TEMA 4: VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Una variable aleatoria X es una función definida sobre el espacio muestral Ω de un experimento aleatorio E cuyo conjunto de valores $\mathcal{C}$ es un número infinito no numerable.

Es decir, una variable aleatoria continua puede tomar cualquier valor comprendido dentro de cierto intervalo (campo de variabilidad).

Variables como el tiempo que se tarda en realizar cierto proceso o la altura de un individuo son variables aleatorias continuas.

FUNCIÓN de DISTRIBUCIÓN:

Sea X una variable aleatoria continua definida sobre el espacio muestral Ω y $[\alpha, \beta]$ su campo de variabilidad.

Se denomina función de distribución de la variable aleatoria X a una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

Continua y DERIVABLE en toda la recta real, salvo a lo sumo en un número finito de puntos.

→ PROPIEDADES:

i) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1$

ii) Continua por la derecha: $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

iii) Monótona creciente: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

iv) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (No se ha acumulado ninguna probabilidad).

v) $F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

FUNCIÓN de DENSIDAD

Sea X una variable aleatoria continua y $F(x)$ su función de distribución.

Se denomina función de densidad de la variable aleatoria continua X a una función real definida por $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$, que es una función definida y continua en toda la recta real salvo a lo sumo en un número finito de puntos.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad a, b \in \mathbb{R} \text{ siendo } a < b.$$

→ PROPIEDADES:

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = P(-\infty < x < +\infty)$

iii) $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{t \to -\infty} \int_t^x f(t)\,dt = \lim_{t \to -\infty} \left(F(x) - F(t)\right) = F(x)$

Por tanto,

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2$$

PROBABILIDADES $P(X = x) = 0$

$$P(X=x) = P(x \leq X \leq x) = \int_x^x f(t)\,dt = F(x) - F(x) = 0$$

i) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2)$

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2)$

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2)$

iii) $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$

$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x) =$

$= P(X > X)$

ii) $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b) =$

$= P(a < x < b) = P(X \leq b) - P(X < a) =$

$= P(X < b) - P(X \leq a) = P(X < b) - P(X < a) =$

$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

Ejemplo 1: Sea una constante $k > 0$ y la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de la constante k para que $f(x)$ sea una función de densidad.

Propiedades de la F. de Densidad.

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

· $0 \leq x \leq 1$

$k\, x\, (1-x) \rightarrow \geq 0$

$\rightarrow k \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\, dx} + \int_{0}^{1} k(x - x^2)\, dx + \cancel{\int_{1}^{\infty} 0\, dx} =$$

$$= k\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[k\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^1 = k \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0\right] = \boxed{\frac{k}{6} = 1}$$

$$\boxed{k = 6}$$

b) Tras haber calculado el valor de la constante k, suponga que $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria continua X.

Defina la función de distribución $F(x)$, y calcule $P(X \geq 3)$ y $P(X > 0'3)$

Dado que la función de densidad está definida a trozos, la función de distribución también lo estará; y siempre irá de 0 a 1.

- $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

- $0 \leq x \leq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt} + \int_{0}^{x} 6t(1-t)\,dt =$$

$$= 6\int_{0}^{x} (t-t^2)\,dt = 6\left[\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\right]_0^x = 6\left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - 0\right] =$$

$$= \boxed{3x^2 - 2x^3}$$

- $x > 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt} + \int_{0}^{1} 6t(1-t)\,dt + \cancel{\int_{1}^{x} 0\,dt} =$$

$$= 6\int_{0}^{1} (t-t^2)\,dt = 6\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 6\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0\right] = \frac{6}{6} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 1 = 0$$

$$P(x > 0'3) = 1 - P(x \leq 0'3) = 1 - P(x < 0'3) = 1 - F(0'3) =$$

$$= 1 - (3 \cdot 0'3^2 - 2 \cdot 0'3^3) = 0'7840$$

ESPERANZA MATEMÁTICA:

Sea X una variable aleatoria continua definida sobre el espacio muestral Ω, con función de densidad $f(x)$.

La esperanza matemática de X, también llamada media, es el número real definido por:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Será un número finito siempre que la integral sea absolutamente convergente. En caso contrario, la variable aleatoria X no tiene esperanza matemática finita.

Es un valor teórico y no empírico (media aritmética $\overline{x}$ de una muestra).

→ PROPIEDADES:

i) Si k es una constante, $E(k) = k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

ii) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias continuas:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

iii) Si X es una variable aleatoria continua y k una constante $k \in \mathbb{R}$: $\quad E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$

iv) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatoria continuas y k_i constantes $k_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n$:

$$E(k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot X_2 + \dots + k_n \cdot X_n) = k_1 \cdot E(X_1) + k_2 \cdot E(X_2) + \dots + k_n \cdot E(X_n)$$

v) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias continuas e <u>independientes</u>: $E(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot E(X_3) \cdot \dots \cdot E(X_n)$

VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA:

Sea X una variable aleatoria continua definida sobre el espacio muestral Ω, con función de densidad $f(x)$,

La varianza de X se define por:

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\, dx$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu^2$$

Si las integrales son absolutamente convergentes, la varianza será un valor finito positivo o cero.

La raíz cuadrada positiva de $Var(X)$ se define como la desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$

→ PROPIEDADES:

i) Si k es una constante, $Var(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

ii) Si X es una variable aleatoria continua, $Var(X) \geq 0$, en caso de existir.

iii) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias continuas e INDEPENDIENTES: $Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)$

iv) Si x es una variable aleatoria continua y k una constante $k \in \mathbb{R}$: $Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X) \rightarrow \sigma_{kx} = |k| \cdot \sigma_x$

v) Si x es una variable aleatoria continua y k una constante, $k \in \mathbb{R}$: $Var(X + k) = Var(X)$

ejemplo 2: Siendo X la variable aleatoria continua con función de densidad definida en el ejemplo 1, calcule:

a) La esperanza matemática de la variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx} + \int_{0}^{1} x \cdot 6x(1-x)\,dx + \cancel{\int_{1}^{\infty} x \cdot 0\,dx} =$$

$$= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right]_0^1 = 6\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}$$

b) La varianza y la desviación típica de la variable aleatoria X.

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \cancel{\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,dx} + \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)\,dx + \cancel{\int_1^{\infty} x^2 \cdot 0\,dx} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= 6\int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx - \frac{1}{4} = 6\left[\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\right]_0^1 - \frac{1}{4} =$$

$$= 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4} = \frac{6}{20} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20}$$

MOMENTOS

Los momentos de una variable aleatoria continua se indican mediante el orden r y el punto de aplicación a.

Se definen como la media de la diferencia entre la variable y el punto de aplicación elevado al orden.

$$\alpha_{r,a} = E(X-a)^r$$

→ RESPECTO de la MEDIA: momento central de orden r.

$$\alpha_{r,E(X)} = \mu_r = E[(X-E(X))^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r \cdot f(x)\,dx$$

Siempre que la integral sea absolutamente convergente.

$$\mu_0 = E[(X-E(X))^0] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^0 \cdot f(x)\,dx = 1$$

$$\mu_1 = E[(X-E(X))^1] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^1 \cdot f(x)\,dx = 0$$

$$\mu_2 = E[(X-E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = \sigma^2 = Var(X)$$

Siempre que la integral sea absolutamente convergente.

→ RESPECTO del ORIGEN:

$$\alpha_{r,0} = \alpha_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot f(x)\,dx$$

Siempre que la integral sea absolutamente convergente.

$$\alpha_0 = E(X^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 \cdot f(x)\,dx = 1$$

$$\alpha_1 = E(X^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \mu$$

Siempre que la integral sea absolutamente convergente.

TEOREMA (ACOTACIÓN) de TCHEBYSHEV:

Sea X una variable aleatoria continua de media μ y desviación típica σ, finitos, entonces se verifica:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 1$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 1$$

Permite calcular la probabilidad mínima de que cualquier variable aleatoria diste de su media menos de k veces su desviación típica. Es decir, puede calcularse una cota inferior de probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$.

Cota inferior de probabilidad: PROBABILIDAD MÍNIMA.

TIPIFICACIÓN

Sea X una variable aleatoria continua de media μ y desviación típica σ, finitas. Se define la siguiente variable aleatoria continua:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Se trata de un cambio de escala y origen.

$\mu_Z = E(Z) = 0$

$\sigma_Z = 1$

Se pueden tipificar tanto variables aleatorias discretas como continua.

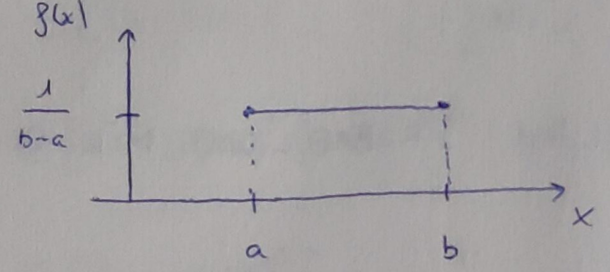
PRINCIPALES DISTRIBUCIONES

→ DISTRIBUCIÓN CONTINUA UNIFORME: $X \sim U[a,b]$

Sea X una variable aleatoria continua definida sobre Ω, se dice que X sigue una distribución continua uniforme en el intervalo $[a,b]$, y se escribe $X \sim U[a,b]$, si la función de densidad toma un valor constante en dicho intervalo y nulo fuera de él.

Función de DENSIDAD:

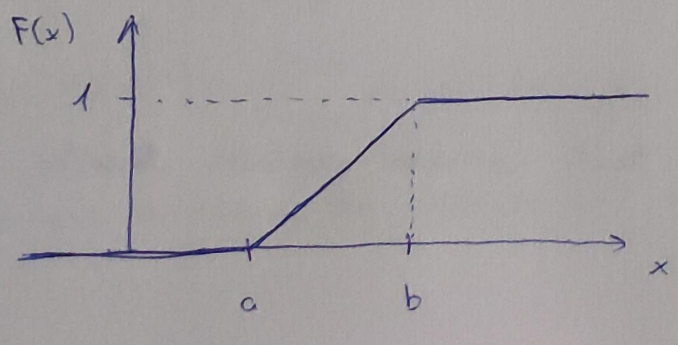
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$



Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Esperanza matemática:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejemplo 3: los gastos telefónicos semanales de una compañía se reparten uniformemente entre 100 y 150 €.

a) Calcule la media y la desviación típica del gasto telefónico semanal de la empresa.

X: = "Gastos semanales de una empresa".

$X \sim U[100, 150]$

$$\mu = E(x) = \frac{100+150}{2} = 125 \text{ €}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{50^2}{12} \text{ €}^2 \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{50^2}}{\sqrt{12}} = \frac{50}{\sqrt{12}} = \frac{50\sqrt{12}}{12} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ €}.$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el gasto telefónico de la empresa en una semana sea menor que 120 €?

$$P(x<120) = P(x \le 120) = F(120) = \frac{120-100}{50} = \frac{2}{5} = 0'4$$

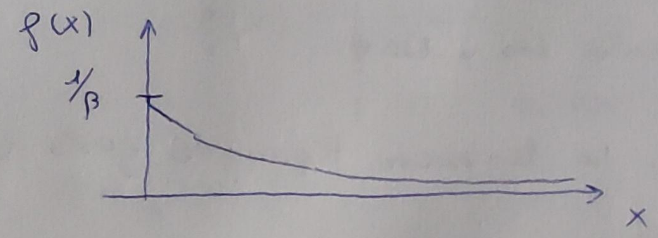
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 100 \\ \frac{x-100}{50} & 100 \le x \le 150 \\ 1 & x > 150 \end{cases}$$

→ DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL: $X \sim \mathcal{E}(\beta)$

Sea X una variable aleatoria definida sobre Ω, se dice que X sigue una distribución exponencial de parámetro $\beta > 0$, y se escribe $X \sim \mathcal{E}(\beta)$, si su función de densidad es:

Función de DENSIDAD:

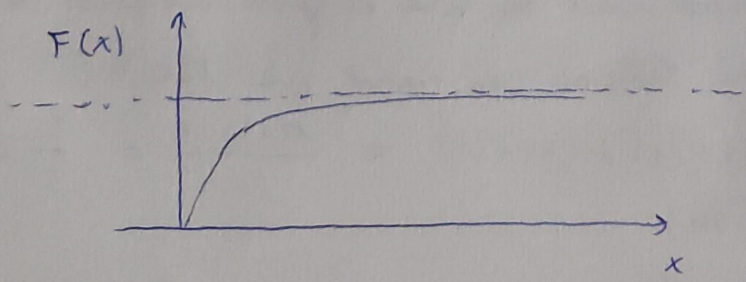
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cdot e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{siendo } \beta > 0.$$



Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/\beta} & x > 0 \end{cases}$$



Esperanza matemática

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{\beta} \cdot e^{-x/\beta}\,dx = \beta$$

Varianza

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\beta} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}}\,dx - \beta^2 = \beta^2$$

ejemplo 4: el periodo de semidesintegración de una substancia radioactiva sigue una distribución exponencial cuya media es de 5 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el periodo de semidesintegración de dicha substancia se encuentre entre 4 y 6 minutos?

$X :=$ "Periodo de semidesintegración en minutos de una substancia radioactiva"

$X \sim \mathcal{E}(\beta = 5)$ $\quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/5} & x > 0 \end{cases}$

$$P(4 < x < 6) = P(4 \leq x \leq 6) = F(6) - F(4) = 1 - e^{-6/5} - 1 + e^{-4/5} =$$

$$= e^{-4/5} - e^{-6/5} = 0'148134.$$

b) Sabiendo que el periodo de semidesintegración de la substancia es de al menos 4 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que ese periodo sea menor que 5 minutos?

$$P(X < 5 \mid X \geq 4) = \frac{P[(x<5) \cap (x \geq 4)]}{P(x \geq 4)} = \frac{P(4 \leq x \leq 5)}{1 - [1 - e^{-4/5}]} = \frac{0'6321 - 0'5506}{1 - 0'550671} =$$

$= 0'181352915$

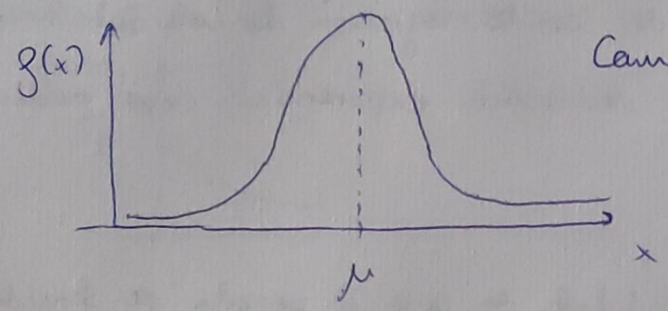
✱ PROPIEDAD: falta de memoria

$$P(X<5 \mid X \geq 4) = P(X \leq 1) = F(1) \leftarrow \frac{e^{-4/5} - e^{-1}}{e^{-4/5}} = 1 - \frac{e^{-1}}{e^{-4/5}} = 1 - e^{-1/5} = F(1)$$

→ DISTRIBUCIÓN NORMAL: $X \sim N(\mu, \sigma)$

Sea X una variable aleatoria definida sobre Ω, se dice que X sigue una distribución normal de parámetros μ y σ, y se escribe, $X \sim N(\mu, \sigma)$, si su recorrido es $(-\infty, \infty)$ y su <u>función de DENSIDAD</u>, $f(x)$:

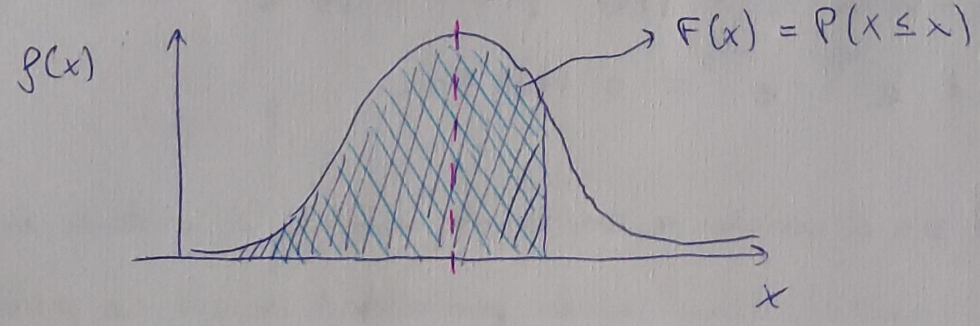
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} \qquad x, \mu \in \mathbb{R} \quad y \quad \sigma > 0$$



Campana de Gauss.

<u>Función de DISTRIBUCIÓN:</u>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} \, dt$$



El cálculo de la integral requiere utilizar métodos numéricos, dado que no tiene primitiva.

Por ello, se utilizará la variable tipificada Z.

PROPIEDADES de $N(\mu, \sigma)$

i) La función de densidad, $f(x)$, tiene un máximo para $x=\mu$ y dos puntos de inflexión cuyas abscisas son $x=\mu \pm \sigma$.

ii) La función de densidad es simétrica respecto a la recta $x=\mu$, por lo que el coeficiente de asimetría de la distribución es 0.

iii) Es una distribución mesocúrtica, es decir, el coeficiente de curtosis es 0.

iv) La moda, mediana y media de una distribución normal son idénticas.

ESPERANZA MATEMÁTICA:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\, dx = \mu$$

VARIANZA:

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\, dx - \mu^2 = \sigma^2$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Para el cálculo de la función de distribución se requiere el empleo de métodos de integración numérica, y que por lo tanto se realizará la tipificación de la variable X.

Es decir, se realizará el siguiente cambio de variable:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Z seguirá una distribución normal de media 0 y desviación típica 1; esto es, una distribución normal estándar.

→ Función de DENSIDAD:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \qquad z \in \mathbb{R}$$

→ Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt$$

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z) = F(z)$$

Los resultados del cálculo numérico de esta integral están recogidos en la tabla de distribución normal estándar o se calculan mediante el software R. [pnorm(z, 0, 1)].

Empleando dicha tabla o R, se pueden calcular las probabilidades para una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$ cualquiera que sea el valor de los parámetros μ y σ.

ejemplo 5: en una determinada población el peso de los jóvenes de 18 años sigue una distribución normal de media 66 kg y desviación típica 8 kg. Calcule:

a) La probabilidad de que un joven pese más de 80 kg.

X := "Peso de los jóvenes de 18 años".

$X \sim N(66, 8)$

$P(X > 80) = P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80-66}{8}\right) = P\left(Z \geq \frac{14}{8}\right) =$

$= P(Z \geq 7/4) = 1 - P(Z < 7/4) = 1 - P(Z \leq 7/4) =$

$= 1 - P(Z \leq 1'75) = 1 - F(1'75) = 1 - \text{pnorm}(1'75, 0, 1) =$

$= 1 - 0'9599 = 0'0401$

b) La probabilidad de que un joven pese menos de 70 kg.

$P(X < 70) = P(X \leq 70) = P\left(Z \leq \frac{70-66}{8}\right) = P(Z \leq 1/2) = F(0'5) =$

$= \text{pnorm}(0'5, 0, 1) = 0'6915$.

c) La probabilidad de que un joven pese más de 50 kg pero menos de 80 kg.

$P(50 < X < 80) = P(50 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{50-66}{8} \leq Z \leq \frac{80-66}{8}\right) =$

$= P(-2 \leq Z \leq 7/4) = P(Z \leq 7/4) - P(Z \leq -2) =$

$= P(Z \leq 7/4) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 7/4) - [1 - P(Z \leq 2)] =$

$= 0'9599 + 0'9772 - 1 = 0'9371$

$= \text{pnorm}(1'75, 0, 1) + \text{pnorm}(2, 0, 1) - 1 = F(1'75) + F(2) - 1$

ejemplo 6: una determinada variable aleatoria sigue una distribución normal con $\mu = 65'6$.

a) Sabiendo que la probabilidad de que la variable tome valores menores de 60 es de 0'352, calcule la desviación típica de dicha variable aleatoria.

qnorm (0'648, 0, 1) = 0'3800

quantile: qué valor me está dejando el 38% a su izquierda.

$$P(x<60) = P(x \leq 60) = 0'352$$

$$P\left(Z \leq \frac{60-65'6}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{-5'6}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{5'6}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \underbrace{p\left(Z \leq \frac{5'6}{\sigma}\right)}_{} = 0'352$$

$$P\left(Z \leq \frac{5'6}{\sigma}\right) = 1 - 0'352 = 0'648$$

$$\frac{5'6}{\sigma} = 0'38 \rightarrow \boxed{\sigma = 14'74}$$

b) ¿Qué valor de x deja un 87'9% de la distribución a su derecha? qnorm (0'879, 0, 1) = 1'1700

$$P(x > x) = 0'879 \rightarrow P(Z > z) = 0'879$$

$$P\left(Z > \frac{x - 65'6}{14'74}\right) = 0'879 \longrightarrow * \longrightarrow P\left(Z \leq \frac{65'6 - x}{14'74}\right) = 0'879$$

$$\frac{65'6 - x}{14'74} = 1'17 \rightarrow \boxed{x = 48'35}$$

CONVERGENCIA entre DISTRIBUCIONES

→ TEOREMA CENTRAL del LÍMITE:

Si $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de medias $\mu_i = E(X_i)$ finitos, y varianzas $\sigma_i^2 = Var(X_i)$ finitos, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ entonces la variable aleatoria, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene media $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ y varianza $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Considerando la variable aleatoria $Z = \dfrac{X - \sum_{i=1}^{n}\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}}$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} P(Z < z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}\, dz, \quad \forall z_1 \in \mathbb{R}.$$

Es decir, cualesquiera que sean las distribuciones de las variables aleatorias X_i, independientes, tanto discretas como continuas, si n es suficientemente grande (tiende a ∞), entonces la variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sigue una distribución asintóticamente normal de media $\mu = \sum_{i=1}^{n}\mu_i$ y varianza $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.

Dicho de otro modo, la distribución de la v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ converge cuando $n \to \infty$ a $N\left(\mu = \sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}\right)$.

→ TEOREMA de LINDEBERG – LÉVY :

Si $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de media μ y varianza σ^2, ambas finitas, entonces la variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$. Aplicando el teorema central del límite la variable aleatoria $Z = \dfrac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge cuando $n \to \infty$ a la $N(0,1)$.

Por tanto, la variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sigue una distribución asintóticamente $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

→ TEOREMA de MOIVRE :

Es un caso particular del teorema de Lindeberg – Lévy.

Una variable aleatoria discreta X que sigue una distribución binomial, $X \sim B(n,p)$, puede considerarse como suma de n v.a. independientes de Bernoulli $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ de parámetro p. Cada una de estas v.a. tiene la misma media $\mu_i = p$ y varianza $\sigma_i^2 = pq$, $\forall_i = 1, 2, \dots, n$, que son finitos.

Por el teorema de Lindeberg – Lévy, la v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$ sigue una distribución asintóticamente $N(\mu = np, \sigma = \sqrt{npq})$.

→ APROXIMACIÓN de una DISTRIBUCIÓN BINOMIAL por una NORMAL:

Si $X \sim B(n, p)$ y n tiende a infinito por el teorema de Moivre la distribución binomial puede aproximarse a una normal de parámetros $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$.

$$\left.\begin{matrix} X \sim B(n,p) \\ n \to \infty \end{matrix}\right\} B(n,p) \cong N(\mu = np, \sigma = \sqrt{npq})$$

En la práctica cuando, $\boxed{\begin{matrix} n \cdot p \geq 5 \\ n \cdot q \geq 5 \end{matrix}}$

→ APROXIMACIÓN de una DISTRIBUCIÓN de POISSON por una NORMAL:

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y λ tiende a infinito por el teorema de Lindeberg-Lévy, la distribución de Poisson puede aproximarse a una normal de parámetros $\mu = \lambda$ y $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

$$\left.\begin{matrix} X \sim \mathcal{P}(\lambda) \\ \lambda \to \infty \end{matrix}\right\} \mathcal{P}(\lambda) \cong N(\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda})$$

En la práctica, cuando $\boxed{\lambda > 18}$.

→ Corrección de CONTINUIDAD:

Cuando se aproxima una distribución discreta a una continua, es necesario realizar una corrección de continuidad, puesto que para una v. a. discreta la probabilidad de tomar un valor determinado no es siempre nula, mientras que para una variable aleatoria continua sí lo es.

$$P(X=a) = P(a-0'5 < X < a+0'5) \quad si \quad a \in \mathbb{C}$$

ejemplo 7: calcule la probabilidad de obtener un uno al menos 25 veces y como mucho 35 veces al lanzar un dado equilibrado en 200 ocasiones.

X:= "Número de veces que obtiene 1 al lanzar un dado equilibrado en 200 ocasiones".

$$X \sim B(n=200,\ p=1/6) \cong N\left(\mu = \frac{200}{6},\ \sigma = \sqrt{\frac{250}{9}}\right)$$

$n \cdot p \geq 5$ ✓

$n \cdot q \geq 5$ ✓

$P(25 \leq X \leq 35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 25) =$ Corrección por continuidad $=$

$= P(X \leq 35'5) - P(X \leq 24'5) = P(Z \leq 0'4117) - P(Z \leq -1'6755) =$

$=$ pnorm$(0'4117, 0, 1) - P(Z \geq 1'6755) =$ pnorm$(0'4117, 0, 1) - [1 - P(Z \leq 1'6755)] =$

$=$ pnorm$(0'4117, 0, 1) +$ pnorm$(1'6755, 0, 1) - 1 =$

$0'6591 + 0'9535 - 1 = 0'6126.$

ejemplo 8: una empresa dedicada al mantenimiento de sistemas de frío, arregla, mensualmente, de media 20 sistemas de frío.

Calcule:

a) La probabilidad de que en un mes se arreglen ocho sistemas.

X := "Número de sistemas de frío arreglados mensualmente ..."

$X \sim \mathcal{P}(\lambda=20) \cong N(\mu=20, \sigma=\sqrt{20})$

$P(X=8) = P(7'5 \leq X \leq 8'5) = P(X \leq 8'5) - P(X \leq 7'5) = P(Z \leq -2'5714) - P(Z \leq -2'7950) =$

$= \cancel{1} - P(Z \leq 2'5714) - \cancel{1} + P(Z \leq 2'7950) =$ -pnorm(2'57, 0, 1) + pnorm(2'79, 0, 1) =

$= -0'9949 + 0'9574 = 0'0625$

ejercicio 2:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3x & 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1 & x > 1/3 \end{cases}$$

a) • $x < 0$ $\quad f(x) = \frac{d}{dx} \cdot 0 = 0$

• $0 \leq x \leq 1/3$ $\quad f(x) = \frac{d}{dx} 3x = 3$

• $x > 1/3$ $\quad f(x) = \frac{d}{dx} \cdot 1 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x \leq 1/3 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

b) $P(0{,}2 \leq x \leq 0{,}7) = P(x \leq 0'7) - P(x \leq 0'2) = F(0'7) - F(0'2) =$

$= 1 - 3 \cdot 0'2 = 1 - 0'6 = 0'4$

$P(x < 0'32) = P(x \leq 0'32) = F(0'32) = 3 \cdot 0'32 = 0'96$

$P(x > 0'27) = 1 - P(x \leq 0'27) = 1 - F(0'27) = 1 - 3 \cdot 0'27 = 0'19$

ejercicio 7:

$X :=$ "Tiempo de vida en meses de unos componentes".

$X \sim \mathcal{E}(\beta = 8) \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/\beta} & x > 0 \end{cases}$

a) $P(3 \leq x \leq 12) = F(12) - F(3) = 1 - e^{-12/8} - 1 + e^{-3/8} = 0'4641591186.$

b) $P_{95} = P(X \leq x) = 0'95 = F(x) = \boxed{1 - e^{-x/8} = 0'95}$

$e^{-x/8} = 0'05 \rightarrow \ln(e^{-x/8}) = \ln(0'05) \rightarrow \frac{-x}{8} = \ln(0'05)$

$x = \frac{-\ln(0'05)}{8} = 23'97$ meses.

El 95% de los componentes tendrá una vida útil menor a 23'97 meses.

c) $P(X > 25 \mid X > 10) = \dfrac{P[(X>25) \cap (X>10)]}{P(X>10)} = \dfrac{P(X>25)}{P(X>10)} =$

$= \dfrac{P(X \geq 25)}{P(X \geq 10)} = \dfrac{1 - P(X \leq 25)}{1 - P(X \leq 10)} = \dfrac{1 - [1 - e^{-25/8}]}{1 - [1 - e^{-10/8}]} = 0'1533549668.$

ejercicio 1:

a). $f(x) = \begin{cases} kx^3 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\cdot\ 2 \leq x \leq 4}$

$kx^3 \geq 0 \rightarrow k \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 = \cancel{\int_{-\infty}^{2} 0\, dx} + \int_{2}^{4} kx^3\, dx + \cancel{\int_{4}^{\infty} 0\, dx} =$

$= k \cdot \frac{x^4}{4} \Big]_2^4 = k \cdot 60 = 1 \rightarrow \boxed{k = 1/60}$

b) $\cdot\ x < 2$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

$\cdot\ 2 \leq x \leq 4$

$F(x) = \int_{2}^{x} \frac{x^3}{60}\, dt = \frac{1}{60} \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^x =$

$= \frac{1}{60} \cdot \left(\frac{x^4}{4} - 4\right) = \frac{x^4 - 16}{240}$

$\cdot\ x > 4$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \cancel{\int_{-\infty}^{2} 0\, dt} + \int_{2}^{4} \frac{x^3}{60}\, dt + \cancel{\int_{4}^{x} 0\, dt} =$

$= \frac{1}{60} \int_{2}^{4} \frac{x^3}{60}\, dt = 1$

$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x^4 - 16}{240} & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$

c) $P(0 < x < 2'5) = P(x \leq 2'5) - P(x \leq 0) = F(2'5) - F(0) =$

$= 0'09609375 - 0 = 0'09609375.$

$P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3^4 - 16}{240} = 0'7291\overline{6}$

$P(x \leq 3'5) = F(3'5) = \frac{3'5^4 - 16}{240} = 0'55859375.$

ejercicio 3:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

a) i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $0 \leq x \leq 1$

  $2x \geq 0$ sí y sólo si $x \geq 0$, sí se da.

- 0 en otros casos; $f(x) \geq 0$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_0^1 2x\,dx + \cancel{\int_1^{\infty} 0\,dx} =$

$= 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = 1$ Se verifica.

b) • $x < 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

• $0 \leq x \leq 1$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x 2x\,dx = x^2$

• $x > 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt} + \int_0^1 2x\,dx + \cancel{\int_1^{\infty} 0 \cdot dx} = 1$

c) $P(X \leq 1/3) = F(1/3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$P(X > 1/3) = 1 - P(X \leq 1/3) = 1 - 1/9 = 8/9$

$P(\frac{1}{2} < X \leq 1) = P(\frac{1}{2} \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 1/2) =$

$= F(1) - F(1/2) = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$P(X < 1/3) = P(X \leq 1/3) = 1/9$

$P(X \geq 1/3) = P(X > 1/3) = 1 - P(X \leq 1/3) = 8/9$

$P(X = 1/2) = 0 = P(1/2 < X < 1/2)$

ejercicio 4:

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$kx \geq 0$ si y sólo si $\boxed{k \geq 0}$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = \int_{-\infty}^{0} \cancel{0}\,dx + \int_{0}^{1} kx\,dx + \int_{1}^{\infty} \cancel{0}\,dx =$

$k\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{k}{2} = 1 \rightarrow k = 2}$

b) $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \cancel{0} \cdot dx + \int_{0}^{1} 2x^2\,dx + \int_{1}^{\infty} \cancel{0} \cdot dx =$

$= 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = 2/3$

$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \int_0^1 2x^3\,dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$

$\sigma = \sqrt{1/18} = 1/\sqrt{18} = \frac{\sqrt{18}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{6} = 0'2357022604.$

c) $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = P\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3} < X < \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right) =$

$\mu = 2/3 \quad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{6}$ $\qquad 0'1952 \qquad 1'1380$

$= P\left(X \leq \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right) - P\left(X \leq \frac{2-\sqrt{2}}{3}\right) = F(1'1380) - F(0'1952) =$

$= 1 - \frac{6-4\sqrt{2}}{9} = \boxed{0'9618726944.}$

Función de DISTRIBUCIÓN:

- $x < 0 \quad F(x) = 0$
- $x > 1 \quad F(x) = 1$
- $0 \leq x \leq 1 \quad F(x) = \int_0^x 2x\,dx = x^2$

d) TCHEBYSHEV:

$(\mu-2\sigma\,;\,\mu+2\sigma) \to 1 - \frac{1}{k^2} \to k=2 \to 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

ejercicio 5:

X: "Tiempo que necesita una persona para ir de casa al trabajo, en minutos".

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 20 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$X \sim U[20, 30]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 20 \\ \frac{x-20}{10} & 20 \leq x \leq 30 \\ 1 & x > 20 \end{cases}$$

$P(X \leq x) = 0'9 = \frac{x-20}{10} \Rightarrow \boxed{x = 29}$

Debería salir de casa a las 8:31 o antes.

ejercicio 6:

X: "Tiempo transcurrido entre la salida de un autobús y la entrada del siguiente."

$X \sim \mathcal{E}(\beta = 5)$

$P(4 < X < 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 4) = 1 - e^{-6/5} - 1 + e^{-4/5} =$

$= e^{-4/5} - e^{-6/5} = \boxed{0'1481347522}$

ejercicio 8:

X: "Número de llamadas que se reciben al minuto".

$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 2)$

Y: "Número de llamadas .... en 15 minutos"

$\lambda_Y = 15 \cdot \lambda_X = 30 \qquad Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 30) \cong N(\mu = 30, \sigma = \sqrt{30})$

$\lambda > 18 \checkmark$

$P(X \leq 20) = P(X \leq 20'5) = P\left(Z \leq \frac{20'5 - 30}{\sqrt{30}}\right) =$

$= P(Z \leq -1'734454765) = P(Z \geq 1'7345) = 1 - P(Z \leq 1'7345)$

$= 1 - 0'9582 = \boxed{0'0418}$

ejercicio 9:

X: "Número de cuatros obtenidos al lanzar un dado 120 veces".

$p = 1/6$ $\quad X \sim B(n=120, p=1/6) \cong N\left(\mu=20, \sigma=\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$

$n \cdot p \geq 5 \quad 120 \cdot 1/6 = 20$

$n \cdot q \geq 5 \quad 120 \cdot 5/6 = 100$

$P(X \leq 18) =$ Corrección de continuidad $= P(X \leq 18'5) = P\left(Z \leq \frac{18'5 - 20}{\frac{5\sqrt{6}}{3}}\right) =$

$= P\left(Z \leq \frac{-3\sqrt{6}}{20}\right) = P\left(Z \geq \frac{3\sqrt{6}}{20}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{3\sqrt{6}}{20}\right) =$

$0'3674234614$

$= 1 - \text{pnorm}\left(\frac{3\sqrt{6}}{20}, 0, 1\right) = 1 - 0'6433484 = \boxed{0'3566516}$

ejercicio 10:

X: = "Diámetro interior de los cilindros..."

$X \sim N(\mu = 0'251, \sigma = 0'003)$ $\quad [0'250, 0'255]$

$P(0'250 \leq X \leq 0'255) = P(X \leq 0'255) - P(X \leq 0'250) =$

$= P\left(Z \leq \frac{0'255 - 0'251}{0'003}\right) - P\left(Z \leq \frac{0'250 - 0'251}{0'003}\right) = P(Z \leq 4/3) - P(Z \leq -1/3) =$

$= P(Z \leq 4/3) - P(Z \geq 1/3) = P(Z \leq 4/3) - 1 + P(Z \leq 1/3) =$

$= \text{pnorm}(4/3, 0, 1) + \text{pnorm}(1/3, 0, 1) - 1 =$

$= 0'9082 + 0'6293 - 1 = 0'5375$.

ejercicio 11:

Pagos ...

X: " ~~Número de~~ pagos ... "

$X \sim N(\mu, \sigma)$

$P(X > 58.000) = 0'01$

$P(X < 12.000) = 0'1$

$P(X>58.000) = P\left(Z > \frac{58000-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{58000-\mu}{\sigma}\right) = 0'01$

$P(X<12.000) = P\left(Z < \frac{12000-\mu}{\sigma}\right) = 0'1$

$P\left(Z \le \frac{58000-\mu}{\sigma}\right) = 0'99$

$P\left(Z \le \frac{12000-\mu}{\sigma}\right) = 0'1$

Tabla

$\frac{58.000-\mu}{\sigma} = 2'33 \rightarrow \boxed{2'33\sigma + \mu = 58000}$

$\frac{12.000-\mu}{\sigma} = \cancel{0'5398}\ 1'29 \rightarrow \boxed{1'29\sigma + \mu = 12000}$

Pagos

$P(X > 58000) = 0'01$

$P(X < 12000) = 0'1$

2ec Lineal

ejercicio 12:

descarte

X: " ~~Número~~ de componentes que tienen una vida útil menor a 2000h".

$X \sim \mathcal{E}(\beta = 2000)$

a) $P(1 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 1) = 1 - e^{-5/2000} - 1 + e^{-1/2000} =$

$= e^{-1/2000} - e^{-5/2000} = 0'00199700258.$

$P(X \le 2000) =$

$\downarrow$

$0'6321$

$X := $" Vida útil ... "

$X \sim \mathcal{E}(\beta = 2000)$

$P(X < 2000) = 1 - e^{-2000/2000} = 0'6321205588.$

$X \sim B(n=5, p = 0'6321)$

Y := " Número de componentes defectuosos"

$Y \sim B(n=5, p=0'6321)$

$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0'10 = 0'89$

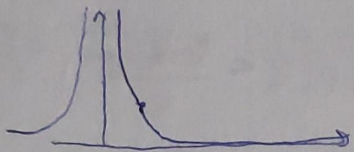
Ejercicio 13:

$X \sim \mathcal{E}(\beta)$

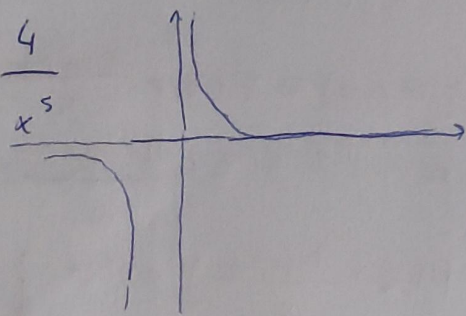
$$P(X \geq \beta) = 1 - P(X \leq \beta) = 1 - 1 + e^{-\beta/\beta} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0'3678794412.$$

Ejercicio 14:

a) $\frac{3}{x^4}$



$\frac{4}{x^5}$



Primera:

$x=1 \rightarrow 3$ $\quad$ $x=1'1 \rightarrow 2'04$

$x=2 \rightarrow 0'1875$ $\quad$ $x=1'2 \rightarrow 1'44$

$x=1'3 \rightarrow 1'05$

Elegirá la segunda dado que la proporción de piezas admisibles es mayor. (Demostrado en el apartado B, mediante P_1 y P_2)

Segunda:

$x=1 \rightarrow 4$ $\quad$ $x=1'1=2'48$

$x=2 \rightarrow 0'125$ $\quad$ $x=1'2=1'60$

$x=1'3 \rightarrow 1'07$ $\quad$ $x=1'31 \rightarrow 1'03$

b) F. Distribución 1

- $x \geq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{3}{x^4}\,dt = 3\int_{1}^{x} \frac{1}{x^4}\,dx = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big]_1^x = -\frac{1}{x^3}\Big]_1^x =$$

$$= -\frac{1}{x^3} + 1 = \boxed{1 - \frac{1}{x^3}}$$

F. Distribución 2

- $x \geq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{4}{x^5}\,dx = 4\int_{1}^{x} \frac{1}{x^5}\,dx = -\frac{1}{x^4}\Big]_1^x = \boxed{1 - \frac{1}{x^4}}$$

$$P_1(1 \leq x \leq 2) = P_1(x \leq 2) - P_1(x \leq 1) = F(2) - F(1) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^3} - 1 + \frac{1}{1^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} = 7/8 = 0'875$$

$$P_2(1 \leq x \leq 2) = \ldots = F(2) - F(1) = 1 - \frac{1}{2^4} - 1 + \frac{1}{1^4} = \frac{15}{16} = 0'9375$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0'875 + \frac{1}{2} \cdot 0'9375 = \boxed{0'90625}$$

c) $$\mu_1 = E_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4}\, dx = -\frac{3}{2x^2}\, dx \Big]_1^{\infty} =$$

$$= -\frac{3}{\infty} + \frac{3}{2} = 0 + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{2} \text{ cm}}$$

$$\mu_2 = E_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{4}{x^5}\, dx = -\frac{4}{3x^3} \Big]_1^{\infty} = \boxed{\frac{4}{3} \text{ cm}}$$

ejercicio 15:

$N(\mu = 150, \sigma = 0'4)$; intervalo de tolerancia $(149'2 ; 150'4)$

a) $\boxed{1 - P(149'2 \leq x \leq 150'4)} = 1 - 0'8185 = \boxed{0'1815}$

$$P(149'2 \leq x \leq 150'4) = P(x \leq 150'4) - P(x \leq 149'2) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{150'4 - 150}{0'4}\right) - P\left(Z \leq \frac{149'2 - 150}{0'4}\right) =$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 2) =$$

$$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 2)] = P(Z \leq 1) + P(Z \leq 2) - 1 =$$

$$= 0'8413 + 0'9772 - 1 = 0'8185$$

b) X: "Número de piezas admisibles de entre 50".

$X \sim B(n=50, p=0'8185)$

$P(X=44) = \binom{50}{44} \cdot 0'8185^{44} \cdot 0'1815^{6} = 0'08457168676$

$X \sim B(n=50, p=0'8185) \cong N(\mu = 40'925, \sigma = 2'725415106)$

$P(X=44) = P(43'5 \leq X \leq 44'5) = P(X \leq 44'5) - P(X \leq 43'5) =$

$P\left(Z \leq \frac{44'5 - 40'925}{2'73}\right) - P\left(Z \leq \frac{43'5 - 40'925}{2'73}\right) =$

$= P(Z \leq 1'311726787) - P(Z \leq 0'9448102032) =$

$0'9049 - 0'8264 = 0'0785$

43 → es BINOMIAL (DISCRETA)

c) $P(X \geq 44) = 1 - P(X \leq 44) = 1 - P\left(Z \leq \frac{44'5 - 40'925}{2'73}\right) =$

$= 1 - P(Z \leq 1'3095238) = 1 - 0'9049 = 0'0951$

$1 - P(X \leq 43) = 1 - P\left(Z \leq \frac{43'5 - 40'925}{2'73}\right) = 1 - P(Z \leq 0'9432234) =$

$= 1 - 0'8264 = 0'1736$

ejercicio 16:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 & x \in (2,4) \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a)

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x}{2} - 1 \geq 0 \begin{cases} x=2: & 1-1=0 \ ✓ \\ x=4: & 2-1=1 \ ✓ \end{cases}$$

ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 = \cancel{\int_{-\infty}^{2} 0\,dx} + \int_{2}^{4} \left(\frac{x}{2}-1\right) dx + \cancel{\int_{4}^{\infty} 0\,dx} =$$

$$\left.\frac{x^2}{4} - x \right]_2^4 = \frac{16}{4} - 4 - 1 + 2 = \boxed{1}$$

b)

- $2 \leq x \leq 4$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{2}^{x} \left(\frac{x}{2}-1\right) dx = \left.\frac{x^2}{4} - x \right]_2^x = \frac{x^2}{4} - x - 1 + 2 =$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{4} - x + 1} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4} - x + 1 & 2 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

c) $$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \left.\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{4^3}{6} - \frac{4^2}{2} - \frac{2^3}{6} + 2 = 10/3 = 3'33$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \int_{2}^{4} \left(\frac{x^3}{2} - x^2\right) dx = \left.\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 - \frac{10^2}{3^2} =$$

$$= \frac{4^4}{8} - \frac{4^3}{3} - \frac{2^4}{8} + \frac{2^3}{3} - \frac{10^2}{3^2} = 2/9$$

$$\sigma = \sqrt{2/9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

d) $\boxed{P(x \leq \frac{5}{2})} = F(5/2) = F(2'5) = \frac{1}{16} = 0'0625$

$\boxed{P(x > 5/2)} = 1 - P(x \leq 5/2) = 1 - 0'0625 = \frac{15}{16}$

$\parallel$

$P(x \geq 5/2)$

$\boxed{P(x = 5/2)} = P(5/2 \leq x \leq 5/2) = 0$

ejercicio 17:

X: = "Número de preguntas acertadas de entre 40"

$X \sim B(n=40, p=1/2) \approx N(\mu = 20, \sigma = \sqrt{10})$

$n \cdot p \geq 5 \quad 40 \cdot 1/2 = 20$ ✓

$n \cdot q \geq 5 \quad 40 \cdot 1/2 = 20$ ✓

$P(x>24) = P(X \geq 24'5) = 1 - P(X \leq 24'5) = 1 - P(Z \leq \frac{24'5 - 20}{\sqrt{10}}) =$

$= 1 - P(Z \leq \frac{9\sqrt{10}}{20}) = 1 - P(Z \leq 1'423024947)$

$= 1 - 0'9222 = \boxed{0'0778}$

ejercicio 18:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx^2}{36} & 0 \le x \le 6 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a)

i) $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $0 \le x \le 6$

$$\frac{kx^2}{36} \ge 0 \rightarrow k \ge 0$$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$= \int_{-\infty}^{0} \cancel{0} \cdot dx + \int_0^6 \frac{kx^2}{36}\,dx + \int_6^{\infty} \cancel{0} \cdot dx = \left.\frac{kx^3}{108}\right]_0^6 =$$

$$= \boxed{k \cdot 2 = 1} \rightarrow \boxed{k = 1/2}$$

b) $\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^6 \frac{x^3}{72}\,dx = \left.\frac{x^4}{288}\right]_0^6 = \frac{6^4}{288} = 9/2$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \int_0^6 \frac{x^4}{72}\,dx - \mu^2 = \left.\frac{x^5}{360}\right]_0^6 - (9/2)^2 =$$

$$= \frac{108}{5} - \frac{81}{4} = \frac{27}{20} = 1'35.$$

$$\sigma = \sqrt{1'35} = \frac{3\sqrt{15}}{10} = 1'161895004$$

c) $0 \le x \le 6$

$$F(x) = \int_0^x \frac{x^2}{72} dx = \left. \frac{x^3}{216} \right]_0^x = \frac{x^3}{216}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{216} & 0 \le x \le 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

d) $P(|X| \le 2) = P(0 \le \cancel{x} \le 2) = F(2) - F(0) = P(X \le 2) - P(X \le 0) =$

$$= \frac{1}{27} - 0 = 1'27$$

e) $P(\underbrace{\mu - 2\sigma}_{\substack{\frac{9}{2} - 2 \cdot 1'16 \\ 2'18}} < X < \underbrace{\mu + 2\sigma}_{\substack{\frac{9}{2} + 2 \cdot 1'16 \\ 6'82}}) = P(2'18 < x \; 6'82) =$

$= P(X \le 6'82) - P(X \le 2'18) = F(6'82) - F(2'18) =$

$= 1 - 0'04796403704 = \boxed{0'952035963}$

ejercicio 19:

$X \sim \mathcal{E}(\beta)$

$P(X > 8) = 0'2 = 1 - P(X \le 8) = 1 - F(8) = \boxed{1 - 1 + e^{-8/\beta} = 0'2}$

$e^{-8/\beta} = 0'2 \rightarrow \ln e^{-8/\beta} = \ln 0'2 \rightarrow \frac{-8}{\beta} = \ln(0'2) \rightarrow \beta = \frac{-8}{\ln(0'2)} =$

$= 4'970679476.$

$\mu = E(X) = \beta = \boxed{4'97}$

$\sigma^2 = Var(X) = \beta^2 = \boxed{24'70}$

ejercicio 20:

$X :=$ "Tiempo de vida de un aparato electrónico".

$X \sim \mathcal{E}(\beta = 10)$

$$P(X \geq 12+t \mid X \geq t) = \frac{P[(X \geq 12+t) \cap (X \geq t)]}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq 12+t)}{P(X \geq T)} =$$

$$= \frac{1 - P(X \leq 12+t)}{1 - P(X \leq t)} =$$

* Propiedad falta de memoria: ... $= P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 12) =$

$$= 1 - 1 + e^{-12/10} = e^{-12/10} = \boxed{0'301194211 9}$$

ejercicio 21:

$X :=$ "Número de probetas defectuosas de entre 100".

$P(X \geq 3)$

$\approx \wp(\lambda = 1)$

$B(n = 100, p = 0'01)$

$n \cdot p > 5$ x

Aproximar a una de Poisson $\rightarrow p < 0'1$ ✓

$n \cdot p \leq 5$ ✓

Variable Discreta

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$$

$$= 1 - \left[e^{-1} \cdot \left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!}\right)\right] = 1 - 0'9196986029 = 0'0803013970 7$$

Ejercicio 22:

$$f(x) = \begin{cases} m(x^2+x+1) & x \in (0,1) \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $x \in (0,1) \rightarrow m(x^2+x+1) \geq 0 \rightarrow m \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx} + \int_0^1 (mx^2+mx+m)\,dx + \cancel{\int_1^{\infty} 0\,dx} = \left.\frac{mx^3}{3} + \frac{mx^2}{2} + mx\right]_0^1 =$$

$$= \boxed{\frac{m}{3} + \frac{m}{2} + m = 1} \rightarrow 2m+3m+6m = 6$$

$$11m = 6 \rightarrow \boxed{m = 6/11}$$

b) $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 (mx^3 + mx^2 + mx)\,dx = \left.\frac{mx^4}{4} + \frac{mx^3}{3} + \frac{mx^2}{2}\right]_0^1 =$

$$= 324m + 72m + 18m \overset{m=6/11}{=} \frac{2484}{11} \quad 13/22$$

c) $P(X < 0'01) = P(X \leq 0'01) = F(0'01) = 0'005482$

- $x \in (0,1)$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{6}{11}\int_0^x (x^2+x+1)\,dx = \left.\frac{6}{11}\cdot\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\right]_0^x = \frac{6}{11}\cdot\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)$$

ejercicio 23:

X := "Diámetro de un tipo de cable eléctrico"

$$X \sim N(\mu = 0'8 \; ; \; \sigma = \sqrt{0'0004} = 0'02)$$

a) $P(X > 0'81) = 1 - P(X \le 0'81) = 1 - P\left(Z \le \frac{0'81 - 0'8}{0'02}\right) =$

$= 1 - P(Z \le 0'5) = 1 - 0'6915 = \boxed{0'3085}$

b) $P(X < 0'775) + P(X > 0'825) =$

$P\left(Z \le \frac{0'775 - 0'8}{0'02}\right) + P\left(Z \ge \frac{0'825 - 0'8}{0'02}\right) = P(Z \le -1'25) + P(Z \ge 1'25) =$

$= P(Z \ge 1'25) + P(Z \ge 1'25) = 2P(Z \ge 1'25) = 2[1 - P(Z \le 1'25)] =$

$= 2(1 - 0'8944) = \boxed{0'2112}$

ejercicio 24:

X = "número de plazas que se ocupan ..."

~~10~~ 12 = 89 % probabilidad se ocupará

$B(495, p = 0'89)$

$P(X \ge 450)$

ejercicio 25:

$$Z \sim N(0,1)$$

$$P(-z_0 < X < z_0) = 0'966$$

$$P(X \leq z_0) - P(X \leq -z_0) = P(X \leq z_0) - P(X \geq z_0) =$$

$$= P(X \leq z_0) - [1 - P(X \leq z_0)] = \boxed{2P(X \leq z_0) - 1 = 0'966}$$

$$P(X \leq z_0) = \frac{0'966+1}{2} = \frac{1'966}{2} = 0'983$$

$$P(X \leq z_0) = 0'983 \rightarrow \boxed{z_0 = 2'12}$$ Mediante la tabla.

ii) qnorm (0'983, 0, 1) = 2'120072

ejercicio 26:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ c \cdot e^{-cx} & x > 0 \end{cases} \qquad \mathcal{E}(\beta) \; ; \; \mu = E(X) = \beta = 1000$$

Función de DENSIDAD:

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad c \cdot e^{-cx} \geq 0 \rightarrow \boxed{c \geq 0}$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int \ldots + \boxed{\int_0^{\infty} c \cdot e^{-cx}\,dx = 1} \qquad c \cdot \int_0^{\infty} e^{-cx}\,dx$ = SUSTITUCIÓN

$$\left.\begin{array}{l} u = -cx \\ du = -c\,dx \end{array}\right\} -\frac{1}{c}\int_0^{\infty} e^u\,du = -\frac{1}{c} \cdot \frac{e^u}{\ln(e)} = -\frac{e^u}{c} = -\frac{e^{-cx}}{c} \rightarrow$$

$$\rightarrow c \cdot \left(-\frac{e^{-cx}}{c}\right) = -e^{-cx}\Big]_0^{\infty} = -\frac{1}{e^{\infty}} + \frac{1}{e^0} = 1$$

Esperanza matemática: $\mu = E(X) = \beta = 1000$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \beta = 1000$$

POR PARTES

$$= \int_0^{\infty} c x e^{-cx}\, dx = c \int x e^{-cx}\, dx = \quad u = x \; ; \; dv = e^{-cx} dx \quad du = 1 \; ; \; v = \int e^{-cx} dx = -\frac{e^{-cx}}{c}$$

SUSTITUCIÓN

$$= -\frac{x e^{-cx}}{c} - \int -\frac{e^{-cx}}{c}\, dx = \quad u = -cx \quad du = -c\,dx \quad = +\frac{1}{c}\int -\frac{e^{u}}{c}\, du =$$

SUSTITUCIÓN

$$= -\frac{1}{c^2}\int e^{u}\, du = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{e^u}{\ln(e)} = -\frac{e^u}{c^2}$$

$$= \text{TOTAL} = -xe^{-cx} - \frac{e^{-cx}}{c}\Big]_0^{\infty} = 0 - \left(0 - \frac{1}{c}\right) = \boxed{\frac{1}{c} = 1000} \leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{1000}}$$

$$\boxed{\sigma^2 = Var(X) = \beta^2 = (1000)^2 \text{ horas}^2.}$$

ejercicio 27:

$\mathcal{E}(\beta)$; $\mu = E(X) = \beta$; $\sigma^2 = Var(X) = \beta^2$

$P(X \geq \beta)$ y $P(X \leq 2\beta)$

$$P(\beta \leq X \leq 2\beta) = P(X \leq 2\beta) - P(X \leq \beta) = 1 - e^{-2\beta/\beta} - 1 + e^{-\beta/\beta} =$$

$$= e^{-1} - e^{-2} = \boxed{0'2325441579}$$

ejercicio 28:

X := "Número de aviones que aterriza en un aeropuerto cada 20 min".

$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 100) \cong N(\mu = 100, \sigma = 10)$

$\lambda > 18$ ✓

$$P(80 \leq X \leq 120) = P(80'5 \leq X \leq 119'5) = P(X \leq 119'5) - P(X \leq 80'5) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{119'5 - 100}{10}\right) - P\left(Z \leq \frac{80'5 - 100}{10}\right) = P(Z \leq 1'95) - P(Z \leq -1'95) =$$

$$= P(Z \leq 1'95) - P(Z \geq 1'95) = P(Z \leq 1'95) - [1 - P(Z \leq 1'95)] =$$

$$= 2P(Z \leq 1'95) - 1 = 2 \cdot 0'9744 - 1 = \boxed{0'9488}$$

$P(79'5 \leq X \leq 120'5) = 0'9596$.

ejercicio 29:

X := "Número de empleados contratados anualmente por una empresa".

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} x e^{-x/4} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a) i) $f(x) \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{k^2} x e^{-x/4} \geq 0$ Ninguna restricción

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{k^2}\int_0^{\infty} x e^{-x/4}\,dx =$ POR PARTES $u = x$; $dv = e^{-x/4}dx$; $du = dx$; $v = -4e^{-x/4}$ SUSTITUCIÓN

$= -4xe^{-x/4} - \int -4e^{-x/4}\,dx = -4xe^{-x/4} - 16e^{-x/4} =$

$$= \boxed{\frac{1}{k^2}\cdot 4e^{-x/4}(-x-4)\Big]_0^{\infty}} = \boxed{\frac{-4(-4)}{k^2} = \frac{16}{k^2} = 1} \rightarrow \boxed{k^2 = 16}$$

$$\boxed{P(X \leq 12) = F(12) = 0'8008517265}$$

- $x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{k^2} x e^{-x/4}\,dx = \frac{4e^{-x/4}\cdot(-x-4)}{k^2}\Big]_0^x =$$

$$= \frac{4e^{-x/4}\cdot(-x-4)}{k^2} - \frac{4\cdot(-4)}{k^2} = \frac{4e^{-x/4}\cdot(-x-4)}{k^2} + \frac{16}{k^2}$$

b) $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{k^2}x^2 e^{-x/4}\,dx = \ldots$ $\boxed{\text{8 trabajadores.}}$

ejercicio 31:

X := "Número de motores de inyección de entre 200 escogidos"

$X \sim B(n=200,\ p=1/6)$ $\quad n\cdot p \geq 5 \quad \frac{200}{6} = 33'\overline{3}$; $n\cdot q = \frac{200}{6}\cdot 5 = 166'66$

$\cong N(\mu = 100/3\ ,\ \sigma = \frac{5\sqrt{10}}{3} \simeq 5'2704)$

a) $P(25 \leq x \leq 35) =$

$= P(25'5 \leq x \leq 34'5) = P(x \leq 34'5) - P(x \leq 25'5) =$

$= P\left(Z \leq \frac{34'5 - 100/3}{\frac{5\sqrt{10}}{3}}\right) - P\left(Z \leq \frac{25'5 - 100/3}{\frac{5\sqrt{10}}{3}}\right) =$

$= P(Z \leq 0'2213594362) - P(Z \leq -1'4862705) =$

$= P(Z \leq 0'22) - P(Z \geq 1'49) = P(Z \leq 0'22) - 1 + P(Z \leq 1'49) =$

$= 0'5871 + 0'9319 - 1 = 0'519$

$P(24'5 \leq x \leq 35'5) = 0'61 \ldots$

b) $\mu = E(X) = n\cdot p = \frac{200}{6} = 33'\overline{3}$ motores de inyección.

ejercicio 32:

$N(\mu = 60\ ;\ \sigma = ?)$

$P(X \leq 40'8) = 0'209$

$P\left(Z \leq \frac{40'8 - 60}{\sigma}\right) = 0'209 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{-19'2}{\sigma}\right) = 0'209$

$P\left(Z \geq \frac{19'2}{\sigma}\right) = 0'209 \rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{19'2}{\sigma}\right) = 0'209$

$P\left(Z \leq \frac{19'2}{\sigma}\right) = 1 - 0'209 = \boxed{0'791}$ Tabla $\rightarrow$ $0'81 = Z$

$\frac{19'2}{\sigma} = 0'81 \rightarrow \sigma = 23'\overline{703}$

ejercicio 30:

$X \equiv$ "Núm medidas válidas"

$X \sim B(120, 0'91)$

$P(X \geq 85\% \text{ de } 120$

$\geq 102 = P(X \geq 103)$