

STT5100 - Automne 2019 - Examen Final (GLM)

Arthur Charpentier

Examen A

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits, sauf une page d'aide mémoire. L'examen dure 3 heures, mais toute sortie avant midi est autorisée, et sera définitive.

Dans les feuilles qui suivent, il y a 30 questions relatives au cours sur les modèles linéaires. Pour chaque question (sauf deux), cinq réponses sont proposées. Une seule est valide, et vous ne devez en retenir qu'une,

- vous gagnez 1 point par bonne réponse
- vous ne perdez pas de points pour une mauvaise réponse
- vous ne gagnez pas de point pour plusieurs réponses

Aucune justification n'est demandée. Une question repose sur un graphique qu'il faudra tracer sur la feuille de réponses (au dos). Votre note finale est le total des points (sur 30). Il y a une 31ème question, bonus. Une prédiction parfaite (sur 30) donnera un point bonus qui s'ajoutera à la note.

La page de réponses est au dos de celle que vous lisez présentement : merci de décrocher ladite feuille et de ne rendre que cette dernière, après avoir indiqué votre code permanent en haut à gauche.

Merci de cocher le carré en bleu ou en noir. En cas d'erreur, vous pouvez cocher une autre case en rouge. Seule cette dernière sera alors retenue.

Le surveillant ne répondra à aucune question durant l'épreuve : en cas de soucis sur une question (interprétation possiblement fausse, typo, etc), vous pouvez mettre un court commentaire sur la feuille de réponses.

Formulaire : Quantiles de lois usuelles. Exemple pour une loi normale - $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}(Z \leq 2.326) = 99\%$.

	75%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
Loi normale	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
$\text{Chi}^2, \chi^2(5)$	6.626	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515	22.105
$\text{Chi}^2, \chi^2(4)$	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467	19.997
$\text{Chi}^2, \chi^2(3)$	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266	17.730
$\text{Chi}^2, \chi^2(2)$	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816	15.202
$\text{Chi}^2, \chi^2(1)$	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828	12.116

La densité / mesure de probabilité d'une variable aléatoire dans la famille exponentielle s'écrit

$$f(y; \theta, \phi) = \exp \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{\phi} + c(y, \phi) \right)$$

On appelle logit la fonction $(0, 1) \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\text{logit}(p) = \log(p/(1-p))$. Et la *prime pure* désigne l'espérance mathématique de la perte.

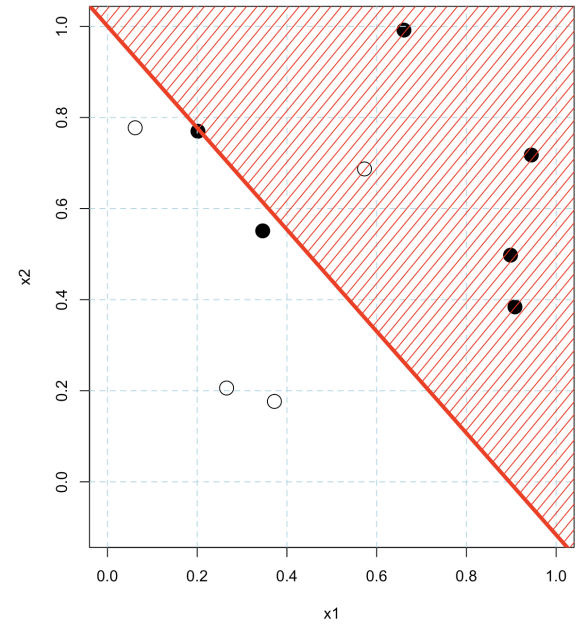
Je corrige ici le sujet A, le sujet B contenait les mêmes questions dans un ordre différents, et les applications numériques - ici 11 et 17 - sont différentes, mais proches en particulier pour l'exercice 11, les 0 et les 1 ont été intervertis pour y .

Code permanent :

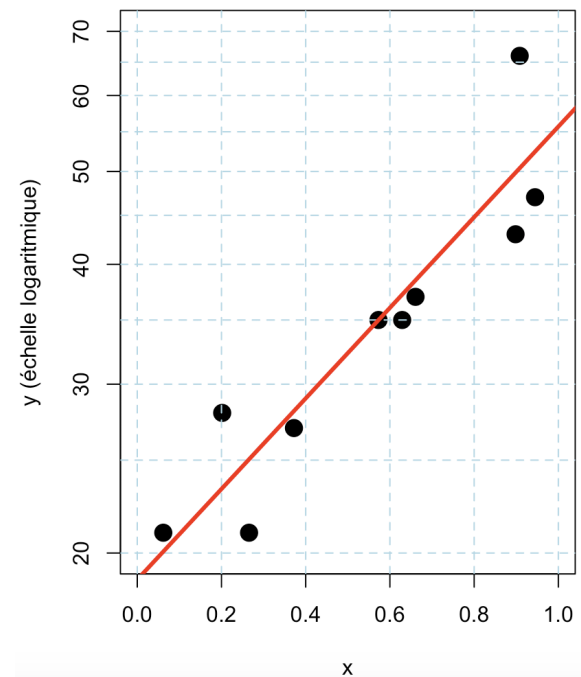
Sujet : A

question 1	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 2	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 3	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 4	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 5	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 6	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
question 7	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 8	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 9	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 10	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 11	Figure à droite (à compléter)				
question 12	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
question 13	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 14	<input type="checkbox"/> A	<input checked="" type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 15	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 16	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
question 17	Figure à droite (à compléter)				
question 18	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 19	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 20	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 21	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 22	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 23	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 24	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 25	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input checked="" type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 26	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
question 27	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
question 28	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
question 29	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
question 30	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E
question 31	Combien de bonnes réponses pensez vous avoir ?				

question 11 :



question 17 :



- 1 On estime trois modèles GLM, avec $g(\mathbb{E}[Y|X_1, X_2]) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$. On a (1) une régression Gamma (2) une régression Poisson et (3) une régression binomiale, toutes trois avec leur lien canonique. En estimant les modèles, on obtient les mêmes estimations, à savoir

$$\hat{\beta}_0 = 2, \hat{\beta}_1 = 1, \text{ et } \hat{\beta}_2 = -1.$$

Soit \hat{y}_m la prévision obtenue au point $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$ par le modèle m (avec $m \in \{1, 2, 3\}$). Quelle affirmation est juste parmi les suivantes

- A) $\hat{y}_1 < \hat{y}_2 < \hat{y}_3$
 B) $\hat{y}_1 < \hat{y}_3 < \hat{y}_2$
 C) $\hat{y}_2 < \hat{y}_1 < \hat{y}_3$
 D) $\hat{y}_2 < \hat{y}_3 < \hat{y}_1$
 E) la réponse n'est pas donnée par les affirmations ci-dessus

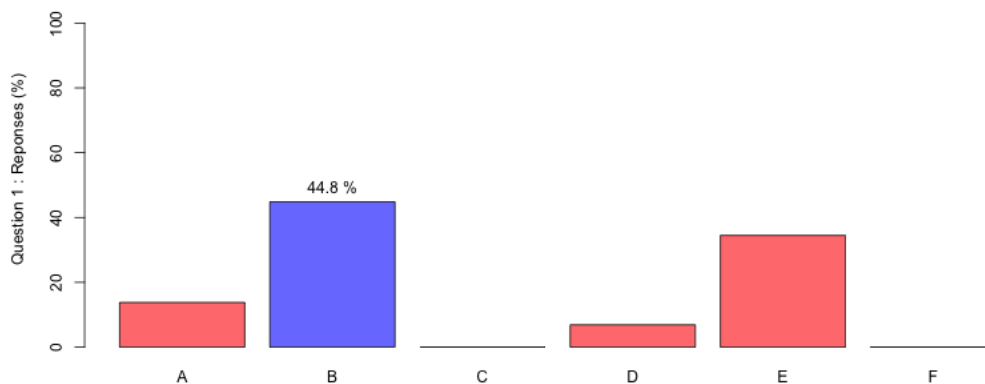
Il s'agissait d'un exercice de l'examen MAS-I de la CAS du printemps 2018. Pour les trois modèles, on a l'estimation de $g(\mathbb{E}[Y|X_1, X_2])$ qui vaut $2 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$. Donc

$$\hat{y}_1 = g^{-1}(3) = \frac{1}{3} \text{ car } g(\mu) = \mu^{-1} \text{ et donc } g^{-1}(\mu) = \mu^{-1},$$

$$\hat{y}_2 = g^{-1}(3) = \exp(3) \sim 20.08 \text{ car } g(\mu) = \log \mu \text{ et donc } g^{-1}(\mu) = \exp(\mu),$$

$$\hat{y}_3 = g^{-1}(3) = \frac{e^3}{1 + e^3} \sim 0.95 \text{ car } g(\mu) = \log \frac{\mu}{1 - \mu} \text{ et donc } g^{-1}(\mu) = \frac{e^\mu}{1 + e^\mu},$$

aussi $\hat{y}_1 < \hat{y}_3 < \hat{y}_2$, qui correspond à la réponse B.



- 2 On nous donne les informations suivantes au sujet d'un GLM : les variables réponses y_i sont supposées suivre des lois normales indépendantes, de moyenne inconnue μ_i et de variance inconnue elle aussi σ^2 . On note $\hat{\mu}_i$ les moyennes prédites. Que vaut la *scaled deviance* de ce modèle ?

A) $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_i)^2$

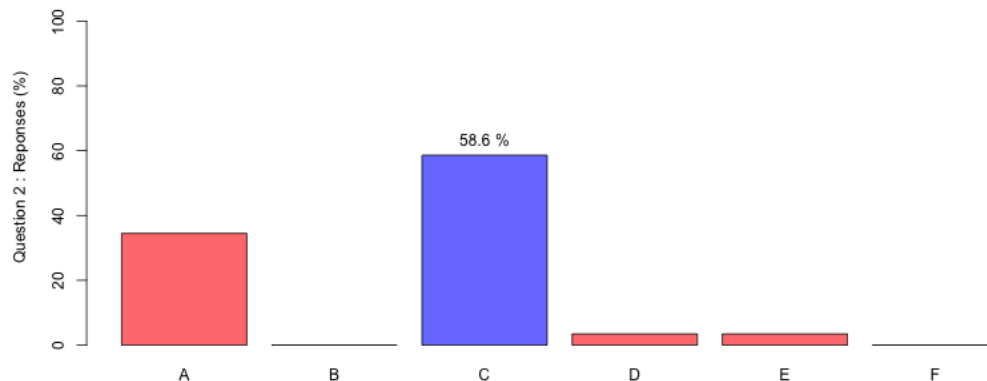
B) $\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_i)^2$

C) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_i)^2$

D) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_i)^2$

E) la réponse n'est pas donnée par les affirmations ci-dessus

Réponse C. On l'avait vu en cours, justement pour comprendre la distinction entre *deviance* et *scaled deviance*... ceux qui ont faux devraient le refaire à titre d'exemple.



3 On estime trois modèles de Poisson, et on obtient les informations suivantes

modèle	variable(s)	degrés de liberté	log vraisemblance	AIC	BIC
(1)	classe de risque	5	-47,704	95,418	95,473.611
(2)	classe de risque + région	***	-47,495	***	***
(3)	classe de risque + région + indicatrice	10	-47,365	94,750	***

On sait de plus que la classe de risque prend les modalités $\{A, B, C, D, E\}$ et que la variable indicatrice prend deux modalités $\{0, 1\}$. Tous les modèles ont été estimés sur le même jeu de données.

Quelle est la différence (en valeur absolue) entre le AIC et le BIC dans le modèle (2) ?

- A) moins de 85
- B) entre 85 et 95
- C) entre 95 et 105
- D) entre 105 et 115
- E) plus de 115

Il s'agissait d'un exercice de l'examen S de la CAS, du printemps 2016. Le modèle (2) a un degré de liberté de moins que le modèle 3 (correspondant à la variable indicatrice), aussi le nombre de degrés de liberté est $10-1=9$. Aussi, le AIC pour le modèle (2) est ici

$$-2 \times (-47,495) + 2 \times 9 = 95,008,$$

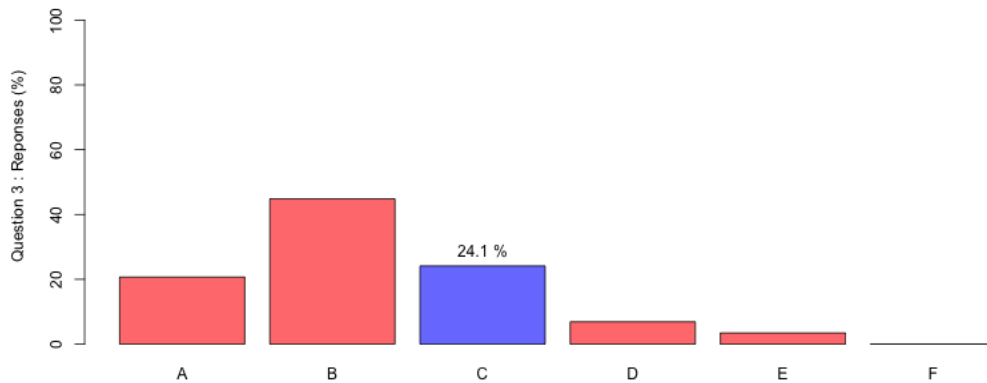
alors que le BIC est ici (toujours pour le modèle (2))

$$-2 \times (-47,495) + 9 \times \log n = 95,108.1$$

Aussi, la différence entre les deux est (en valeur absolue)

$$95,108.1 - 95,008 = 100.1$$

qui correspond à la réponse C.



- 4 On fait un sondage auprès de 100 personnes pour savoir pour qui ils voteront lors d'une prochaine élection parmi trois candidats $\{A, B, C\}$. On tient compte ici de l'âge des personnes interrogées à l'aide d'une classe d'âge, $[18, 30]$, $[31, 45]$, $[46, 61]$ et $[61, +]$. On utilise une régression logistique. On observe les résultats suivants : (i) le groupe $[18, 30]$, A et le candidat A sont considérées comme modalités de référence (ii) Pour le groupe $[18, 30]$, le logarithme de la cote de B et C sont respectivement -0.535 et -1.489 . Pour une personne du groupe $[18, 30]$, quelle est la probabilité de préférer B ?

- A) moins de 40%
- B) entre 40% et 50%
- C) entre 50% et 60%
- D) entre 60% et 80%
- E) plus de 80%

Il s'agissait d'un exercice de l'examen MAS-I de la CAS, de l'automne 2018. Ici, la modalité de référence est C (pour y). On nous dit (comme on se positionne par rapport à la référence) que

$$\log \frac{\mathbb{P}[Y = B|x = [18, 30]]}{\mathbb{P}[Y = A|x = [18, 30]]} = -0.535$$

et

$$\log \frac{\mathbb{P}[Y = C|x = [18, 30]]}{\mathbb{P}[Y = A|x = [18, 30]]} = -1.489$$

soit

$$\mathbb{P}[Y = B|x = [18, 30]] = e^{-0.535} \cdot \mathbb{P}[Y = A|x = [18, 30]]$$

et

$$\mathbb{P}[Y = C|x = [18, 30]] = e^{-1.489} \cdot \mathbb{P}[Y = A|x = [18, 30]]$$

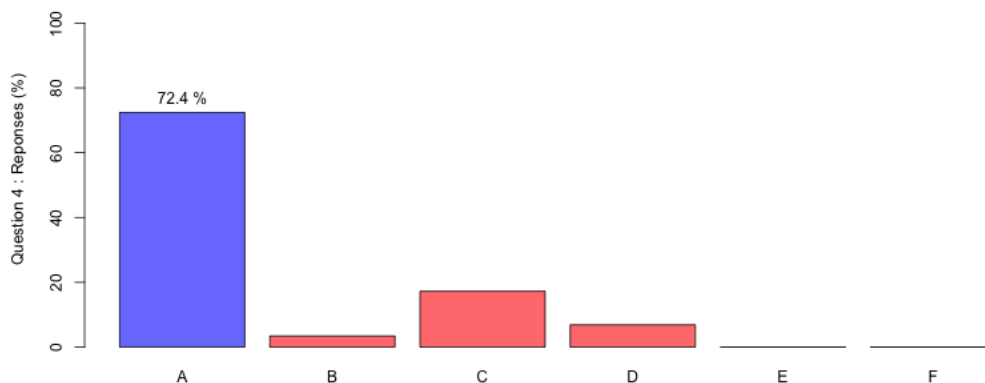
Or comme la somme des trois probabilités vaut 1 (par définition), on a

$$(1 + e^{-0.535} + e^{-1.489}) \cdot \mathbb{P}[Y = A|x = [18, 30]] = 1$$

aussi $\mathbb{P}[Y = A|x = [18, 30]] = 0.5521$ et donc, par substitution,

$$\mathbb{P}[Y = B|x = [18, 30]] = e^{-0.535} \cdot \mathbb{P}[Y = A|x = [18, 30]] = 0.3233$$

ce qui correspond à la réponse A.



5 En corrigeant des copies d'étudiants, on peut lire les affirmations suivantes à propos de la déviance des GLM

- (1) une petite déviance indique un mauvais ajustement du modèle
- (2) la déviance peut être utilisée pour comparer la qualité de l'ajustement pour des modèles imbriqués
- (3) un modèle saturé a une déviance nulle

A) aucune affirmation n'est juste

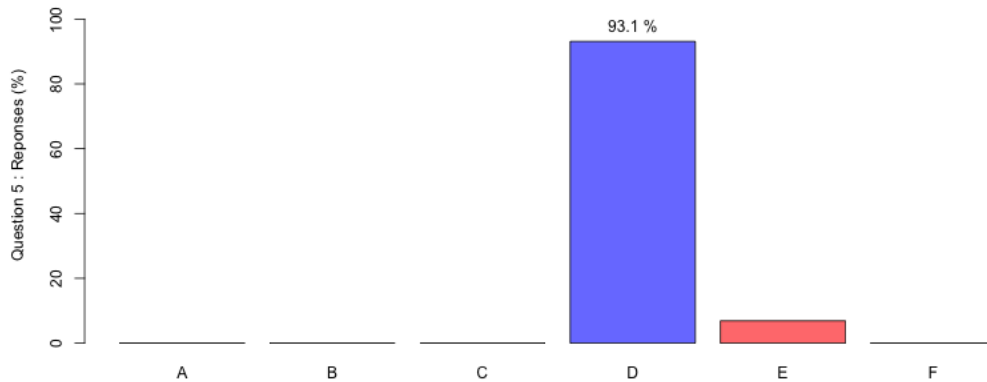
B) (1) et (2) sont justes

C) (1) et (3) sont justes

D) (2) et (3) sont justes

E) ni A, ni B, ni C et ni D

Il s'agissait d'une question de l'examen MAS-I de la CAS du printemps dernier. On va regarder les affirmations les unes après les autres. 1) La déviance est la distance du modèle au modèle saturé (ou parfait, quand $\hat{\mu}_i = y_i$, $\forall i$). Donc au contraire, une petite distance signifie que le modèle est bon ! La première affirmation est donc fausse... 2) Oui, la déviance peut être utilisée pour juger la qualité de l'ajustement avec modèle GLM. Le soucis est qu'on ne veut pas seulement avoir un *bon* modèle (qualité de l'ajustement) mais aussi un modèle simple (ou disons parcimonieux) d'où l'utilisation des critères AIC ou BIC.... mais pour juger la qualité, on utilise la déviance ! 3) Oui, c'est la définition... Autrement dit, seules les affirmations 2 et 3 sont valides, ce qui correspond à la réponse D.



- 6 On modélise ici une variable y prenant trois modalités, $\{A, B, C\}$, et on suppose que C est la modalité de référence.

Coefficients (category A)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-0.591			
genderM	-0.388			
age2	1.128			
age3	1.588			

Coefficients (category B)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-1.039			
genderM	-0.813			
age2	1.478			
age3	2.917			

où la variable x_1 (**gender**) prend ici deux modalités $\{F, M\}$ et x_2 (**age**) prend ici trois modalités $\{1, 2, 3\}$.
Quelle est la probabilité $\mathbb{P}[Y = A | x_1 = H, x_2 = 3]$?

- A) moins de 5%
- B) entre 5% et 10%
- C) entre 10% et 15%
- D) entre 15% et 20%
- E) plus de 20%

Si on regarde les deux prévisions, on a

$$\mathbf{x}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}_A = -0.591 - 0.388 + 1.588 = 0.609$$

et

$$\mathbf{x}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}_B = -1.039 - 0.813 + 2.917 = 1.065$$

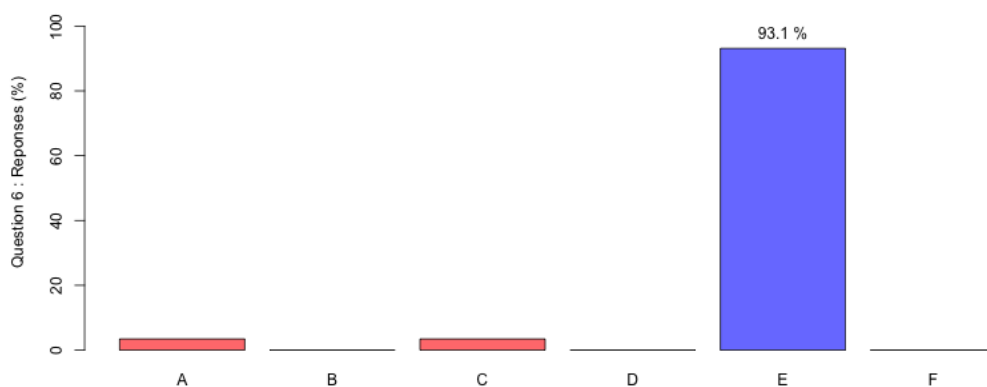
(la catégorie C étant ici la référence). Aussi, la probabilité d'être dans le groupe A est

$$\mathbb{P}[Y = A | x_1 = H, x_2 = 3] = \frac{e^{\mathbf{x}^\top \hat{\beta}_A}}{1 + e^{\mathbf{x}^\top \hat{\beta}_A} + e^{\mathbf{x}^\top \hat{\beta}_B}}$$

soit

$$\mathbb{P}[Y = A | x_1 = H, x_2 = 3] = \frac{e^{0.609}}{1 + e^{0.609} + e^{1.065}} = 0.3203$$

ce qui correspond à la réponse E.



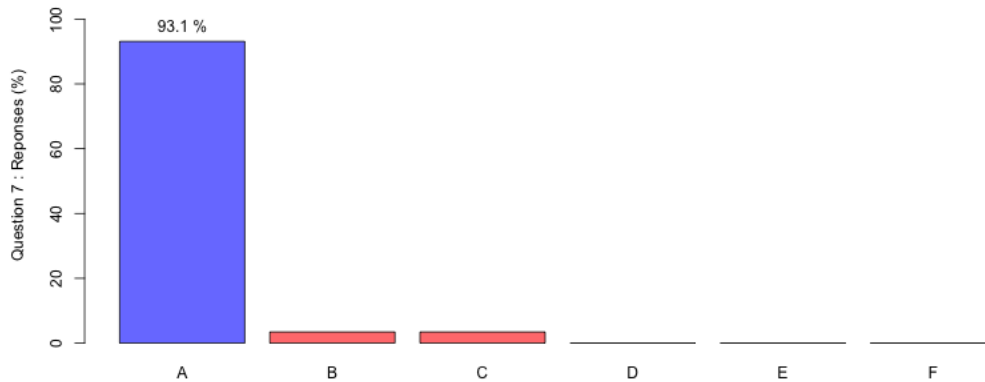
- 7 On suppose que la loi Y est dans la famille exponentielle avec $b(\theta) = e^\theta$, $\phi = 1$ et que $\mu = \mathbb{E}[Y]$. Déterminez la variance de Y en fonction de μ ?

- A) μ
- B) μ^2
- C) $1/\mu$
- D) 1
- E) e^μ

pour information, il s'agit d'une *sample question* de l'examen CAS-S (ou d'une question de cours, au choix). Comme $b(\theta) = e^\theta$, $b'(\theta) = e^\theta$ et $b''(\theta) = e^\theta$. Or on sait que

$$\mu = \mathbb{E}[Y] = b'(\theta) = e^\theta \text{ et } \text{Var}[Y] = \phi \cdot b''(\theta) = e^\theta = \mu$$

qui est la réponse A (on reconnaît au passage la loi de Poisson).



- 8 Sur un même jeu de données, avec y (strictement) positive et x , deux modèles sont estimés : le modèle (1)

Call:

```
lm(formula = log(y) ~ x)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	1.3055	0.2426	5.381	3.59e-07 ***
x	0.3043	0.4163	0.731	0.466

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.256 on 123 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.004325, Adjusted R-squared: -0.00377

F-statistic: 0.5343 on 1 and 123 DF, p-value: 0.4662

et le modèle (2)

Call:

```
glm(formula = y ~ x, family = gaussian(link = "log"))
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	2.2665	0.4266	5.313	4.89e-07 ***
x	0.1974	0.7035	0.266	0.79

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for gaussian family taken to be 509.611)

Pour une observation x , on veut comparer les prévisions avec les deux modèles. On note $\hat{y}_{(j)}(x)$ la prévision - pour x - obtenue avec le modèle (j) , correspond à l'estimateur (asymptotiquement) sans biais construit à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. Que vaut $\hat{y}_{(2)}(1) - \hat{y}_{(1)}(1)$?

- A) -6
- B) -2.25
- C) 0
- D) 0.75
- E) 6.75

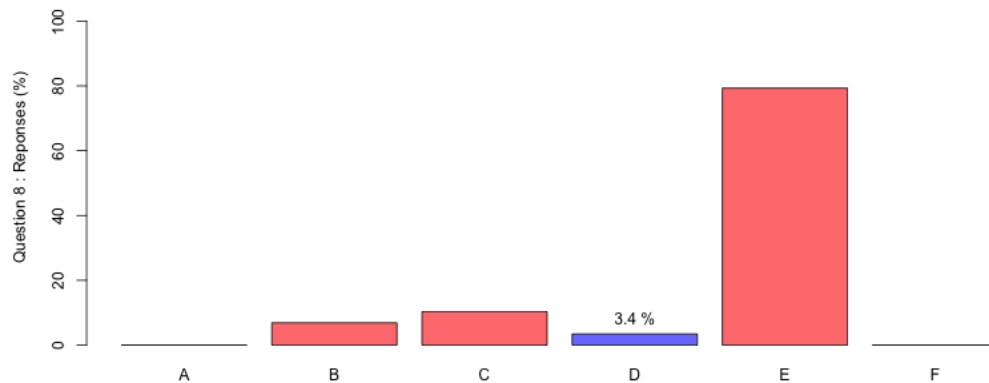
Le premier modèle est un modèle log-normal, puisque $\log Y|X = x \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$. Or l'espérance d'une loi lognormale $LN(\mu, \sigma^2)$ est $\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$, donc pour avoir un estimateur sans biais, on doit considérer

$$\exp\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right) = \exp(1.3055 + 0.3043 + 1.256^2/2) = 11.007$$

Pour le second modèle, c'est simplement un GLM, donc on considère

$$\exp\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x\right) = \exp(2.2665 + .1974) = 11.7505$$

La différence est de 0.75, ce qui correspond à la réponse D, et non pas E (qui serait obtenu avec un estimateur biaisé pour le premier modèle, comme vu en cours).



- 9 On dispose de la sortie de régression suivante, d'une régression sur deux variables catégorielles

Call:

```
glm(formula = loss ~ region + group, family = Gamma(link = "log"))
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	5.26			
regionB	0.18			
regionC	0.37			
group2	0.12			
group3	0.25			

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 1.44)

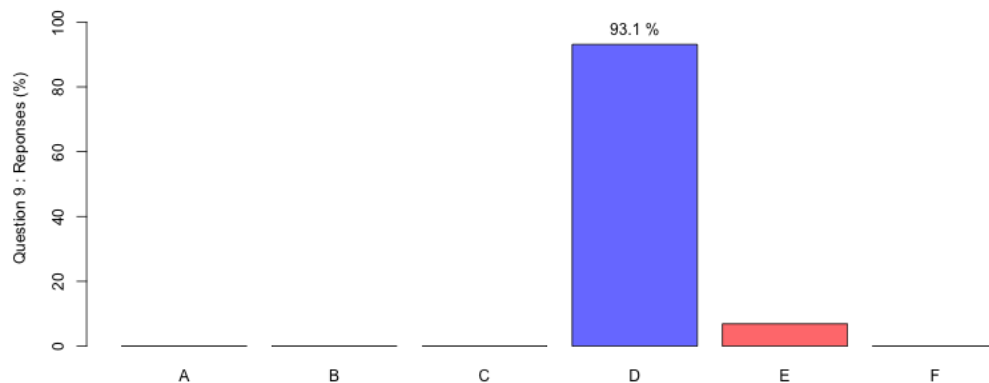
Calculer la prime pure pour un assuré du groupe 2 dans la région B,

- A) moins de 200
- B) entre 200 et 225
- C) entre 225 et 250
- D) entre 250 et 275
- E) plus de 275

Il s'agissait d'une question de l'examen S de la CAS de l'automne 2017. il y avait toutefois une typo, corrigée au cours de l'examen : il s'agit du 'risque' (groupe) B et du 'territoire' (région) '2' On nous dit qu'on a un lien logarithmique, aussi

$$\log \hat{\mu} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} = 5.26 + \underbrace{0.18}_{\text{risk B}} + \underbrace{0.12}_{\text{territory 2}} = 5.56$$

donc $\hat{\mu} = \exp[5.56] \sim 259.822$ ce qui correspond à la réponse D. Et comme vu en cours, la loi ne sert à rien pour la prévision.



- 10 On cherche à modéliser le nombre d'accident, par année, par police d'assurance. On suppose que y suit une loi de Poisson et on utilise un lien logarithmique. Deux variables explicatives sont prises en compte : le nombre de jeunes conducteurs, de moins de 25 ans ($x_1 \in \{0, 1 \text{ ou plus}\}$) et le nombre de conducteurs de plus de 25 ans ($x_2 \in \{1, 2 \text{ ou plus}\}$). On obtient la sortie de régression suivante

Call:

```
glm(formula = y ~ youth + old, family = poisson(link = "log"))
```

Coefficients

Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)

(Intercept)	-2.663
youth1+	0.132
old2+	-0.031

On considère une police avec un jeune conducteur de moins de 25 ans, et un autre de plus de 25 ans. Quelle est la probabilité d'avoir deux sinistres ou plus ?

- A) moins de 0.1%
- B) entre 0.1% et 0.5%
- C) entre 0.5% et 1%
- D) entre 1% et 5%
- E) plus de 5%

Il s'agissait d'un exercice de l'examen S de la CAS de l'automne 2015. Ici x_1 vaut 'ou plus' et x_2 vaut '1' - qui est la modalité de référence. Donc le paramètre de la loi de Poisson (conditionnelle aux variables explicatives) est

$$\hat{\lambda} = \exp[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 1 + \hat{\beta}_2 \cdot 0] = \exp[-2.663 + 0.132] = 0.07958$$

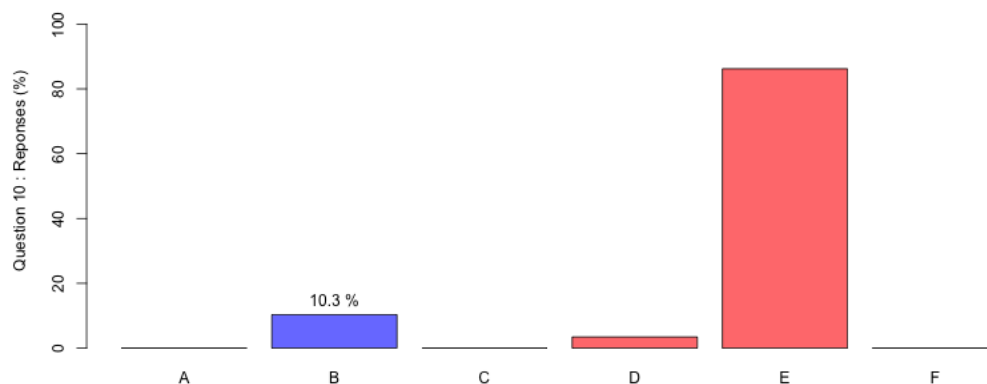
On nous demande ici

$$\mathbb{P}[Y \geq 2|x] = 1 - \left(\underbrace{\mathbb{P}[Y = 0|x]}_{=e^{-\lambda}} + \underbrace{\mathbb{P}[Y = 1|x]}_{=e^{-\lambda}\lambda^1} \right)$$

soit, en remplaçant

$$\mathbb{P}[Y \geq 2|x] = 1 - (e^{-0.07958} + 0.07958 \times e^{-0.07958}) = 1 - 0.9969966 = 0.0030034 = 0.3\%.$$

ce qui correspond à la réponse B. Je ne comprends pas pourquoi autant d'élèves ont répondu E.



- 11 On nous donne la sortie de régression suivante, en fonction de deux variables continues x_1 et x_2

Call:
`glm(formula = y ~ x1 + x2, family = binomial(link = "logit"))`

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	4.542	3.254	1.396	0.163
x1	-5.070	3.246	-1.562	0.118
x2	-4.539	4.224	-1.074	0.283

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

Null deviance: 13.4602 on 9 degrees of freedom
Residual deviance: 8.4035 on 7 degrees of freedom
AIC: 14.403

Number of Fisher Scoring iterations: 5

Le nuage des points $(x_{1,i}, x_{2,i})$ est représenté sur la Figure page 2 (en haut), les points étant noirs (●) si $y_i = 1$ et blancs (○) si $y_i = 0$. Représentez (en la hachurant) la région pour laquelle

$$\mathbb{P}[Y = 1 | \mathbf{x} = (x_1, x_2)] > \mathbb{P}[Y = 0 | \mathbf{x} = (x_1, x_2)]$$

.

On va commencer par tracer la frontière, autrement dit, trouver l'ensemble des points (x_1, x_2) tels que

$$\mathbb{P}[Y = 1 | \mathbf{x} = (x_1, x_2)] > \mathbb{P}[Y = 0 | \mathbf{x} = (x_1, x_2)]$$

On sait (c'est le principe des modèles linéaires qu'il s'agit d'une droite (dans le plan (x_1, x_2))). Si les deux probabilités sont égales, c'est que $\mathbb{P}[Y = 1 | \mathbf{x} = (x_1, x_2)] = 1/2$, soit, puisqu'on a un lien logistique

$$\frac{\exp[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2]}{1 + \exp[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2]} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 1}$$

soit $\exp[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2] = 1$ ou encore $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 = 0$. Autrement dit (c'était la première étape), on doit voir sur le dessin la droite d'équation

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 = 4.542 - 5.070x_1 - 4.539x_2 = 0.$$

Comme on est dans le plan (x_1, x_2) , le plus simple est de tracer la droite soit la forme

$$x_2 = \frac{4.542}{4.539} - \frac{5.0539}{4.539}x_1 = 1 - 1.12x_1.$$

La droite va donc passer par les points $P_1 = (0, 1)$ et $P_2 = (1, -0.12)$, comme sur la figure ci-dessous.

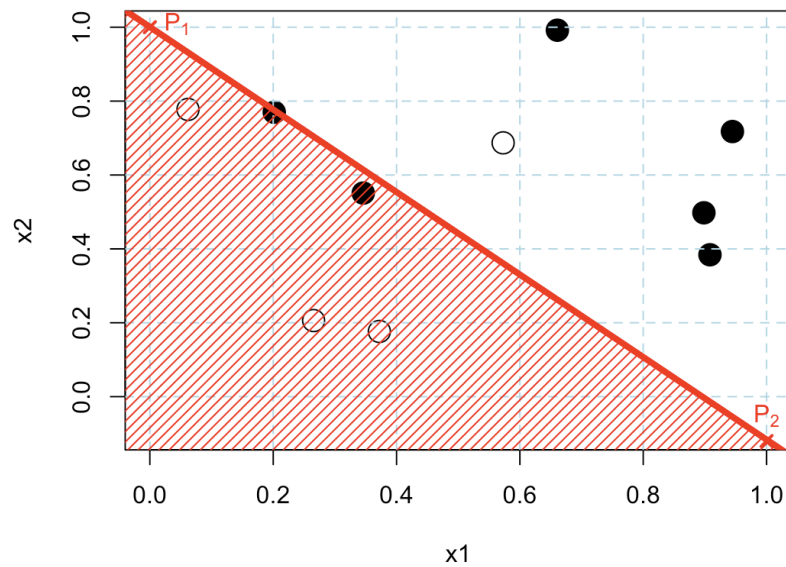
Pour savoir quelle région correspond à celle demandée, on peut prendre un point au hasard, d'un côté, ou de l'autre. Pour simplifier les calculs, prenons $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{P}[Y = 1 | \mathbf{x} = (0, 0)] = \frac{\exp[\hat{\beta}_0]}{1 + \exp[\hat{\beta}_0]} = \frac{\exp[4.542]}{1 + \exp[4.542]} \sim 98.9\%$$

(ou plus simplement, comme $\hat{\beta}_0 > 0$, on sait que la valeur prédite en 0 excède 50%). Donc le point 0 est bien dans la région

$$\mathbb{P}[Y = 1 | \mathbf{x} = (x_1, x_2)] > \mathbb{P}[Y = 0 | \mathbf{x} = (x_1, x_2)]$$

et on va alors hachurer cette partie là...



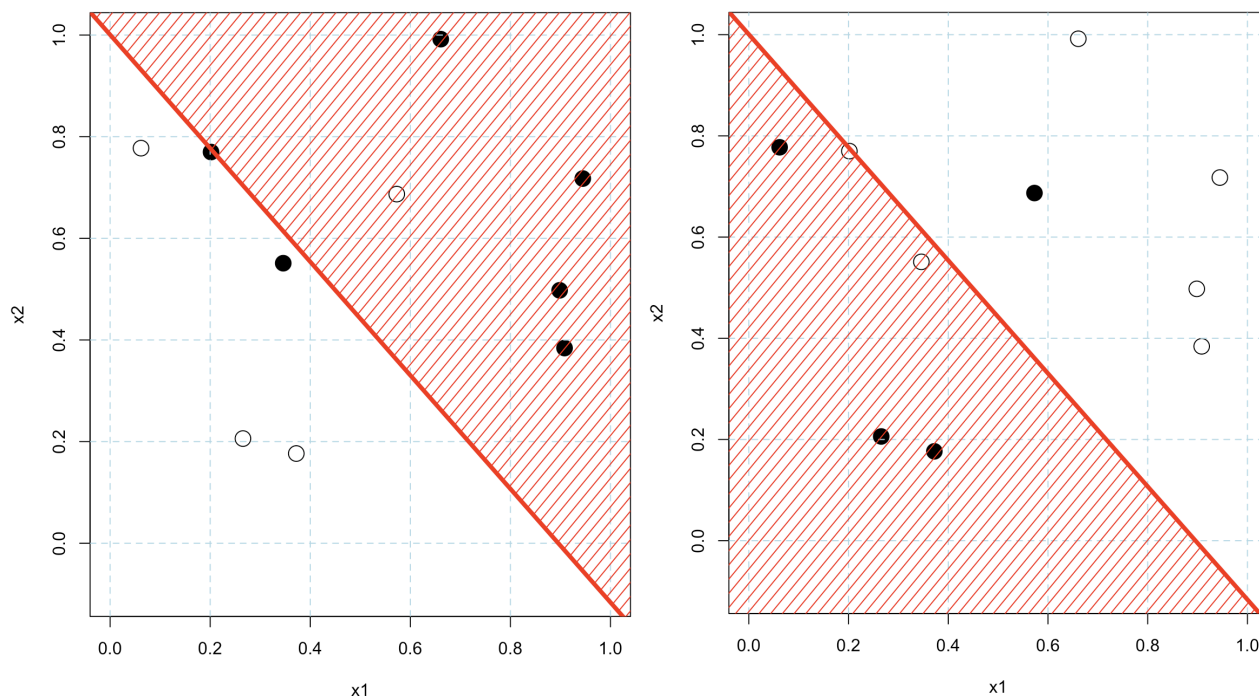
En fait, on peut faire un peu plus simple, puisque pour le point (0,0)

$$\log \frac{\mathbb{P}[Y = 1|x_1 = 0, x_2 = 0]}{\mathbb{P}[Y = 0|x_1 = 0, x_2 = 0]} = \beta_0 = 4.542$$

donc $\mathbb{P}[Y = 1|x_1 = 0, x_2 = 0] > \mathbb{P}[Y = 0|x_1 = 0, x_2 = 0]$ ce qui est bien ce qu'on cherche ! Donc (0,0) est dans la région que l'on cherche ! Autrement dit, on va hachurer la région en bas à gauche. On peut vérifier avec un autre point si on n'est pas convaincu !

$$\log \frac{\mathbb{P}[Y = 1|x_1 = 1, x_2 = 1]}{\mathbb{P}[Y = 0|x_1 = 1, x_2 = 1]} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 4.542 - 5.070 - 4.539 = -5.067$$

donc $\mathbb{P}[Y = 1|x_1 = 0, x_2 = 0] < \mathbb{P}[Y = 0|x_1 = 0, x_2 = 0]$ ce qui n'est pas ce qu'on nous demande, donc (1,1) n'est pas dans la région que l'on cherche ! Pour le sujet B, la sortie de la régression était très légèrement différente. En fait, si on compare les figures, on avait les mêmes observations x_i mais les y_i ont été permutés. Aussi, pour le sujet A, on avait la sortie de gauche, et pour le sujet B, la sortie de droite



L'énoncé suivant est relatif aux questions 12 et 13

On cherche à modéliser la survenance, ou non, d'un accident pour une police d'assurance. On utilise deux variables explicatives : le genre (male / female) et la classe d'âge (1 / 2 / 3). La classe d'âge est prise comme une variable numérique, et on considère une régression quadratique sur cette variable. Pour une police d'assurance i , la survenance, ou non, d'un sinistre est une variable Y_i telle que

$$g(\mathbb{E}[Y_i]) = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{1}(x_{1,i} = \text{male}) + \beta_2 \text{age} + \beta_3 \text{age}^2,$$

où g est la fonction de lien logistique. On a les statistiques suivantes, qui donne le nombre de polices dans chacun des cas

	<i>genre</i>					
	male			female		
	<i>age</i>			<i>age</i>		
	1	2	3	1	2	3
pas de sinistre	20	28	30	24	28	22
un sinistre	8	7	3	16	13	1

On dispose de la sortie suivante

Coefficients

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-1.1155			
genreM	-0.4192			
age .	1.2167			
age2	-0.5412			

- 12 Calculer la variance du nombre de sinistres qui seront déclarés pour des assurés hommes du groupe 2 (on arrondira à la valeur la plus proche)

A) 0.2
B) 1.2
C) 2.4
D) 4.8
E) 6.0

Il s'agissait d'un exercice ACTEX de 2018. On a ici un loi binomiale, ou plus précisément, $Y|x_1 = \text{male, age} = 2 \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 28 + 7 = 35$ d'après la sortie (ci-dessus) et p est la probabilité,

$$p = \mathbb{P}[Y = 1|x_1 = \text{male, age} = 2] = \frac{e^{x^\top \hat{\beta}}}{1 + e^{x^\top \hat{\beta}}} = \frac{1}{1 + e^{-x^\top \hat{\beta}}}$$

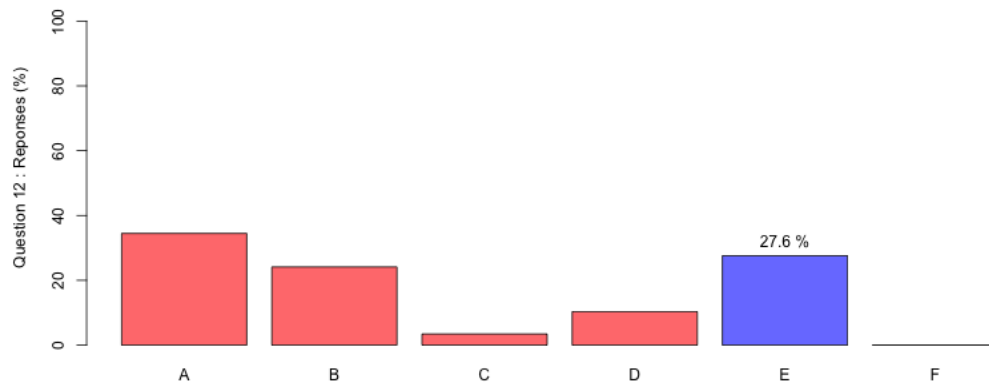
(si on veut simplifier un peu les calculs), aussi

$$p = (1 + \exp(-[-1.1155 - 0.4192 + 1.2167 \times 2 - 0.5412 \times 2^2]))^{-1} = 0.2199$$

Nous avons vu que le nombre d'accident suivait ici une loi binomiale, dont la variance est (cf cours de probabilités) $np(1 - p)$ soit ici

$$\text{Var}[Y|x_1 = \text{male, age} = 2] = np(1 - p) = 34 \times 0.2199 \times (1 - 0.2199) = 6.004$$

ce qui correspond à la réponse E.



- 13 Parmi les polices suivantes, laquelle (ou lesquelles) ont une probabilité d'avoir un accident qui excède 25% ?

(i) un assuré homme de la classe d'âge 1
(ii) un assuré homme de la classe d'âge 2
(iii) une assurée femme de la classe d'âge 3

A) (i) seulement

B) (ii) seulement

- C) (i) et (ii)
 D) (i) et (iii)
 E) (ii) et (iii)

Il faut se lancer dans les calculs ! Rappelons que la probabilité pour un homme de la classe d'âge 2 est (cf question précédente)

$$p_2 = (1 + \exp(-[-1.1155 - 0.4192 + 1.2167 \times 2 - 0.5412 \times 2^2]))^{-1} = 0.2199$$

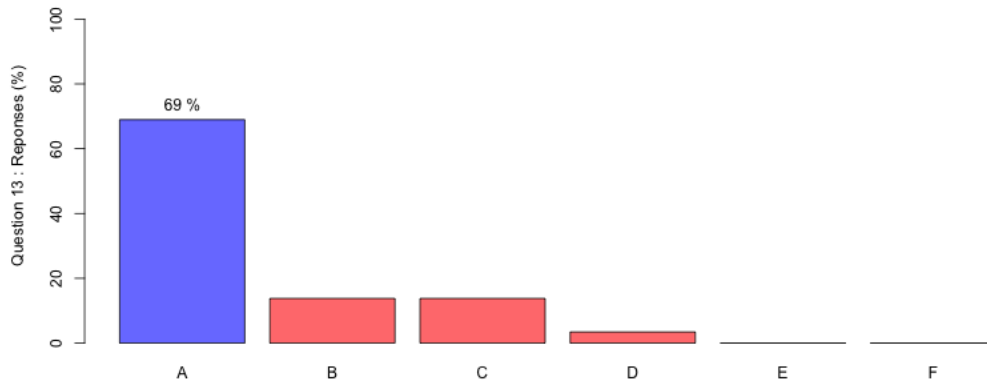
Pour avoir les deux autres probabilités, il faut remplacer 2 par 1 ou 3, ce qui donne

$$p_1 = (1 + \exp(-[-1.1155 - 0.4192 + 1.2167 \times 1 - 0.5412 \times 1^2]))^{-1} = 0.2975$$

$$p_3 = (1 + \exp(-[-1.1155 - 0.4192 + 1.2167 \times 3 - 0.5412 \times 3^2]))^{-1} = 0.0882$$

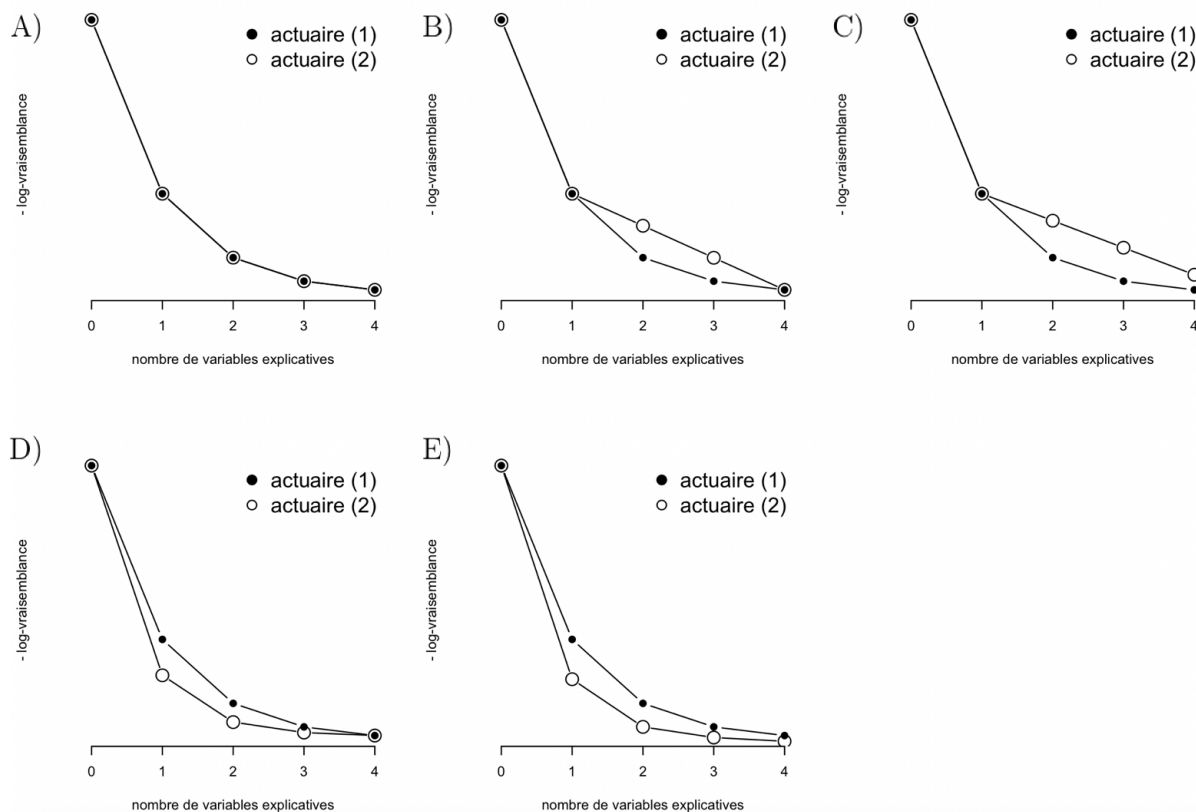
Aussi, seuls les hommes de la classe 1 ont plus de 25% (presque 30% en réalité) d'avoir un sinistre. Ce qui est la réponse A. Pour ceux qui voulait répondre en moins de 30 secondes avec une chance assez grande d'avoir bon, il était possible de prendre les probabilités empiriques (qui sont différentes des prévisions par GLM, mais si le modèle est bon, on ne doit pas être trop éloigné !)

$$p_1 = \frac{8}{20 + 8} = 28.57\% > 25\% \text{ alors que } p_2 = \frac{7}{28 + 7} = 20.00\% \text{ et } p_3 = \frac{3}{30 + 3} = 9.09\% < 25\%.$$



- 14 On suppose que deux actuaires utilisent une régression GLM sur la même base, comptenant 5 variables explicatives, avec le même type de modèle (même loi et même fonction de lien). On suppose
- que l'actuaire (1) choisi le modèle avec k variables explicatives en comparant *tous* les modèles avec k variables explicatives (et compare alors leur log-vraisemblance, à k fixé)
 - que l'actuaire (2) utilise une approche itérative - *stepwise forward* - pour sélectionner un modèle avec k variables explicatives (et compare alors leur log-vraisemblance, à k fixé)
 - en utilisant le même critère le AIC, les deux actuaires n'obtiennent pas le même modèle.

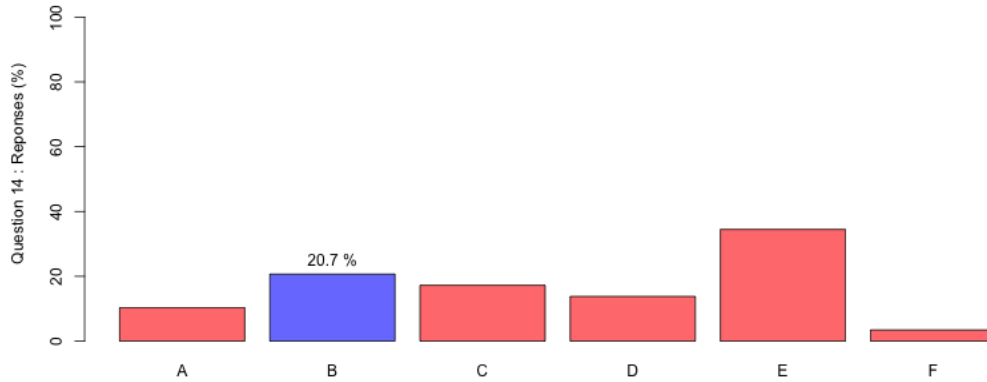
Les graphiques suivant montrent l'évolution de l'opposé de la log-vraisemblance du modèle retenu en fonction de k pour les deux actuaires. Lequelle vous semble le plus réaliste ?



Il s'agissait d'un exercice ACTEX de 2018. Avant de se lancer dans les calculs, on *sait* que l'approche *best subset* (où on regarde tous les modèles) et l'approche *stepwise* donnent exactement la même chose quand on a 0, 1 ou 4 variables explicatives. Ce qui élimine automatiquement C, D et E.

On notera d'ailleurs que les deux graphiques (D et E) sont aussi éliminés car l'approche *best subset* donne forcément une log-vraisemblance plus grande, donc les points noirs (●) doivent être en dessous des points blancs (○), a priori, pour 2 ou 3 variables explicatives.

On veut maintenant départager entre A et B. Or on sait, selon la dernière hypothèse que le modèle retenu avec le AIC n'est pas le même, donc forcément, la bonne réponse est B.



15 On nous donne la densité suivante pour Y ,

$$f(y) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}} \exp \left[-\frac{\lambda(y - \mu)^2}{2\mu^2 y} \right] \text{ pour } y > 0$$

(et 0 sinon), pour des paramètres μ et λ positifs. On sait que la distribution de Y est dans la famille exponentielle. Donnez l'expression du paramètre canonique θ et la forme de $b(\theta)$ pour cette distribution.

A) $\theta = -1/\mu$ et $b(\theta) = -\log(-\theta)$

B) $\theta = -1/\mu$ et $b(\theta) = -\sqrt{-2\theta}$

C) $\theta = -1/2\mu^2$ et $b(\theta) = -\log(-\theta)$

D) $\theta = -1/2\mu^2$ et $b(\theta) = -\sqrt{-2\theta}$

E) $\theta = -1/2\mu^2$ et $b(\theta) = e^\theta$

Pour information, il s'agit de la loi inverse Gaussienne. Mais on connaît rarement les lois par coeur, donc reprenons tranquillement. Pour ça, on prend le logarithme de la densité

$$\log f(y) = \log \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}} \right) + \left[-\frac{\lambda(y - \mu)^2}{2\mu^2 y} \right]$$

Comme pour la loi normale, on va développer ici le carré $(y - \mu)^2$, soit

$$\log f(y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\lambda}{2\pi y^3} \right) + \left[-\frac{\lambda(y^2 + \mu^2 - 2y\mu)}{2\mu^2 y} \right]$$

On va simplifier un peu dans le terme de droite

$$\log f(y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\lambda}{2\pi y^3} \right) - \frac{\lambda y}{2\mu^2} + \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2y}.$$

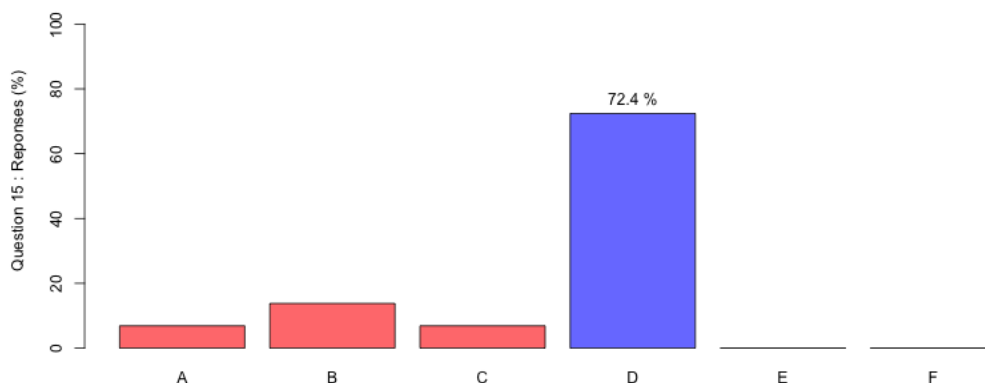
On y est presque : on peut alors écrire

$$\log f(y) = \frac{y \cdot (-1/(2\mu^2)) - (-1/\mu)}{1/\lambda} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\lambda}{2\pi y^3} \right) - \frac{\lambda}{2y}$$

Cette fois c'est bon ! Si on revient à l'expression de la première page, on doit avoir

$$f(y) = \exp \left(\frac{y \cdot \theta - b(\theta)}{\phi} + c(y, \phi) \right),$$

et il reste juste à identifier. Pour le paramètre canonique $\theta = (-1/(2\mu^2))$ et pour le second terme, $b(\theta) = (-1/\mu)$, qu'on réécrit tout simplement $b(\theta) = -\sqrt{-2\theta}$, ce qui correspond à la réponse D. Accessoirement, le paramètre de nuisance est $\phi = 1/\lambda$.



16 Quelles sont les affirmations justes parmi les suivantes, au sujet de la sélection de variable par une méthode itérative, *forward stepwise*, qui serait déroulée sans critère d'arrêt ?

- (i) si p est le nombre de variables explicatives, il y a 2^{p-1} modèles à estimer
- (ii) la log-vraisemblance du modèle optimal à k variables (obtenu par l'approche *forward*) est plus petite que la log-vraisemblance du modèle optimal à $k + 1$ variables (obtenu par l'approche *forward*)
- (iii) les variables retenues dans le modèle optimal à k variables (obtenu par l'approche *forward*) est un sous-ensemble des variables retenues dans le modèle optimal à $k + 1$ variables (obtenu par l'approche *forward*)

A) (i) seulement

B) (ii) seulement

C) (iii) seulement

D) (i), (ii) et (iii)

E) aucune des propositions précédentes (ni A, ni B, ni C, ni D)

Il s'agissait d'un exercice ACTEX de 2018. L'affirmation (i) est fausse ! 2^{p-1} c'est le nombre de modèles à estimer en *best subset*, par en *stepwise* ! En *forward stepwise* on a

- 1 modèle à estimer, sans variable explicatives
- p modèles à estimer avec 1 seule variable explicative
- $p - 1$ modèles à estimer avec 2 variables explicatives (on a celle de l'étape précédente, et on rajoute individuellement parmi les $p - 1$ qui restent)
- $p - 2$ modèles à estimer avec 3 variables explicatives (on a celles de l'étape précédente, et on rajoute individuellement parmi les $p - 2$ qui restent)

· ...

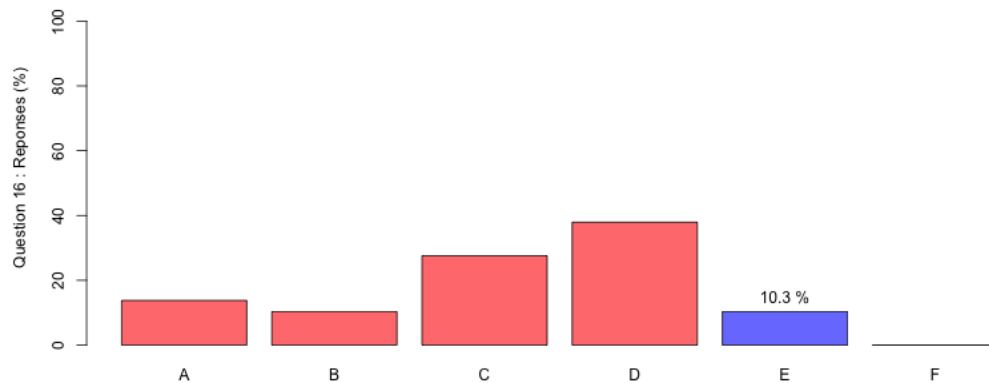
- 2 modèles à estimer avec $p - 1$ variables explicatives (on a celles de l'étape précédente, et on rajoute individuellement parmi les 2 qui restent)
- 1 modèle à estimer avec toutes les variables explicatives

soit

$$1 + \underbrace{p + (p - 1) + (p - 2) + \cdots + 2 + 1}_{= \frac{p(p+1)}{2}} = 1 + \frac{p(p+1)}{2}$$

(sans critère d'arrêt).

L'affirmation (iii) est vraie ! Les modèles construits par l'approche *forward* sont imbriqués, par construction... Et l'affirmation (ii) est une conséquence de (iii) donc elle est également valide. Il fallait donc retenir E.



- 17 On dispose de $n = 10$ observations (y_i, x_i) , avec $y \in \mathbb{N}$. Une régression de Poisson donne la sortie suivante

Call:

```
glm(formula = y ~ x, family = poisson)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	2.9320	0.1313	22.33	< 2e-16 ***
x	1.0877	0.1866	5.83	5.56e-09 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 43.5531 on 9 degrees of freedom
 Residual deviance: 7.8088 on 8 degrees of freedom
 AIC: 65.479

Le nuage des points $(x_{1,i}, x_{2,i})$ est représenté sur la figure page 2 (en bas). Représentez prévision $x \mapsto \mathbb{E}[Y|x]$ sur la Figure.

Comme on a une régression de Poisson, avec un lien logarithmique (je me répète probablement, mais c'est le lien canonique), donc l'estimateur de $\mathbb{E}[Y|x]$ est

$$\exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x)$$

Mais comme on est en échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées, on note que

$$\log(\mathbb{E}[Y|x]) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x$$

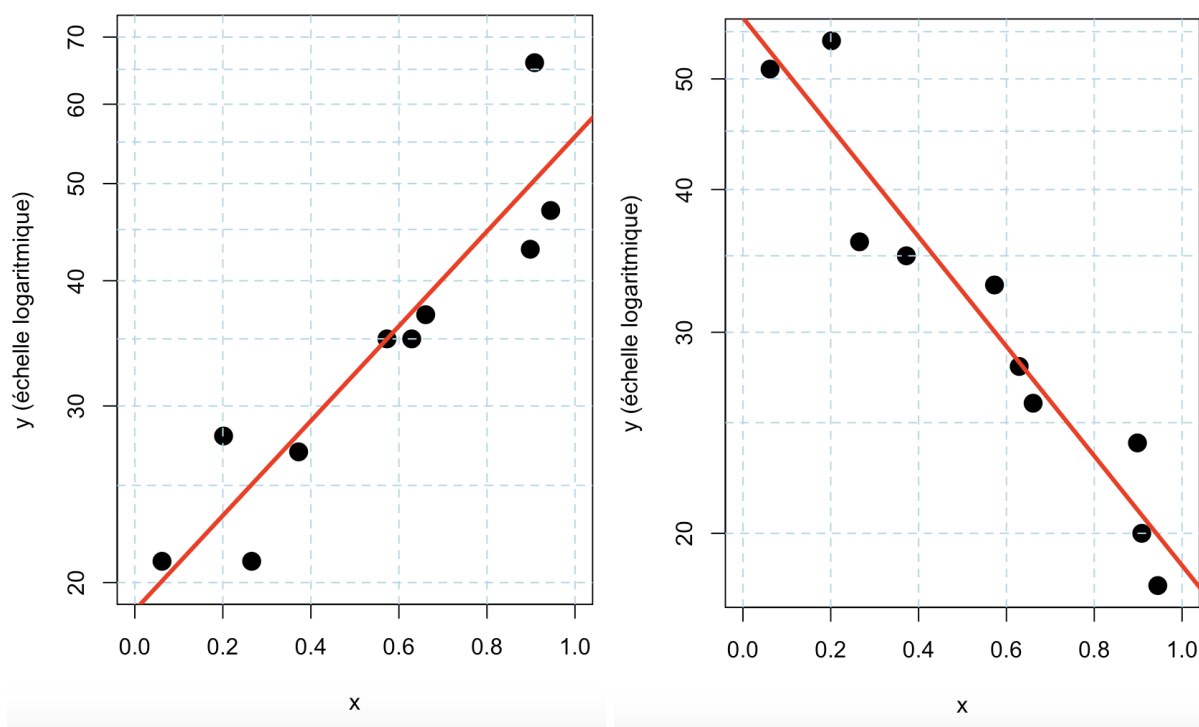
donc en fait, $x \mapsto \mathbb{E}[Y|x]$ est une droite (ce qui simplifie grandement le tracé ! Il suffit d'avoir deux points,

$$(0, \exp(\hat{\beta}_0)) = (0, e^{2.9320}) \sim (0, 18.76)$$

et

$$(1, \exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1)) = (1, e^{2.9320+1.0877}) \sim (1, 55.68)$$

Pour l'autre sujet (le sujet B), on avait une autre sortie, mais la prévision était encore une droite quand on est en échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées.



- 18 On considère un modèle GLM, avec une loi Gaussienne et une fonction de lien identité. Une des observations est $y_i = 805$ et le modèle prédit $\hat{y}_i = 740$. On sait de plus que $\hat{\sigma} = 44$. Quelle est la valeur du résidu de déviance $\hat{\varepsilon}_i^D$?

- A) 1.1
- B) 1.3
- C) 1.5

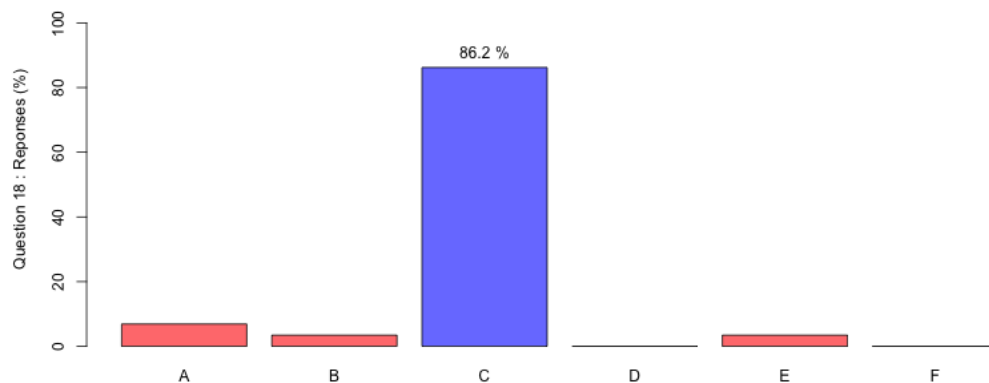
D) 1.7

E) 1.9

Il s'agit d'un exercice de l'examen MAS-I de la CAS de 2018. Pour rappel, les résidus de déviance sont égaux aux résidus de Pearson aux dans le cas du modèle Gaussien, qui correspondent aux résidus dit Studentisés, dans le modèle linéaire ! Aussi, ici,

$$\hat{\varepsilon}_i^D = \frac{y_i - \hat{y}_i}{\hat{\sigma}} = \frac{805 - 740}{44} = 1.477$$

ce qui correspond à la réponse C (classiquement, on retient la valeur la plus proche).



- 19 On essaye de modéliser la probabilité qu'une personne ait la grippe un hiver (y est ici grippe) à l'aide de trois variables explicatives, l'âge **Age** qui est une variable catégorielle prenant 2 modalités (Less25 (entre 0 et 25 ans) et More25 (plus de 25 ans)), une zone géographique (variable **Zone**) prenant trois modalités (A, B et C), et enfin **Income** qui est une variable numérique (correspondant à un montant en '000 de dollars).

Call:

```
glm(grippe ~ Age + PriorRate + Zone, Income = binomial(link = "probit"))
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	0.4270			
AgeMore25	0.1320			
ZoneB	0.0160			
ZoneC	-0.0920			
Income	0.0150			

Estimer la probabilité d'avoir la grippe pour un assuré de moins de 25 ans, habitant dans la zone C et ayant un revenu de \$ 22,500 ?

A) moins de 60%

B) entre 60% et 70%

C) entre 70% et 80%

D) entre 80% et 90%

E) au moins 90%

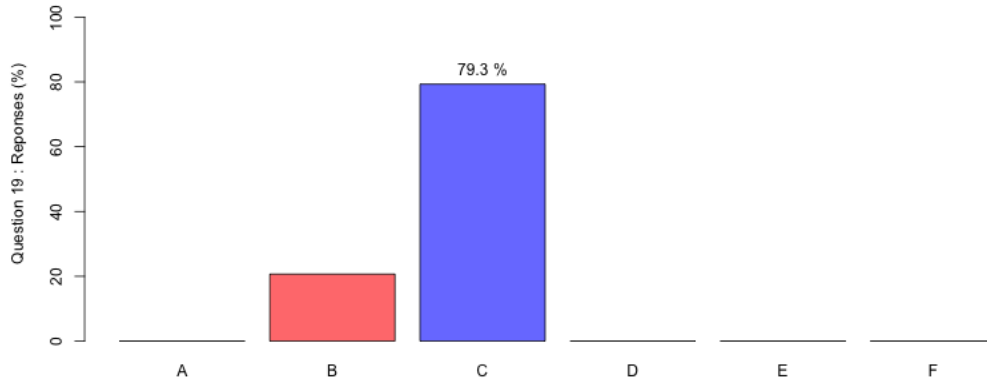
En utilisant la notation classique

$$g(\hat{p}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 0 + \hat{\beta}_2 \cdot 0 + \hat{\beta}_3 \cdot 1 + \hat{\beta}_4 \cdot \frac{22,5000}{1000} = 0.4270 - 0.0920 + 0.0150 \cdot 225 = 0.6725$$

or on a une régression *probit* donc $g = \Phi^{-1}$, donc $\hat{p} = \Phi(0.6725)$. Or page 1, si on reprend le tableau

	75%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%	99.95%
Loi normale	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

on a l'impression que $\Phi(0.6725) \sim 75\%$ - en réalité, la valeur exacte est 74.86% - ce qui correspond à la réponse C.



- 20 On suppose que Y suit une loi de la famille exponentielle, $\log f(y) = y \cdot \beta(\theta) + \gamma(\theta) + \delta(y)$, avec $\beta(\theta) = \log[\theta/(1 - \theta)]$ et $\gamma(\theta) = 20 \log(1 - \theta)$. Que vaut la variance de Y ?

- A) 20θ
- B) $\theta(1 - \theta)$
- C) $20\theta(1 - \theta)$
- D) $20\theta(1 + \theta)$
- E) $20\theta^2$

Il s'agit d'un exercice de l'examen de pratique MAS-I de la CAS. Attention, ce ne sont pas les formes usuelles de la loi exponentielle. Ici $\beta(\theta)$ est le paramètre canonique et γ correspond à la fonction usuelle b . En fait, on reconnaît la loi binomiale, et θ est le paramètre usuel de la loi de Bernoulli, i.e. la probabilité. Mais refaisons les calculs. Revenons à la base: on nous dit que $\log f(y) = y \cdot \beta(\theta) + \gamma(\theta) + \delta(y)$, donc

$$\frac{d}{d\theta} f(y) = [y\beta'(\theta) + \gamma'(\theta)]f(y)$$

donc

$$\int \frac{d}{d\theta} f(y) dy = \int [y\beta'(\theta) + \gamma'(\theta)] f(y) dy$$

soit

$$0 = \beta'(\theta) \int y f(y) dy + \gamma'(\theta) \int f(y) dy = \beta'(\theta) \cdot \mathbb{E}[Y] + \gamma'(\theta)$$

soit

$$\mathbb{E}[Y] = -\frac{\gamma'(\theta)}{\beta'(\theta)}$$

Allons un cran plus loin,

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f(y) = [y\beta''(\theta) + \gamma''(\theta)]f(y) + [y\beta'(\theta) + \gamma'(\theta)]^2 f(y)$$

i.e.

$$\int \frac{d^2}{d\theta^2} f(y) dy = \int [y\beta''(\theta) + \gamma''(\theta)]f(y) dy + \int [y\beta'(\theta) + \gamma'(\theta)]^2 f(y) dy$$

soit

$$0 = \beta''(\theta) \cdot \mathbb{E}[Y] + \gamma''(\theta) + (\beta'(\theta))^2 \int \left(y + \frac{\gamma'(\theta)}{\beta'(\theta)}\right) f(y) dy$$

aussi, on peut écrire

$$0 = -\beta''(\theta) \frac{\gamma'(\theta)}{\beta'(\theta)} + \gamma''(\theta) + (\beta'(\theta))^2 \text{Var}[Y]$$

soit

$$\text{Var}[Y] = \frac{\beta''(\theta)\gamma'(\theta) - \beta'(\theta)\gamma''(\theta)}{[\beta'(\theta)]^3}$$

Ici, $\beta(\theta) = \log[\theta/(1-\theta)]$ i.e. $\beta(\theta) = \log(\theta) - \log(1-\theta)$ de telle sorte que

$$\beta'(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

et

$$\beta''(\theta) = \frac{-1}{\theta^2} + \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

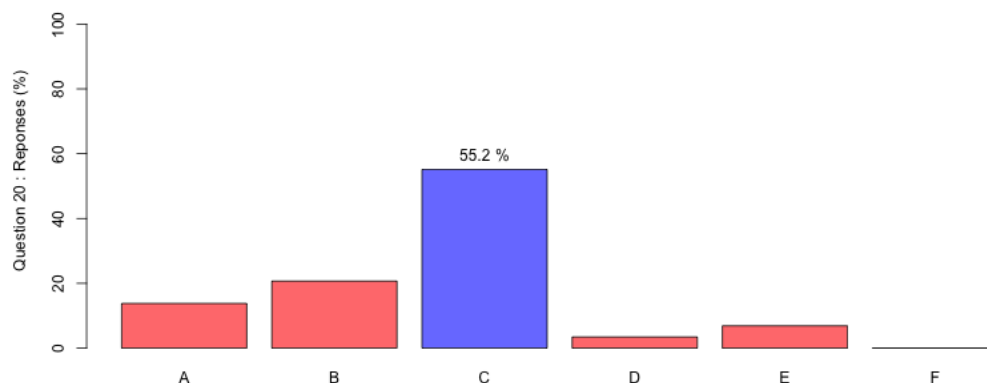
alors que $\gamma(\theta) = 20 \log(1-\theta)$, soit

$$\gamma'(\theta) = \frac{-20}{1-\theta} \text{ et } \gamma''(\theta) = \frac{-20}{(1-\theta)^2}$$

Aussi, en substituant

$$\text{Var}[Y] = \frac{\beta''(\theta)\gamma'(\theta) - \beta'(\theta)\gamma''(\theta)}{[\beta'(\theta)]^3} = \dots = 20\theta(1-\theta)$$

Bref, tout ça pour retrouver la formule de la variance d'une loi binomiale ! La bonne réponse était C.



21 On nous donne les informations suivantes sur une régression logistique, visant à prédire la probabilité d'avoir un accident en fonction de trois variables explicatives x_1 , x_2 et x_3 .

- la transformation logit de la probabilité diminue de 0.12 quand x_1 augmente de 1
- la dérivée du logarithme de la cote par rapport à x_2 vaut 0.23
- le logarithme de la cote d'un sinistre décroît de 0.34 quand x_3 augmente de 1
- quand $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, on prédit une probabilité de 50%.

Quelle est la probabilité d'avoir un accident quand $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$?

- A) 40%
- B) 50%
- C) 60%
- D) 70%
- E) 80%

Il s'agit d'un exercice ACTEX de 2018. Si \hat{p} est la probabilité prédite d'avoir un accident avec un modèle logistique

$$\text{logit}(\hat{p}) \log \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3$$

La première information qu'on nous donne est que $\hat{\beta}_1 = -0.12$. Pour la second information, notons que

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \log \underbrace{\frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}}}_{=\text{cote}} = \frac{\partial}{\partial x_2} \text{logit}(\hat{p}) = \hat{\beta}_2$$

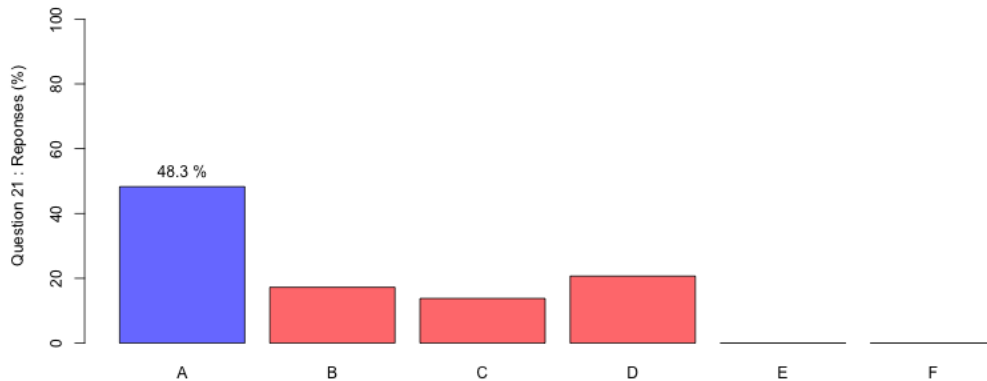
et donc $\hat{\beta}_2 = 0.23$. La troisième information qu'on nous donne est du même genre que la première, et donc $\hat{\beta}_3 = -0.34$. Et finalement, on nous dit que

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = \log 1 = 0$$

de telle sorte que $\hat{\beta}_0 = 0.23$. Maintenant que l'on a toutes les informations, on peut faire la prévision demandée,

$$\hat{p} = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 1 + \hat{\beta}_2 \cdot 2 + \hat{\beta}_3 \cdot 3}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 1 + \hat{\beta}_2 \cdot 2 + \hat{\beta}_3 \cdot 3}} = \frac{e^{-0.45}}{1 + e^{-0.45}} = 38.9\%$$

ce qui correspond à la réponse A.



- 22 On a compté le nombre de décès dans une population donnée, suivant deux critères : le genre - $x_1 \in \{H/F\}$ - et le lieu d'habitation - $x_2 \in \{A/B/C\}$,

N	A	B	C	total
F	21	19	56	96
H	29	33	84	146
total	50	52	140	242

Y	A	B	C	total
F	8	1	21	30
H	19	7	67	93
total	27	8	88	123

On suppose ici que $Y|N, x_1, x_2 \sim \mathcal{B}(N, p_{x_1, x_2})$.

On dispose de la sortie de régression suivante

Call:

```
glm(formula = y ~ x1 + x2, family = quasipoisson(link = "log"))
```

Coefficients:

```

              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -1.1047      0.1729  -6.388 8.77e-10 ***
x1H           0.7353      0.1466   5.014 1.04e-06 ***
x2B          -1.2914      0.2811  -4.594 7.07e-06 ***
x2C           0.1386      0.1536   0.902  0.368
---

```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be ?)

```

Null deviance: 166.48  on 241  degrees of freedom
Residual deviance: 131.26  on 238  degrees of freedom
AIC: NA

```

Number of Fisher Scoring iterations: 5

Donnez un ordre de grandeur pour la valeur du paramètre de dispersion ϕ

A) moins de 0.9

B) entre 0.9 et 1

C) exactement 1

D) entre 1 et 2

E) plus de 2

Il s'agissait d'un *sample exercice* pour MAS-I de la CAS. On n'a pas beaucoup d'information ici.. On nous donne

Residual deviance: 131.26 on 238 degrees of freedom

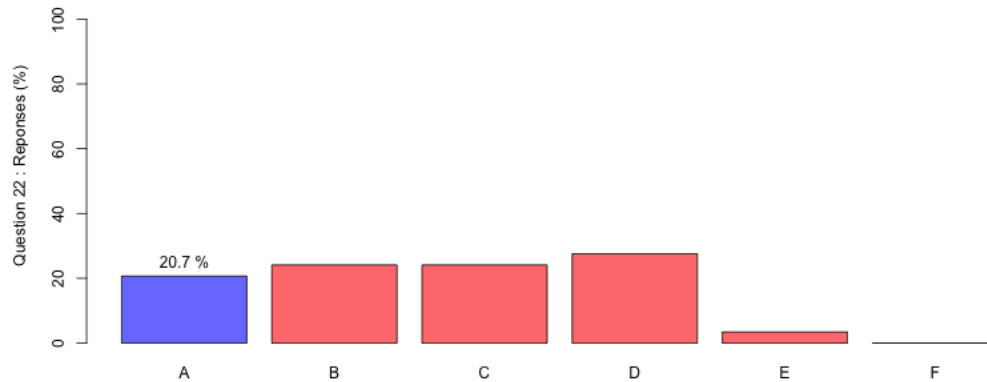
Classiquement, on utiliserait

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\text{degrés de libertés}} \sum \text{carrés des résidus de Pearson}$$

mais comme on a seulement la somme des carrés des résidus de déviance, on pourrait dire

$$\hat{\phi} \approx \frac{1}{\text{degrés de libertés}} \sum \text{carrés des résidus de Pearson} = \frac{238}{131.26} = 0.5515$$

donc a priori la réponse A est la plus crédible. En réalité, si on refait les calculs sur ordinateur, on obtient 0.4875992.



23 On dispose de la sortie de régression suivante

Call:

```
glm(formula = y ~ color + zone + Age, family = Gamma(link = "log"))
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	2.100			
colorBlack	1.200			
colorBlue	1.300			
colorGrey	2.000			
colorRed	1.406			
colorWhite	1.875			
zone2	7.678			
zone3	4.227			
zone4	1.336			
zone5	1.734			
AgeOld	1.800			
AgeYoung	2.000			

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 1.0000)

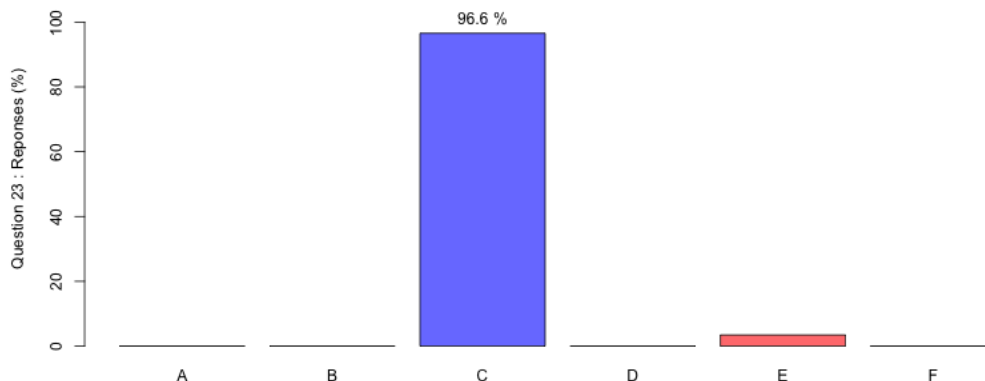
Calculer l'écart-type de la charge sinistre pour une observation dans la zone 1, pour un véhicule gris (Grey) et un conducteur d'âge intermédiaire (ni Old ni Young).

- A) moins de 55
- B) entre 55 et 60
- C) entre 60 et 65
- D) entre 65 et 70
- E) plus de 70

C'est une question de l'examen CAS-S de printemps 2016 (adapté). On a un lien log, ce qui signifie que

$$\log \hat{\mu} = 2.100 + 2.000 = 4.100$$

de telle sorte que $\hat{\mu} = \exp[4.1] \sim 60.340$. Or on sait que la fonction variance est μ^2 pour une loi Gamma, donc la variance serait 60.34^2 et l'écart-type $\sqrt{60.34^2} = 60.34$, qui correspond à la réponse C.



- 24 On obtient la sortie suivante dans une régression logistique, estimant la probabilité d'un sinistre en fonction du revenu hebdomadaire (`weekly_income`, en '000\$) et des dépenses hebdomadaires (`weekly_expenditure`, en '000\$).

Coefficients

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.3321			
weekly_income	-2.3700			
weekly_expenditure	4.0400			

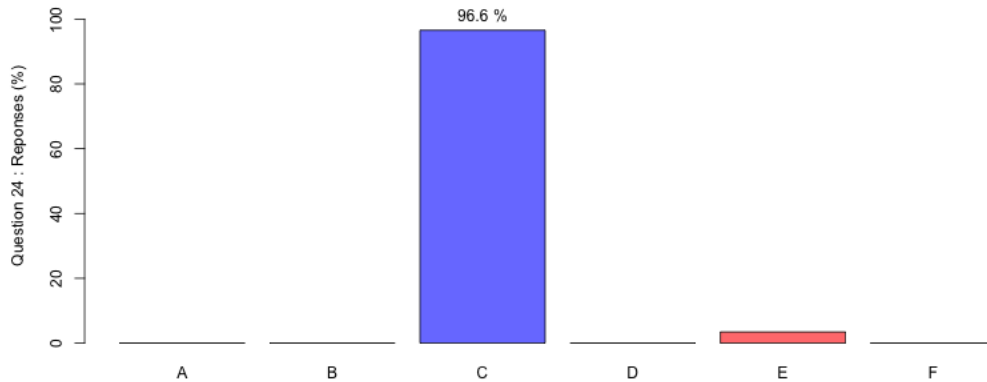
Quelle serait la probabilité d'avoir un sinistre pour un assuré ayant un revenu hebdomadaire de 518\$ et qui dépense, toutes les semaines, 50.2% de son revenu ?

- A) 46%
- B) 50%
- C) 54%
- D) 58%
- E) 62%

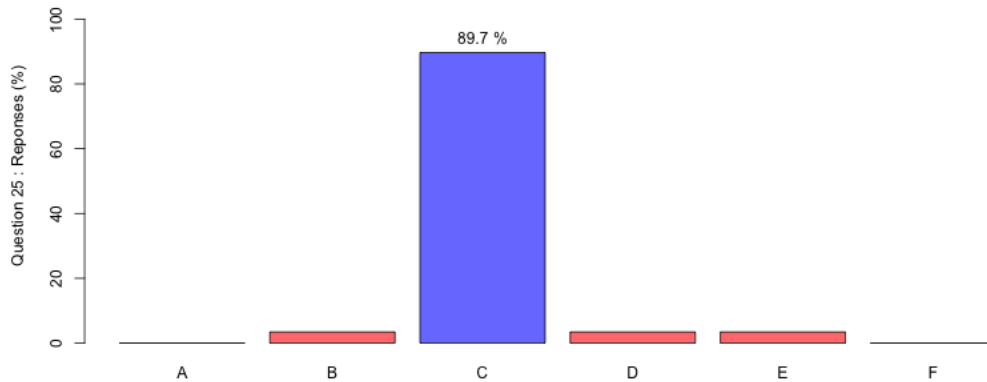
Il s'agissait d'un exercice ACTEX de 2018 (désolé pour la formulation un peu tortueuse). Sur le principe, il s'agit simplement de calculer une prévision pour x_1 (`weekly_income`, en '000\$) valant 0.518, et x_2 (`weekly_expenditure`, en '000\$) valant 50.2% de 0.518 soit 0.260. Comme on a un modèle logistique, on utilise

$$\mathbb{P}[Y = 1|x_1, x_2] = \frac{1}{1 + e^{-0.3321 - 2.3700 \times 0.518 + 4.0400 \times 0.260}} = \frac{1}{1 + e^{-0.154985}} = 0.5387$$

qui correspond à la réponse C.



- 25 Un actuair e souhaite pr drire une probabilité, à partir d'observations d'occurrence ($y = 1$) ou pas ($y = 0$) d'un  v nement. Il tente un modèle linéaire, et obtient des prévisions inférieures à 0 (pour certaines) ou supérieures à 1 (pour d'autres). Quelle solution serait la plus appropriée
- A) se limiter aux observations telle que la prévision soit comprise entre 0 et 1
 - B) transformer la prévision : toute prévision inférieure à 0 devient 0, et toute prévision supérieure à 1 devient 1
 - C) utiliser une régression probit afin de transformer le modèle linéaire en un modèle dont la prévision sera comprise entre 0 et 1
 - D) transformer la variable d'intérêt à l'aide la fonction de lien canonique du modèle binomial et estimer ensuite un modèle linéaire
 - E) aucune des propositions
- A) on évite de retirer des données, surtout *certaines* données car cela induit un biais dans les estimation. B) non, pour la même raison qu'auparavant. C) oui, c'est l'idée de la régression logistique. D) non ! la fonction de lien canonique c'est la fonction quantile de la loi logistique, i.e. $p \mapsto \log(p/(1 - p))$. Autrement dit, on transforme 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. On retient donc C.



26 Lors d'une enquête, une question propose les réponses suivantes, 'negatif', 'neutre' et 'positif'. On veut expliquer les choix à l'aide de trois variables,

- $x_1 = 1$ si la personne a étudié à l'université
- $x_2 = 1$ si la personne a de fortes convictions religieuses
- $x_3 = x_1 \cdot x_2$

Un modèle logistique-multinomial donne la sortie suivante ('positif' est ici la référence)

```
Coefficients (category 'negative')
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   -0.70
x1             -0.56
x2              1.45
x3            -0.28
```

```
Coefficients (category 'neutre')
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    0.60
x1            -1.25
x2              1.84
x3              0.23
```

Pour une personne ayant étudié à l'université et ayant de fortes convictions religieuse, quelle est la probabilité d'avoir un avis 'neutre' à la question ?

- A) moins de 35%
- B) entre 35% et 45%
- C) entre 45% et 55%
- D) entre 55% et 65%
- E) plus de 65%

On reconnaît la régression multinomiale logistique, et comme on l'avait vu en cours (et auparavant à l'exercice 6), le principe est que pour la modalité de référence, $\mathbb{P}[Y = \text{positive}|\mathbf{x}] \propto 1$ alors que $\mathbb{P}[Y = \text{negative}|\mathbf{x}] \propto \exp[\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\alpha}]$ et $\mathbb{P}[Y = \text{neutre}|\mathbf{x}] \propto \exp[\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}]$. Aussi, si on normalise, on a (par exemple)

$$\mathbb{P}[Y = \text{neutre}|\mathbf{x}] = \frac{\exp[\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}]}{1 + \exp[\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\alpha}] + \exp[\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}]}$$

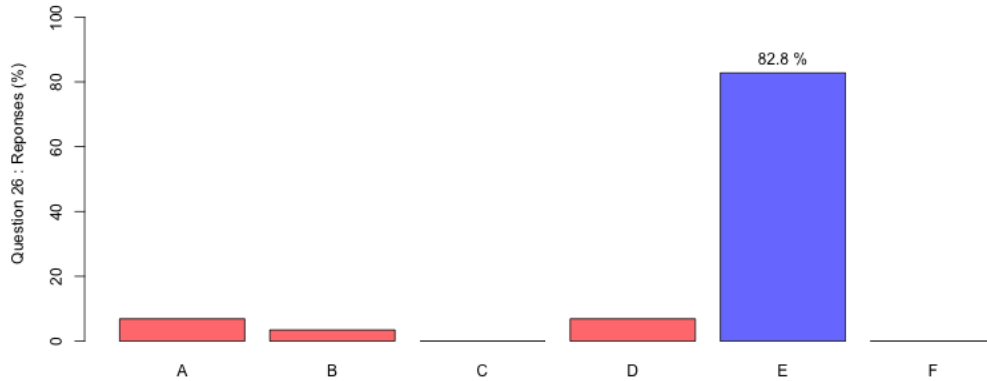
Pour avoir la valeur de la prévision, on se place en $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$, autrement dit, on doit calculer l'exponentielle de la somme des quatre coefficients,

$$\exp(-0.7 - 0.56 + 1.45 - 0.28) = 0.9139312 \text{ et } \exp(0.60 - 1.25 + 1.84 + 0.23) = 4.13712$$

donc ici l'estimateur de $\mathbb{P}[Y = \text{neutre}|\mathbf{x}]$ est

$$\frac{4.13712}{1 + 4.13712 + 0.9139312} \sim 68.37\%$$

On retiendra donc la réponse E.



- 27 On a construit un modèle logistique pour modéliser la probabilité d'avoir un incendie dans un logement, à l'aide d'une variable explicative x correspondant au nombre de pièces du logement. Pour 3 pièces, la probabilité est de 6%, contre 7% pour 4 pièces. Que vaut le paramètre $\hat{\beta}_0$ associé à la constante dans la régression logistique ?

- A) moins de -5
- B) entre -5 et -4.5
- C) entre -4.5 et -4
- D) entre -4 et -3.5
- E) plus de -3.5

Il s'agissait d'un exercice (adapté) de l'examen MAS-I de la CAS du printemps 2019. On sait que

$$\text{logit}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 3) = 0.06 \text{ et } \text{logit}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 5) = 0.07$$

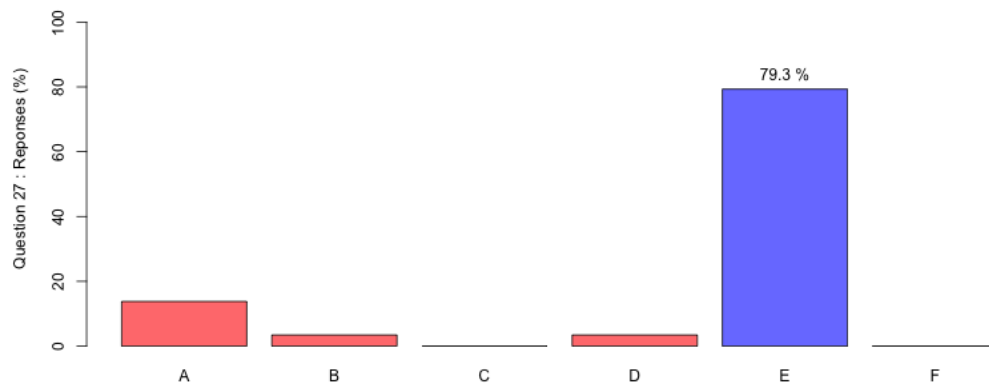
donc

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 3 = \log \frac{0.06}{1 - 0.06} \text{ et } \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot 4 = \log \frac{0.07}{1 - 0.07}$$

Par soustraction, on en déduit que $\hat{\beta}_1 = 0.164846$ et donc

$$\hat{\beta}_0 = \log \frac{0.06}{1 - 0.06} - \hat{\beta}_1 \cdot 3 = -2.751535 - 3 \times 0.164846 = -3.24607$$

ce qui correspond à la réponse E.



Les question 28 à 30 sont basées sur les deux sorties de régression suivantes

Deux modèles de Poisson sont envisager pour modéliser une variable de comptage y en fonction de trois variables continues x_1 , x_2 et x_3 . Le modèle (123) est

Call:

```
glm(formula = y ~ x1+x2+x3, family = poisson)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	1.7719	0.8910	1.989	0.0467 *
X1	1.6350	15.3774	0.106	0.9153
X2	1.0897	0.1035	10.528	<2e-16 ***
X3	-4.1656	30.7287	-0.136	0.8922

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 269.730 on 19 degrees of freedom

Residual deviance: 16.068 on 16 degrees of freedom

AIC: 73.272

et le modèle (13) est

Call:

```
glm(formula = y ~ x1+x3, family = poisson)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-0.8354	0.5813	-1.437	0.151
X1	68.8018	14.2170	4.839	1.30e-06 ***
X3	-136.0553	28.5669	-4.763	1.91e-06 ***

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 269.73 on 19 degrees of freedom

Residual deviance: 190.89 on 17 degrees of freedom

AIC: 246.10

- 28 On considère une nouvelle observation, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 1)$, et on note $\hat{y}_{(123)}$ et $\hat{y}_{(13)}$ les prévisions avec les deux modèles. Que vaut $\hat{y}_{(123)} - \hat{y}_{(13)}$?

- A) moins de 0
- B) entre 0 et 10
- C) entre 10 et 20
- D) entre 20 et 50
- E) plus de 50

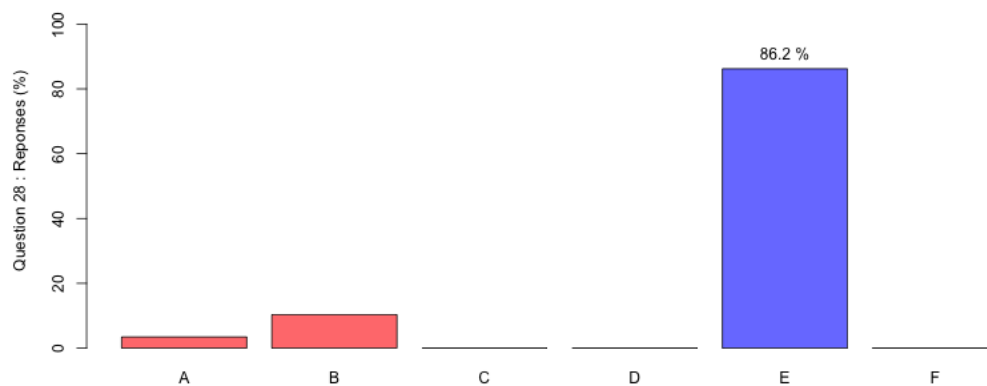
On a ici deux régressions de Poisson, on devrait pouvoir y arriver.

$$\hat{y}_{(123)} = \exp[\mathbf{x}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}] = \exp[1.7719 + 1.6350 \times 2 + 1.0897 \times 3 - 4.1656 \times 1] = \exp[4.14556] = 63.15$$

alors que

$$\hat{y}_{(13)} = \exp[\mathbf{x}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}] = \exp[-0.8354 + 68.8018 \times 2 - 136.0553 \times 1] = \exp[0.7129] = 2.04$$

ce qui fait une différence de l'ordre de 60, ce qui est la réponse E.



- 29 Dans le premier modèle, donner un intervalle de confiance (approximatif) à 95% où devrait se trouver y , pour une observation $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 1)$ (on retiendra les valeurs les plus proches)

A) [62.3, 63.9]
 B) [60, 66]
 C) [55, 70]
 D) [48, 80]
 E) [30, 100]

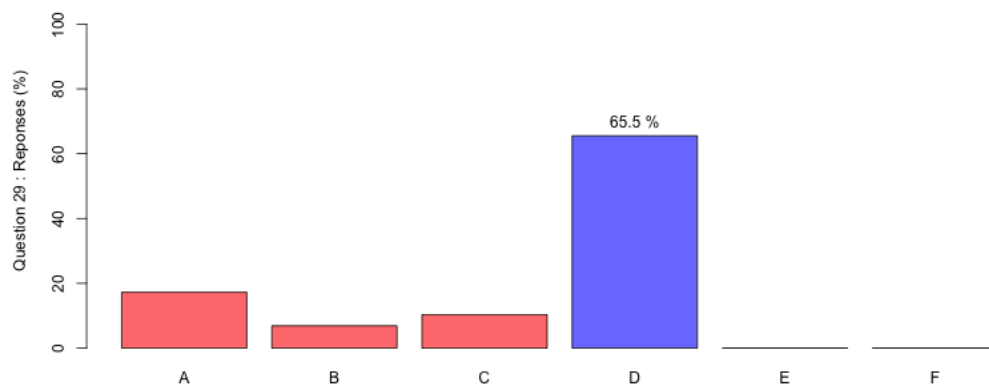
Pour rappel, Y suit une loi de Poisson de paramètre 63.15, d'après la question précédente. On peut alors utiliser une approximation Gaussienne de la loi de Poisson,

$$\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

donc un intervalle de confiance (approximatif) à 95% sera de la forme

$$\left[\hat{\lambda} \pm 1.96\sqrt{\hat{\lambda}} \right] = \left[63.15 \pm 1.96\sqrt{63.15} \right] = [47.57; 78.73]$$

Pour information, si on regarde les quantiles à 2.5% et 97.5% de la loi de Poisson de paramètre 63.15, on obtient [48, 79]. La bonne réponse sera ici la réponse D.



- 30 Avec le second modèle, on sait que la somme des carrés des résidus de Pearson vaut 211.9841. Si on faisait une régression *quasi-Poisson*, donnez la valeur de $\hat{\phi}$

Call:

```
glm(formula = y ~ x1+x3, family = quasipoisson)
```

(Dispersion parameter for poisson family taken to be ?)

A) moins de 0.9
 B) entre 0.9 et 1.1
 C) entre 1.1 et 2.0

D) entre 2 et 10

E) plus de 10

Dans la sortie initiale, on nous disait

Residual deviance: 190.89 on 17 degrees of freedom

On nous dit maintenant que la somme des carrés des résidus de Pearson vaut 211.9841. On utilise alors

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\text{degrés de liberté}} \sum \text{carrés des résidus de Pearson} = \frac{211.9841}{17} = 12.46965$$

ce qui correspond à la réponse E. Pour information, ces trois questions venaient d'une partie d'un exercice du cours *Applied Statistical Regression* à l'ETH Zürich (de 2011).

