STT 5100 Série 3 :

Exercice 2.4 :

$$X = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & x & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 3}(\mathbb{R})$$

1. a) La matrice X^TX est une matrice symétrique semi-définie positive. Donc

$$X^TX = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9.3 & 5.4 \\ 0 & 5.4 & 12.7 \end{bmatrix}$$

b) Déterminons n.

$$X = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & x & z \end{pmatrix} \rightarrow X^T = \begin{bmatrix} \mathbb{1}^T \\ x^T \\ z^T \end{bmatrix}$$

$$X^TX = \begin{bmatrix} \mathbb{1}^T \\ x^T \\ z^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & x & z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}^T\mathbb{1} & \mathbb{1}^Tx & \mathbb{1}^Tz \\ x^T\mathbb{1} & x^Tx & x^Tz \\ z^T\mathbb{1} & z^Tx & z^Tz \end{bmatrix}.$$

Mais $\mathbb{1}^T\mathbb{1} = (1, \ldots, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1*1 + \ldots + 1*1$

$$= \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ fois}}$$

$$= n$$

Par comparaison avec $X^TX_{(1,1)}$, il vient que

$$n = X^TX_{(1,1)} = 25$$

Scanned by CamScanner

c) Coefficient de corrélation linéaire empirique entre x et z.

Par définition,

$$\mathrm{Corr}(x,z) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\left(\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (z_i - \bar{z})^2\right)^{1/2}}$$

$$\mathrm{Corr}(x,z) = \sum_i (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) \Big/ \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (z_i - \bar{z})^2}$$

* Déterminons $\bar{x}$ et $\bar{z}$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{1}{n} x^T \mathbb{1} = 0 \\ \bar{z} &= \frac{1}{n}\sum_i z_i = \frac{1}{n} z^T \mathbb{1} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(voir b))}$$

D'où

$$\mathrm{Corr}(x,z) = \sum_i x_i z_i \Big/ \sqrt{\sum x_i^2 \sum z_i^2}$$

$$= x^T z \Big/ \sqrt{x^T x \; z^T z}$$

$$= X^T X_{(2,3)} \Big/ \sqrt{X^T X_{(2,2)} \; X^T X_{(3,3)}} \quad \text{(voir b))}$$

$$= 5.4 \Big/ \sqrt{(9.3)(12.7)}$$

$$\approx 0.5$$

Donc $\boxed{\mathrm{Corr}(x,z) \simeq 0.5}$

2. Régression linéaire de Y sur $(\mathbb{1}, x, z)$

$$Y = -1.61 + 0.61x + 0.46z + \hat{\varepsilon}, \quad S.C.R = \|\hat{\varepsilon}\|^2 = 0.3.$$

(a) Déterminons $\bar{y}$

$$\bar{y} = -1.61 + 0.61\bar{x} + 0.46\bar{z} + \bar{\hat{\varepsilon}}$$

$\bar{\hat{\varepsilon}} = 0$ car la constante fait partie du modèle

d'où

$$\bar{y} = 1.61 + 0.61\bar{x} + 0.46\bar{z}$$

$$= 1.61 \quad (\text{On a montré que } \bar{x} = \bar{z} = 0)$$

(b) Calculons SCE, SCT, R^2 et R^2_a.

(i) Calcul de SCE

$$SCE = \|\hat{Y} - \bar{y}\mathbb{1}\|^2 \quad (\text{car la constante est dans le modèle})$$

$$= \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$\hat{y}_i = x_i^T \hat{\beta} = (1 \quad x_i \quad z_i)\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3\end{pmatrix} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$$

Comme $\bar{y} = \hat{\beta}_1$, il ~~vient~~ vient que

$$\hat{y}_i - \bar{y} = \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i = 0.61x_i + 0.46z_i$$

d'où

$$SCE = \sum_i (0.61x_i + 0.46z_i)^2$$

Scanned by CamScanner

$$SCE = 0.61^2 \sum x_i^2 + 0.46^2 \sum z_i^2 + 2(0.61)(0.46) \sum x_i z_i$$

$$= 0.61^2 \, x^T x + 0.46^2 \, z^T z + 2(0.61)(0.46) \, x^T z.$$

$$= 0.61^2 \, X^T X_{(2,2)} + 0.46^2 \, X^T X_{(3,3)} + 2(0.61)(0.46) \, X^T X_{(4,3)}$$

$$= (0.61^2)(9.3) + 0.46^2 (12.7) + 2(0.61)(0.46)(5.4)$$

$$= 9.18.$$

(ii) Calcul de SCT.

$$SCT = SCE + SCR$$

$$= 9.18 + 0.3$$

$$= 9.48$$

(iii) Calcul de R^2

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{9.18}{9.48} \simeq 0.968$$

⚠ Interprétation du R^2 : 97% de la variance des données est expliquée par ce modèle.

(iv) Calcul du R^2_a.

$$R^2_a = 1 - \frac{n-1}{n-p}(1 - R^2) = 1 - \frac{25-1}{25-3}(1 - 0.968)$$

$$\simeq 0.965$$

Exercice 2.5

$Y = X\beta + \varepsilon$ $\quad Y \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ composée de p vecteurs orthogonaux, $\beta \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

$X = [Z, U]$ où $\begin{cases} Z = [X_1, X_2, \dots, X_q] \\ U = [X_{q+1}, X_{q+2}, \dots, X_p] \end{cases}$

Estimations obtenues par MCO.

$$\hat{Y}_X = \hat{\beta}_1^X X_1 + \dots + \hat{\beta}_p^X X_p.$$

$$\hat{Y}_Z = \hat{\beta}_1^Z X_1 + \dots + \hat{\beta}_1^Z X_q$$

$$\hat{Y}_U = \hat{\beta}_{q+1}^U X_{q+1} + \dots + \hat{\beta}_p^U X_p$$

Notation : $SCE(A) = \|P_A Y\|^2$

1. Montrons que $SCE(X) = SCE(Z) + SCE(U)$

On veut montrer que

$$\|P_X Y\|^2 = \|P_Z Y\|^2 + \|P_U Y\|^2.$$

U et $U^\top = Z$ forment une partition de X. donc

$$P_U + P_{U^\perp} := P_U + P_Z = I_p.$$

Il en suit que

$$P_X Y = (P_U + P_{U^\perp}) P_X Y$$
$$= (P_U + P_Z) P_X Y.$$
$$= P_U P_X Y + P_Z P_X Y.$$
$$= P_{U \cap X} Y + P_{Z \cap X} Y.$$
$$= P_U Y + P_Z Y \quad \text{car } U \cap X = U \text{ et } Z \cap X = Z.$$

$$\|P_X Y\|^2 = \|P_U Y + P_Z Y\|^2$$
$$= \|P_U Y\|^2 + \|P_Z Y\|^2$$

car les colonnes de X ~~étant~~ orthogonales, le résultat ci-dessus découle du théorème de pythagore.

D'où

$$SCE(X) = SCE(U) + SCE(Z)$$

2. Expression de $\hat{\beta}_1^X$ en fonction de Y, X_1 et $\|X_1\|$.

$$\hat{\beta}^X = (X^T X)^{-1} X^T Y = (\hat{\beta}_1^X, \hat{\beta}_2^X, \ldots, \hat{\beta}_p^X)$$

$$X = [X_1, \ldots, X_p].$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_p^T \end{bmatrix} [X_1, \ldots, X_p] = \begin{bmatrix} X_1^T X_1 & X_1^T X_2 & \cdots & X_1^T X_p \\ X_2^T X_1 & X_2^T X_2 & \cdots & X_2^T X_p \\ \vdots & & & \\ X_p^T X_1 & \cdots & \cdots & X_p^T X_p \end{bmatrix}$$

La matrice X étant orthogonale par hypothèse vérifie

$$X_i^T X_j = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

D'où

$$X^T X = \begin{bmatrix} \|X_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|X_p\|^2 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left(\|X_1\|^2, \dots, \|X_p\|^2\right)$$

Par ailleurs

$$X^T Y = \begin{bmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_p^T \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} X_1^T Y \\ \vdots \\ X_p^T Y \end{bmatrix}$$

Il en suit que

$$\hat{\beta}^X = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 1/\|X_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\|X_p\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T Y \\ \vdots \\ X_p^T Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^X \\ \hat{\beta}_2^X \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p^X \end{bmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\hat{\beta}_1^X = \frac{X_1^T Y}{\|X_1\|^2}}$$

3. Déduisons en que $\hat{\beta}_1^X = \hat{\beta}_1^Z$

La première colonne de Z est X_1. Effectuer donc le même raisonnement que précédemment et obtenir le résultat.

Exercice 3.4 :

$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i,2} + \beta_3 x_{i,3} + \beta_4 x_{i,4} + \varepsilon_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$

1. Calculons $\hat{\beta}$, $\sum_{i=1}^{50} \hat{\varepsilon}_i^2$, $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1} X^TY$$

$$X^TX = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad , \text{avec} \quad A = 50 \quad B = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 15 & 30 & 10 \\ 4 & 10 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(X^TX)^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/50 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

où

$$B^{-1} = \frac{1}{13\,720} \begin{bmatrix} 1100 & -560 & 30 \\ -560 & 784 & -140 \\ 30 & -140 & 375 \end{bmatrix}$$

$$X^TY = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1} X^TY = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.55 \\ -0.57 \\ 1.89 \end{pmatrix}$$

* <u>Calculons $\sum \hat{\varepsilon}_i^2 = \|\hat{\varepsilon}\|^2$.</u>

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \|Y - \hat{Y}\|^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \|Y\|^2 - \|\hat{Y}\|^2.$$

$$= Y^T Y - \|X\hat{\beta}\|^2$$

$$= Y^T Y - (X\hat{\beta})^T X\hat{\beta}$$

$$= Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta}$$

On sait que

$$(X^T X)\hat{\beta} = X^T Y \Rightarrow \hat{\beta}^T (X^T X)\hat{\beta} = \hat{\beta}^T X^T Y.$$

$Y^T Y = 640$

$\hat{\beta}^T X^T Y \simeq 458$.

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = 640 - 458 \simeq 182.$$

* <u>Calculons $\hat{\sigma}^2$</u>

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{n-p} = \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{46} \simeq 3.96 \qquad (n = 50,\ p = 4)$$

2. (i) I.C. pour β_2 au niveau 95%

$$\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\hat{\sigma}_2} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\hat{\sigma}\sqrt{(X^T X)^{-1}_{2,2}}} \sim T_{n-p} = T_{46}.$$

$$\Downarrow$$

$$I(\beta_2) = \hat{\beta}_2 \pm t_{46}(1 - \alpha/2)\, \hat{\sigma} \sqrt{(X^T X)^{-1}_{2,2}};$$

$$= \hat{\beta}_2 \pm t_{46}(0.975)\, \hat{\sigma}\, (X^T X)^{-1/2}_{2,2}$$

A.N. :

$$I(\beta_2) = 2.55 \pm 2.0\sqrt{3.96}\sqrt{1100/13720}$$

$$\simeq [1.42 \,;\, 3.68].$$

(ii) I.C. pour σ^2 au niveau 95%.

Théorème de Cochran nous renseigne que
$$\|\hat{\varepsilon}\|^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-p}. \rightarrow (n-p)\,\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-p}$$
Un I.C. pour σ^2 à 95% est

$$I.C(\sigma^2) = \left[\frac{46\,\hat{\sigma}^2}{c_2}, \frac{46\,\hat{\sigma}^2}{c_1}\right] = \left[\frac{\|\hat{\varepsilon}_i\|^2}{c_2}, \frac{\|\hat{\varepsilon}\|^2}{c_1}\right]$$

où c_1 et c_2 sont tels que

$$\mathbb{P}[c_1 \leq \chi^2_{46} \leq c_2] = 0.95$$

On trouve $c_1 \simeq 29$ $c_2 \simeq 66$.
Ce qui donne

$$I.C.(\sigma^2) \simeq [2.76 \,;\, 6.28]$$

3. Le test de validité globale du modèle au niveau 5% se fait entre autre avec la stat. de Fisher.

$$F = \frac{n-p}{p-1} \cdot \frac{\|\hat{Y} - \bar{y}\mathbb{1}\|^2}{\|Y-\hat{Y}\|^2} \left(:= \frac{n-p}{p-1} \frac{R^2}{1-R^2} \right) \sim \mathcal{F}^{p-1}_{n-p}$$

$$\|\hat{Y} - \bar{y}\mathbb{1}\|^2 = \|\hat{Y}\|^2 - \|\bar{y}\mathbb{1}\|^2$$

$$\simeq 458 - 50 \cdot \bar{y}^2$$

$$\simeq 458 - 200$$

$$\simeq 258$$

$$\|Y - \hat{Y}\| \simeq 182 .$$

D'où

$$F \simeq \frac{46}{3} \cdot \frac{258}{182} \simeq 21.7$$

Mais

$$\mathcal{F}^{3}_{46}(0.95) \simeq 2.81$$

Donc l'hypothèse nulle selon laquelle $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 =$ est rejetée

4. Intervalle de prévision à 95% pour y_{51}

$$I(y_{51}) = \hat{y}_{51} \pm t_{46}(0.975)\, \hat{\sigma} \sqrt{1 + x_{51}^T (X^T X)^{-1} x_{51}}$$

$$\hat{y}_{51} = x_{51}^T \hat{\beta} = (1, 1, -1, 0.5)\, \hat{\beta} \simeq 6.07 .$$

$$x_{51}^T (X^T X)^{-1} x_{51} = (1, 1, -1, 0.5)\, (X^T X)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 0.2581742$$

$$I(y_{51}) \simeq [1.61 , 10.53]$$

Calcul simplifié avec R

⚠

Exercice 3.8

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1429 & 67660 & 9792 \\ 67660 & 3306000 & 470289 \\ 9792 & 470289 & 67660 \end{bmatrix}.$$

En effet,

$$X^T X = \begin{bmatrix} \mathbb{1}^T \\ x^T \\ \sqrt{x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & x & \sqrt{x} \end{bmatrix}$$

où $\mathbb{1}^T = (1, \ldots, 1)$
$x^T = (x_1, \ldots, x_n)$
$\sqrt{x}^T = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$.

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{1}^T\mathbb{1} & \mathbb{1}^T x & \mathbb{1}^T\sqrt{x} \\ x^T\mathbb{1} & x^T x & x^T\sqrt{x} \\ \sqrt{x}^T\mathbb{1} & \sqrt{x}^T x & \sqrt{x}^T\sqrt{x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum \sqrt{x_i} \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i\sqrt{x_i} \\ \sum \sqrt{x_i} & \sum x_i\sqrt{x_i} & \sum x_i \end{bmatrix}$$

$n = 1429 \quad \sum x_i = X^T X_{(3,3)} = 67\,660$.

Il reste à calculer $\sum x_i \sqrt{x_i} = x^T \sqrt{x}^T$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} \mathbb{1}^T Y \\ x^T Y \\ \sqrt{x}^T Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\,310 \\ 1462\,000 \\ 209\,700 \end{bmatrix} \qquad Y^T Y = 651\,900$$

$x^T Y = 1\,462\,000 \qquad \sqrt{x}^T Y = 209\,700$

$$(x^T Y)^T (\sqrt{x}^T Y) = (1.462\,000)(209\,700)$$

$$Y^T (x^T)^T \sqrt{x}^T Y = (1.462.000)(209.700)$$

$$Y^T (x \sqrt{x}^T) Y = (1.462\,000)(209\,700)$$

$$x\sqrt{x}^T = \frac{(1.462\,000)(209\,700)}{Y^T Y}, \text{ Car } x\sqrt{x}^T \in \mathbb{R}.$$

d'où

$$x\sqrt{x}^T = \frac{(1\,462\,000)(209\,700)}{651\,900} = 470\,289$$

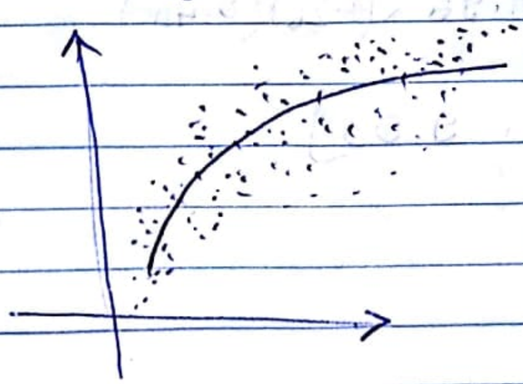
2. $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{67\,660}{1429} \simeq 47.3$ cm.

3. Méthode des moindres carrés.

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} -16.8 \\ -0.30 \\ -7.62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix}$$

Equation de la courbe: $y = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 \sqrt{x}$

i.e $y = -16.8 - 0.3\,x + 7.62\sqrt{x}$.



Scanned by CamScanner

4. Calculons $\hat{\sigma}^2_{MCO}$

$$\hat{\sigma}^2_{MCO} = \frac{\|Y - \hat{Y}\|^2}{n-3} = \frac{\|Y\|^2 - \|X\hat{\beta}\|^2}{1426}$$

$$\|X\hat{\beta}\|^2 = (X\hat{\beta})^T X\hat{\beta} = \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} = \hat{\beta}^T X^T Y$$

$$\left(\text{Car } X^T X \hat{\beta} = X^T Y\right)$$

$$= (-16.8,\ -0.30,\ 7.62) \begin{pmatrix} 30\,310 \\ 1\,462\,000 \\ 209\,700 \end{pmatrix}$$

$$= 650\,106$$

$$\hat{\sigma}^2_{MCO} = \frac{Y^T Y - \|X\hat{\beta}\|^2}{1426} \approx \frac{651\,900 - 650\,106}{1426} \approx 1.258065$$

$$\hat{\sigma}^2_{MCO} = 1.258065$$

5. I.C. pour β_3 à 95%

$$I.C.(\beta_3) = \hat{\beta}_3 \pm t_{n-3}(0.975)\,\hat{\sigma}\sqrt{(X^TX)^{-1}_{3,3}} \quad ; \quad t^{1-\alpha/2}_{n-3} = t_{1426}(0.975) = 1.96$$

$$\approx 7.62 \pm 1.96\sqrt{(1.26)(0.411)}$$

$$\approx [6.21\ ;\ 9.03]$$

6. Test de l'hypothèse $H_0 : \beta_2 = 0$ au seuil 10%
Contre $H_a : \beta_2 \neq 0$

$$T := \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_2} = \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{(X^TX)^{-1}_{22}}} \sim T_{n-3} = T_{1426} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

$$|T| := \left|\frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\sigma}_2}\right| = \left|\frac{-0.3}{\sqrt{(1.26)(0.002)}}\right| \simeq 5.98.$$

$$Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.95} = 1.645.$$

$$|T| > Z_{1-\alpha/2} \rightarrow \text{Rejet de } H_0 : \beta_2 = 0$$

7. * Calculons $\bar{y}$

$$X^TY = \begin{bmatrix} 1^TY \\ x^TY \\ \sqrt{x}^TY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\bar{y} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\,310 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$n\bar{y} = 30\,310 \rightarrow \bar{y} = \frac{30\,310}{n} = \frac{30\,310}{1429} \approx 21.21$$

* Déduisons en R^2_a.

$$R^2_a = 1 - \frac{n-1}{p-1}\frac{\|Y-\hat{Y}\|^2}{\|Y-\bar{y}1\|^2} = 1-(n-1)\frac{\hat{\sigma}^2}{\|Y-\bar{y}1\|^2}$$

$$\|Y-\bar{y}1\|^2 = \|Y\|^2 - \|\bar{y}1\|^2 = Y^TY - n\bar{y}^2 = 651\,900 - 1429(21.$$

On a donc

$$R^2_a = 1 - 1428.\frac{1.26}{621\,605.2} \approx 0.81$$

8. Intervalle de prévision à 95% de y_{n+1}
Sachant $x_{n+1} = 49$

Note $x'_{n+1} = (1 \quad 49 \quad 7)$. Alors

$$\hat{y}_{n+1} = x'_{n+1} \hat{\beta} \simeq 21.8.$$

$$IC_1(y_{n+1}) = \hat{y}_{n+1} \pm t_{1426}(0.975)\, \hat{\sigma} \sqrt{1 + x_{n+1}^T (X^T X)^{-1} x_{n+1}}$$

$$\simeq [20.1 \,;\, 23.5]$$

9. Faire de même, puis obtenir

$$IC_2(y_{n+1}) \simeq [11.7 \,;\, 15.9].$$

10. $IC_2(y_{n+1}) > IC_1(y_{n+1})$

Le 2^{nd} intervalle est le plus grand.

Cause : Le second point est plus éloigné du centre de gravité du nuage de points (que le 1^{er})

Conséquence : On prévoit donc moins bien sa valeur.

Exercice 3.9

C : Consommation gaz
T : Température moyenne

1. Modèle : $C_i = \beta_1 + \beta_2 T_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, 30$

Les $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, i.i.d
~~cov(εi, εj) = 0 pour i≠j~~

2. $$T_{intercept} = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}} = \frac{4.72385}{0.129774} \simeq 36{,}41$$

$$T_{Temp} = \frac{\hat{\beta}_T}{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_T}} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\beta}_T}{T_{Temp}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{-0.27793}{-11.04} \simeq +0.0252$$

3. Lire output R et obtenir que la probabilité cherchée est de l'ordre de $1{,}05 * 10^{-11}$

4. Pour la ligne Temp du tableau.

Test : $H_0 : \beta_2 = 0$ vs $H_1 : \beta_2 \neq 0$

Sous H_0,
$$T_2 = \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} \sim T_{28}$$

Rejet de H_0 si $\begin{cases} |T_2| > T_{28}(0.975) \\ \text{ou} \\ p\text{-value} < 5\% \end{cases}$ (Test au seuil 95%

$p\text{-value} := 1.05 * 10^{-11} < 5\% \Rightarrow$ Rejet de H_0

Scanned by CamScanner

5. Multiple R-Squared := $R^2 = 0.8131$

Interprétation : 81.31% de la variabilité des données est expliqué par le modèle

6. Calculons $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\text{Residual Standard error}\right)^2$$

$$= 0.3548^2$$

$$\simeq 0.126$$

7. Cette valeur est la statistique du test de Fisher de validité globale du modèle.

On l'obtient comme suit :

Sous $H_0 : \beta_2 = 0$,

$$F = \frac{n-p}{q} \frac{SCR_0 - SCR}{SCR} = \frac{\|\hat{Y} - \hat{Y}_0\|^2}{\hat{\sigma}^2} \sim \mathcal{F}^1_{28}$$

Ici,

$F = 128$ qui correspond à une p-value de $1.046 * 10^{-11}$ ("Très" petit) $\Rightarrow$ Rejet de $H_0 : \beta_2 = 0$

8. Rejet de $H_0 : \beta_2 = 0$ $\Rightarrow$ La température a un impact sur la consommation de gaz.
Ceci est tout à fait naturel car ~~plus il fait froid, plus~~ moins il fait froid, moins on chauffe.