Modèles Linéaires Appliqués

Arthur Charpentier

Automne 2020

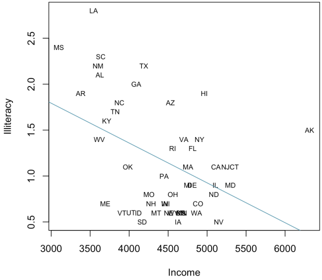
OLS #12 (régression pondérée / WLS)

Individu = État (U.S.A.)

Dans certains cas, un individu i peut être consister en une aggrégation de données, e.g. pour un état i

$$y_i = \frac{1000}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{j:i} \text{ et } x_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{j:i}$$

```
> US = read.table("http://freakonometrics.free.fr/US.txt",header=TRUE,sep=";")
> with(US,plot(Income,Illiteracy))
> abline(lm(Illiteracy~Income,data=US))
```



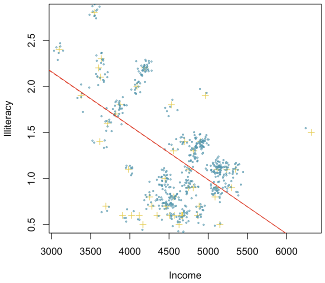
Ne devrait-on pas tenir compte de la taille des états dans la régression ?

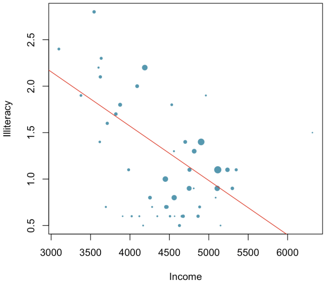
Individu = État (U.S.A.)

On peut générer des fausses données individuelles, où les $y_{j:i} = Y_i$ (+ bruit ?) et faire la régression sur les $y_{j:i}$, ou

```
> str(US)
'data.frame': 50 obs. 8 variables:
 $ Population: int  3615 365   ...
 $ Income    : int  3624 6315 ...
 $ Illiteracy: num  2.1 1.5    ...
> abline(lm(Illiteracy~Income,data=
    US,weights=Population))
```

Le poids ω_i est ici la population de l'état.





Individu = État (U.S.A.)

Au lieu de $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{x}_i^\top\boldsymbol{\beta})^2$, on considère $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y_i - \mathbf{x}_i^\top\boldsymbol{\beta})^2$,

$$W(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^\top\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta),\ \boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\boldsymbol{\omega})$$

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}\beta \text{ et } \frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^\top} = 2\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}.$$

Aussi,

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}\beta = \mathbf{0} \text{ si } \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Y}$$

Si $\boldsymbol{\Omega}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\boldsymbol{\omega}})$, posons $\tilde{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Omega}^{1/2}\mathbf{X}$ et $\tilde{\mathbf{Y}} = \boldsymbol{\Omega}^{1/2}\mathbf{Y}$,

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Y} = (\tilde{\mathbf{X}}^\top\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{X}}^\top\tilde{\mathbf{Y}}$$