

Modèles Linéaires Appliqués / Régression Famille Exponentielle

Arthur Charpentier

UQAM

Hiver 2020 - COVID-19 # 12



Famille Exponentielle

On suppose que Y admet pour 'densité'

$$f(y|\theta, \varphi) = \exp \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi) \right),$$

où $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sont des fonctions, et où θ est appelé **paramètre naturel** et φ est appelé **paramètre de nuisance**.

On peut aussi écrire

$$dF(y|\theta, \varphi) = \exp \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi) \right) d\mu(x)$$

par rapport à une mesure de référence μ , cf **famille exponentielle**.

Famille Exponentielle

$$f(y|\theta, \varphi) = \exp \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi) \right),$$

Exemple La loi Gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(y|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^2 \right)$$

$$f(y|\mu, \sigma^2) = \exp \left(\frac{-y^2 + 2y\mu - \mu^2}{2\sigma^2} + \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)$$

soit $\theta = \mu$, $\varphi = \sigma^2$, $a(\varphi) = \varphi$, $b(\theta) = \theta^2/2$

Famille Exponentielle

$$f(y|\theta, \varphi) = \exp \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi) \right),$$

Exemple La loi de **Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$

$$f(y|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} = \exp(-\lambda + y \log \lambda - \log(y!))$$

$$f(y|\lambda) = \exp \left(\frac{y \log \lambda - \lambda}{1} - \log(y!) \right)$$

soit $\theta = \log \lambda$, $\varphi = 1$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = \lambda = e^\theta$

Famille Exponentielle

$$f(y|\theta, \varphi) = \exp \left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y, \varphi) \right),$$

Exemple La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

$$f(y|\lambda) = p^y(1-p)^{1-y} = \exp(y \log p + (1-y) \log(1-p))$$

$$f(y|\lambda) = \exp \left(\frac{y[\log p - \log(1-p)] + \log(1-p)}{1} \right)$$

soit $\theta = \log \frac{p}{1-p}$, $\varphi = 1$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = \log(1 + e^\theta)$

$$\text{Ici } p = \frac{e^\theta}{1 + e^\theta}.$$

Famille Exponentielle

Exemple La loi **Gaussienne** de moyenne μ et de variance σ^2 , $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ appartient à cette famille, avec $\theta = \mu$, $\varphi = \sigma^2$, $a(\varphi) = \varphi$, $b(\theta) = \theta^2/2$ et

$$c(y, \varphi) = -\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2) \right), \quad y \in \mathbb{R},$$

Exemple La loi de **Bernoulli** de moyenne π , $\mathcal{B}(p)$ correspond au cas $\theta = \log\{p/(1-p)\}$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = \log(1 + \exp(\theta))$, $\varphi = 1$ et $c(y, \varphi) = 0$.

Exemple La loi **binomiale** de moyenne $n\pi$, $\mathcal{B}(n, p)$ correspond au cas $\theta = \log\{p/(1-p)\}$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = n \log(1 + \exp(\theta))$, $\varphi = 1$ et $c(y, \varphi) = \log \binom{n}{y}$.

Famille Exponentielle

Exemple La loi de **Poisson** de moyenne λ , $\mathcal{P}(\lambda)$ appartient à cette famille,

$$f(y|\lambda) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^y}{y!} = \exp\left(y \log \lambda - \lambda - \log y!\right), \quad y \in \mathbb{N},$$

avec $\theta = \log \lambda$, $\varphi = 1$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = \exp \theta = \lambda$ et $c(y, \varphi) = -\log y!$.

Exemple La loi **Gamma** (incluant la loi **exponentielle**) de moyenne μ et de variance ν^{-1} ,

$$f(y|\mu, \nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^\nu y^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\nu}{\mu}y\right), \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

est également dans la famille exponentielle. Il faut choisir $\theta = -\frac{1}{\mu}$,

$a(\varphi) = \varphi$, $b(\theta) = -\log(-\theta)$, $\varphi = \nu^{-1}$ et

$$c(y, \varphi) = \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right) \log(y) - \log\left(\Gamma\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)$$

Famille Exponentielle

Pour une variable aléatoire Y de la famille exponentielle, alors

$$\mathbb{E}(Y) = b'(\theta) \text{ et } \text{Var}(Y) = b''(\theta)\varphi,$$

cf propriétés du score :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial \log f(Y, \theta)}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$\text{Var}\left(\frac{\partial \log f(Y, \theta)}{\partial \theta}\right) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log f(Y, \theta)}{\partial \theta^2}\right)$$

avec ici $\log f(y, \theta) = \frac{y\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y, \varphi)$ et

$$\frac{\partial \log f(y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{y - b'(\theta)}{\varphi} \text{ et } \frac{\partial^2 \log f(y, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-b''(\theta)}{\varphi}$$

Famille Exponentielle

On définit la **fonction variance** V par

$$V(\mu) = b''([b']^{-1}(\mu)) \text{ et } \text{Var}(Y) = \varphi V(\mu)$$

Exemple Dans le cas de la loi normale, $V(\mu) = 1$, dans le cas de la loi de Poisson, $V(\mu) = \mu$ alors que dans le cas de la loi Gamma, $V(\mu) = \mu^2$.

Famille Exponentielle

Tweedie (1984) a suggéré la famille suivante

$$f(y|\mu, \varphi) = A(y, \varphi) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\varphi} [y\theta(\mu) - \kappa(\theta(\mu))] \right\},$$

où

$$\theta(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \log \mu & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \kappa(\theta(\mu)) = \begin{cases} \frac{\mu^{2-\gamma}}{2-\gamma} & \text{si } \gamma \neq 2 \\ \log \mu & \text{si } \gamma = 2 \end{cases}$$

La loi de Y est alors une loi Poisson composée à sauts Gamma,

$$Y \sim \mathcal{CPoi} \left(\mu^{2-\gamma} \varphi (2-\gamma), \mathcal{G} \left(-\frac{2-\gamma}{\varphi(1-\gamma)}, \varphi(2-\gamma) \mu^{\gamma-1} \right) \right),$$

lorsque $\gamma \in [1, 2]$, et $V(\mu) = \mu^\gamma$.

