Modelo de Izhikevich

Mauricio Alejandro LUGO

FamaF 2021

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Nulclinas - Nullcline

Es una herramienta para el análisis del comportamiento de un sistema de ODE son la **nulclinas**.

Definición:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f(u,v) \\ \frac{du}{dt} &= g(u,v) \end{aligned}$$

La **nulclina** u es el conjunto de puntos (u,v) donde $f(u,v)$ es cero, es decir, la curva de nivel donde $f(u,v)$ es cero. Del mismo modo las **nulclinas** v es el conjunto de puntos donde $g(u,v)$ es cero

Observación: No mezclar los conceptos de Retrato de Fase, Campo de Direcciones y Nulclinas (Todas se suelen realizar para el tratamiento geométrico de la solución de una ODE)

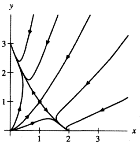


Figura 5.12
Retrato fase para el sistema de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1-\frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1-\frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Este retrato fase generado por computadora sugiere que las soluciones que no tienden a (1, 1) lo hacen a (0, 3) o a (2, 0).

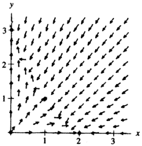


Figura 5.13
Campo de direcciones para el sistema de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1-\frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1-\frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Es difícil juzgar el comportamiento a largo plazo de las soluciones sólo a partir del campo de direcciones.

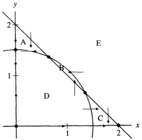


Figura 5.18
Nulclinales para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1-\frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{9}{4}-y^2\right) - x^2y.$$

Las nulclinales separan el primer cuadrante en cinco regiones.

Ítem 1

Modelo de Izhikevich

$$\frac{dv}{dt} = 0.04v^2 + 5v + 140 - u + I \tag{1}$$

$$\frac{du}{dt} = a(bv - u) \tag{2}$$

$$Si \;\; v > 30mV \quad entonces \quad \begin{cases} v \leftarrow c \\ u \leftarrow u + d \end{cases}$$

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Igualando a cero busco la estabilidad del sistema.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 0 \\ \frac{du}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

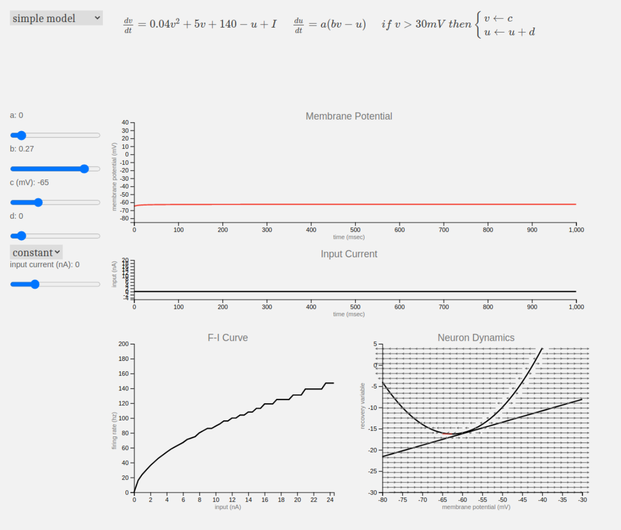
Quedando así

$$\begin{aligned} 0 &= 0.04v^2 + 5v + 140 - u + I \\ 0 &= a(bv - u) \end{aligned}$$

Reemplazando en u en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} 0 &= 0.04v^2 + 5v + 140 - u + I \\ u &= b \cdot v \\ 0.04v^2 + 5v + bv + 140 + I &= 0 \\ \text{Agrupando:} & \\ 0.04v^2 + (5 - b)v + (140 + I) &= 0 \\ Si \quad I = 0; \quad b &\approx 0.2 \end{aligned}$$

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación



FAMAF

Facultad
de Matemática,
Astronomía, Física
y Computación

$$A = J_{Iz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v'}{\partial v} & \frac{\partial v'}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial u'}{\partial v} & \frac{\partial u'}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08v + 5 & -1 \\ \\ ab & -a \end{bmatrix}$$

Detereminando los autovalores λ_1 y λ_2 para los autovectores propios en los puntos de equilibrio:

$$det(J_{Iz} - \lambda I_2) = \begin{bmatrix} 0.08v + 5 - \lambda & -1 \\ \\ ab & -a - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

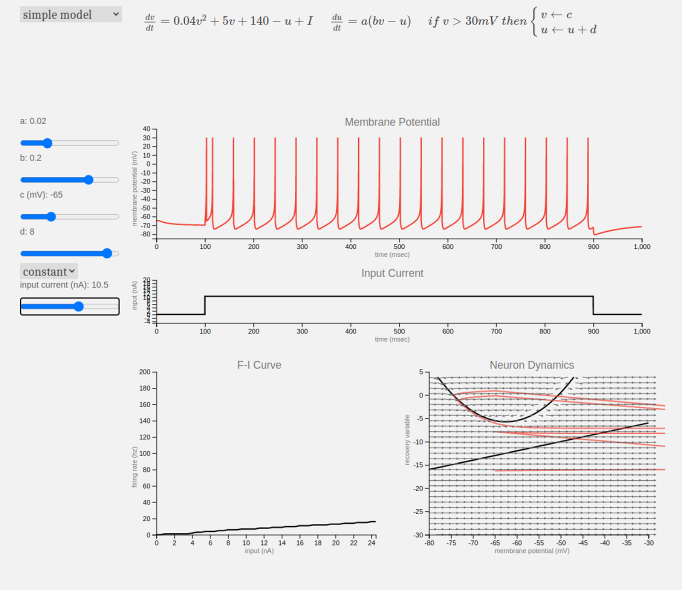
El polinomio característico es:

$\lambda^2 + (a - 5.08)\lambda + (a \cdot 0.08 \cdot v - 5 + a \cdot b) = 0$

$\lambda_1, \lambda_2 \ \in \ \mathbb{C} \quad$ si $\quad a > 0, \qquad$ (solución procediendo: $e^{J_{Iz}}$)

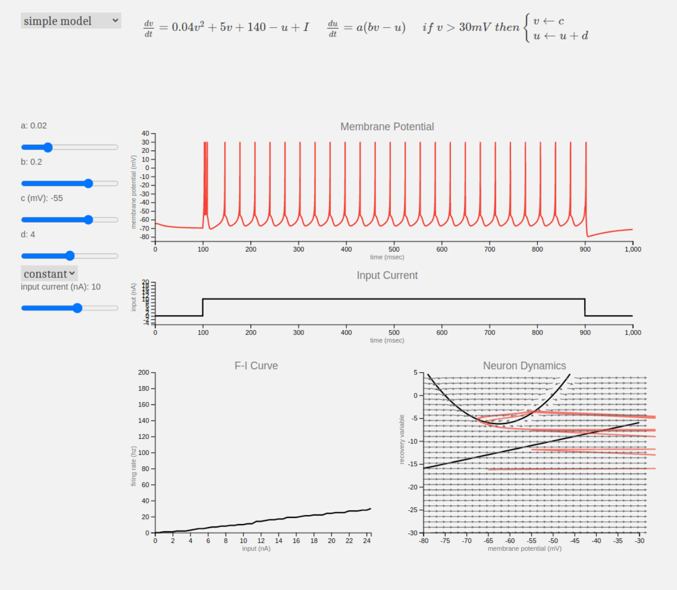
FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

RS – Regular Spiking



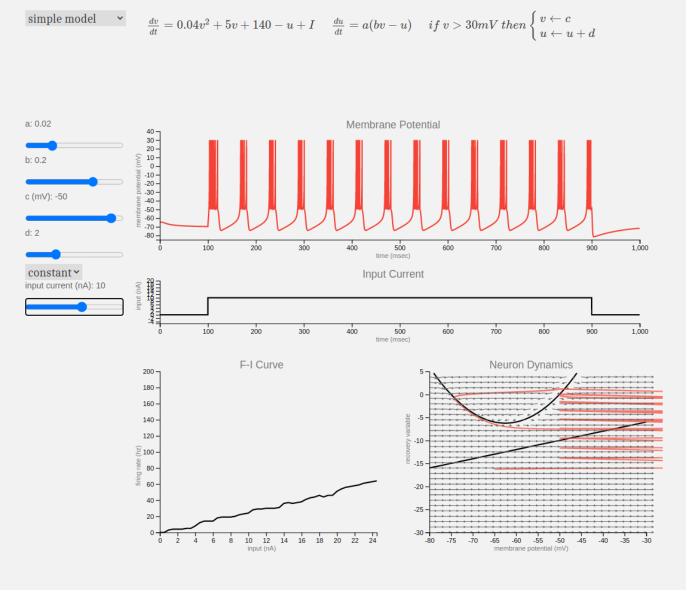
Facultad
de Matemática,
Astronomía, Física
y Computación

IB – Intrinsically bursting



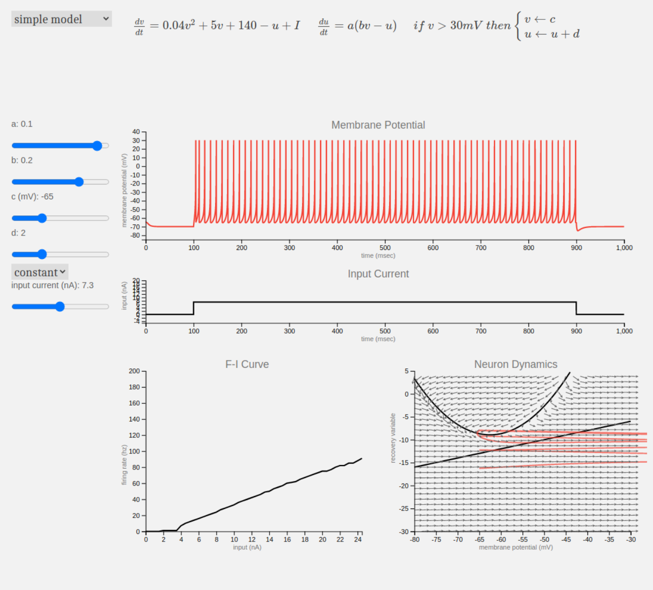
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

CH – Chattering



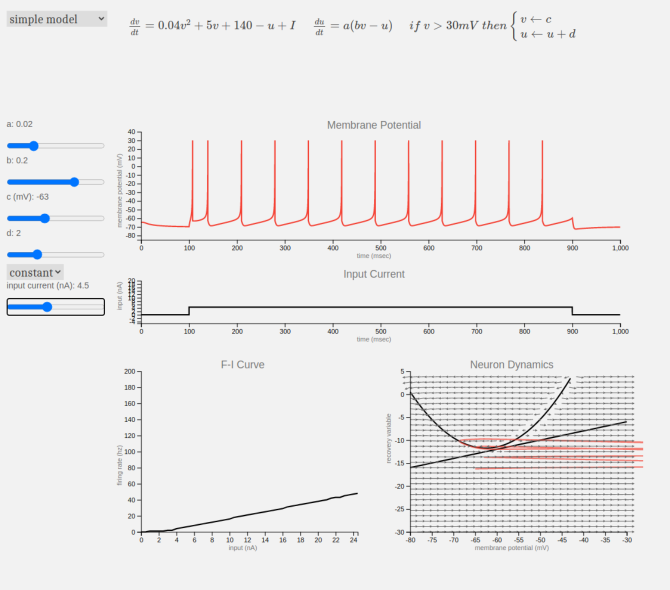
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

FS – Fast Spiking



Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

TS – Talamo-Cortical



Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Hiperenlace : **Modelo de Izhikevich**

Facultad
de Matemática,
Astronomía, Física
y Computación