$$= 1 - 0{,}5596 = 0{,}4404$$

$$P(R/A \cup B) = \frac{P(R \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P((R \cap A) \cup (R \cap B))}{P(A \cup B)} =$$

$$= \frac{P(R \cap A) + P(R \cap B)}{P(A) + P(B)} = \frac{P(R/A) \cdot P(A) + P(R/B) \cdot P(B)}{P(A) + P(B)} =$$

$$= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}281 + 0{,}76 \cdot 0{,}2786}{0{,}281 + 0{,}2786} = 0{,}4035$$

4) $$P(C/R) = \frac{P(R/C) \cdot P(C)}{P(R/A) \cdot P(A) + P(R/B) \cdot P(B) + P(R/C) \cdot P(C)} =$$

$$= \frac{0{,}01 \cdot 0{,}4404}{0{,}05 \cdot 0{,}281 + 0{,}76 \cdot 0{,}2786 + 0{,}01 \cdot 0{,}4404} = 0{,}0191$$

③ 5) $S_1'^2 = \frac{n}{n-1} s_1^2 = \frac{9}{8}\cdot 24,44 = 27,495$

$S_2'^2 = \frac{m}{m-1} s_2^2 = \frac{9}{8}\cdot 20,02 = 22,523$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1'^2+(m-1)S_2'^2}{n+m-2}} = \sqrt{\frac{(9-1)\cdot 27,495+(9-1)\cdot 22,523}{9+9-2}} = 5$$

$t_{n+m-2;\alpha/2} = t_{9+9-2;0.01} = t_{16;0.01} = qt(0.99,16) = 2,583$

I.C.: $\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2 \pm t_{n+m-2;\alpha/2}\, S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)$

Sustituyendo valores:

$\left(35,22-31,56 \pm 2,583\cdot 5\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}\right) = (-2,428; 9,748)$

6) $t_{n+m-2;\alpha/2} = t_{9+9-2;0.025} = t_{16;0.025} = qt(0.975,16) = 2,12$

Sustituyendo valores:

$\left(35,22-31,56 \pm 2,12\cdot 5\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}\right) = (-1,337; 8,657)$

No hay cambio significativo en el intervalo de confianza, pues este último también incluye al 0 (no hay razones para considerar que las medias son diferentes).

4 7) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(4) = 1-e^{-4/2} = 1-e^{-2} = 0{,}865$$

8) $E(Z_1) = E(X^2+X-20) = E(X^2)+E(X)-E(20)$

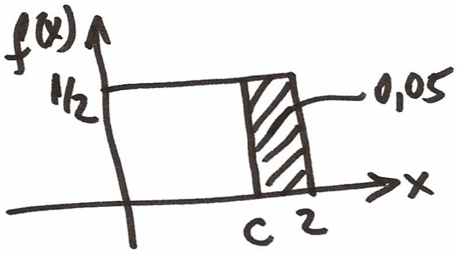
Como $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = 2^2+2^2 = 8$$

Entonces, $E(Z_1) = 8+2-20 = -10$

5 9) Error de tipo I = $P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) =$

$= P(X \geq c \mid \theta=2) = (2-c)\cdot\frac{1}{2} = 0{,}05 \Rightarrow c = 1{,}9$



10) Error de tipo II = $P(\text{Aceptar } H_0 \mid H_a \text{ falsa}) =$

$= P(X<c \mid \theta=3) = P(X<1{,}9 \mid \theta=3) =$

$= (1{,}9-0)\cdot\frac{1}{3} = 0{,}633$

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EXAMEN DE MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA
Informática de Gestión y Sistemas de Información
Bilbao, 13 de enero de 2016

EJERCICIO 1

Una empresa ha realizado un estudio del tiempo que necesitan sus trabajadores para llegar desde sus domicilios hasta su puesto de trabajo. La serie estadística obtenida es la siguiente:

Tiempo (minutos)	**Nº de trabajadores**
10	5
20	4
30	9
40	10
50	8
60	4
70	6
80	2
90	1
110	1

1) Construir una tabla completa de frecuencias y calcular media aritmética, desviación típica y moda. Obtener los percentiles P_{25} y P_{80} e interpretar esos valores.

2) Estimar el tiempo mínimo que necesitan para llegar a su puesto de trabajo el 30% de los trabajadores que más tiempo necesitan. ¿Existen datos atípicos? Razonar la respuesta.

EJERCICIO 2

Se elige al azar un número ABC de tres bits (0 o 1). Se consideran las variables aleatorias X, número de ceros entre los dos primeros bits, e Y, número total de unos. Calcular:

3) Media de X y varianza de Y.

4) $P(X>0|Y=2)$.

EJERCICIO 3

El peso de una determinada pieza de fundición sigue una distribución normal de media 164 g. Sabiendo que el 12% de las piezas pesa menos de 150 g, se pide:

5) Varianza del peso.

6) Si las piezas que no pesan entre 156 y 172 g se desechan, ¿qué número esperado de piezas serían desechadas en un lote de tamaño 200?

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EJERCICIO 4

El mínimo muestral M, correspondiente a una muestra aleatoria simple de tamaño *n* proveniente de una distribución cuya función de densidad es *f* y cuya función de distribución es *F*, es un estadístico que se distribuye de acuerdo a la siguiente función de densidad:

$$f_{\min}(m) = nf(m)\left[1 - F(m)\right]^{n-1}$$

7) Calcular la función de distribución de M cuando la población original es una exponencial de parámetro 1 y el tamaño de la muestra es 10.

8) Obtener, en las condiciones del apartado anterior, la probabilidad de que el mínimo muestral sea menor que 0,2.

EJERCICIO 5

Las fibras ópticas de polímero (normalmente fabricadas con PMMA) se caracterizan por sus buenas propiedades mecánicas. Las fibras de polímero pueden estar dopadas o sin dopar. Se efectúa una prueba para comprobar si las fibras dopadas presentan las mismas propiedades mecánicas que las no dopadas. Para ello se ha realizado un ensayo de tracción hasta la rotura con los dos tipos de fibras (dopadas con *diphenyl sulfoxide*, DPSO, y no dopadas). Los resultados de elongación obtenidos en milímetros (se supone normalidad) para las fibras ópticas de polímero sin dopar (6 muestras) y dopadas con DPSO (7 muestras) son, respectivamente:

PMMA (%100)	52	50	45	48	49	46	
PMMA (%89) + DPSO(%11)	50	49	40	46	42	42	47

9) Con un nivel de confianza del 90%, ¿se podría aceptar la hipótesis de que las varianzas de las elongaciones con los dos tipos de fibra óptica son iguales?

10) Al mismo nivel anterior, ¿se puede aceptar la hipótesis de que la elongación con fibras de polímero sin dopar es superior que con las fibras dopadas? Calcular el p-valor del contraste.

DATOS AUXILIARES:

```
qf(0.05,5,6)=0.202; qchisq(0.025,5)=0.831; qt(0.9,11)=1.363;
pf(0.05,5,6)=0.0024; pchisq(4.23,1)=0.96; ppois(2,2.1)=0.65;
pchisq(15.1,5)=0.99;pt(0.9,13)=0.808; pchisq(7.29,2)=0.974;
qchisq(0.95,1)=3.841; qf(0.95,5,6)=4.387; qf(0.995,5,6)=11.464;
dbinom(2,10,0.167)=0.291; qchisq(0.95,2)=5.991; pt(3,10)=0.993;
pbinom(10,100,0.2)=0.006;qf(0.95,6,7)=3.866; pt(1.72,11)=0.943;
ppois(0,3.1)=0.045; qpois(0.95,2.1)=5; pbinom(2,6,0.5)= 0.344
```

INDICACIONES:

- *Duración del examen: 2,5 h.*
- *Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la adenda.*
- *Publicación de notas: 26 de enero a las 14:00 horas.*
- *El examen resuelto se publicará en el blog de la asignatura.*

1

1)

X_i	f_i	F_{aci}	f_i	f_{aci}	$X_i f_i$	$X_i^2 f_i$
10	5	5	0,10	0,10	1	10
20	4	9	0,08	0,18	1,6	32
30	9	18	0,18	0,36	5,4	162
40	10	28	0,20	0,56	8	320
50	8	36	0,16	0,72	8	400
60	4	40	0,08	0,80	4,8	288
70	6	46	0,12	0,92	8,4	588
80	2	48	0,04	0,96	3,2	256
90	1	49	0,02	0,98	1,8	162
110	1	50	0,02	1	2,2	242
	50		1		44,4	2460

$\bar{X} = \sum X_i f_i = 44{,}4$

$s^2 = \sum X_i^2 f_i - \bar{X}^2 = 2460 - 44{,}4^2 = 488{,}64$

$s = \sqrt{488{,}64} = 22{,}11$

Moda = 40

25% de 50 = 12,5 $\Rightarrow P_{25} = 30$

80% de 50 = 40 $\Rightarrow P_{80} = \frac{60+70}{2} = 65$

2) 70% de 50 = 35 $\Rightarrow P_{70} = 50$

75% de 50 = 37,5 $\Rightarrow P_{75} = 60$

$Q_1 = P_{25} = 30$; $Q_3 = P_{75} = 60$; $RIQ = Q_3 - Q_1 = 30$

$(Q_1 - 3RIQ, Q_3 + 3RIQ) = (-60, 150)$

$(Q_1 - \frac{3}{2}RIQ, Q_3 + \frac{3}{2}RIQ) = (-15, 105)$

El único dato sospechoso de atípico es 110

2

3)

A	B	C	X	Y
0	0	0	2	0
0	0	1	2	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	2
1	0	0	1	1
1	0	1	1	2
1	1	0	0	2
1	1	1	0	3

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/4	1/2	1/4

y_i	0	1	2	3
$p(y_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1$$

$$E(Y) = \sum_i y_i p(y_i) = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = 1,5$$

$$E(Y^2) = \sum_i y_i^2 p(y_i) = 0^2\cdot\frac{1}{8} + 1^2\cdot\frac{3}{8} + 2^2\cdot\frac{3}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{8} = 3$$

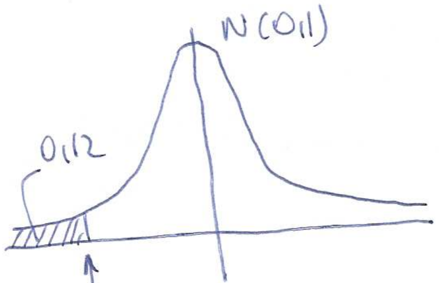
$$Var(Y) = 3 - 1,5^2 = 0,75$$

4) $$P(X>0 \mid Y=2) = \frac{P(X>0 \cap Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3} = 0,667$$

3

5) $X \longrightarrow N(164, \sigma)$

$$P(X<150) = 0,12 \Rightarrow P\left(Z < \frac{150-164}{\sigma}\right) = 0,12$$



$$\frac{150-164}{\sigma} = -1,175 \Rightarrow \sigma = 11,91 \Rightarrow \sigma^2 = 11,91^2 = 141,85$$

6) $$P(156<X<172) = P\left(\frac{156-164}{11,91} < Z < \frac{172-164}{11,91}\right) =$$

$$= P(-0,67 < Z < 0,67) = 0,497$$

$1 - 0,497 = 0,503$, por tanto

Y = "nº piezas desechadas en un lote de 200" $\Longrightarrow Y \longrightarrow B(200, 0.503)$

El nº esperado de piezas desechadas será:

$$\underline{E(Y)} = np = 200 \cdot 0,503 = \underline{100,6}$$

4 7)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_{min}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq 0 \\ 10 e^{-m} \left[1 - 1 + e^{-m}\right]^{9} & \text{si } m > 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f_{min}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq 0 \\ 10 e^{-10m} & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

$$\int_0^m 10 e^{-10t} dt = \left[-e^{-10t}\right]_0^m = -e^{-10m} + 1$$

Por tanto,

$$\underline{F_{min}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ 1 - e^{-10m} & \text{si } m \geq 0 \end{cases}}$$

8) $\underline{P(M < 0,2)} = F_{min}(0,2) = 1 - e^{-10 \cdot 0,2} = 1 - e^{-2} = \underline{0,865}$

5 9) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \mid H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$R.C.: \{ S_1^2 / S_2^2 \notin [F_{n-1,m-1;\alpha/2} ; F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}] \}$

$S_1^2 = 6,67 ; S_2^2 = 14,81$

$F_{n-1,m-1;1-\alpha/2} = F_{5,6;0.95} = qf(0.05,5,6) = 0,202$

$F_{n-1,m-1;\alpha/2} = F_{5,6;0.05} = qf(0.95,5,6) = 4,387$

$$S_1^2 / S_2^2 = \frac{6,67}{14,81} = 0,45$$

Como $0,45 \in [0,202 , 4,387]$ se acepta Ho y las varianzas son iguales.

b) $Ho: \mu_1 = \mu_2 \;/\; Ha: \mu_1 > \mu_2$

$$R.C.: \left\{ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 > t_{n+m-2;\alpha}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \right\} *$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6,67 + 6 \cdot 14,81}{6+7-2}} = 3,333$$

$$\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{7}} = 0,556$$

$$t_{n+m-2;\alpha} = t_{6+7-2;\,0.1} = t_{11;0.1} = qt(0.9, 11) = 1,363$$

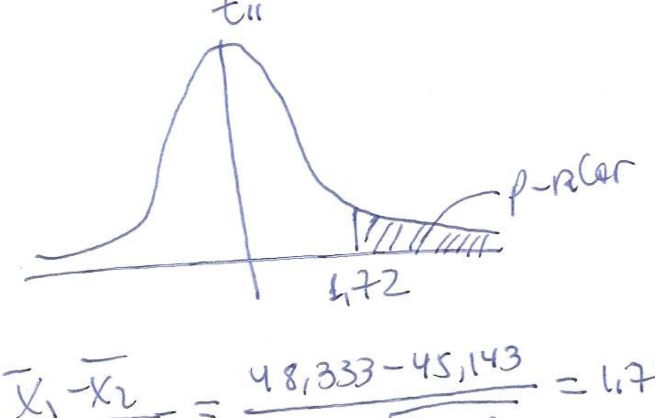
Sustituyendo estos valores en * se tiene:

$$R.C.: \{ \bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 2,526 \}$$

$$\bar{X}_1 = 48,333 ; \; \bar{X}_2 = 45,143$$

Como $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 3,19 > 2,526$ se rechaza Ho

De * se deduce que $\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \longrightarrow t_{n+m-2} = t_{11}$



$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_1\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} = \frac{48,333 - 45,143}{3,333\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}} = 1,72$$

p-valor $= 1 - pt(1.72, 11) = 1 - 0,943 = 0,057$

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EXAMEN DE MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA
SOLUCIONES
Informática de Gestión y Sistemas de Información
Bilbao, 20 de junio de 2016

EJERCICIO 1

Con el objetivo de repoblar un pueblo con riesgo de abandono que solo contaba con 9 vecinos, su ayuntamiento ofreció ayudas como trabajo o casa gratis. A finales de 2015, el pueblo tenía censados 33 vecinos, cuyas edades se muestran en la siguiente tabla:

Edad (años)	Nº de habitantes
[0,20)	6
[20,40)	8
[40,60)	5
[60,80)	12
[80,100)	2

1) Obtener la tabla completa de frecuencias. Calcular la media de edad, la desviación típica y la moda.

2) Calcular el rango intercuartílico. ¿Qué porcentaje de habitantes tiene más de 70 años? ¿Cuál es la edad máxima del 28% de los habitantes más jóvenes?

EJERCICIO 2

Se lanza un dado dos veces y se designan por X e Y las puntuaciones del primer y segundo lanzamiento, respectivamente. Sea la variable aleatoria $Z=|X-Y|$. Calcular:

3) Función de masa y media de Z.

4) Si A es el suceso $\{X=2\}$, obtener la función de distribución de la variable condicionada $Z|A$ y representarla gráficamente.

EJERCICIO 3

La variable aleatoria $Y=(X-\mu)^2$ depende de la variable aleatoria X, que sigue una distribución $N(\mu,2)$. Se pide:

5) Calcular el valor de a que verifica $P(Y<a)=0,2$.

6) Calcular el valor de b que verifica $P(\mathrm{e}^{-Y}>b)=0,8$.

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EJERCICIO 4

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos en metros por dos lanzadores de disco en las 6 pruebas de la Copa del Mundo de Atletismo:

Prueba	1	2	3	4	5	6
Lanzador 1	65,07	65,79	66,02	65,96	68,03	66,99
Lanzador 2	64,79	60,95	63,03	64,15	64,48	63,89

Si los resultados de lanzamiento de disco siguen una distribución normal de parámetros desconocidos, se pide:

7) Realizar un contraste de hipótesis, al nivel de significación del 5%, para determinar si coinciden las varianzas poblaciones. Calcular el p-valor del contraste anterior.

8) Con un nivel de confianza del 90%, calcular un intervalo de confianza para la media de los resultados del lanzador 1.

EJERCICIO 5

La variable aleatoria continua X se distribuye de acuerdo a la siguiente función de densidad:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta^{-1} & \text{si } x\in(0,\theta)\\ 0 & \text{si } x\notin(0,\theta)\end{cases}$$

Con objeto de contrastar la hipótesis H_0: $\theta=1$ frente a H_a: $\theta>1$, mediante una observación x de X, se emplea la siguiente regla de decisión:

Si $x\leq c$, se acepta H_0; *si* $x>c$, se rechaza H_0.

9) Hallar el valor de c que garantiza que el contraste basado en la regla de decisión anterior tiene una probabilidad de cometer error de tipo I igual a 0,05.

10) Conocido c, calcular la probabilidad de cometer error de tipo II cuando θ toma el valor 2.

DATOS AUXILIARES:

```
qf(0.025,6,6)=0.172; qchisq(0.025,5)=0.831; qt(0.95,5)=2.015;
pf(0.549,5,5)=0.263; pchisq(4.23,1)=0.96; ppois(2,2.1)=0.65;
pchisq(15.1,5)=0.99;pt(0.9,13)=0.808; pchisq(7.29,2)=0.974;
qchisq(0.95,1)=3.841; qf(0.025,5,5)=0.14; qf(0.995,5,6)=11.464;
dbinom(2,10,0.167)=0.291; qchisq(0.95,2)=5.991; pt(3,10)=0.993;
pbinom(10,100,0.2)=0.006;qf(0.975,5,5)=7.146; pt(1.72,11)=0.943;
ppois(0,3.1)=0.045; qpois(0.95,2.1)=5; pbinom(2,6,0.5)= 0.344
```

INDICACIONES:

- *Duración del examen: 2,5 h.*
- *Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la adenda.*
- *Publicación de notas: 24 de junio a las 14:00 horas.*
- *El examen resuelto se publicará en el blog de la asignatura.*

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EJERCICIO 1

1)

Edad (años)	x_i	F_i	Fac_i	f_i	fac_i	x_if_i	$x_i^2f_i$
[0,20)	10	6	6	0,182	0,182	1,82	18,2
[20,40)	30	8	14	0,242	0,424	7,26	217,8
[40,60)	50	5	19	0,152	0,576	7,60	380
[60,80)	70	12	31	0,364	0,940	25,48	1783,6
[80,100]	90	2	33	0,060	1	5,40	486
		33		1		47,56	2885,6

$$\overline{x} = 47,56 \textit{ años; } s = \sqrt{2885,6 - 47,56^2} = 24,97; \ \textit{moda}=70$$

2) El 25% de 33 es 8,25. Por tanto,

$$Q_1 = 20 + \frac{\frac{33}{100}25 - 6}{14-6}(40-20) = 25,625$$

El 75% de 33 es 24,75. Por tanto,

$$Q_3 = 60 + \frac{\frac{33}{100}75 - 19}{31-19}(80-60) = 69.583$$

$$RIQ = Q_3 - Q_1 = 43,958$$

El porcentaje de mayores de 70 años será: (6+2)/33=0,2424=24,24%

Ahora debemos calcular el percentil 28 P_{28}. El 28% de 33 es 9,24. Por tanto,

$$P_{28} = 20 + \frac{\frac{33}{100}28 - 6}{14-6}(40-20) = 28,1 \textit{ años}$$

EJERCICIO 2

3) En función de los valores que puedan tomar los dados, la variable Z toma los siguientes valores

Y \ X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

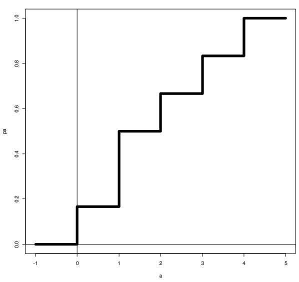
$$p(z)=\begin{cases} 6/36 & si\ z=0 \\ 10/36 & si\ z=1 \\ 8/36 & si\ z=2 \\ 6/36 & si\ z=3 \\ 4/36 & si\ z=4 \\ 2/36 & si\ z=5 \end{cases}$$

$$\mu=E(Z)=\sum_i z_i\cdot p(z_i)=0\cdot\frac{6}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{8}{36}+3\cdot\frac{6}{36}+4\cdot\frac{4}{36}+5\cdot\frac{2}{36}=\frac{70}{36}=1{,}944$$

4) Las funciones de masa y distribución, de la variable aleatoria condicionada *Z|A* son, respectivamente:

$$p(z|A)=\begin{cases} 1/6 & si\ z=0 \\ 2/6 & si\ z=1 \\ 1/6 & si\ z=2 \\ 1/6 & si\ z=3 \\ 1/6 & si\ z=4 \end{cases} \qquad F(z|A)=\begin{cases} 0 & si\ z|A<0 \\ 1/6 & si\ 0\le z|A<1 \\ 3/6 & si\ 1\le z|A<2 \\ 4/6 & si\ 2\le z|A<3 \\ 5/6 & si\ 3\le z|A<4 \\ 1 & si\ z|A\ge 4 \end{cases}$$

La función de distribución *F(z|A)* de la v.a. Z|A tiene, por tanto, la forma:



EJERCICIO 3

5)

$$P(Y<a)=P\left((X-\mu)^2<a\right)=P\left(-\sqrt{a}<X-\mu<\sqrt{a}\right)\underset{tipificando}{=}$$

$$\underset{tipificando}{=}P\left(\frac{-\sqrt{a}}{2}<\frac{X-\mu}{2}<\frac{\sqrt{a}}{2}\right)=P\left(\frac{-\sqrt{a}}{2}<Z<\frac{\sqrt{a}}{2}\right)=0{,}2$$

De la tabla de la normal estándar se tiene: $\frac{\sqrt{a}}{2}=0{,}255\Rightarrow a=0{,}2601$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

6)

$$P(\mathrm{e}^{-Y} > b) = P(\mathrm{e}^{-(X-\mu)^2} > b) = P\left(-(X-\mu)^2 > \ln b\right) = P\left((X-\mu)^2 < -\ln b\right) =$$

$$= P\left(-\sqrt{-\ln b} < X-\mu < \sqrt{-\ln b}\right) \underset{tipificando}{=} P\left(\frac{-\sqrt{-\ln b}}{2} < \frac{X-\mu}{2} < \frac{\sqrt{-\ln b}}{2}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-\sqrt{-\ln b}}{2} < Z < \frac{\sqrt{-\ln b}}{2}\right) = 0{,}8$$

De la tabla de la normal estándar se tiene:

$$\frac{\sqrt{-\ln b}}{2} = 1{,}285 \Rightarrow -\ln b = 2{,}57^2 = 6{,}6049 \Rightarrow b = e^{-6.605} = 0{,}00135$$

<u>**EJERCICIO 4**</u>

7) El contraste de hipótesis es:

$$\begin{cases} H_0: & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_a: & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

Región crítica: $\left\{S_1^2 / S_2^2 \notin \left[F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}, F_{n-1,m-1;\alpha/2}\right]\right\}$

Estadístico de contraste: S_1^2 / S_2^2=0,5485

$$F_{5,5;0.025} = qf(0.975,5,5) = 7{,}146$$
$$F_{5,5;0.975} = qf(0.025,5,5) = 0{,}14$$

El estadístico se encuentra en la región de confianza, por lo que aceptamos la hipótesis nula; es decir, aceptamos que las varianzas poblacionales coinciden al nivel del 5%.

Cálculo del p-valor:

$$\frac{\alpha}{2} = pf\left(0{,}5485,5,5\right) = 0{,}263 \Rightarrow \alpha = 0{,}526$$

8) Como $t_{5;0.05}$=qt(0.95,5)=2,015, se tiene:

$$I_{\mu_1}^{0,9} = \left[\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha/2} S/\sqrt{n}\right] = \left[66{,}31 \pm t_{5;0{,}05}\frac{1{,}043}{\sqrt{6}}\right] =$$

$$= \left[66{,}31 \pm 2{,}015\frac{1{,}043}{\sqrt{6}}\right] = \left[65.452, 67.168\right]$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EJERCICIO 5

9) Para hallar el valor de *c* hacemos:

$$\alpha = P\left(error\ de\ tipo\ I\right) = P\left(rechazar\ H_0 | H_0\ cierta\right) = P\left(X > c \mid \theta{=}1\right) = 1 - P\left(x \le c \mid \theta{=}1\right) =$$

$$= 1 - \int_0^c 1\, dx = 1 - c = 0,05 \Rightarrow c = 0,95$$

10) El error de tipo II, cuando $\theta = 2$, será:

$$\beta = P\left(error\ de\ tipo\ II\right) = P\left(aceptar\ H_0 | H_0\ falsa\right) = P\left(X \le c \mid \theta{=}2\right) =$$

$$= \int_0^c \frac{1}{2}\, dx = \frac{c}{2} = \frac{0,95}{2} = 0.475$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

EXAMEN DE MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA
Informática de Gestión y Sistemas de Información
Bilbao, 18 de enero de 2017

EJERCICIO 1

Al estudiar el PIB per cápita en miles de dólares de 162 países escogidos al azar se han obtenido los siguientes resultados: $\Sigma x_i=979$ y $\Sigma x_i^2=17570$. Se pide:

1) Varianza del PIB per cápita de la muestra.

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{N}=\frac{979}{162}=6,043 \text{ miles\$};\ \ s^2=\frac{\sum x_i^2}{N}-\bar{x}^2=\frac{17570}{162}-6,043^2=71,939 \text{ miles\$}^2$$

2) Obtener el coeficiente de variación en tanto por ciento y tipificar el PIB per cápita de un país en el que este indicador tiene un valor de 2493 dólares. Comentar estos resultados.

$$s=\sqrt{71,939}=8,482=8482\,\$$$

$$\text{CV}=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{8,482}{6,043}=1,404=140,4\%$$

$$2493\,\$ \text{ tipificados}=\frac{2,493-6,043}{8,482}=-0,419$$

EJERCICIO 2

Se reparten al azar 30 bolas en 20 urnas, numeradas del 1 al 20. Calcular:

3) Probabilidad de que haya exactamente una bola en cada una de las dos urnas numeradas con el 15 y el 16.

Casos posibles: $\frac{20}{1^{\text{a}}\text{bola}}\times\frac{20}{2^{\text{a}}\text{bola}}\times\frac{20}{3^{\text{a}}\text{bola}}\times\ldots\times\frac{20}{30^{\text{a}}\text{bola}}=20^{30}$

Casos favorables:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{1^{\text{a}}\text{bola(Urna 15)}}\times\frac{1}{2^{\text{a}}\text{bola(Urna 16)}}\times\frac{18}{3^{\text{a}}\text{bola}}\times\ldots\times\frac{18}{30^{\text{a}}\text{bola}}=18^{28}\\
\frac{1}{1^{\text{a}}\text{bola(Urna 16)}}\times\frac{1}{2^{\text{a}}\text{bola(Urna 15)}}\times\frac{18}{3^{\text{a}}\text{bola}}\times\ldots\times\frac{18}{30^{\text{a}}\text{bola}}=18^{28}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}=\binom{30}{2}\cdot 2\cdot 18^{28}$$

$$\frac{\binom{30}{2}\cdot 2\cdot 18^{28}}{20^{30}}=0,114$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

4) Probabilidad de que en la urna número 1 haya exactamente 3 bolas.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Casos favorables:}\\ \dfrac{1}{1^a\,\text{bola(Urna1)}}\times\dfrac{1}{2^a\,\text{bola(Urna1)}}\times\dfrac{1}{3^a\,\text{bola(Urna1)}}\times\ldots\times\dfrac{19}{30^a\,\text{bola}}=19^{27}\\ \dfrac{1}{1^a\,\text{bola(Urna1)}}\times\dfrac{19}{2^a\,\text{bola}}\times\dfrac{1}{3^a\,\text{bola(Urna1)}}\times\ldots\times\dfrac{19}{30^a\,\text{bola}}=19^{27}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=\binom{30}{3}\cdot 19^{27}$$

$$\frac{\binom{30}{3}\cdot 19^{27}}{20^{30}}=0{,}127$$

EJERCICIO 3

En una oposición para un cierto organismo público la selección de candidatos se realiza mediante una prueba que tiene dos fases y cuyos resultados siguen distribuciones normales independientes.

5) Para pasar a la siguiente fase, el resultado de la primera debe situarse entre el 20% de los valores más altos. ¿Cuál es la mínima calificación que debe obtenerse para poder pasar a la siguiente fase si las notas siguen una distribución normal de media 50 y varianza 100?

$$X=\text{nota de la }1^a\text{ fase; X}\rightarrow \text{N(50,10)}$$

$$\text{P(X>c)=0,2}\xrightarrow{\text{tipificando}}P\left(Z>\frac{c-50}{10}\right)=0,2;\frac{c-50}{10}=0,845\rightarrow c=58,45$$

6) En la segunda fase los valores necesarios para ubicarse en los tramos del 20% y 5% superior son 75,1 y 84,74 respectivamente. Calcular en este caso los parámetros de la distribución.

$$Y=\text{nota de la }2^a\text{ fase; Y}\rightarrow \text{N}(\mu,\sigma)$$

$$\begin{cases}P(Y<75{,}1)=0{,}8\\ P(Y<84{,}74)=0{,}95\end{cases}\xrightarrow{\text{tipificando}}\begin{cases}P\left(\text{Z}<\dfrac{75{,}1-\mu}{\sigma}\right)=0{,}8\\ P\left(\text{Z}<\dfrac{84{,}74-\mu}{\sigma}\right)=0{,}95\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{75{,}1-\mu}{\sigma}=0{,}845\\ \dfrac{84{,}74-\mu}{\sigma}=1{,}645\end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior: μ=64,92; σ=12,05

EJERCICIO 4

Considérese la variable aleatoria X que sigue una distribución uniforme continua en el intervalo (-π/2,π/2) y sea U=X^2+X-2 otra variable aleatoria. Se pide:

7) P(X^2>0,5).

$$P(X^2>0{,}5)=P(X<-\sqrt{0{,}5}\ \text{U}\ X>\sqrt{0{,}5})=P(X<-\sqrt{0{,}5})+P(X>\sqrt{0{,}5})=$$

$$=\text{P(X}<-0{,}707)+\text{P(X}>0{,}707)=\int_{-\pi/2}^{-0{,}707}\frac{1}{\pi}dx+\int_{0{,}707}^{\pi/2}\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left[x\right]_{-\pi/2}^{-0{,}707}+\frac{1}{\pi}\left[x\right]_{0{,}707}^{\pi/2}=0{,}55$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

8) Media de U.

$$E[\mathrm{U}] = \mathrm{E}[\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 2] = \mathrm{E}[\mathrm{X}^2] + \mathrm{E}[\mathrm{X}] - 2$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0,822$$

$$E[\mathrm{X}] = \frac{-\pi/2 + \pi/2}{2} = 0$$

Por tanto, $E[\mathrm{U}] = 0,822 + 0 - 2 = -1,178$

EJERCICIO 5

Se desea investigar si la edad de inicio en una actividad determinada en los jóvenes es menor para los chicos que para las chicas. Se realiza un muestreo y se obtienen los siguientes datos (se supone normalidad):

Chicos	*Chicas*
Tamaño muestral: 10	Tamaño muestral: 12
Edad promedio de inicio: 11,3 años	Edad promedio de inicio: 12,6 años
$S_1^2 = 4$	$S_2^2 = 3,5$

9) Con un nivel de significación de 0,05 contrastar si las varianzas poblacionales son iguales.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \ / \ H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

La región crítica del contraste es:

$$\left\{ S_1^2 / S_2^2 \notin \left[F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}, F_{n-1,m-1;\alpha/2} \right] \right\}$$

$$F_{n-1,m-1;1-\alpha/2} = F_{9,11;0.975} = qf(0.025,9,11) = 0,256$$
$$F_{n-1,m-1;\alpha/2} = F_{9,11;0.025} = qf(0.975,9,11) = 3,588$$

Como $\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{4}{3,5} = 1,143 \in [0.256, 3.588]$ no se puede rechazar la hipótesis nula y las varianzas poblacionales son iguales.

10) Comprobar la afirmación de partida, con el mismo nivel de significación, estableciendo las hipótesis oportunas, y calcular el p-valor correspondiente.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \ / \ H_a: \mu_1 < \mu_2$$

La región crítica del contraste es:

$$\left\{ \bar{x}_2 - \bar{x}_1 > t_{n+m-2;\alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right\}$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
Paseo Rafael Moreno "Pitxitxi", 3
48013 Bilbao

$$t_{n+m-2;\alpha} = t_{10+12-2;0.05} = t_{20;0.05} = qt(0.95,20) = 1,725$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} = \sqrt{\frac{(10-1)\cdot 4 + (12-1)\cdot 3,5}{10+12-2}} = 1,93$$

$$\left\{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > t_{n+m-2;\alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right\} = \left\{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > 1,725\cdot 1,93\cdot \sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}\right\} = \left\{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > 1,426\right\}$$

Como $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 12,6 - 11,3 = 1,3$ no se puede rechazar la hipótesis nula y se concluye que no hay diferencias significativas en la edad de comienzo entre chicos y chicas.

Como $\dfrac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \to t_{n+m-2} \Rightarrow \dfrac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \to t_{20}$, se tiene:

$$p-valor = P\left(t_{20} > \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\right) = P\left(t_{20} > \frac{12,6-11,3}{1,93\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}}\right) =$$

$$= \mathrm{P}(t_{20} > 1,57) = 1 - pt(1.57,20) = 0.066, \text{ valor que no es concluyente.}$$

DATOS AUXILIARES:

```
pf(0.975,10,12)=0.491; qchisq(0.025,5)=0.831; qt(0.95,20)=1.725;
pf(0.05,5,6)=0.0024; pchisq(4.23,1)=0.96; ppois(2,2.1)=0.65;
pchisq(15.1,5)=0.99;pt(1.57,20)=0.934; pchisq(7.29,2)=0.974;
qchisq(0.95,1)=3.841; qf(0.975,10,12)=3.374; qf(0.995,5,6)=11.464;
dbinom(2,10,0.167)=0.291; qchisq(0.95,2)=5.991; pt(3,10)=0.993;
pbinom(10,100,0.2)=0.006;qf(0.025,9,11)=0.256; qf(0.025,10,12)=0.27;
ppois(0,3.1)=0.045; qf(0.975,9,11)=3.588; pbinom(2,6,0.5)= 0.344
```

INDICACIONES:

- *Duración del examen: 2,5 h.*
- *Material auxiliar: solo está permitido usar la calculadora y la adenda.*
- *Publicación de notas: 25 de enero a las 14:00 horas.*
- *El examen resuelto se publicará en el blog de la asignatura.*