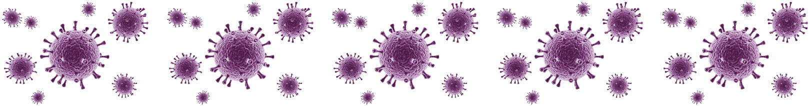
Modèles Linéaires Appliqués / Régression
Famille Exponentielle

Arthur Charpentier

UQAM

Hiver 2020 - COVID-19 # 12



Famille Exponentielle

On suppose que Y admet pour 'densité'

$$f(y|\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right),$$

où $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sont des fonctions, et où θ est appelé paramètre naturel et φ est appelé paramètre de nuisance.
On peut aussi écrire

$$dF(y|\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right) d\mu(x)$$

par rapport à une mesure de référence μ, cf famille exponentielle.

$$f(y|\theta,\varphi)=\exp\left(\frac{y\theta-b(\theta)}{a(\varphi)}+c(y,\varphi)\right),$$

Exemple La loi Gaussienne $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$$f(y|\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$f(y|\mu,\sigma^2)=\exp\left(\frac{-y^2+2y\mu-\mu^2}{2\sigma^2}+\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

soit $\theta=\mu$, $\varphi=\sigma^2$, $a(\varphi)=\varphi$, $b(\theta)=\theta^2/2$

$$f(y|\theta,\varphi)=\exp\left(\frac{y\theta-b(\theta)}{a(\varphi)}+c(y,\varphi)\right),$$

Exemple La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$f(y|\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}=\exp\left(-\lambda+y\log\lambda-log(y!)\right)$$

$$f(y|\lambda)=\exp\left(\frac{y\log\lambda-\lambda}{1}-\log(y!)\right)$$

soit $\theta=\log\lambda$, $\varphi=1$, $a(\varphi)=1$, $b(\theta)=\lambda=e^\theta$

Famille Exponentielle

$$f(y|\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right),$$

Exemple La loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

$$f(y|\lambda) = p^y(1-p)^{1-y} = \exp\left(y\log p + (1-y)\log(1-p)\right)$$

$$f(y|\lambda) = \exp\left(\frac{y[\log p - \log(1-p)] + \log(1-p)}{1}\right)$$

soit $\theta = \log\dfrac{p}{1-p}$, $\varphi = 1$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = \log\left(1+e^\theta\right)$

Ici $p = \dfrac{e^\theta}{1+e^\theta}$.

Famille Exponentielle

Exemple La loi BrickRed de moyenne μ et de variance σ^2, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ appartient à cette famille, avec $\theta=\mu$, $\varphi=\sigma^2$, $a(\varphi)=\varphi$, $b(\theta)=\theta^2/2$ et

$$c(y,\varphi)=-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}+\log(2\pi\sigma^2)\right),\ \ y\in\mathbb{R},$$

Exemple La loi de Bernoulli de moyenne π, $\mathcal{B}(p)$ correspond au cas $\theta=\log\{p/(1-p)\}$, $a(\varphi)=1$, $b(\theta)=\log(1+\exp(\theta))$, $\varphi=1$ et $c(y,\varphi)=0$.

Exemple La loi binomiale de moyenne $n\pi$, $\mathcal{B}(n,p)$ correspond au cas $\theta=\log\{p/(1-p)\}$, $a(\varphi)=1$, $b(\theta)=n\log(1+\exp(\theta))$, $\varphi=1$ et $c(y,\varphi)=\log\binom{n}{y}$.

Exemple La loi de Poisson de moyenne λ, $\mathcal{P}(\lambda)$ appartient à cette famille,

$$f(y|\lambda) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^y}{y!} = \exp\Big(y\log\lambda - \lambda - \log y!\Big), \quad y \in \mathbb{N},$$

avec $\theta = \log\lambda$, $\varphi = 1$, $a(\varphi) = 1$, $b(\theta) = \exp\theta = \lambda$ et $c(y,\varphi) = -\log y!$.

Exemple La loi Gamma (incluant la loi exponentielle) de moyenne μ et de variance ν^{-1},

$$f(y|\mu,\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\nu} y^{\nu-1}\exp\left(-\frac{\nu}{\mu}y\right), \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

est également dans la famille exponentielle. Il faut choisir $\theta = -\dfrac{1}{\mu}$, $a(\varphi) = \varphi$, $b(\theta) = -\log(-\theta)$, $\varphi = \nu^{-1}$ et

$$c(y,\varphi) = \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right)\log(y) - \log\left(\Gamma\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)$$

Famille Exponentielle

Pour une variable aléatoire Y de la famille exponentielle, alors

$$\mathbb{E}(Y) = b'(\theta) \text{ et } \mathrm{Var}(Y) = b''(\theta)\varphi,$$

cf propriétés du score :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial \log f(Y,\theta)}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial \log f(Y,\theta)}{\partial\theta}\right) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log f(Y,\theta)}{\partial\theta^2}\right)$$

avec ici $\log f(y,\theta) = \dfrac{y\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y,\varphi)$ et

$$\frac{\partial \log f(y,\theta)}{\partial\theta} = \frac{y - b'(\theta)}{\varphi} \text{ et } \frac{\partial^2 \log f(y,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{-b''(\theta)}{\varphi}$$

Famille Exponentielle

On définie la fonction variance V par

$$V(\mu) = b''([b']^{-1}(\mu)) \text{ et } \mathrm{Var}(Y) = \varphi \mathrm{V}(\mu)$$

Exemple Dans le cas de la loi normale, $V(\mu) = 1$, dans le cas de la loi de Poisson, $V(\mu) = \mu$ alors que dans le cas de la loi Gamma, $V(\mu) = \mu^2$.

Tweedie (1984) a suggéré la famille suivante

$$f(y|\mu,\varphi) = A(y,\varphi)\cdot\exp\left\{\frac{1}{\varphi}\Big[y\theta(\mu)-\kappa(\theta(\mu))\Big]\right\},$$

où

$$\theta(\mu) = \begin{cases}\dfrac{\mu^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{si } \gamma\neq 1\\ \log\mu & \text{si } \gamma = 1\end{cases} \text{ et } \kappa(\theta(\mu)) = \begin{cases}\dfrac{\mu^{2-\gamma}}{2-\gamma} & \text{si } \gamma\neq 2\\ \log\mu & \text{si } \gamma = 2\end{cases}$$

La loi de Y est alors une loi Poisson composée à sauts Gamma,

$$Y \sim \mathcal{CP}oi\left(\mu^{2-\gamma}\varphi(2-\gamma),\mathcal{G}\left(-\frac{2-\gamma}{\varphi(1-\gamma)},\varphi(2-\gamma)\mu^{\gamma-1}\right)\right),$$

lorsque $\gamma\in[1,2]$, et $V(\mu)=\mu^{\gamma}$.