eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

24 de junio de 2022

Apellidos:	***Nombre:***

TIEMPO: 2 horas y 30 minutos

Observación: todos los resultados del examen deberán ser justificados razonadamente

EJERCICIO 1:

Calcular el siguiente determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & n & . & . & . & n \\ n & 2 & n & n & . & . & . & n \\ n & n & 3 & n & . & . & . & n \\ n & n & n & 4 & . & . & . & n \\ . & . & . & . & . & & & . \\ . & . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ n & n & n & n & . & . & . & n \end{vmatrix}$$

(1 punto)

Solución:

Teniendo en cuenta que toda la última columna es igual efectuaremos transformaciones elementales de filas para anular casi todos los términos y después desarrollar por los adjuntos de dicha columna

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & . & . & . & n & n \\ n & 2 & n & . & . & . & n & n \\ n & n & 3 & . & . & . & n & n \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . \\ n & n & n & . & . & . & n-1 & n \\ n & n & n & . & . & . & n & n \end{vmatrix} \begin{matrix} \langle F_1 \to F_1 - F_n \rangle \\ \langle F_2 \to F_2 - F_n \rangle \\ \langle F_3 \to F_3 - F_n \rangle \\ = \\ \langle F_i \to F_i - F_n \rangle \end{matrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
1-n & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\
0 & 2-n & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3-n & . & . & . & 0 & 0 \\
. & . & . & . & & & . & . \\
. & . & . & & . & & . & . \\
. & . & . & & & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & (n-1)-n & 0 \\
n & n & n & . & . & . & n & n
\end{vmatrix}=
$$

$$
=(-1)^{n+n}\cdot n\cdot\begin{vmatrix}
1-n & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 2-n & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 3-n & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & & & . \\
. & . & . & & . & & . \\
. & . & . & & & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & (n-1)-n
\end{vmatrix}=
$$

$$
=n\cdot(1-n)\cdot(2-n)\cdot(3-n)\cdot\ldots\cdot[(\cancel{n}-1)-\cancel{n}]=(-1)^{n-1}n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1=\boxed{(-1)^{n-1}n!}
$$

ya que el determinante resultante corresponde a una matriz diagonal.

EJERCICIO 2:

Demostrar que si una matriz verifica dos de las tres condiciones siguientes

a) simétrica b) ortogonal c) involutiva

entonces cumple la tercera.

(0.75 puntos)

Solución:

Matriz simétrica: $A^t = A \quad (1)$
Matriz ortogonal $A^{-1} = A^t \quad (2)$
Matriz involutiva: $A^2 = I \quad (3)$

- Supongamos, en primer lugar, que A es una matriz simétrica y ortogonal, verificándose que

$$A^2 = A \cdot A \overset{(1)}{=} A \cdot A^t \overset{(2)}{=} A \cdot A^{-1} = I$$

con lo que A es una matriz involutiva.

- En el caso de que A sea una matriz simétrica e involutiva, entonces

$$A^t \cdot A \overset{(1)}{=} A \cdot A \overset{(3)}{=} I \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = A^t$$

con lo que A es una matriz ortogonal.

- Por último, si A es una matriz ortogonal e involutiva resulta que

$$A = I \cdot A = (A^{-1} \cdot A) \cdot A = A^{-1} \cdot (A \cdot A) = A^{-1} \cdot A^2 \overset{(3)}{=} A^{-1} \cdot I = A^{-1} \overset{(2)}{=} A^t$$

con lo que A es una matriz simétrica.

EJERCICIO 3:

Utilizando el método de Gauss, clasificar el siguiente sistema en función de los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ y resolver en el caso $\alpha = 0$, supuesto que sea compatible

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 2 \end{array}\right. .$$

(1 punto)

Solución:

En primer lugar reordenamos las ecuaciones ya que resultará más sencillo trabajar en primer lugar con la segunda fila que con la primera

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 2 \end{array}\right.$$

Mediante transformaciones elementales de filas intentaremos convertir la matriz ampliada asociada al sistema anterior en una matriz escalonada:

$$A^* = \left(A|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_3 \to F_3 - F_1 \rangle]{\langle F_2 \to F_2 - 3F_1 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 2 & a-1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_3 \to F_3 - 2F_2 \rangle]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a+3 & 3 \end{array}\right).$$

Casos posibles:

$a = -3$: *rg(A)=2<rg(A*)=3* con lo que se trata de un <u>sistema incompatible</u>

$a \neq -3$: *rg(A)=3=rg(A*)=3=n* con lo que se trata de un <u>sistema compatible y determinado</u>, en cuyo caso, considerando sustitución regresiva

$$\left\{\begin{array}{lll} x - y + z = 1 & & \to \quad x = 1 + y - z = \dfrac{3}{a+3} \\ y - 2z = -1 & \to \quad y = -1 + 2z = \dfrac{-a+3}{a+3} & \\ (a+3)z = 3 \quad \to \quad z = \dfrac{3}{a+3} & & \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{a+3} \\ \dfrac{-a+3}{a+3} \\ \dfrac{3}{a+3} \end{pmatrix} \xrightarrow{a=0} \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 4:

Sean los siguientes subespacios de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:

$$S = span\left\{a + bx^2\right\} \qquad \text{y} \qquad T = span\left\{c + dx^2, ex\right\}.$$

siendo *a*, *b*, *c*, *d*, y *e* $\in \mathbb{R}$ no nulos. Determinar la condiciones que deben cumplir *a*, *b*, *c*, *d*, y *e* para que se verifique que

$$\mathbb{P}_2 = S \oplus T$$

(1.5 puntos)

Solución:

Teniendo en cuenta la definición de suma directa y que $\mathbb{P}_2 = S \oplus T$, se tiene que verificar que $\mathbb{P}_2 = S + T$ y que $S \cap T = \left\{\vec{0}\right\}$. En el primer caso bastará con que la unión de las respectivas bases de *S* y *T* sea una base de $\mathbb{P}_2$:

$$B_{S+T} = B_S \cup B_T = \left\{a + bx^2\right\} \cup \left\{c + dx^2, ex\right\} = \left\{a + bx^2, c + dx^2, ex\right\}$$

- por una parte $dim(\mathbb{P}_2) = 3$ y tenemos ya tres vectores de $\mathbb{P}_2$
- pero esos tres vectores tienen que ser linealmente independientes y por lo tanto

$$\begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{e} \\ b & d & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} e \cdot (a \cdot d - b \cdot c) = -e \cdot (a \cdot d - b \cdot c) \neq 0$$

Casos posibles:

$e = 0$: entonces $dim(T) = 1$ de forma que $S + T \neq \mathbb{P}_2$

$a \cdot d - b \cdot c = 0$: entonces $S \subset T$ con lo que $S \cap T \neq \left\{\vec{0}\right\}$ y $S + T = T \neq \mathbb{P}_2$.

Consecuentemente las condiciones que tienen que cumplir los parámetros son

$$\boxed{e \neq 0 \quad \wedge \quad a \cdot d - b \cdot c \neq 0}.$$

EJERCICIO 5:

La temperatura global de una determinada región se ha ido incrementando durante los últimos cuatro años según la siguiente tabla:

Año	Incremento en grados
1	1/4
2	1/4
3	1/3
4	1/2

Utilizando el método de mínimos cuadrados, calcular la recta que mejor se ajusta a los datos de la tabla.

(2.5 puntos)

Solución:

En principio se desea calcular una recta $y=\alpha+\beta\cdot x$ que pase por cuatro puntos: salvo que los cuatro puntos estén alineados el sistema asociado no tendrá solución ya que tenemos cuatro ecuaciones para dos incógnitas

$$S\equiv\begin{cases}\alpha+\beta=1/4\\ \alpha+2\beta=1/4\\ \alpha+3\beta=1/3\\ \alpha+4\beta=1/2\end{cases}: \quad rg\begin{pmatrix}1&1&1/4\\1&2&1/4\\1&3&1/3\\1&4&1/2\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1&1/4\\0&1&0\\0&2&1/12\\0&3&1/4\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1&1/4\\0&1&0\\0&0&1/12\\0&0&1/4\end{pmatrix}=3$$

Como podemos observar el rango de la matriz ampliada es 3 mientras que el rango de la matriz de coeficientes es 2

$$rg\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=2$$

Al no tener solución exacta buscaremos la solución aproximada.

Trabajaremos en $V=\mathbb{R}^4$ como espacio euclídeo y buscaremos la mejor aproximación en el subespacio

$$S=span\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}\subset V\,.$$

La base $B_S=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ no es ortogonal ya que $\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\rangle=1+2+3+4=10$,

con lo que habrá que aplicar en primer lugar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt para conseguir de esta forma una base ortogonal de S:

Paso 1: $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$

Paso 2: $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha \cdot \vec{v}_1$ eligiendo α para que este nuevo vector sea ortogonal al anterior

$$\alpha = \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} = \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \implies \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{5}{2}\vec{v}_1 = \vec{u}_2 - \frac{5}{2}\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix}.$$

Nueva base ortogonal: $B_{ort} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix}\right\}.$

Para finalizar proyectamos el vector de términos independientes $\vec{b} = \begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/3\\1/2\end{pmatrix} \notin S$ en S

$$\vec{b}' = proy_S \vec{b} = \frac{\langle \vec{b}, \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\langle \vec{b}, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_2\|^2} \cdot \vec{v}_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/3\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/3\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \vec{v}_2 =$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{4} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{-\frac{3}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4}}{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} \cdot \begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\frac{10}{24}}{5}\begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\1/2\\3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/24\\7/24\\9/24\\11/24\end{pmatrix}.$$

Ahora solo falta resolver el sistema compatible y determinado

$$S' \equiv \begin{cases} \alpha + \beta = 5/24 \\ \alpha + 2\beta = 7/24 \\ \alpha + 3\beta = 9/24 \\ \alpha + 4\beta = 11/24 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = 1/8 \\ \beta = 1/12 \end{cases} \implies \boxed{y = \frac{1}{8} + \frac{1}{12}x}.$$

EJERCICIO 6:

Sean la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores propios de *A*.

(1 punto)

b) ¿Es *A* diagonalizable? En caso afirmativo, diagonalizarla.

(1.25 puntos)

c) Obtener la matriz inversa de *A* utilizando el teorema de Cayley-Hamilton.

(1 punto)

Solución:

a) Planteamos el polinomio característico y estudiamos los valores para los que se anula

$$p_A(\lambda)=|A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2+4=-(\lambda+2)^2(\lambda-1)$$

obteniendo de esta forma que la matriz A tiene un autovalor doble y un autovalor simple

$$\lambda_1=-2 \quad \text{con} \quad \alpha_1=2 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2=1 \quad \text{con} \quad \alpha_2=1.$$

b) La condición para que la matriz sea diagonalizable es que la suma de las multiplicidades aritméticas sea 3 (lo cual es cierto: $\alpha_1+\alpha_2=2+1=3$) y las multiplicidades geométricas coincidan con las multiplicidades aritméticas y, habida cuenta de que $1\le d_i\le\alpha_i \ \ \forall i$ (con lo que $d_2=\alpha_2=1$), bastará con estudiar d_1:

$\boxed{V(\lambda_1=-2)}$

$$(A-\lambda_1\cdot I)\cdot\vec{x}=(A+2I)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 3x+3y+3z=0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad V(\lambda_1=-2)=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_1=2=\alpha_1$ de forma que **la matriz *A* sí es diagonalizable**.

Para diagonalizarla necesitaremos estudiar también el subespacio propio asociado al otro autovalor

$\boxed{V(\lambda_2=1)}$

$$(A-\lambda_2\cdot I)\cdot\vec{x}=(A-I)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \quad\;\; 3y + 3z = 0 \rightarrow z = -y \\ -3x - 6y - 3z = 0 \\ 3x + 3y \quad\;\; = 0 \rightarrow x = -y \end{cases} \Longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \Longrightarrow V(\lambda_2 = 1) = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Finalmente

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad \text{siendo} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Según el teorema de Cayley-Hamilton el polinomio característico de una matriz es su polinomio anulador, con lo que

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \quad \Longrightarrow \quad p_A(A) = -A^3 - 3A^2 + 4I = (0)_{3x3}$$

$$\rightarrow \quad A\cdot(A^2 + 3A) = 4I \quad \rightarrow \quad \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot(A^2 + 3A) = A^2 + 3A = 4A^{-1}\cdot I = 4A^{-1} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{A^2 + 3A}{4}$$

Operando

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 7 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 7 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right] = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Comprobación:

$$A\cdot A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-9+9 & 3-12+9 & 3-9+6 \\ -6+15-9 & -9+20-9 & -9+15-6 \\ 6-9+3 & 9-12+3 & 9-9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,.$$