# ACT2040 : actuariat IARD 2

Examen Intra - session automne

Mardi 1er Novembre 2011

## Instructions générales

L'examen débute à 9 :00 et se termine à 12 :00.

Aucune feuille aide-mémoire n'est autorisée.

Sueles les modèles de calculatrices suivants sont acceptés : Texas Instruments BA-35, BA II Plus, BA II Plus Professional ,TI-30Xa, TI-30X ISS (ou IIB), TI-30XS (ou XB) MultiView.

Inscrivez vos réponses dans le cahier-réponses.

Pour chaque question, des points seront attribués à la justification et à la clarté de la solution et des calculs.

Les trois exercices sont indépendants. L'examen contient 40 points, et compte pour 20% de la note finale du cours.

## Notations

Pour rappel, une loi de la famille exponentielle s'écrit

$$f(y;\theta,\varphi)=\exp\left(\frac{y\theta-b(\theta)}{\varphi}+c(y,\varphi)\right)$$

On notera $h(\cdot)$ l'inverse de la fonction de lien canonique, au sens où $\mu=\mathbb{E}(Y)=h(\theta)$, et $g(\cdot)$ la fonction de lien canonique, au sens où $g=h^{-1}$. On appelera $V$ la fonction variance, au sens où $Var(Y)=V(\mathbb{E}(Y))$.

Dans les exercices, nous considérerons des échantillons $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})=((Y_1,\boldsymbol{X}_1),\cdots,(Y_n,\boldsymbol{X}_n))$ où $Y_i$ a pour loi $f(y;\theta_i,\varphi)$, où $\theta_i=\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\beta}$. On note $\mathcal{L}(\theta,\varphi;\boldsymbol{Y})$ la vraisemblance associée. On notera $\widehat{\theta}$ et $\widehat{\varphi}$ les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres $\theta$ et $\varphi$ respectivement. On note $\widehat{Y}_i$ la prédiction faite par le modèle, i.e. $\widehat{Y}_i=h(\widehat{\theta}_i)$. Enfin, on appelera déviance la quantité

$$D=2(\log[\mathcal{L}(g(\boldsymbol{Y}),\widehat{\varphi};\boldsymbol{Y})]-\log[\mathcal{L}(g(\widehat{\boldsymbol{Y}}),\widehat{\varphi};\boldsymbol{Y})]),$$

où log désigne le logarithme népérien.

## Exercice 1 [12 pts]

On consière la loi exponentielle définie sur $\mathbb{R}$, par $b(\theta) = \theta^2/2$ et $c(y, \varphi) = -(y^2/\varphi + \log[2\pi\varphi])/2$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi > 0$.
Comme rappelé au tableau, pour les questions 3, 4 et 5, on suppose que $\sum_{i=1}^n X_i = 0$.

Sinon, toutes mes excuses pour la faute de typo, mais il fallait lire '*loi de la famille exponentielle*', et pas '*loi exponentielle*'. Comme tout le cours portait sur cette famille, et que je fais facilement la confusion au tableau, toutes mes excuses pour ceux qui ont voulu parler de la loi exponentielle...

1. Soit $Y$ une variable aléatoire suivant une telle loi. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{var}(Y)$.
2. On dispose d'un échantillon $(Y_i, X_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$, et on suppose que $Y_i$ a pour loi $f(y; \theta_i, \varphi)$. En supposant les observation indépendante, écrire la vraisemblance de $(\boldsymbol{\theta}, \varphi)$.
3. On suppose maintenant que $\theta_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$. Ecrire la vraisemblance du triplet $(\beta_0, \beta_1, \varphi)$. Montrez que les estimateurs du maximum de vraisemblance pour les deux premiers paramètres sont
$$\widehat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i \text{ et } \widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$
4. Ecrire la déviance $D$ du modèle.
5. Donner la forme des résidus de déviance et de résidus de Pearson.

1. Pour les amateurs des lois de la famille exponentielle, j'avais évoqué en cours une relation de la forme $\mathbb{E}(Y) = b'(\theta)$ et $\text{Var}(Y) = \varphi b''(\theta)$. Or $b(\theta) = \theta^2/2$, donc $b'(\theta) = \theta$ et $b''(\theta) = 1$. Aussi, $\mathbb{E}(Y) = \theta$ et $\text{Var}(Y) = \varphi$. Si on connaît la formule, c'est facile...
Si on prend un peu plus de temps, et que l'on regarde la forme de la loi associée,

$$f(y; \theta, \varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y, \varphi)\right) = f(y; \theta, \varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - \theta^2/2}{\varphi} - (y^2/\varphi + \log[2\pi\varphi])/2\right)$$

i.e. en réécrivant tranquillement le tout

$$f(y; \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi}} \exp\left(-\frac{(y-\theta)^2}{2\varphi}\right)$$

qui est la loi normale $\mathcal{N}(\theta, \varphi)$. A partir de là, on peut en déduire que $\mathbb{E}(Y) = \theta$ et $\text{Var}(Y) = \varphi$.
2. Si $Y_i$ a pour loi $f(y; \theta_i, \varphi)$, la vraisemblance est

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^n f(Y_i; \theta_i, \varphi) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi}} \exp\left(-\frac{(Y_i - \theta_i)^2}{2\varphi}\right).$$

En passant le produit dans l'exponentielle, on a

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi}}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \theta_i)^2}{2\varphi}\right).$$

Si on prend le logarithme, on a tout simplement que

$$\log \mathcal{L} = -\frac{n}{2}\log(2\pi\varphi) - \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \theta_i)^2}{2\varphi}.$$

3. Si on suppose que $\theta_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$, alors la vraisemblance est la fonction

$$\log \mathcal{L} : (\beta_0, \beta_1, \varphi) \mapsto -\frac{n}{2} \log(2\pi\varphi) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{2\varphi}.$$

Les conditions du premier ordre pour les deux premiers paramètres sont

$$\left.\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta_0}\right|_{(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\varphi})} = \left.\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta_1}\right|_{(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\varphi})} = 0,$$

i.e.

$$\left.\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta_0}\right|_{(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\varphi})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i}{\widehat{\varphi}} = 0$$

et

$$\left.\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \beta_1}\right|_{(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\varphi})} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i}{\widehat{\varphi}} = 0$$

On peut commencer par simplifier en multipliant par $\varphi$ (que l'on suppose non nul), i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \widehat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

Si on suppose que $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$, ces expressions se simplifient grandement, et

$$\widehat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ et } \widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

On notera que l'on retrouve la formule classique $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$, où $\boldsymbol{X}$ est une matrice $n \times 2$ contenant par ligne les termes $(1, X_i)$ et $\boldsymbol{Y}$ est un vecteur colonne $1 \times n$ composé des $Y_i$. Aussi, la matrice $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ est une matrice $2 \times 2$ et $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ un vecteur ligne $1 \times 2$qui sécrivent respectivement

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \sum Y_i & \sum X_i Y_i \end{pmatrix}$$

Si on suppose que $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ la matrice $2 \times 2$ devient diagonale, et donc facilement inversible, et on a alors

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \sum Y_i / n \\ \sum X_i Y_i / \sum X_i^2 \end{pmatrix}$$

4. Pour l'écriture de la déviance, on utilise la formule rappelée à la première page

$$D = 2(\log[\mathcal{L}(g(\boldsymbol{Y}), \widehat{\varphi}; \boldsymbol{Y})] - \log[\mathcal{L}(g(\widehat{\boldsymbol{Y}}), \widehat{\varphi}; \boldsymbol{Y})]),$$

où $\widehat{\boldsymbol{Y}}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_i$, et $\boldsymbol{\theta} = g(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y}$. Aussi,

$$D = 2\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - Y_i)^2}{2\widehat{\varphi}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \widehat{\theta}_i)^2}{2\widehat{\varphi}}\right)$$

i.e.

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \widehat{\theta}_i)^2}{\widehat{\varphi}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i)^2}{\widehat{\varphi}}$$

On obtient ici -2 fois la logvraisemblance.

5. Pour les résidus de déviance, on utilise la contribution à la déviance, $D = \sum_{i=1}^{n} D_i$ puis on pose $\varepsilon_i = \text{sigme}(Y_i - \widehat{Y}_i)\sqrt{D_i}$, soit ici

$$\varepsilon_i = \frac{Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i}{\sqrt{\widehat{\varphi}}} = \frac{Y_i - \widehat{Y}_i}{\sqrt{\widehat{\varphi}}}$$

On reconnaît ici les résidus standardisés de Student.

5. Pour les résidus de Pearson, on note que la fonction variance est ici estimée par $\widehat{\varphi}$, et comme ces résidus sont définis par

$$\varepsilon_i = \frac{Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i}{\sqrt{V(\widehat{Y}_i)}}$$

on retrouve la même expression que pour les résidus de déviance, i.e.

$$\varepsilon_i = \frac{Y_i - \widehat{Y}_i}{\sqrt{\widehat{\varphi}}}$$

## Exercice 2 [6 pts]

On considère la loi de la famille exponentielle définie pour $y \in \mathbb{N}$ par $\varphi = 1$, $b(\theta) = \exp(\theta)$, et $c(y, \varphi) = -\log(y!)$. On notera $y \mapsto f(y; \theta)$ la loi associée.

1. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ où $Y$ a pour loi $f(y; \theta)$
2. Calculer $\text{var}(Y)$ où $Y$ a pour loi $f(y; \theta)$

Pour les amateurs des lois de la famille exponentielle, on peut à nouveau utiliser la relation $\mathbb{E}(Y) = b'(\theta)$ et $\text{Var}(Y) = \varphi b''(\theta)$. Or ici $b(\theta) = \exp(\theta)$, donc $b'(\theta) = \exp(\theta)$ et $b''(\theta) = \exp(\theta)$. Aussi, $\mathbb{E}(Y) = \exp(\theta)$ et $\text{Var}(Y) = \exp(\theta)$. Si on connaît la formule, c'est facile...
Pour ceux qui ne connaissaient pas ces expressions - car cela n'est pas obligatoire - on peut écrire la loi, et se lancer dans les calculs. Ici

$$f(y; \theta) = \exp\left(y\theta - \exp(\theta) - \log(y!)\right) = \exp(-\exp(\theta))\frac{[\exp(\theta)]^y}{y!}$$

On reconnait la loi de Poisson $\mathcal{P}(\exp(\theta))$. Posons $\lambda = \exp(\theta)$, alors

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y f(y) = \sum_{y=0}^{\infty} \exp(-\lambda)\frac{y\lambda^y}{y!}$$

i.e.

$$\mathbb{E}(Y) = \exp(-\lambda)\lambda \sum_{y=0}^{\infty} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^y}{y!} = \exp(-\lambda)\lambda\exp(\lambda) = \lambda.$$

Pour calculer la variance, on utilise le fait que $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$. Le plus simple est de noter que $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Y(Y-1)) + \mathbb{E}(Y)$, et que

$$\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \sum_{y=0}^{\infty} \exp(-\lambda)\frac{y(y-1)\lambda^y}{y!}$$

de telle sorte que l'on va pouvoir simplifier en notant que $y! = (y-2)!(y-1)y$ (et que les premiers termes de la somme sont nuls, ce qui va permettre un décallage d'indice), de telle sorte que

$$\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \lambda^2.$$

On a alors

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y(Y-1)) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Aussi, pour revenir aux notations de l'exercicem

$$\mathbb{E}(Y) = \text{Var}(Y) = \exp(\theta).$$

## Exercice 3

### Partie 1 [14 pts]

Soit $\Lambda$ une loi Gamma de paramètres $\mu$ et $\nu$, au sens où sa densité s'écrit

$$g(\lambda;\mu,\nu) = \frac{1}{\lambda\Gamma(\nu)}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\right)^{\nu}\exp\left[-\frac{\lambda\nu}{\mu}\right] \text{ pour } \lambda \geq 0,$$

où la fonction $\Gamma(\cdot)$ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}dt, \text{ pour } z \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \Gamma(z+1) = z! \text{ pour } z \in \mathbb{N}.$$

On considère une variable aléatoire $N$ telle que conditionnellement à $\Lambda = \lambda$, $N$ suive une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

1. Calculer $\int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-\alpha t}dt$ en fonction de $\Gamma(z)$, $\alpha$ et $z$.
2. Calculer $\mathbb{E}(\Lambda)$. On admettra que $\mathrm{Var}(\Lambda) = \mu^2/\nu$
3. Calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\mathrm{Var}(N)$.
4. Donner la loi de $N$. Montrer que cette loi appartient à la famille exponentielle (on ne spécifiera que l'expression du paramètre canonique $\theta$ en fonction de $\mu$ et $\nu$ ; en particulier il n'est pas nécessaire de spécifier la forme des fonctions $b$ et $c$ ou du paramètre $\varphi$).
5. On supposera par la suite que $\nu$ est fixé et connu. La loi de $N$ dépend alors simplement du paramètre $\mu$. Donner la fonction lien et son inverse.
6. Montrer que pour cette famille, la fonction variance $V(\cdot)$ est de la forme $V(\mu) = \mu + \kappa\mu^2$. Donner la valeur de $\kappa$.

1. En posant $x = \alpha t$, avec $\alpha > 0$ (j'avais oublié de le préciser dans l'énoncé), on ne change pas le domaine d'intégration lors du changement de variable (i.e. $(0,\infty)$) et $dx = \alpha dt$, et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-\alpha t}dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{z-1} e^{-x}\frac{dx}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^z}\int_0^{+\infty} x^{z-1}\, e^{-x}dx = \frac{\Gamma(z)}{\alpha^z}$$

2. Le calcul de $\mathbb{E}(\Lambda)$ se fait en utilisant la définition de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\Lambda) = \int_0^{\infty}\lambda g(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda\Gamma(\nu)}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\right)^{\nu}\exp\left[-\frac{\lambda\nu}{\mu}\right]d\lambda,$$

i.e.

$$\mathbb{E}(\Lambda) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\right)^{\nu}\exp\left[-\frac{\lambda\nu}{\mu}\right]d\lambda.$$

Faisons un changement de variable, en posant $x = \lambda\nu/\mu$, de telle sorte que $dx = (\nu/\mu)d\lambda$,

$$\mathbb{E}(\Lambda) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}(x)^{\nu}\exp\left[-x\right]\frac{\mu dx}{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu\Gamma(\nu)}\mu$$

or $\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu)\nu$, et donc $\mathbb{E}(\Lambda) = \mu$.

Je n'avais pas rappelé que $\Gamma(\nu+1)=\Gamma(\nu)\nu$ car c'est une propriété de base de la fonction $\Gamma$. Pour la démontrer, une intégration par parties donne directement le résultat.
3. Pour les moments de $N$, on utilise les propriétés revues en cours sur les calculs des espérances et de variances conditionnelles, i.e.

$$\mathbb{E}[N]=\mathbb{E}[\mathbb{E}(N|\Lambda)] \text{ et } \mathrm{Var}[N]=\mathrm{Var}[\mathbb{E}(N|\Lambda)]+\mathbb{E}[\mathrm{Var}(N|\Lambda)].$$

Comme on sait que $N|\Lambda$ suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda$, alors $\mathbb{E}(N|\Lambda)=\Lambda$ et $\mathrm{Var}(N|\Lambda)=\Lambda$ (cf. exercice 2 pour ceux qui ont oublié). Aussi

$$\mathbb{E}[N]=\mathbb{E}[\Lambda] \text{ et } \mathrm{Var}[N]=\mathrm{Var}[\Lambda]+\mathbb{E}[\Lambda].$$

En utilisant la question précédante, on en déduit

$$\mathbb{E}[N]=\mu \text{ et } \mathrm{Var}[N]=\mu+\frac{\mu^2}{\nu}>\mu.$$

On notera que la variance est supérieure à l'espérance, ce qui est un propriété générale des lois Poisson-mélanges.
4. Pour la loi non-conditionnelle de $N$, il faut lécrire

$$f(k)\mathbb{P}(N=k)=\int \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{\Gamma(k+1)}\frac{1}{\lambda\Gamma(\nu)}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\right)^{\nu}\exp\left[-\frac{\lambda\nu}{\mu}\right]d\lambda$$

i.e.

$$f(k)=\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu)}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\nu}\int \lambda^{k+\nu-1}\exp\left[-\lambda\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)\right]d\lambda$$

Or

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1}\,e^{-\alpha t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^{z-1}}{\alpha^{z-1}}\,e^{-x}\frac{dx}{\alpha}=\frac{1}{\alpha^z}\Gamma(z)$$

alors $f(k)$ peut s'écrire

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu)}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\nu}\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)^{-(k+\nu)}\Gamma(k+\nu),$$

i.e.

$$\frac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu)}\left(1-\frac{\mu}{\mu+\nu}\right)^{k}\left(\frac{\mu}{\mu+\nu}\right)^{\nu)},$$

On reconnait la loi Binomiale Négative, avec pour probabilité $p=\mu/(\mu+\nu)$. Pour obtenir la forme de la famille exponentielle, on note que

$$f(k)=\exp\left[y\log\left(\frac{\nu}{\mu+\nu}\right)-\nu\log\left(\frac{\mu}{\mu+\nu}\right)+\log\Gamma(k+\nu)-\log\Gamma(k+1)-\log\Gamma(\nu)\right]$$

peut se mettre sous une forme

$$f(y)=\exp\left(\frac{y\theta-b(\theta)}{\varphi}+c(y,\theta)\right)$$

en posant

$$\theta = \log\left(\frac{\nu}{\mu+\nu}\right) = \log(1-p).$$

5. On suppose donc que $\nu$ est fixé et connu. On a vu que $\mathbb{E}(N) = \mu$ à la question 3. Or on sait que la fonction de lien canonique est la fonction $g$ telle que $\theta = g(\mathbb{E}(N))$. Donc ici

$$g(x) = \log\left(\frac{\nu}{x+\nu}\right).$$

Et l'inverse est alors simplement

$$h(x) = g^{-1}(x) = \nu(\exp(-x) - 1).$$

6. La fonction variance $V$ est telle que $\mathrm{Var}(N) = V(\mathbb{E}(N))$, or compte tenu de la question 3, on sait que $\mathbb{E}[N] = \mu$ et $\mathrm{Var}[N] = \mu + \frac{\mu^2}{\nu}$. Aussi,

$$V(\mu) = \mu + \kappa\mu^2 \text{ où } \kappa = \frac{1}{\nu}.$$

**Partie 2 [8 pts]**

On considère une regression log-Poisson, i.e. on suppose que $Y_i|X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_i$ où $\lambda_i = \exp[\beta_0 + \beta_1 X_i]$, où $X_i$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(Y_i|X_i)$ et $\text{Var}(Y_i|X_i)$.
2. Montrez que $\mathbb{E}(Y|X = x+1)$ est proportionnel à $\mathbb{E}(Y|X = x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donner la valeur du coefficient de proportionnalité.

1. Comme on a une loi de Poisson, $\mathbb{E}(Y_i|X_i) = \text{Var}(Y_i|X_i) = \lambda_i$. Aussi,

$$\mathbb{E}(Y_i|X_i) = \text{Var}(Y_i|X_i) = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i).$$

2. Compte tenu de l'expression précédante,

$$\mathbb{E}(Y|x+1) = \exp(\beta_0 + \beta_1[x+1]) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_1) = \exp(\beta_1)\mathbb{E}(Y|x),$$

i.e. $\mathbb{E}(Y|x+1)$ et $\mathbb{E}(Y|x)$ sont proportionnels, et le coefficient de proportionnalité est $e^{\beta_1}$.

On suppose à partir de maintenant que le *vrai* modèle inclus une seconde variable explicative, *malheureusement inobservée*, i.e. $Y_i|(X_i, U_i)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_i$ où $\lambda_i = \exp[\beta_0 + \beta_1 X_i + U_i]$, où $X$ et $U$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. Calculer la loi 'non-conditionnelle" de $Y_i|X_i$, en suppossant que $H_i = \exp[U_i]$ est une variable aléatoire distribuée suivant une loi Gamma d'espérance 1 et de variance $\gamma$.
4. Calculer $\mathbb{E}(Y_i|X_i)$ et $\text{Var}(Y_i|X_i)$. Comparer avec les valeurs obtenues dans la question 1 (de la partie 2 de cet exercice).

3. Pour la loi non conditionnelle de $Y|X$, i.e. non conditionnelle à $U$, on note que

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \int \mathbb{P}(Y = y|X = x, U = u) \cdot \pi(u)du$$

(c'est la loi des probabilités totales) où $\pi$ désigne la loi de $U$. On peut aussi poser $H = \exp(U)$ car c'est la loi de $H$ que l'on nous donne ici, i.e.

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \int \mathbb{P}(Y = y|X = x, H = t) \cdot h(t)dt$$

où ici $h$ désigne la densité de $H$. Or on sait que $Y|X = x, H = t$ suit une loi de Poisson,

$$Y|X = x, H = t \sim P(\exp(\beta_0 + \beta_1 x + \log(t))).$$

Quant à la loi de $H$, on peut obtenir sa densité à partir de la partie 1. En effet, on a la densité de la loi Gamma, et on nous dit que la moyenne vaut 1 (ici $\mu = 1$) et que la variance vaut $\gamma$ (ici $\mu^2/\nu = \gamma$). Aussi, la densité s'obtient en posant $\mu = 1$ et $\nu = 1/\gamma$ dans la densité donnée dans l'énoncé, i.e.

$$h(t; \mu = 1, \nu = \gamma^{-1}) = \frac{1}{t\Gamma(\gamma^{-1})}\left(\frac{t\gamma^{-1}}{1}\right)^{\gamma^{-1}} \exp\left[-\frac{t\gamma^{-1}}{1}\right] \text{ pour } t \geq 0,$$

i.e.

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma^{-1})\gamma^{\gamma^{-1}}} t^{\gamma^{-1}-1} \exp(-t\gamma^{-1})$$

On peut alors regarder la loi de $Y|X = x$,

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \int \exp(-\exp(\beta_0+\beta_1 x+\log(t))) \frac{[\exp(\beta_0 + \beta_1 x + \log(t))]^y}{y!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\gamma^{-1})\gamma^{\gamma^{-1}}} t^{\gamma^{-1}-1} \exp(-t\gamma^{-1}) dt$$

si on essaye de simplifier un peu, et si on pose $\lambda = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \int \exp(-\lambda t) \frac{[\lambda t]^y}{y!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\gamma^{-1})\gamma^{\gamma^{-1}}} t^{\gamma^{-1}-1} \exp(-t\gamma^{-1}) dt$$

On va ensuite regrouper les termes polynomiaux en $t$ et les termes avec une exponentielle de $t$,

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\lambda^y}{y!\Gamma(\gamma^{-1})\gamma^{\gamma^{-1}}} \int t^{y[\gamma^{-1}-1]} \exp(-t[\gamma^{-1} - \lambda]) dt.$$

On voit apparaitre une fonction gamma (ou presque), et on ne devrait pas être supris car on *sait* que si on mélange une loi de Poisson avec une loi Gamma, on doit retomber sur le loi Binomiale Négative. Et ici, en poursuivant un peu les calculs, on doit avoir

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(y + 1)}{\Gamma(a + y)} \left(\frac{\lambda}{a + \lambda}\right)^y \left(\frac{a}{a + \lambda}\right)^a$$

en posant $a = \gamma^{-1}$. Et puisque $\lambda = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(y + 1)}{\Gamma(a + y)} \left(\frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{a + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}\right)^y \left(\frac{a}{a + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}\right)^a$$

On retrouve bien une loi Binomiale Négative.
4. La première solution est de se lancer dans les calculs des moments à partir de la loi. Mais c'est compliqué, et on risque de faire très facilement des erreurs de calculs.
La seconde est d'utiliser les expressions des moments pour une loi Binomiale Négative. A condition de les connaître, ce que je ne demandais pas pour l'examen. Pour rappel si la loi se met sous la forme

$$\binom{y + r - 1}{y} \cdot (1 - p)^r p^y,$$

alors les deux premiers moments sont

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{pr}{1 - p} \text{ et } \mathrm{Var}(Y) = \frac{pr}{(1 - p)^2}.$$

La troisième, et toujouts la plus simple, on peut utiliser les expressions sur les espérances et les variances conditionnelles.

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X, H)|X] \text{ et } \mathrm{Var}[Y|X] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}(Y|X, H)|X] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X, H)|X].$$

Or on sait que $Y|X, H$ suit une loi de Poisson de paramètre $H\exp(\beta_0 + \beta_1 X)$, donc on a

$$\mathbb{E}(Y|X,H) = \mathrm{Var}(Y|X,H) = H\exp(\beta_0 + \beta_1 X)$$

Aussi,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X,H)|X] = \mathbb{E}[H\exp(\beta_0 + \beta_1 X)|X] = \exp(\beta_0 + \beta_1 X)\mathbb{E}[H]$$

or par hypothèse, $\mathbb{E}[H] = 1$, donc

$$\mathbb{E}[Y|X] = \exp(\beta_0 + \beta_1 X)$$

i.e. on retrouve la même chose que dans la question 1. De plus

$$\mathrm{Var}[Y|X] = \mathrm{Var}[H\exp(\beta_0 + \beta_1 X)|X] + \mathbb{E}[H\exp(\beta_0 + \beta_1 X)|X],$$

i.e.

$$\mathrm{Var}[Y|X] = [\exp(\beta_0 + \beta_1 X)]^2\mathrm{Var}[H] + \exp(\beta_0 + \beta_1 X)\mathbb{E}[H],$$

or $\mathbb{E}[H] = 1$ et $\mathrm{Var}[H] = \gamma$, donc

$$\mathrm{Var}[Y|X] = \exp(\beta_0 + \beta_1 X) + [\exp(\beta_0 + \beta_1 X)]^2\gamma.$$

On a alors une variance plus grande que dans le question 1. En fait, si on pose $\mu = \exp(\beta_0 + \beta_1 X)$, on a que $\mathrm{Var}[Y|X] = \mu + \gamma\mu^2$, qui est l'expression que l'on avait à la fin de la partie 1.