Modèles Linéaires Appliqués

Arthur Charpentier

Automne 2020

Rappels #6 (algèbre linéaire)

Soient $m, n \geq 1$. Une matrice $\mathbf{A}$ de taille (m, n) à coefficients réels est un tableau de nombres réels ayant m lignes et n colonnes. On note également par $(\mathbf{A})_{ij}$ ou plus simplement A_{ij} l'élément sur la ligne i et sur la colonne j de $\mathbf{A}$.

Example:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 3.1 & 8 \\ -1 & 4 & 5 & 6.5 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ est de taille (2×4) et par exemple $A_{13} = 3.1$.

Une matrice ne contenant qu'une colonne est appelée un vecteur et une matrice ne contenant qu'une ligne est un vecteur ligne. Par exemple $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y} = (1.5\ 2\ 3.1\ 8)$ sont respectivement de taille $(2, 1)$ et $(1, 4)$.

Transposée

Soit $\mathbf{A}$ une matrice réelle de taille (m, n). La matrice transposée notée $\mathbf{A}^\top$ de taille (n, m) est définie par $(\mathbf{A}^\top)_{ij} = A_{ji}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$.
Et $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top$$

```
> t(1:4) %*% rep(1,4)
     [,1]
[1,]   10
> (1:4) %*% t(rep(1,4))
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    1    1    1
[2,]    2    2    2    2
[3,]    3    3    3    3
[4,]    4    4    4    4
> t(1:4) %*% (1:4)
     [,1]
[1,]   30
> (1:4) %*% t(1:4)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    2    3    4
[2,]    2    4    6    8
[3,]    3    6    9   12
[4,]    4    8   12   16
```

Products

If $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are (respectively) $k \times m$ and $m \times n$ matrices,

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}_{i\cdot}^{\top}\mathbf{B}_{\cdot j} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{im}B_{mj} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj},$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{np} \end{pmatrix}$$

```
> A = matrix(1:6,2,3)
> B = matrix(1:12,3,4)
> A %*% B
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]   22   49   76  103
[2,]   28   64  100  136
```

Le produit matriciel n'est pas commutatif pour deux matrices quelconque de même taille: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

Produit & Trace

Soit $\mathbb{I}_n$ la matrice de taille (n, n) composée de 1 sur la diagonale et de 0 ailleurs. Alors, pour $\mathbf{A}$ de taille (n, n), $\mathbb{I}_n$ est l'élément neutre tel que $\mathbf{A}\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$.
Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ trois matrices réelles de dimension concordante, alors

- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associativité du produit)
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (distributivité du produit)
- $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$.

Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{M}$ trois matrices réelles $n \times n$ (carré),

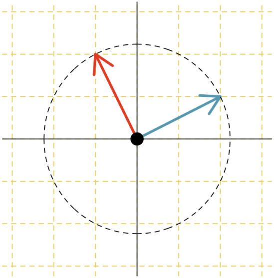
- $\text{trace}(\mathbf{M}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_{i,i}$
- $\text{trace}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{A}) + \text{trace}(\mathbf{B})$
- $\text{trace}(\mathbf{AB}) = \text{trace}(\mathbf{BA})$

Matrices & Transformation

Rotation, angle θ, center $\mathbf{0}$:

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

or $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\vec{\mathbf{u}}$ with $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$



Orthogonal projection, on $\Delta = (\vec{\boldsymbol{\delta}} = (a, b))$,

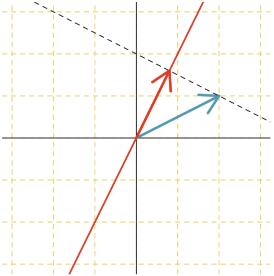
$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \vec{\mathbf{v}} = \frac{ax + by}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

or $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\vec{\mathbf{u}}$ with $\mathbf{P} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}.$

(proof : $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\delta}}\lambda = \vec{\boldsymbol{\delta}}\dfrac{\langle\vec{\boldsymbol{\delta}}, \vec{\mathbf{u}}\rangle}{\langle\vec{\boldsymbol{\delta}}, \vec{\boldsymbol{\delta}}\rangle} = \vec{\boldsymbol{\delta}}\dfrac{\vec{\boldsymbol{\delta}}^\top\vec{\boldsymbol{\delta}}}{\vec{\boldsymbol{\delta}}^\top\vec{\boldsymbol{\delta}}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{\delta}}\vec{\boldsymbol{\delta}}^\top}{\vec{\boldsymbol{\delta}}^\top\vec{\boldsymbol{\delta}}}\vec{\mathbf{u}}$

Hence $\mathbf{P} = \dfrac{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^\top}{\boldsymbol{\delta}^\top\boldsymbol{\delta}}$

(or more generally $\mathbf{P} = \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Delta}^\top\boldsymbol{\Delta})^{-1}\boldsymbol{\Delta}^\top$).



Eigenvalues & Eigenvectors

$\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ is an eigenvector of squared matrix $\mathbf{M}$ if $\mathbf{M}\vec{\mathbf{u}} = \lambda\, \vec{\mathbf{u}}$ for some λ (called eigenvalue).

Example:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{u}}_1 = 2\, \vec{\mathbf{u}}_1$$

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{u}}_2 = 0\, \vec{\mathbf{u}}_2$$

Note: $\text{trace}(\mathbf{M}) = 2 = 2 + 0$

```
> M = matrix(c(1,1,1,1)
    ,2,2)
> u = eigen(M)$vector[,1]
> u
[1] 0.7071068 0.7071068
> M%*%u
          [,1]
[1,] 1.414214
[2,] 1.414214
> M%*%c(1,1)
     [,1]
[1,]    2
[2,]    2
> M%*%c(1,-1)
     [,1]
[1,]    0
[2,]    0
```

Eigenvalues & Eigenvectors

Example:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{u}}_1 = 3 \ \vec{\mathbf{u}}_1$$

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{u}}_2 = -1 \ \vec{\mathbf{u}}_2$$

Note: $\text{trace}(\mathbf{M}) = 2 = 3-1$

for further interpretation of eigenvectors, see ACT6100

```
> eigen(matrix(c(1,1,1,1)
    ,2,2))
$values
[1] 2 0

$vectors
          [,1]       [,2]
[1,] 0.7071068 -0.7071068
[2,] 0.7071068  0.7071068
> eigen(matrix(c(1,2,2,1)
    ,2,2))
$values
[1]  3 -1

$vectors
          [,1]       [,2]
[1,] 0.7071068 -0.7071068
[2,] 0.7071068  0.7071068
```

Eigenvalues & Eigenvectors

Example: $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 0.447 \\ 0.894 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}} \mathbf{x}\mathbf{x}^\top = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 0.447 \\ 0.894 \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} -0.894 \\ 0.447 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{u}}_1 = 1 \ \vec{\mathbf{u}}_1$$

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{u}}_2 = 0 \ \vec{\mathbf{u}}_2$$

Note: $\text{trace}(\mathbf{M}) = 1 = 1 + 0$

```
> X=c(1,2)
> P=X%*%t(X)/as.numeric(t
    (X)%*%X)
> P
     [,1] [,2]
[1,]  0.2  0.4
[2,]  0.4  0.8
> eigen(P)
$values
[1] 1 0

$vectors
          [,1]       [,2]
[1,] 0.4472136 -0.8944272
[2,] 0.8944272  0.4472136
```

Eigenvalues & Eigenvectors

Example: $\theta = \pi/3$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.5 & -0.866\\ 0.866 & 0.5\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont complexes (conjuguées)

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{\pm i\pi/3}$$

```
> M = matrix(c(cos(pi/3),
   sin(pi/3),-sin(pi/3),
   cos(pi/3)),2,2)
> eigen(M)
$values
[1] 0.5+0.8660254i
    0.5-0.8660254i
$vectors
[1,] 0.7071068+0.0000000i
     0.7071068+0.0000000i
[2,] 0.0000000-0.7071068i
     0.0000000+0.7071068i
> det(M)
[1] 1
```

Proposition

les matrice symmétriques ont leurs valeurs propres dans $\mathbb{R}$

Rank

A set of vectors $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_k\}$ are linearly independent if

$$\forall (a_1, \cdots, a_k) \neq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$$

The rank of a matrix $\mathbf{X}$, $\text{rank}(\mathbf{X})$, is the maximum number of linearly independent columns of $\mathbf{X}$.

A $n \times k$ matrix of rank k is said to be of full rank.

If $\mathbf{A}$ is $p \times q$, $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq \min\{p, q\}$

If $\mathbf{A}$ is a $n \times n$ matrix, with $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ then $\mathbf{A}$ is invertible.

If $\mathbf{A}$ is a $n \times n$ matrix, $\text{rank}(\mathbf{A})$ is the number of non-null eigenvalues.

```
> (M = matrix(c
    (1,1,1,1,2,1,2,2,2)
    ,3,3))
      [,1] [,2] [,3]
[1,]     1    1    2
[2,]     1    2    2
[3,]     1    1    2
> eigen(M)
$values
[1] 4.303 0.697 0.000

$vectors
         [,1]   [,2]   [,3]
[1,] -0.520  0.370 -0.894
[2,] -0.677 -0.852  0.000
[3,] -0.520  0.370  0.447
```

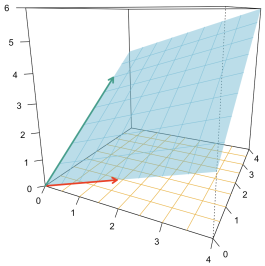
Espace vectoriel engendré

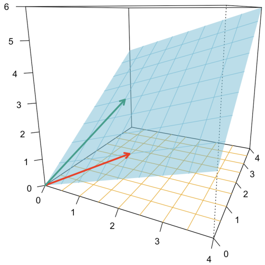
Soient $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$, on définit $\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ comme

$$\left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{X}\mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p\right\}$$

où $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p]$ est une matrice $n \times p$.

La dimension de $\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ est le rang de $\mathbf{X}$.





Definite Positive

Let $\mathbf{A}$ be an $n \times n$ matrix, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ is called a quadratic form

- if $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ for all $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}$ is a positive definite matrix
- if $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ for all $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}$ is a positive semidefinite matrix

Toute matrice $\mathbf{A}$ qui peut s'écrire sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ est semi-définie positive.

- $\text{trace}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) \geq 0$
- $\text{trace}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Inverse

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée de taille (n, n) dont le déterminant est non nul, alors $\mathbf{A}$ est dite non singulière et il existe une matrice inverse (de même taille) notée $\mathbf{A}^{-1}$ vérifiant $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbb{I}_n$

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices inversibles de taille (n, n) alors

- $(\mathbf{A}^{-1})^\top = (\mathbf{A}^\top)^{-1}$

($\mathbf{A}^{-1}$ est symétrique ssi $\mathbf{A}$ est symétrique)

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$

```
> A = matrix(
  c(3,2,4,3),2,2)
> A
     [,1] [,2]
[1,]    3    4
[2,]    2    3
> solve(A)
     [,1] [,2]
[1,]    3   -4
[2,]   -2    3
```

Idempotent Matrices

Symmetric matrix $\mathbf{P}$ is idempotent if $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.
Note that $\mathbf{P}$ is positive semi-definite.
And $\text{rank}(\mathbf{P}) = \text{trace}(\mathbf{P})$
E.g. $\mathbf{P} = \mathbf{X}\big(\mathbf{X}^\top\mathbf{X}\big)^{-1}\mathbf{X}$ is idempotent

Théorème de Cochrane: si $\mathbf{A}$ est une matrice idempotente

- $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{A})$.
- les valeurs propres de $\mathbf{A}$ valent soit 0 soit 1.

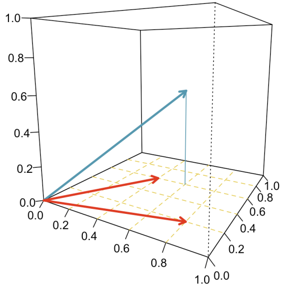
Soit $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_k$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents

- $\mathbf{A}$ est idempotente et $\text{rank}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^k \text{rank}(\mathbf{A}_i)$.
- $\mathbf{A}_i$ est idempotente pour tout i et $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = 0$ pour tout $i \neq j$.

Projection

Consider the projection (in $\mathbb{R}^3$) on $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$. Let $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$.
$\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top$ is the (orthogonal) projection on $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

```
> X=cbind(c(.8,.2,0),c(.4,.6,0))
> P=X %*% solve(t(X)%*%X) %*% t(X)
> P
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   1    0    0
[2,]   0    1    0
[3,]   0    0    0
> P %*% c(.6,.6,1)
      [,1]
[1,]   0.6
[2,]   0.6
[3,]   0.0
```



$\mathbf{P}^2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top \cdot \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top = \mathbf{P}$
$\mathbf{P}\vec{x}_1 = \vec{x}_1$, $\mathbf{P}\vec{x}_2 = \vec{x}_2$, and $\text{rank}(\mathbf{P}) = 2$.

Matrice par blocs

Soient n_1 et n_2 tels que $n = n_1 + n_2$. On note

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}$ sont de taille (n_1, n_1), (n_1, n_2), (n_2, n_1), (n_2, n_2).

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices par blocs de taille identique, alors la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ est aussi une matrice par blocs dont les termes sont définis (dans le cas de 4 blocs) par $\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$ pour $i, j = 1, 2$.

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{11})\det(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}) \text{ si } \mathbf{A}_{11} \text{ est inversible}$$

Soit $\mathbf{A}$ une matrice par blocs inversible alors

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22,1}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22,1}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22,1}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22,1}^{-1} \end{pmatrix}$$

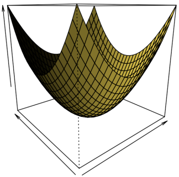
où $\mathbf{A}_{22,1} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$.

Quadratic Forms

On peut tracer la surface $S(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{M}\mathbf{z}$, i.e.

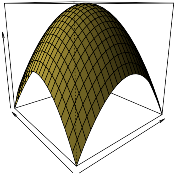
$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



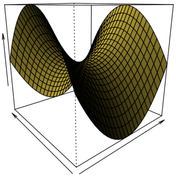
positive definite

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



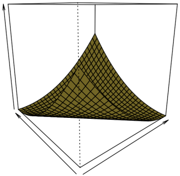
negative definite

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



indefinite

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$



positive semi-definite

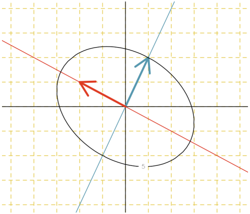
Quadratic Forms

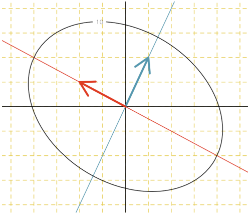
Consider $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,
and function $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}^\top \mathbf{M} \mathbf{z}$, i.e.

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

or $ax^2 + 2bxy + cy^2$ is a quadratic form.

If $\mathbf{M} > 0$, points $\mathbf{z} = (x, y)$ such that $\mathbf{z}^\top \mathbf{M} \mathbf{z} = \gamma$, for some $\gamma > 0$, are on an ellipse (centered on $\mathbf{0}$)
Let $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ denote the eigenvalues of $\mathbf{M}$ and $\vec{\mathbf{v}}_1$ and $\vec{\mathbf{v}}_2$ denote the eigenvectors.





Quadratic Forms

On the picture, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$

```
> M=matrix(c(.6,.2,.2,.9),2,2)
> eigen(M)
eigen() decomposition
$values
[1] 1.0 0.5
$vectors
          [,1]       [,2]
[1,] 0.4472136 -0.8944272
[2,] 0.8944272  0.4472136
```

i.e. $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 1/2$, and

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{\mathbf{v}}_2 = \sqrt{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Note that $\|\vec{\mathbf{v}}_1\| = \|\vec{\mathbf{v}}_2\| = 1$ and $\vec{\mathbf{v}}_1 \perp \vec{\mathbf{v}}_2$