Modèles Linéaires Appliqués

Arthur Charpentier

Automne 2020

Rappels #3.2 (statistique & maximum de vraisemblance)

Parametric Statistical Models

A family of distributions $\mathcal{F}=\{F_{\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{\theta}\in\Theta\}$ is identifiable if if the mapping $\boldsymbol{\theta}\mapsto F_{\boldsymbol{\theta}}$ is one-to-one:

$$F_{\boldsymbol{\theta}_1}=F_{\boldsymbol{\theta}_2}\ \text{ implies }\ \boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_2.$$

Example The Gaussian distribution, $\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$,
$f_{\boldsymbol{\theta}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$. If $f_{\boldsymbol{\theta}_1}=f_{\boldsymbol{\theta}_2}$ then

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2\right)$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2+\ln\sigma_1=\frac{1}{\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2+\ln\sigma_2$$

$$x^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right)-2x\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}-\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\right)+\left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}-\frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2}+\ln\sigma_1-\ln\sigma_2\right)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

hence $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ and $\mu_1=\mu_2$.

Parametric Statistical Models

Example Mixture of two distributions :
$\boldsymbol{\theta} = (p, \lambda, \mu)^\top \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(x) = p \cdot \left(\lambda e^{-\lambda x}\right) + (1-p) \cdot \left(\mu e^{-\mu x}\right)$$

Observe that $\boldsymbol{\theta}_1 = (p, \lambda, \mu)$ and $\boldsymbol{\theta}_2 = (1-p, \mu, \lambda)$ yield the same distributions, since $f_{\boldsymbol{\theta}_1}(x) = f_{\boldsymbol{\theta}_2}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.
It is necessary to add a (linear) constraint : either $p > 1-p$ or $\lambda > \mu$.

Here we want to solve $\min\left\{\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})\right\}$ for $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ subject to $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \geq \mathbf{b}$ for some $k \times p$ matrix $\mathbf{A}$ and k dimensional vector $\mathbf{b}$.

Parametric Statistical Models

$\boldsymbol{\theta} = (p, \lambda, \mu)^\top \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, and $\lambda > \mu$

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(x) = p \cdot \left(\lambda e^{-\lambda x}\right) + (1-p) \cdot \left(\mu e^{-\mu x}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -p \\ \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq 1 \\ \mu \geq 0 \\ \lambda \geq \mu \end{cases}$$

```
logL = function(param){
-sum(log(param[1]*dexp(X,param[2])+(1-param[1])*dexp(X
    ,param[3])))
}
Amat = matrix(c(1,-1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,-1), 4, 3)
bvec = c(0,-1,0,0)
constrOptim(c(.25,2,.5), logL, NULL, ui = Amat, ci =
    bvec)$par
```

Parametric Statistical Models

- Un estimateur, T, de θ est dit sans biais, ou non biaisé, si $\mathbb{E}(T) = \theta$. Autrement dit, le biais,

$$\text{biais}(\theta) = \mathbb{E}(T) - \theta = 0$$

- Risque quadratique d'un estimateur T de θ:

$$R(T, \theta) = \mathbb{E}\big[(T - \theta)^2\big]$$

On a

$$R(T, \theta) = b(\theta)^2 + \mathrm{Var}_\theta(T)$$

(pour un estimateur sans biais, $R(T, \theta) = \text{Var}_\theta(T)$)

- Soient T_1 et T_2 deux estimateurs de θ. On dira que T_1 est plus efficace que T_2 si $R(T_1, \theta) \leq R(T_2, \theta)$.

Parametric Statistical Models

On dit que la suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geq 1}$ d'estimateurs de θ est

- convergente, si $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ pour tout $\theta \in \Theta$.
- fortement convergente, si $T_n \xrightarrow{p.s.} \theta$ pour tout $\theta \in \Theta$.
- asymptotiquement normale, si pour tout $\theta \in \Theta$, il existe une matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}(\theta)$ telle que

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \boldsymbol{\Sigma}(\theta))$$

lorsque $n \to \infty$.

Parametric Statistical Models

Soit X une v.a. continue à valeurs dans $\mathcal{X}$. On suppose:
(i) $\{x\in\mathcal{X}: f(x;\theta)>0\}$ ne dépend pas de $\theta\in\Theta$.
(ii) La fonction $\theta\mapsto f(x;\theta)$ est $\mathcal{C}^2$ sur Θ.
(iii) $\forall A\subseteq\mathcal{X}$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_A f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_A\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)\mathrm{d}x$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\theta^\top}\int_A f(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_A\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\theta^\top}f(x;\theta)\mathrm{d}x.$$

(iv) La statistique $T(\mathbf{X})$ est de carré intégrable: elle satisfait $\mathbb{E}_\theta(T(\mathbf{X})^2)<\infty$ et

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbb{E}_\theta(T(\mathbf{X}))=\int_{\mathcal{X}^n}T(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial\theta}f(\mathbf{x};\theta)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n.$$

(v) Si T_n est un estimateur sans biais de θ alors

$$\text{Var}(T_n) \geq I_n^{-1}(\theta) = \frac{1}{n} I^{-1}(\theta)$$

CoMPLETER