Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

TEMA 3. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Variable aleatoria

Sea E un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral, Se define una variable aleatoria como una función definida sobre el espacio muestral que asigna un número real a cada uno de los resultados posibles de dicho espacio muestral.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Y los valores de X están sujetos a las leyes del azar subyacente al experimento aleatorio. De este modo, si $x \in \mathbb{R}$:

$$P(X \leq x) = P(\omega : X(\omega) \leq x)$$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

ejemplo: Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar tres veces una moneda y observar el número de cruces obtenidas.

$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$

C = cara
X = cruz

La variable aleatoria X se podría definir del siguiente modo: "Número de cruces logradas en tres lanzamientos de la moneda".

Esta función de Ω en $\mathbb{R}$ hace corresponder a cada elemento de Ω un número real,

$X : \Omega \to \mathbb{R}$	$X : \Omega \to \mathbb{R}$
$(C, C, C) \to 0$	$(C, X, X) \to 2$
$(C, C, X) \to 1$	$(X, C, X) \to 2$
$(C, X, C) \to 1$	$(X, X, C) \to 2$
$(X, C, C) \to 1$	$(X, X, X) \to 3$

Los conjuntos formados por los elementos de Ω que tienen la misma imagen son:

$$A_0 = \{c, c, c\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\}$$

$$A_1 = \{(c, c, x), (c, x, c), (x, c, c)\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\}$$

$$A_2 = \{(c, x, x), (x, c, x), (x, x, c)\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\}$$

$$A_3 = \{x, x, x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 3\}$$

Probabilidad de los sucesos asociada a cada uno de los valores de X:

$$P(X=0) = \frac{1}{8} \; ; \; P(X=1) = \frac{3}{8} \; ; \; P(X=2) = \frac{3}{8} \; ; \; P(X=3) = \frac{1}{8}$$

Conjunto de los valores que puede tomar una variable aleatoria X es un conjunto finito: $G = \{0, 1, 2, 3\}$

<u>Variable aleatoria discreta:</u> diremos que X es una variable aleatoria discreta si toma un número finito o infinito numerable de valores. En otras palabras, si se puede contar.

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

Función de PROBABILIDAD

Sea X una variable aleatoria discreta definida sobre el espacio muestral Ω y $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ el conjunto de valores finitos de dicha variable aleatoria.

Se denomina FUNCIÓN DE PROBABILIDAD de la variable aleatoria X a una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow p(x) = P(X = x)$$

Es decir, la función de probabilidad asigna a cada valor x de X su probabilidad.

→ PROPIEDADES:

i) $p(x_i) = P(X = x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$

ii) Si $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es el conjunto de valores de la variable aleatoria X, se verifica $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

ejemplo: lanzar una moneda 3 veces ...

X: "Número de cruces"

$C = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(0) = P(X=0) = 1/8$

$P(1) = P(X=1) = 3/8$

$P(2) = P(X=2) = 3/8$

$P(3) = P(X=3) = 1/8$

x	$p(x) = P(X=x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

$$p(x) = \begin{cases} 3/8 & x = 1, 2 \\ 1/8 & x = 0, 3 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

Función de DISTRIBUCIÓN

Sea X una variable aleatoria discreta definida sobre el espacio muestral Ω, $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ el conjunto de valores finitos de dicha variable aleatoria y $p(x)$ la función de probabilidad.

Se denomina FUNCIÓN de DISTRIBUCIÓN de la variable aleatoria X a una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

También se la conoce como <u>probabilidad acumulada hasta cierto valor</u>.

→ PROPIEDADES:

i) $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $a \leq b \rightarrow F(a) \leq F(b)$ Función monótona creciente.

iii) $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} F(x+h) = F(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$ Continua por la derecha en todos los puntos.

iv) $P(X > x_i) = 1 - P(X \leq x_i) = 1 - F(x_i)$

v) $P(x_i < X \leq x_j) = P(X \leq x_j) - P(X \leq x_i) = F(x_j) - F(x_i)$

ejemplo:

$$p(x) = \begin{cases} 3/8 & x = 1, 2 \\ 1/8 & x = 0, 3 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

x	$p(x) = P(X = x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	8/8 = 1

- $x < 0$
  $F(x) = P(X \leq x) = 0$
- $0 \leq x < 1$
  $F(x) = P(X \leq x) = 1/8$
- $1 \leq x < 2$
  $F(x) = P(X \leq x) = 4/8$
- $2 \leq x < 3$
  $F(x) = P(X \leq x) = 7/8$
- $x \geq 3$
  $F(x) = P(X \leq x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ESPERANZA MATEMÁTICA

También llamada MEDIA, es el centro de gravedad de la distribución de la variable aleatoria. Es un valor teórico (y no empírico) que se espera que tome la variable.

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

ejemplo:

x	$p(x) = P(X=x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	8/8 = 1

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1'5$$

IKASLE KONTSEILUA
CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

→ PROPIEDADES:

i) Si k es una constante, $E(k) = k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

ii) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias discretas:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

iii) Si X es una variable aleatoria discreta y k una constante $k \in \mathbb{R}$: $E(k \cdot X) = k \cdot E(x)$

iv) Si $X_1, X_2, \dots X_n$ son variables aleatorias discretas y k_i constantes $k_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n$:

$$E(k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot X_2 + \dots + k_n \cdot X_n) = k_1 \cdot E(x_1) + k_2 \cdot E(x_2) + \dots + k_n \cdot E(x_n)$$

v) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias discretas e INDEPENDIENTES: $E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(x_1) \cdot E(x_2) \cdots E(x_n)$

VARIANZA y DESVIACIÓN TÍPICA

$$\sigma^2 = Var(x) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \cdot P(X=x_i)$$

$$\sigma^2 = Var(x) = E(X^2) - (E(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(X=x_i) - \mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(x)}$$

Tanto la varianza como la desviación típica son siempre positivas.

→ PROPIEDADES:

i) Si k es una constante, $Var(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

ii) Si X es una variable aleatoria discreta, $Var(X) \geq 0$

iii) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias discretas e INDEPENDIENTES:

$$Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n)$$

iv) Si X es una variable aleatoria discreta y k una constante $k \in \mathbb{R}$:

$$Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X)$$

$$\sigma_{kX} = |k| \cdot \sigma_X$$

v) Si X es una variable aleatoria discreta y k una constante $k \in \mathbb{R}$:

$$Var(X + k) = Var(X)$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejemplo 2: Sean X e Y dos variables aleatorias discretas independientes. La esperanza matemática y la varianza de X son -5 y 3, respectivamente. Por otro lado, la esperanza matemática y la varianza de la variable Y son 1 y 4, respectivamente:

i) Calcule $E(3X+5Y+2)$

$$E(3X)+E(5Y)+E(2) = 3\cdot E(X) + 5\cdot E(Y) + 2 =$$
$$= 3\cdot(-5) + 5\cdot 1 + 2 = -10+2 = -8$$

ii) Calcule $Var(3X+5Y+2)$

X e Y son independientes (enunciado); consecuentemente:

$$Var(3X)+Var(5Y)+Var(2) = 3\cdot Var(X) + 5\cdot Var(Y) + 0 =$$
$$= 3^2\cdot 3 + 5^2\cdot 4 + 0 = 27+100 = 127$$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES BIE/EIB

ejemplo 3: Sea X una variable aleatoria discreta y $C = \{0,1,2\}$ el conjunto de valores de dicha variable, identifique entre las siguientes funciones, la función de probabilidad de X:

a) $p(0)=0.36$; $p(1)=0.36$; $p(2)=0.36$

b) $p(0)=0.1$; $p(1)=0.6$; $p(2)=0.3$

c) $p(0)=0.3$; $p(1)=0.8$; $p(2)=-0.1$

Cumplir las propiedades $\begin{cases} p(x_i)\geq 0 \quad \forall x_i \\ \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \end{cases}$

a) i) $p(x_i)\geq 0 \quad \forall x_i \rightarrow$ Se cumple

ii) $\sum_{i=1}^{3} p(x_i) = 0.36+0.36+0.36 \neq 1$

b) i) $p(x_i)\geq 0 \quad \forall x_i \rightarrow$ Se cumple

ii) $\sum_{i=1}^{3} p(x_i) = 0.1+0.6+0.3 = 1$

Se verifica

c) i) $p(x_i)\geq 0$

$p(2) = -0.1$

No se cumple.

ejemplo 4: Sea la variable aleatoria discreta X y su función de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} k & x=1,3 \\ 2k & x=2 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de la constante k:

i) $p(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \rightarrow k \geq 0$

ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \rightarrow p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = \boxed{k + 2k + k = 1}$

$k = 1/4$.

b) Calcule $P(X \leq 2)$; $P(1 < x \leq 3)$; $P(1 \leq x \leq 3)$

x	$p(x) = P(X=x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
1	1/4	1/4
2	1/2	3/4
3	1/4	4/4

$P(x \leq 2) = 3/4$

$P(1 < x \leq 3) = 3/4$

$P(1 \leq x \leq 3) = 1$

c) Función de distribución, media y varianza

$\boxed{F(x)}$

- $x < 1$

  $F(x) = P(X \leq x) = 0$

- $1 \leq x < 2$

  $F(x) = P(X \leq x) = 1/4$

- $2 \leq x < 3$

  $F(x) = P(X \leq x) = 3/4$

- $x \geq 3$

  $F(x) = P(X \leq x) = 1$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x=1,3 \\ 1/2 & x=2 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1/4 & 1 \leq x < 2 \\ 3/4 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot P(x_i) - \mu^2 = \left(1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{4}\right) - 2^2 = 1/2$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

d) Calcule las probabilidades del apartado b) empleando la función de distribución.

$P(x \leq 2) = F(2) = \boxed{3/4}$

$P(1 < x \leq 3) = P(x \leq 3) - P(x \leq 1) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

$P(1 \leq x \leq 3) = P(x \leq 3) - P(x < 1) = F(3) - F(0) = 1 - 0 = \boxed{1}$

BIE/EIB
IKASLE KONTSEILUA
CONSEJO DE ESTUDIANTES

MOMENTOS

Los momentos de una variable aleatoria discreta se indican mediante el orden r y el punto de aplicación a.

Se definen como la media de la diferencia entre la variable y el punto de aplicación elevado al orden:

$$\alpha_{r,a} = E(X-a)^r$$

→ RESPECTO de la MEDIA: momento central de orden r.

$$\alpha_{r,E(x)} = \mu_r = E[(X-E(X))^r] = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^r \cdot p(x_i)$$

Se verifica:

$$\mu_0 = 1 \quad ; \quad \mu_1 = 0 \quad ; \quad \mu_2 = \sigma^2 = Var(X)$$

→ RESPECTO del ORIGEN:

$$\alpha_{r,0} = \alpha_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \cdot p(x_i)$$

Se verifica:

$$\alpha_0 = 1 \quad ; \quad \alpha_1 = \mu$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

TEOREMA / ACOTACIÓN de TCHEBYSHEV

Sea X una variable aleatoria discreta de media μ y desviación típica σ, finitos, entonces se verifica:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 1$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 1$$

Permite calcular la probabilidad mínima de que cualquier variable aleatoria X se encuentre en el intervalo $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$.

Dado que no conocemos la función de distribución, no podemos calcular la probabilidad exacta.

ejemplo 6: Sea la variable aleatoria discreta X de media 5 y varianza 0'01. Calcule la cota inferior de probabilidad de que dicha variable se halle en el intervalo (4'6, 5'4).

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

X; $\mu = 5$; $\sigma = 0'01$

$P(4'6 < x < 5'4) \rightarrow$ No conocemos la función de distribución.

↳ Aplicamos Tchebyshev:

1) Cálculo de $k \rightarrow 4'6 = \mu - k \cdot \sigma \rightarrow k = \frac{\mu - 4'6}{\sigma} = \frac{5 - 4'6}{\sqrt{0'01}} = 4$

2) La probabilidad mínima de estar en ese intervalo, es:

$$P(4'6 < x < 5'4) = 1 - \frac{1}{4^2} = \frac{15}{16}$$

PRINCIPALES DISTRIBUCIONES para V. Aleatorios Discretos

→ DISTRIBUCIÓN DISCRETA UNIFORME : $X \sim UD(n)$

Sea X una variable aleatoria discreta definida sobre Ω que tiene por conjunto de valores $\mathcal{C} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, con probabilidades:

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

n: número de elementos de la variable.

Entonces se dice que X sigue una distribución discreta uniforme, denotándose: $X \sim UD(n)$.

Función de PROBABILIDAD: $p(x) = P(X = x) = \frac{1}{n}$ si $x \in \mathcal{C}$

Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < x_i \\ \frac{k}{n} & x_k \leq x < x_{k+1} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

Esperanza matemática:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Varianza:

$$\sigma^2 = Var(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu^2$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejemplo 7: en una urna hay 15 sobres numerados del 1 al 15. Se extrae aleatoriamente un sobre de dicha urna y se define la siguiente variable aleatoria X: = "Número inscrito en el sobre extraído".

a) Defina las funciones de probabilidad y distribución de la variable aleatoria X.

$\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, 15\}$; $n = 15$

$P(1) = \frac{1}{15}$; $P(2) = \frac{1}{15}$; ... $P(x) = P(X = x) = \frac{1}{15}$ $\forall x \in \mathcal{C}$

$$X \sim UD(15)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{x}{15} & 1 \leq x < 15 \\ 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES

b) Calcule la esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria X.

BIE/EIB

$$\mu = \frac{1}{15}(1 + 2 + \dots + 15) = \frac{120}{15} = \frac{1}{15} \cdot \sum_{i=1}^{15} x_i = 8$$

$$\sigma^2 = Var(x) = \frac{1}{15} \cdot \sum_{i=1}^{15} x_i^2 - \mu^2 = 18'6667.$$

→ DISTRIBUCIÓN de BERNOULLI : $X \sim b(p)$

Sea X una variable aleatoria definida sobre Ω que tiene por conjunto de valores finito $\mathcal{C} = \{0, 1\}$ tal que $P(X=1) = p$ y por consiguiente $P(X=0) = 1-p = q$.

Entonces se dice que X sigue una distribución de Bernoulli y se escribe $X \sim b(p)$.

La variable aleatoria de Bernoulli es una variable dicotómica (2 valores) que indica si se verifica ("éxito") o no un suceso A.

'p' es la probabilidad de "éxito" y 'q' de "fracaso".

Función de PROBABILIDAD: $p(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad x \in \mathcal{C} = \{0, 1\}$

Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Esperanza matemática:

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p(x_i) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

Varianza:

$$\sigma^2 = Var(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 = 0 \cdot q + 1 \cdot p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

→ DISTRIBUCIÓN BINOMIAL : $X \sim B(n, p)$

Generalización de una distribución de Bernoulli.

$X :=$ "Número de veces que se verifica el suceso A en las n pruebas independientes".

X sigue una distribución binomial de parámetros n y p ; y se escribe $X \sim B(n,p)$

El conjunto de valores es finito: $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Función de PROBABILIDAD: $p(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x \in \mathcal{C}$

Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad x \in \mathcal{C}$$

Esperanza matemática:

$$\mu = E(x) = n \cdot p$$

Varianza:

$$\sigma^2 = Var(x) = n \cdot p \cdot q$$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES BIE/EIB

ejemplo 8: Se ha lanzado un dado en cinco ocasiones. Calcule la probabilidad de obtener un 3 en dos de dichos lanzamientos.

$X :=$ "Número de veces que se obtiene un 3 en cinco lanzamientos de un dado".

$n = 5$; $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad p = \frac{1}{6}$

la probabilidad 'p' en todos los ensayos (que son independientes) se mantiene constante.

$X \sim B(n=5, p=1/6)$

$$p(x=2) = p(2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0'1608.$$

ejemplo 9: en una urna hay tanto bolas rojas como negros. La probabilidad de que la primera bola extraída sea roja es de 0'70. Si se realizan seis extracciones en las cuales tras coger la bola se vuelve a introducir en la urna, calcule:

a) La probabilidad de que las seis bolas extraídas sean rojas.

$X :=$ "Número de bolas rojas extraídas de una urna en 6 extracciones".

$\mathcal{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$X \sim B(n=6, p=0'7)$

$p = 0'7$

$p(X=6) = \binom{6}{6} \cdot 0'7^6 \cdot 0'3^0 = 0'7^6 = 0'1176.$

b) La probabilidad de extraer al menos dos y como mucho cuatro bolas rojas:

$P(2 \leq x \leq 4) = P(X \leq 4) - P(x < 2) = F(4) - F(1)$

$= P(x=2) + P(X=3) + P(x=4) = 0'5688$

- $P(x=2) = p(2) = \binom{6}{2} \cdot 0'7^2 \cdot 0'3^4 = 0'0595$
- $P(X=3) = p(3) = \binom{6}{3} \cdot 0'7^3 \cdot 0'3^3 = 0'1852$
- $P(x=4) = p(4) = \binom{6}{4} \cdot 0'7^4 \cdot 0'3^2 = 0'3241$

c) El número de bolas rojas que se esperan extraer.

$\mu = E(x) = n \cdot p = 6 \cdot 0'7 = 4'2$ bolas rojas.

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

→ DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA : $X \sim G(p)$

Si se realizan pruebas sucesivas e independientes de Bernoulli con el mismo parámetro 'p', es decir, con $P(A) = p$, hasta que se obtenga el suceso A por primera vez, entonces la variable aleatoria $X :=$ "número de pruebas INFRUCTUOSAS necesarias hasta obtener el suceso A por primera vez" sigue una distribución geométrica o de Pascal de parámetro 'p' y se escribe $X \sim G(p)$.

El conjunto de valores de la variable aleatoria X es un conjunto infinito-numerable $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

Función de PROBABILIDAD: $p(x) = P(X = x) = q^x p \quad x \in \mathcal{C}$

Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} q^k p \quad x \in \mathcal{C}$$

Esperanza matemática:

$$\mu = E(x) = \frac{q}{p}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = Var(x) = \frac{q}{p^2}$$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES BIE/EIB

→ DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA : $X \sim BN(n,p)$

Generalización de una distribución geométrica.

$X :=$ "número de pruebas infructuosas necesarias hasta obtener el suceso A por n-ésima vez".

X sigue una distribución binomial negativa de parámetros n y p;

Se escribe $X \sim BN(n,p)$

El conjunto de valores es infinito-numerable : $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

Función de PROBABILIDAD:

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n+x-1}{x} q^x p^n \quad x \in \mathcal{C}$$

Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n+k-1}{k} q^k p^n \quad x \in \mathcal{C}$$

Esperanza matemática:

$$\mu = E(x) = \frac{n \cdot q}{p}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{n \cdot q}{p^2}$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

Ejemplo 10: La probabilidad de que los ensayos realizados con un equipo de ultrasonidos sean eficaces es del 80%.

Suponiendo que los ensayos realizados son independientes entre sí, calcule:

a) La probabilidad de que el primer ensayo eficaz sea el quinto realizado.

X := "Número de pruebas fallidas necesarias para obtener un ensayo eficaz por primera vez".

$p = 0'8$; 5 ensayo = 1er éxito → 4 pruebas infructuosas.

$X \sim G(p = 0'8)$

$P(X=4) = p(4) = 0'2^4 \cdot 0'8 = 0'00128 = 1'28 \cdot 10^{-3}$

b) La probabilidad de que haya que realizar al menos cuatro ensayos para lograr el primero eficaz.

Mínimo de ensayos infructuosos : 3

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$

$= 1 - [0'2^0 \cdot 0'8 + 0'2 \cdot 0'8 + 0'2^2 \cdot 0'8] = 0'008$

c) La probabilidad de que para lograr cinco ensayos eficaces haya que realizar doce ensayos.

Y := "Número de ensayos fallidos hasta obtener cinco ensayos eficaces".

$Y \sim BN(n=5, p=0'8)$; Solo cuentan los fallidos : Total (12) - Éxito (5) = 7

$p(Y=7) = \binom{5+7-1}{7} \cdot 0'2^7 \cdot 0'8^5 = 1'38 \cdot 10^{-3}$

d) La probabilidad de que haya que realizar al menos siete y como mucho 10 ensayos para lograr tres ensayos eficaces.

H := "Número de ensayos fallidos hasta obtener tres eficaces".

$H \sim BN(n=3, p=0'8)$ $\quad (7 \leq H \leq 10) - 3 = (4 \leq H \leq 7)$

$P(4 \leq H \leq 7) = P(H \leq 7) - P(H < 4) = P(H=4) + P(H=5) + P(H=6) + P(H=7) = 0'0169$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES BIE/EIB

→ DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA : $X \sim H(N, n, p)$

Cada prueba influye en la siguiente, por lo que no son pruebas independientes. Esto sucede debido a que no hay reemplazamiento, y en consecuencia, la probabilidad en cada ensayo no se mantiene constante.

Las pruebas se realizan sobre una población finita N y SIN REEMPLAZAMIENTO, siendo n un subconjunto de la población y p la probabilidad de éxito de un determinado suceso (A) en la PRIMERA PRUEBA.

$X :=$ "Número de elementos de A entre los n elegidos sin reemplazamiento".

$X \sim H(N, n, p)$, siendo el conjunto de valores:

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{N} \mid \max\{0, n - Nq\} \leq x \leq \min\{Np, n\}\}$$

Función de PROBABILIDAD:

$$p(X) = p(X = x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x \in \mathcal{C}$$

Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=\max\{0, n-Nq\}}^{x} \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad x \in \mathcal{C}$$

Esperanza matemática:

$$\mu = E(x) = n \cdot p$$

Varianza:

$$\sigma^2 = Var(X) = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejemplo 11: de una baraja de 40 cartas se extraen tres cartas sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de lograr al menos dos ases.

X: = "Número de ases entre 3 cartas escogidas sin reemplazamiento".

$X \sim H(40, 3, 0'1)$

$N=40$; $n=3$; $p=0'1$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] =$$

$$= P(X=2) + P(X=3) = \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{1}}{\binom{40}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{36}{0}}{\binom{40}{3}} = 0'02227$$

ejemplo 12: Las conclusiones de un informe revelan que hoy en día el 45% de las empresas realiza ventas por internet. Si se escogen al azar 12 empresas, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellas realicen ventas por internet?

X: = "Numero de empresas que realizan ventas por internet de entre 12 escogidas".

$n=12$
$p=0'45$ $\quad X \sim B(n=12, p=0'45)$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - [P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)]$$

$$\cdot\ P(X=0) = p(0) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = \binom{12}{0} \cdot 0'45^0 \cdot 0'55^{12} = 7'6222 \cdot 10^{-4}$$

...

$$= 0'6956$$

IKASLE KONTSEILUA
CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

ejemplo 13: de las 10 empresas ubicadas en una ciudad realizan ventas por internet. Si de esas 10 empresas se eligen 5 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una empresa realice ventas por internet?

Y := "Número de empresas que realizan ventas por internet entre las 5 escogidas sin reemplazamiento".

$Y \sim H(N=10,\ n=5,\ p=0'3)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

→ DISTRIBUCIÓN de POISSON: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

La variable aleatoria de Poisson representa el número de veces que se verifica un suceso en un INTERVALO CONTINUO de tiempo o de espacio.

λ: número de sucesos esperados en un intervalo determinado.

X := "Número de sucesos ocurridos en un intervalo determinado".

El conjunto de valores de X es infinito numerable: $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

Función de PROBABILIDAD: $p(x) = P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad x \in \mathcal{C}$

Función de DISTRIBUCIÓN:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad x \in \mathcal{C}$$

Esperanza matemática:

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Varianza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \lambda$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejemplo 14: una empresa consultora recibe, de media, dos quejas al día.

a) Calcule el porcentaje de días en los que la empresa no espera recibir quejas.

X: = "Número de quejas que recibe la empresa por día".

$\lambda = 2$ quejas diarias.

$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 2)$

$$P(X=0) = p(0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = 0'1353 \rightarrow 13'53\%$$

de los días no se espera recibir quejas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa reciba al menos una y como mucho cuatro quejas en un día?

$$P(1 \leq x \leq 4) = P(x=4) + P(x=3) + P(x=2) + P(x=1) =$$

$$= e^{-2}\left(\frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) = 0'8120$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa reciba como mucho cinco quejas en dos días? Intervalos de 2 días:

Y: = "Número de quejas que recibe la empresa cada 2 días".

$\lambda_Y = 2\lambda = 4$; $Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 4)$

$E(2X) = 2 \cdot E(X) = E(Y) = 2 \cdot \lambda = 2 \cdot 2 = 4$

$Var(2X) = 2^2 \cdot Var(X) = 4 \cdot \lambda = 8 = Var(Y)$

$$P(Y \leq 5) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5) =$$

$$= e^{-4}\left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right) = 0'7851$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa reciba más de seis quejas en 3 días?

H: = "Número de quejas cada 3 días". $\lambda_H = 3 \cdot \lambda = 6$ $H \sim \mathcal{P}(\lambda_H = 6)$

$P(H > 6) = 1 - P(H \leq 6) = 1 - [\ldots] = 0'3937$

IKASLE KONTSEILUA KONSEJU DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

CONVERGENCIA entre DISTRIBUCIONES

→ Aproximación de una distribución BINOMIAL por una de POISSON:

Si $X \sim B(n,p)$ y n tiende a infinito a la vez que p tiende a cero, entonces X puede aproximarse a la de Poisson.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim B(n,p) \\ n \to \infty \\ p \to 0 \end{array}\right\} B(n,p) \cong \mathcal{P}(np)$$

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \cong \frac{e^{-(np)} (np)^x}{x!}$$

En la práctica, cuando $\boxed{\begin{array}{l} p \leq 0'1 \\ n \cdot p \leq 5 \end{array}}$

→ Aproximación de una distribución HIPERGEOMÉTRICA por una BINOMIAL:

Si $X \sim H(N,n,p)$ y N tiende a infinito a la vez que n se mantiene constante o no aumenta en la misma proporción, entonces X puede aproximarse a la binomial.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim H(N,n,p) \\ N \to \infty \\ N >> n \end{array}\right\} H(N,n,p) \cong B(n,p)$$

$$p(x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \cong \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

En la práctica, cuando $N > 10 \cdot n$.

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejemplo 15: en un conjunto de tornillos la probabilidad de que uno de ellos sea defectuoso es de 0'01. Calcule la probabilidad de que al realizar el control de calidad de una muestra de 100 tornillos, en el que se examina un tornillo y se vuelve a introducir a la muestra, se encuentren dos defectuosos.

X := "Número de tornillos defectuosos en una muestra de 100 elementos."

$p = 0'01$ | $0'01 \leq 0'1$ ✓

$n = 100$ | $np = 100 \cdot 0'01 = 1 \rightarrow 1 \leq 5$ ✓

$\Rightarrow X \sim B(N=100, p=0'01) \cong \mathcal{P}(\lambda=1)$

$\mathcal{P}(\lambda = np = 1)$

$$P(X=2) = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = 0'1839$$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES BIE/EIB

ejemplo 16: en una urna hay 950 bolas blancas y 50 negras. Se extraen 3 bolas sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de no extraer ninguna bola negra.

X := "Número de bolas negras extraídas de entre 3".

$X \sim H(N=1000, n=3, p=0'05) \cong B(3, 0'05)$

$$p = \frac{50}{1000} = \frac{5}{100} = 0'05$$

$\boxed{N > 10 \cdot n} \rightarrow \boxed{1000 > 10 \cdot 3}$ SI

$$P(X=0) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \cong \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{3}{0} \cdot 0'05^0 \cdot (0'95)^3 =$$

$$= 0'8574$$

ejercicio 4

$$p(x) = P(X=x) = \begin{cases} 0'08 & x=2,4 \\ 0'84 & x=3 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

a) $E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = 2 \cdot 0'08 + 3 \cdot 0'84 + 4 \cdot 0'08$

$= 3$

i) $\sigma^2 = Var(X) = E[(x-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$

ii) $\sigma^2 = Var(X) = E(x^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2$

$= (2^2 \cdot 0'08 + 3^2 \cdot 0'84 + 4^2 \cdot 0'08) - 3^2 = \frac{4}{25} = 0'16$

$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{0'16} = \frac{2}{5} = 0'4$

b) $P(2 < x < 4) = P(X=3) = 0'84$

c) Acotación de TCHEBYSHEV:

$P(\mu - \overset{k}{2'5}\sigma ; \mu + \overset{k}{2'5}\sigma) = P(3 - 2'5 \cdot 0'4 ; 3 + 2'5 \cdot 0'4) =$

$= P(2 < x < 4) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$1 - \frac{1}{2'5^2} = 0'84$

d) En este caso, la cota inferior calculada mediante Tchebyshev coincide con la del apartado anterior (calculada mediante la función de probabilidad) $\rightarrow$ no se puede mejorar.

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejercicio 7:

a) X:= "Número de bolas rojas extraídas, con reemplazamiento, en las 60 extracciones realizadas

$\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots, 60\}$

$p = \frac{1}{8}$ (1 roja y 7 blancas)

$X \sim B(n=60, p=1/8)$

$P(X=3) = p(3) = \binom{n=60}{x=3} \cdot \left(p=\frac{1}{8}\right)^{x=3} \cdot \left(q=\frac{7}{8}\right)^{n-x=57} = 0'03307265546$

b) Y:= "Número de bolas rojas extraídas, cada 60 extracciones.

$Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ λ? → de media obtendremos $60 \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{2} = 7'5$ bolas rojas

$Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 7'5)$

$P(Y=3) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-7'5} \cdot \frac{7'5^3}{3!} = 0'03788874478$

IKASLE KONTSEILUA
CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

ejercicio 8:

a) X:= "Número de llamadas recibidas por minuto".

$\lambda = 2'6$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 2'6)$

$P(X>3) = P(X \geq 4) = 1 - P(X<4) = 1 - P(X \leq 3) =$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] =$

$= 1 - \left[e^{-2'6} \cdot \left(\frac{2'6^0}{0!} + \frac{2'6}{1!} + \frac{2'6^2}{2!} + \frac{2'6^3}{3!}\right)\right] = 0'2639983556$

b) $P(X \geq k) = 0'1 = 1 - \underbrace{P(X \leq k)}_{=0'9}$

$P(X \leq k) = 0'9 = e^{-2'6} \cdot \left(1 + \frac{2'6^1}{1!} + \frac{2'6^2}{2!} + \dots\right) = 0'9$

$\left(1 + \frac{2'6}{1!} + \frac{2'6^2}{2!} + \dots\right) = \frac{0'9}{e^{-2'6}} = 12'1174$ → Buscar el primer valor que supere 12'1174, de X.

$x=4 \rightarrow 11'8134$

$x=5 \rightarrow \boxed{12'8033} \rightarrow \boxed{x=5}$

ejercicio 9 :

TCHEBYSHEV: $P(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma)$; $P(|X-\mu| < k\sigma$

$\mu = E(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p(x_i) = 0'8 \cdot 300 = 240$ bombillas de media.

$\sigma^2 = Var(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 = X$

necesitaremos la primera definición de varianza: $\sum_{i=0}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$

$\sigma^2 = (300-240)^2 \cdot 0'8 = 2880$

$\sigma = \sqrt{2880} = 24\sqrt{5} = 53'66563146$

Definir la variable → ~~Norm~~ Binomial recalcular la $Var(x)$.

$(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma) = (226 < x < 254)$

$240 - 24\sqrt{5}\,k = 226 \rightarrow k = \frac{7\sqrt{5}}{60} \not> 1$ no se verifica.

$240 + 24\sqrt{5} \cdot \frac{7\sqrt{5}}{60} = 254$ ✓ Se verifica.

$X :=$ "Número de bombillas de una marca concreta".

de gran calidad

de entre 300.

$X \sim B(n=300, p=0'8)$

$\mu = E(x) = n \cdot p = 240$

$Var(X) = n \cdot p \cdot q = 300 \cdot 0'8 \cdot 0'2 = 48 \rightarrow \sigma = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$P(240 - 4\sqrt{3}\,k < x < 240 + 4\sqrt{3}\,k) = P(226 < x < 254)$

$240 - 4\sqrt{3}\,k = 226 \rightarrow k = \frac{7\sqrt{3}}{6} \simeq 2'02 > 1$ ✓

$P(226 < x < 254) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{49 \cdot 3} \cdot 36 = \frac{37}{49} = 0'\overline{755102}\ldots$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejercicio 10:

$X :=$ " Suma de los valores obtenidos en el lanzamiento de los dos dados".

$\mathcal{C} = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$

2 < 1+1, ~~1+1~~

3 < 1+2, 2+1

4 < 1+3, ~~3+1~~, 2+2, ~~2+2~~

5 < 1+4, ~~4+1~~, ~~2+3~~, 3+2

6 < 1+5, ~~5+1~~, 2+4, ~~4+2~~, 3+3, ~~3+3~~

7 < 1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3

2 ; 3 → 2

4 ; 5 → 4

6 ; 7 → 6

8 ; 9 → 8

10 ; 11 → 10

12 → 12

72

$$E(X) = \mu = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} +$$

$$+ 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} =$$

$$= 7 \rightarrow \boxed{\mu = 7}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + 5^2 \cdot \frac{4}{36} + \dots + - 7^2$$

$$= \frac{35}{6} = 5'8\overline{3}$$

IKASLE KONTSEILUA
CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

* Sacar un 1+1 ó un 1+1 es lo mismo.

Sacar un 1+2 ó un 2+1 no es lo mismo.

ejercicio 11:

X: = "Número de personas que desarrollan alergia frente a un sérum de entre 10 escogidas/tratadas".

$X \sim B(n=10, p=0'01)$

a) $P(X<2) = P(X=0) + P(X=1)$

- $P(X=0) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \binom{10}{0} \cdot 0'01^0 \cdot 0'99^{10} = 0'90438207 5$
- $P(X=1) = \binom{10}{1} \cdot 0'01^1 \cdot 0'99^9 = 0'09135172475$

$= 0'9957337998$

Si se hace mediante una aproximación a Poisson:

$p \leq 0'1 \rightarrow 0'01 \leq 0'1$
$n \cdot p \leq 5 \rightarrow 0'1 \leq 5$ ✓

$X \sim B(n=10, p=0'01) \cong \mathcal{P}(\lambda = 0'1)$

$\lambda = n \cdot p = 10 \cdot 0'01 = 0'1$

$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-0'1} \cdot \left(\frac{0'1^0}{0!} + \frac{0'1}{1!} \right) = 0'9953211598$

b) $P(X>8) = P(X=9) + P(X=10)$

- $P(X=9) = \binom{10}{9} \cdot 0'01^9 \cdot 0'99 = 9'9 \cdot 10^{-18}$
- $P(X=10) = \binom{10}{10} \cdot 0'01^{10} \cdot 0'99^0 = 1 \cdot 10^{-20}$

$= 9'91 \cdot 10^{-18} \simeq 0$

ejercicio 12:

$C = \{500, 200\}$

$p(X=500) = 0'001$

$p(X=200) = 0'003$

$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p(x_i) = 500 \cdot 0'001 + 200 \cdot 0'003 =$

$= 1'1$ €

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejercicio 13:

X := "Número de tornillos defectuosos entre los 10 escogidos por bolsa"

$X \sim B(n=10, p=0'05)$

$P(X<2) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{10}{0} \cdot 0'05^0 \cdot 0'95^{10} +$

$= \boxed{0'9139}$

$X \sim B(n=100; p=0'9139)$

$P(X \leq 100) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{100}{0} \cdot 0'9139^0 \cdot (0'0865)^{100} +$

$\binom{100}{1} \cdot 0'9139^1 \cdot (0'0865)^{99} = 0 + 0 = 0$

La probabilidad es muy baja, casi 0.

X := "Numero de bolsas con menos de dos tornillos defectuosos".

$P(X=100) = \binom{100}{100} \cdot 0'9139^{100} \cdot (0'0865)^0 = 0'00012298941$

IKASLE KONTSEILUA
CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

ejercicio 15:

X:= "Número de automóviles que llega a un cruce en un determinado intervalo de tiempo". → (cada minuto)

$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 1)$

a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$

$= e^{-1} \cdot \left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} \right) = 1 - 0'9196986029$

$= 0'08030139707$

b) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] =$

$= e^{-1} \cdot \left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} \right) = 1 - [\ ] = 0'01898815688$

No se puede asegura, pero la probabilidad es muy baja.

ejercicio 16:

X:= "Número de ratones que girará a la izquierda"

Y:= "Número de ratones que girará a la derecha".

$X \sim B(n=10, p=1/2) \qquad Y \sim B(n=10, p=1/2)$

$P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} \cdot (1/2)^9 \cdot (1/2)^1 + \binom{10}{10} \cdot (1/2)^{10} \cdot (1/2)^0 =$

$= \cancel{10 \cdot}\ 0'009765625 + \frac{1}{1024} = \frac{11}{1024}$

$5/512$

$P(Y \geq 9) = P(Y=9) + P(Y=10) = \frac{11}{1024}$

TOTAL $= P(X \geq 9) + P(Y \geq 9) = \frac{22}{1024} = \frac{11}{512} = 0'021484375.$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejercicio 17:

X := " Ganancia de la casa de seguros "

$p = 0'01$.

$\cancel{X \sim B(n = 5.000.000,\ p = 0'01)}$

$\mathcal{C} = \{0, 1\}$

no hay si hay accidente.

$\mathcal{C} = \{10.000, -5.000.000\ €\}$

$E(x) = \mu = n \cdot p = 5.000.000 \cdot 0'01 = 5000\ €$ ✗

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{2} 10.000 \cdot \cancel{0'99}\ 1 - 5.10^6 \cdot 0'001 = 5.000\ €$

ejercicio 18:

a) X := "Número de alarmas defectuosas de entre 3 elegidas, sin reemplazamiento.

$X \sim H(N = 200,\ n = 3,\ p = 6/200 = \frac{3}{100})$

$P(X=1) = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{194}{2}}{\binom{200}{3}} = 0'0855230699$.

Se puede aproximar por una BINOMIAL

$N > 10 \cdot n$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

b) Y := "Número de alarmas defectuosas de entre 3 elegidas".

$X \sim B(n = 3,\ p = 3/100)$

$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{3}{100}\right)^1 \cdot \left(\frac{97}{100}\right)^2 = 0'084681$.

ejercicio 19:

$X :=$ "Número de niños nacidos hasta la primera niña".

$X \sim G(1/2)$

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] = 1 - \left[\frac{1}{2^0}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\right] =$$

$$= 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} = 0'1250.$$

ejercicio 20:

$X :=$ "Número de averías semanales de un ordenador".

$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 0'4)$

$Y :=$ "Número de averías cada dos semanas de un ordenador".

$\lambda_Y = 2 \cdot \lambda_X = 2 \cdot 0'4 = 0'8$

$Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 0'8)$

$$P(X=0) = e^{-0'8} \cdot \frac{0'8^0}{0!} = \frac{1}{e^{0'8}} = 0'4493289641.$$

ejercicio 21: Repartir → Combinaciones.

$X :=$ "gramos de peso de la primera urna".

Posibilidades de reparto: $\binom{n+s-1}{s-1} = \binom{\overset{4}{8}+\overset{5}{4}-1}{5-1} = \binom{8}{5} = 56$

$CR_{4,5} = \binom{8}{5} = 56$

Posibilidades de 0 bolas en la primera: $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

$P(X=0) = 21/56$

$CR_{4,5} = \binom{8}{5} = 56$

$\Omega = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$

0 gr → $CR_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$

3 gr → $CR_{3,4} = \binom{6}{4} = 15$

6 gr → $CR_{3,3} = \binom{5}{3} = 10$

9 gr → $CR_{3,2} = \binom{4}{2} = 6$

12 gr → $CR_{3,1} = \binom{3}{1} = 3$

15 gr → $CR_{3,0} = \binom{3}{0} = 1$

x	$p(x) = P(X=x)$
0	21/56
3	15/56
6	10/56
9	6/56
12	3/56
15	1/56

$CR_{4,5} = \binom{8}{5} = 56$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejercicio 22:

X := "Número de lanzamientos hasta obtener de nuevo el resultado del primer lanzamiento.

a) $\mathcal{C} = \{ 2, 3, 4, \dots, n, \dots \}$

$p = \frac{1}{6}$

$q = \frac{5}{6}$

b) $p(x) = P(X = x) =$

$p(\text{éxito}) = \frac{1}{6}$

$x = 2, 3, 4, \dots$

$p(2) = \frac{1}{6}$

$p(3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$p(4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$p(x) = q^{x-2} \cdot p$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES BIE/EIB

ejercicio 23:

B: blanca
N: negra.

a) $\mathcal{E} = \{B, NB, NNB, NNNB\}$

b) N: "Número de bolas extraídas en el experimento"

• Si $N=1 \rightarrow$ hay 3 bolas blancas y 3 negras.

$$p(N=1) = 3/6 = 1/2$$

• Si $N=2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

• Si $N=3 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

• Si $N=4 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{20}$

$$p(x) = P(N=x) = \begin{cases} 1/2 & N=1 \\ 3/10 & N=2 \\ 3/20 & N=3 \\ 1/20 & N=4 \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

c) $E(N) = \mu = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{3}{20} + 4 \cdot \frac{1}{20} =$

$= 7/4$

$$\sigma^2 = Var(N) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i) - \mu^2 =$$

$$= \left(1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{3}{20} + 4^2 \cdot \frac{1}{20}\right) - \frac{7^2}{4^2} = \frac{63}{80} = 0'7875$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejercicio 24:

a) $p(x) = p(X=x) = \begin{cases} 2p\cdot q & n=2 \\ p\cdot q & n=3 \\ & n=4 \rightarrow p^4 + p^3\cdot q + p^2\cdot q^2 + p\cdot q^3 + q^4 \end{cases}$

$q = 1-p$

b) i) $p(x_i) = P(X=x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$

dado que p es una probabilidad, se conoce que es ≥ 0

Consecuentemente, $q = 1-p \geq 0$

$2p\cdot q \geq 0$, $(p \wedge q) \geq 0$

...

ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

$2p\cdot q + p\cdot q + p^4 + p^3\cdot q + p^2\cdot q^2 + p\cdot q^3 + q^4 =$

$= 3pq + p^3q + p^2\cdot q^2 + p\,q^3 + p^4 + q^4 = p^4 + q^4 + pq(3 + p^2 + pq + q^2)$

Se sabe que p y $q \in (0 \leq x \leq 1)$, por lo tanto:

$\left.\begin{array}{l} p^4 \leq p \\ q^4 \leq p \end{array}\right\} p^4 + q^4 \leq 1$ | $pq \leq 1$, $\leq p$, $\leq q$ | $p^2 + q^2 \leq 1$, $\leq p$, $\leq q$

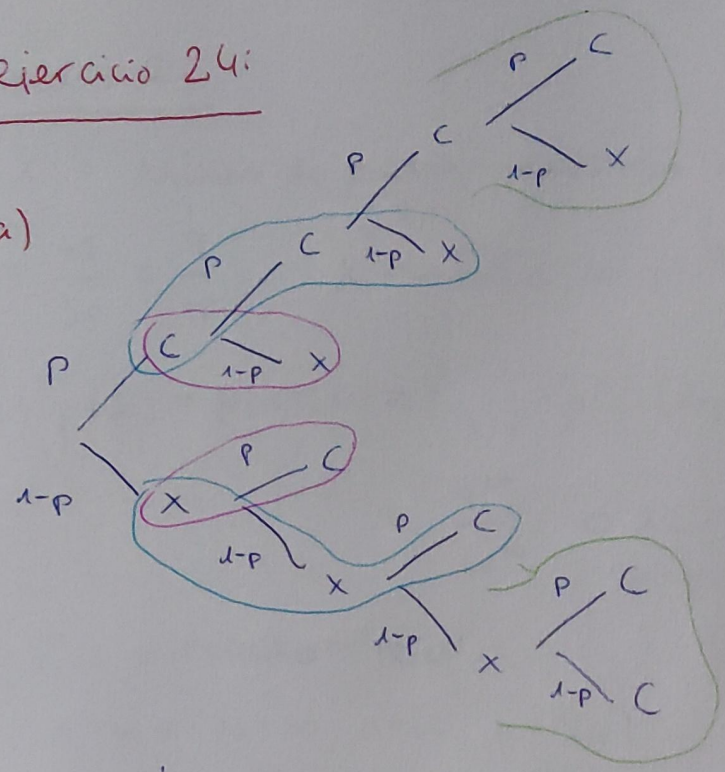
c) $E(X) = \mu = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot p(x_i) = \frac{8}{9} + \frac{6}{9} + \frac{79}{81} =$

$p = 1/3$

IKASLE KONTSEILUA
CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

ejercicio 24:

a)



X	$p(x) = P(X=x)$
→ 2	$p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$
→ 3	$p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)[p+(1-p)] = p(1-p)$
→ 4	$p^4 + p^3(1-p) + (1-p)^4 + (1-p)^3 p$

b) i) $p(x_i) = P(X=x_i) \geq 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$

Se nos dice que "p" es una probabilidad, por lo que $p \in (0,1)$.

Por tanto, los 3 casos de probabilidad son positivos.

ii) $P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$

$$2p(1-p) + p(1-p) + p^3 + (1-p)^3 = 3p(1-p) + p^3 + (1-p)^3$$

c) $\mu = E(X) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{2^3}{3^3}\right) \cdot 4$

$$= 8/9 + 2/3 + 4/3 = \boxed{26/9}$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejercicio 26:

X := "Número de piezas admisibles de entre 20 escogidas" sin reemplazamiento

$p = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$ $\quad X \sim B(n=20, p=9/10)$

a) $p(20) = p(X=20) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \binom{20}{20} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 =$

$= \frac{9^{20}}{10^{20}} = 0'1215766546$

ES HIPERGEOMÉTRICA:

$X \sim H(N=50, n=20, p=9/10)$

$p(X=20) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{45}{20}\binom{5}{0}}{\binom{50}{20}} = 0'06725915158$

b) $p(X=15) + p(X=16) = 0'00731748758 + 0'06860144613 =$

$= 0'07591893372$

c) $\mu = E(x) = n \cdot p = 20 \cdot \frac{9}{10} = 18$ piezas.

ejercicio 27:

X := "Número de pacientes a los que les provoca reacción adversa de entre 300 elegidos".

$X \sim B(n=300, p=0'01)$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} p \leq 0'1 \\ n \cdot p \leq 5 \end{array}}$ ✓ $\quad 300 \cdot 0'01 = 3$ ✓

a) Aproximación por una de Poisson $X \sim B(n=300, p=0'01) \cong \mathcal{P}(\lambda=3)$

$P(X \geq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] = 1 - \left[e^{-3} \cdot \left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right)\right] =$

$= 1 - 0'4231900811 = 0'5768099189$.

b) $P(4 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X < 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) =$

$= e^{-3} \cdot \left(\frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!} + \frac{3^7}{7!}\right) = 0'3408636074$.

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES
BIE/EIB

ejercicio 28:

X := "Número de lámparas fluorescentes con al menos 5000 horas de vida útil de entre las 20 escogidas".

$X \sim B(n=20,\ p=0'85)$

a) $P(X=18) = \binom{n}{x} \cdot p^x (1-p)^{n-x} = \binom{20}{18} \cdot 0'85^{18} \cdot 0'15^2 =$

$= 0'2293384019$

b) $P(X \geq 15) = P(X=15) + P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) + P(X=19) + P(X=20)$

- $P(X=15) = 0'102845179 5$
- $P(X=16) = 0'1821216721$
- $P(X=17) = 0'2428288951$
- $P(X=18) = 0'2293384019$
- $P(X=19) = 0'136798345$
- $P(X=20) = 0'03875953108$

$\Big\}\ P(X \geq 15) = 0'9326$

c) Y := "Número de lámparas ... de entre las 4 escogidas, sin reemplazamiento, en una población de 20 lámparas".

$p = \frac{17}{20} = 0'85 \qquad Y \sim H(N=20,\ n=4,\ p=0'85)$

$$P(X=2) + P(Y=3) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} + \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \frac{\binom{17}{2}\binom{3}{2}}{\binom{20}{4}} + \frac{\binom{17}{3}\binom{3}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{48}{95} = 0'50526315\ldots$$

Descargado por: 1157974 el 2024-10-13 13:04:02 desde eibikaslekontseilua.eus

ejercicio 29 :

X := "Número de cambios realizados en un torno automático cada ~~dos días~~ diarios. $\mathcal{P}(\lambda=2)$

$\lambda = 2 \cdot 2 = 4$ $\qquad X \sim \mathcal{P}(\lambda=4)$.

El torno no funciona correctamente cuando se realizan más de cuatro cambios diarios → 8 cambios cada dos días.

$$p(X \leq 8) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) + p(X=6) + \ldots +$$

$$= e^{-4} \cdot \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!} + \frac{4^7}{7!} + \frac{4^8}{8!} \right) =$$

$$= 0'9786.$$

Calcular de que $p(X \geq 4) \rightarrow p(X \leq 4)^2$

↳ cada día.

$$p(X \leq 4) = \qquad = [p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)]$$

$$= \left[e^{-2} \cdot \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \right) \right] = 0'9473469827 \rightarrow$$

$$\rightarrow \odot^2 = 0'8974663055$$

IKASLE KONTSEILUA CONSEJO DE ESTUDIANTES BIE/EIB

ejercicio 30:

a) $X :=$ "Número de pedidos que recibe la empresa cada mañana".

$\lambda = 1'5 \qquad X \sim \mathcal{P}(\lambda = 1'5)$

$$P(X=0) = e^{-1'5} \cdot \frac{1'5^0}{0!} = \frac{1}{e^{1'5}} = 0'2231301601$$

b) $P(X<3) = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$$= e^{-1'5} \cdot \left(\frac{1'5^0}{0!} + \frac{1'5}{1!} + \frac{1'5^2}{2!} \right) = 0'8088468305$$

c) $Y :=$ "Número de ... cada cinco mañanas".

$\lambda_Y = 5 \cdot \lambda_X = 5 \cdot 1'5 = 7'5 \qquad Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 7'5)$

$P(Y<5) = P(Y \leq 4) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) =$

$$= e^{-7'5} \cdot \left(\frac{7'5^0}{0!} + \frac{7'5}{1!} + \frac{7'5^2}{2!} + \frac{7'5^3}{3!} + \frac{7'5^4}{4!} \right) = 0'1320618563$$

ejercicio 31:

a) $X :=$ "Número de ratones que no desarrollan la enfermedad hasta que uno sí lo haga".

$X \sim G(p = 0'15) \qquad P(X=6) = 0'85^6 \cdot 0'15 = 0'05657242734$

b) $Y :=$ "Número de ratones ... hasta que 12 sí lo hagan".

$Y \sim BN(n=12, 0'15) \qquad 40 - 12 = 28$ pruebas infructuosas

$$P(Y=28) = \binom{n+x-1}{x} \cdot q^x \cdot p^n = 0'0022967494 5$$

c) $H :=$ "... hasta que 10 sí lo hagan".

$H \sim BN(n=10, p=0'15) \qquad 45 - 10 = 35 \; ; \; 50 - 10 = 40$

$P(35 \leq H \leq 40) = P(Y=35) + P(H=36) + P(H=37) + P(H=38) + P(H=39) + P(H=40) =$

$$= \binom{44}{35} \cdot 0'85^{35} \cdot 0'15^{10} + \ldots = 0'01384 + 0'01470 + 0'01554 + \ldots = 0'0953$$