Análisis Matemático II

Prof. Mauricio A. LUGO

Índice

Análisis II

1. *Unidad N° 1*

1.1. *Espacios Vectoriales*

El espacio vectorial está constituido por un conjunto $\mathbb{V}$*, a cuyos elementos denominamos vectores, y un cuerpo* $\boldsymbol{K}$*, a cuyos elementos llamamos escalares; entre los elementos del conjunto* $\mathbb{V}$ *es posible definir una operación interna y cerrada, llamada suma de vectores (Simbolizamos* $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$*) y entre los elementos del cuerpo y los vectores definimos una operación externa pero cerrada que llamaremos producto de un vector por un escalar (Simbolizamos* $\bullet : \boldsymbol{K} \cdot \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$*).*

En general, en este curso $\boldsymbol{K}$ *será el conjunto* $\mathbb{R}$ *de los números reales.*

$(\mathbb{V}, +, \mathbb{R}, \bullet)$ *es la cuaterna que llamaremos* ***espacio vectorial*** $\mathbb{V}$*.*

$\mathbb{R}^n$ *es el conjunto de las n-uplas de números reales.*

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sean $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ $\in \mathbb{R}^n$ $\qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n); \qquad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Definimos una suma: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

* $(\mathbb{V}, +)$ *Propiedades:*

1. Conmutativa:
   $\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{V} : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$
2. Asociativa:
   $\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{V} : \ (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$
3. Existencia de elemento neutro:
   $\forall\ \vec{v} \in \mathbb{V}, \exists\ \vec{0} \in \mathbb{V} : \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
4. Existencia de un elemento opuesto:
   $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \ \exists (-\vec{v}) \in \mathbb{V} : \vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$

   Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ *definimos el producto escalar.*

$$\lambda.\boldsymbol{x} = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \ldots, \lambda.x_n)$$

$\lambda \in \mathbb{R}^n$, *punto del espacio* $\mathbb{R}^n$, *o un vector del espacio vectorial.*

* *($\boldsymbol{K}$,$\bullet$) Propiedades:*

1. *Distributiva respecto a la suma en* $\mathbb{V}$:
   $\forall\ k \in \boldsymbol{K},\ \ \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} \in \mathbb{V} : k.(\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}) = k_1.\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + k_2.\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$
2. *Asociativa mixta:*
   $\forall\ k_1, k_2 \in \boldsymbol{K},\ \forall\ \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V} : k_1.(k_2.\vec{\boldsymbol{v}}) = k_2.(k_1.\vec{\boldsymbol{v}})$
3. *Existencia del valor unitario para el producto de un vector por un escalar:*
   $\forall \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V},\ \ \exists\ \ 1 \in \boldsymbol{K} /\ \ 1 \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}$

* ***Ejemplos:***

$$(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \bullet) \qquad \mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n); \quad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

La cuaterna $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \bullet)$ *es un espacio vectorial.*

1.2. *Vectores de Base Canónica*

Todo espacio vectorial tiene una base canónica (un conjunto de vectores que permite escribir otros vectores como una combinación lineal de la base canónica)

$\{e_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$ *conjunto de los vectores* e_i

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{e}_i$

Cualquier n-upla se puede escribir como una combinación lineal de base canónica

$\mathbb{R}^n$: *es el resultado del producto cartesiano:* $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-veces}$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
\mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1) \\
\mathbb{R}^n &= \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \qquad p < n \\
\boldsymbol{x} &= ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}), \ \ (x_{n-p}, \ldots, x_n)) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Un elemento de $\mathbb{R}^n$ *del punto* (2) *es un par ordenado cuya primera componente es una n-upla y cuya segunda componente es una p-upla.*
Vamos a considerar, según nos convenga, una igualdad entre estos elementos matemáticos.

(1) *y* (2) *,equivalentes, indistingibles.*

Ejemplos :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = (x_1, (x_2, x_3)) \\
\mathbb{R}^3 &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = ((x_1, x_2), x_3)
\end{aligned}$$

En este curso vamos a trabajar con funciones reales de n-variables $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Por lo tanto comenzaremos definiendo determinadas funciones que nos van a conducir a la idea de entorno de un punto.

1.2.1. *Producto Interno en* $\mathbb{V}$

Un producto interno en $\mathbb{V}$ *(espacio vectorial) es una función:* $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, *que cumple las sigientes propiedades.*

1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$

2. $\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y}\rangle \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$

3. $\langle k.\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = k.\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, k.\boldsymbol{y}\rangle \quad \forall k \in \mathbb{R}; \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$

4. Si $\boldsymbol{x} \neq 0 \Longrightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle > 0$

Ejemplos:

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \qquad \textit{(producto escalar extendido a } \mathbb{R}^n\textit{)}$$

[1]

1.3. Función Norma

Dado un producto interno en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, la norma de un vector $\boldsymbol{x}$, que simbolizamos $\| \boldsymbol{x} \|$, es por definición:

$$\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad o \qquad +\sqrt{\langle x, x\rangle}$$

$$\| \ \|: \longrightarrow \mathbb{R}^+ \ / \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad \| \boldsymbol{x} \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Observaciones:

$$\| \boldsymbol{x} \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \| \boldsymbol{x} \|^2 = \langle x, x\rangle$$

Casos Particulares:

1. *si* $\boldsymbol{x} \neq \vec{0} \Longrightarrow \| \boldsymbol{x} \| > 0$

2. *si* $\boldsymbol{x} = \vec{0} \Longrightarrow \| \boldsymbol{x} \| = 0$

Propiedades de la Norma :

$N_1 : \| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \| \leq \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \| \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$ [2]

$N_2 : \| k.\boldsymbol{x} \| = | k | . \| \boldsymbol{x} \| \qquad \forall k \in \mathbb{R} \ ; \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}$

$N_3 : \| \boldsymbol{x} \| > 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}$

[1] *Es un caso particular del producto interno.*
[2] *Desigualdad triangular*

Demostación de N_1 *(tomando dos vectores y realizando el producto interno)*

$$\langle x+y,\ x+y\rangle = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$$

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \langle x+y,\ x+y\rangle && \textit{(Propiedad 2)}\\
&= \langle x\ ,\ x+y\rangle\ +\ \langle y\ ,\ x+y\rangle && \textit{(Propiedad 1)}\\
&= \langle x+y\ ,\ x\rangle\ +\ \langle x+y\ ,\ y\rangle && \textit{Propiedad 2}\\
&= \langle x\ ,\ x\rangle\ +\ \langle y\ ,\ x\rangle\ +\ \langle x\ ,\ y\rangle\ +\ \langle y\ ,\ y\rangle && \textit{(Por definición de Norma)}\\
&= \|x\|^2\ +\ 2.\langle x\ ,\ y\rangle\ +\ \|y\|^2 &&\\
&\leq \|x\|^2 + 2.\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 && \textit{(Desigualdad Cauchy Schwarz)}\\
&= (\|\boldsymbol{x}\|\ +\ \|\boldsymbol{y}\|)^2 &&
\end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{x}\|\ +\ \|\boldsymbol{y}\|)^2 \implies \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

Definición: *En un espacio vectorial* $\mathbb{V}$*, cualquier, norma es una función definida:*

$$\|\quad\| : \quad \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \ \textit{que cumple}\ N_1,\ N_2,\ N_3$$

[3]

Ejemplos:

1.3.1. *Norma Euclidiana*

Dado $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$*, definimos norma euclidiana.*

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.3.2. *Norma de la Suma*

$$\|\boldsymbol{x}\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

1.3.3. *Norma del Máximo*

[4]

$$\|\boldsymbol{x}\|_M = máx\{|x_i|\ ;\quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

[3] *La norma es una generalización de la función valor absoluto.*

[4] $\|\boldsymbol{x}\|_M$ *(Es el máximo de los valores absolutos de las componentes.)*

Veamos que ocurre si $n = 1$ [5]

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| = (x^2)^{\frac{1}{2}} = |x| \\ \\ \|x\|_M = máx\{|x|\} = |x| \\ \\ \|x\|_S = |x| \end{array}\right\} \textit{buena generalización del valor absoluto.}$$

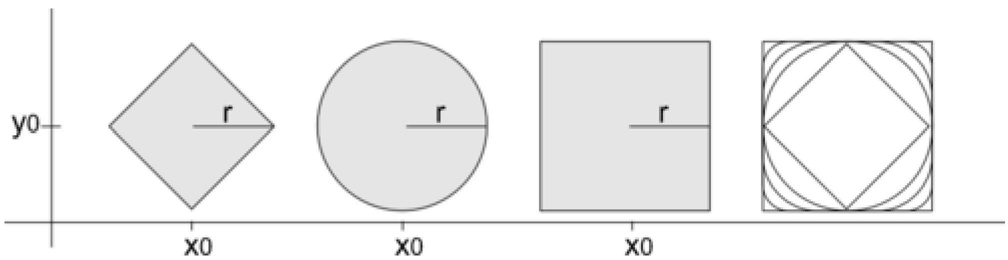
Ejemplos:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad \boldsymbol{x} = (1,1)$$
$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \|\boldsymbol{x}\|_M &= máx\{|1|, |1|\} = 1 \\ \|\boldsymbol{x}\|_S &= |1| + |1| = 2 \end{aligned}$$

Relación Fundamental entre las Normas

$$\boxed{\|\boldsymbol{x}\|_M \ \leq \ \|\boldsymbol{x}\| \ \leq \ \|\boldsymbol{x}\|_s}$$

Además: $\|\boldsymbol{x}\|_M \ \leq \ \|\boldsymbol{x}\| \ \leq \ \|\boldsymbol{x}\|_S \ \leq \ \sqrt{n} \ . \ \|\boldsymbol{x}\|_M \ \leq \ n \ . \ \|\boldsymbol{x}\|$



1.4. *Topología en* $\mathbb{R}^n$

1.4.1. *Distancia:*

Dados $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *perteneciente a* $\mathbb{R}^n$*, definimos la distancia de* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$ $(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ *como una función* $D: \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^+ \ / \ d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ *(función real no negativa.)*

[5] *recta en* $\mathbb{R}$

Análisis II

- ***Propiedades:***
  - ◇ $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$
    $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$
  - ◇ $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > 0 \qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$
  - ◇ $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ [6]

Demostración de la tercera propiedad :

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})\| \leq$$
$$\leq \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\| + \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$$

Por propiedad transitiva de la relación de orden:

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$$

Un espacio en el cual se ha introducido una distancia o métrica se llama espacio métrico.

$(\mathbb{V},d)$ *espacio métrico*

1.4.2. Bola Abierta de Centro a y Radio r

Sean $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *y* $r \in \mathbb{R}^+$

$B_{(\boldsymbol{a},r)}$ *es un conjunto de puntos* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *tales que su distancia al punto* $\boldsymbol{a}$ *es menor que* r.

$$B_{(\boldsymbol{a},r)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n /\ d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < r\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n /\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < r\}$$

1.4.3. Bola Cerrada de Centro a y Radio r

$$B_{[\boldsymbol{a},r]} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n /\ d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) \leq r\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n /\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \leq r\}$$

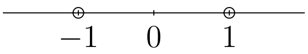
[6] *desigualdad triangular*

1.4.4. *Esfera de Centro a y Radio r*

$$S_{[\boldsymbol{a},r]} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n / \; d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) \leq r\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n / \; \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \leq r\}$$

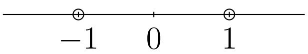
Ejemplos:

$n = 1; \quad a = 0; \quad r = 1$



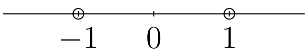
Con la norma euclidiana:

$$\begin{aligned} B_{(0,1)} &= \{x \in \mathbb{R}/ \; d(x,0) < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \; \|x-0\| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \; |x| < 1\} \end{aligned}$$



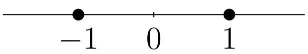
Con la norma del máximo:

$$\begin{aligned} B_{(0,1)} &= \{x \in \mathbb{R}/ \; \|x-0\|_M < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \; |x| < 1\} \end{aligned}$$



Con la norma de la suma:

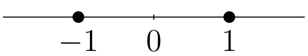
$$\begin{aligned} B_{(0,1)} &= \{x \in \mathbb{R}/ \; \|x-0\|_S < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \; |x| < 1\} \end{aligned}$$



Con la norma euclidiana:

$$\begin{aligned} B_{[0,1]} &= \{x \in \mathbb{R}/ \; d(x,0) \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \; \|x-0\| \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \; |x| \leq 1\} \end{aligned}$$

Idéntica representación para las demás normas.



Con la norma euclidiana:

$$\begin{aligned} S_{[0,1]} &= \{x \in \mathbb{R}/ \; \|x-0\| = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/ \; |x| = 1\} \end{aligned}$$

$n = 2$; $\boldsymbol{a} = \mathbf{0} = (0,0)$; $r = 1$, *para* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} B_{(0,1)} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \ d(\boldsymbol{x},0) < 1\} = \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \ \|\boldsymbol{x} - \mathbf{0}\| < 1\} = \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \ \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} < 1\} = \ (\textit{elevando al cuadrado}) \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \ {x_1}^2 + {x_2}^2 < 1\} \end{aligned}$$

$$B_{(0,1)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \ \|\boldsymbol{x} - \mathbf{0}\|_M < 1\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \ \textit{máx}\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}$$

$$B_{(0,1)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \ \|\boldsymbol{x} - \mathbf{0}\|_S < 1\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 / \ |x_1| + |x_2| < 1\}$$

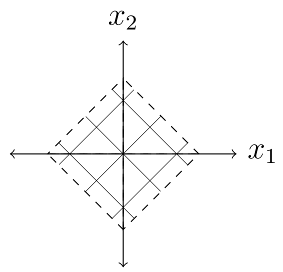
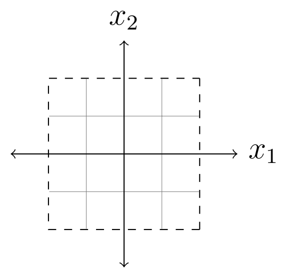
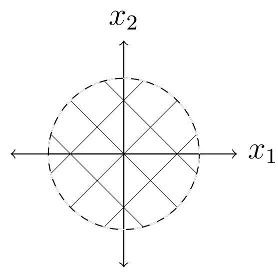
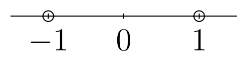
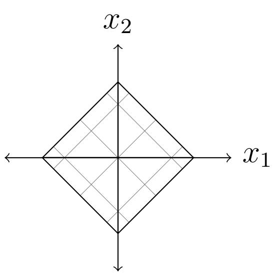
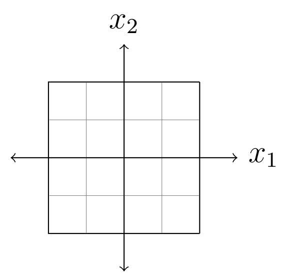
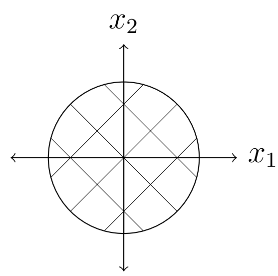
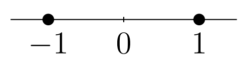
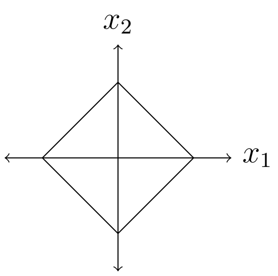
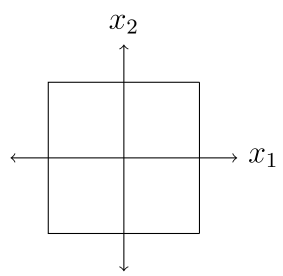
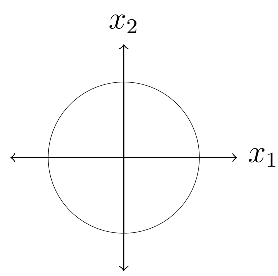
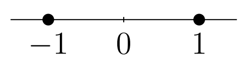
Ahora si $\|\boldsymbol{x}\|_S = |x_1| + |x_2|$

Si $\boldsymbol{x} \in I$ *cuadrante,*

$|x_1| = x_1$; $|x_2| = x_2 \implies |x_1| + |x_2| = x_1 + x_2 < 1 \implies x_2 < 1 - x_2$

Si $\boldsymbol{x} \in II$ *cuadrante,*

$|x_1| = -x_1$; $|x_2| = x_2 \implies |x_1| + |x_2| = -x_1 + x_2 < 1 \implies x_2 < 1 - x_2$

Norma de la Suma	Norma del Máximo	Norma Euclidiana	Recata Real
			
			
			

Si $n = 3$; $\boldsymbol{a} = \mathbf{0} = (0,0,0)$; $r = 1$

$B_{(\mathbf{0},1)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \ d(\boldsymbol{x},\mathbf{0}) < 1\}$

Con la Norma Euclidiana:

$$B_{(\mathbf{0},1)} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \|\boldsymbol{x} - \mathbf{0}\| < 1\} = \{\boldsymbol{x} \ \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} < 1\}$$

Con la Norma de la Suma:

$$B_{(\mathbf{0},1)} = \{\boldsymbol{x} \ \in \mathbb{R}^3 : \ \|\boldsymbol{x} - \mathbf{0}\|_S < 1\} = \{\boldsymbol{x} \ \in \mathbb{R}^3 : \ |x_1| + |x_2| + |x_3| < 1\}$$

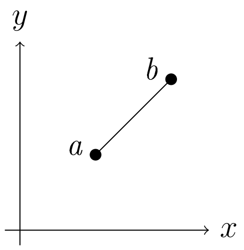
Con la Norma del Máximo:

$$B_{(\mathbf{0},1)} = \{\boldsymbol{x} \ \in \mathbb{R}^3 : \ \|\boldsymbol{x} - \mathbf{0}\|_M < 1\} = \{\boldsymbol{x} \ \in \mathbb{R}^3 : \ máx\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} < 1\}$$

1.5. *Segmento*

Dados dos punto $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *pertenecientes a* $\mathbb{R}$*, el segmento de extremos* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *puede ser descripto como el conjunto de puntos:*

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{x \ \in \mathbb{R} / \ \ x = (1-t).a + t.b \ ; \quad 0 \leq t \leq 1\}$$



Se recorre desde $\boldsymbol{a}$ *hasta* $\boldsymbol{b}$ *(sentido del recorrido)*

1.6. *Segmento en* $\mathbb{R}^n$

Dado $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b} \in \ \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ \boldsymbol{b} &= (b_1, b_2, \ldots, b_n) \\ \boldsymbol{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Definimos el segmento de extremos $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *y lo notamos.*

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} \ \in \mathbb{R}^n / \ \ \boldsymbol{x} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \ ; \quad t \in [0, 1]\}$$

1.7. *Conjunto Convexo*

Sea $\boldsymbol{X}$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*, diremos que es convexo si es tal que para todo par de puntos* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *pertenecientes a* $\boldsymbol{X}$*, el segmento de extremos* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *está contenido en* $\boldsymbol{X}$*.*

$$\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n \; ; \; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} \implies [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \subset \boldsymbol{X}$$

Ejemplo:

Una bola cerrada de centro $\boldsymbol{a}$ *y radio* r *es un conjunto convexo.*

Teorema 1 *Toda bola* [7] *es un conjunto convexo.*

Demostración:
Por hiótesis tenenmos:

$$B_{[\boldsymbol{a},r]} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n / \; \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leq r\}$$

Sean $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *dos puntos de* $B_{[\boldsymbol{a},r]}$*, se tiene entonces:* $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \leq r \wedge \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| \leq r$
A probar:

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \subset B_{[\boldsymbol{a},r]}$$

Sea así $\boldsymbol{z} = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$ [8] *se debe demostrar que* $\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}\| \leq r$

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}\| = \|(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\| = \|[(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}] - [(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{a}]\| =$$

$$= \|(1-t).(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + t.(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a})\| \leq \|(1-t).(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\| + \|t.(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a})\| =$$

$$= |(1-t)|.\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| + |t|.\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\| \leq (1-t).r + t.r = r$$

O sea, $\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}\| \leq r$*, es decir:* $\boldsymbol{z} \in B_{[\boldsymbol{a},r]}$*, luego* $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \subset B_{[\boldsymbol{a},r]}$
$B_{[\boldsymbol{a},r]}$ *es un conjunto convexo.*

[7] *(cerrada o abierta)*
[8] *un punto cualquiera perteneciente al segmento* $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$

1.8. *Clasificación de Puntos o Conjuntos Puntuales en* $\mathbb{R}^n$

1.8.1. *Puntos Interiores de un Conjunto*

Sea $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, *diremos que* $\boldsymbol{x}$ *es un punto interior del conjunto* $\boldsymbol{X}$ *si existe* $r > 0$ *tal que:*

$$B_{(\boldsymbol{x},r)} \text{ está totalmente incluida en } \boldsymbol{X}.$$

$\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}$ *es un punto interior de* $\boldsymbol{X}$ *si:* $\exists\, r > 0 \,/\, B_{(x,r)} \subset \boldsymbol{X}$

Es decir que al rededor del punto es posible encontrar un disco abierto totalmente incluido en $\boldsymbol{X}$.

No basta que el punto pertenezca al conjunto.

1.8.2. *Interior de un Conjunto X* $(\overset{\circ}{X})$

El interior de X está formado por todos sus puntos interiores.

1.8.3. *Conjunto Abierto*

Un conjunto $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$, *es un conjunto abierto sii es igual a su interior.* [9]

$$\boldsymbol{X} = \overset{\circ}{X}$$

Teorema 2 $B_{(\boldsymbol{a},r)}$ *es un conjunto abierto.*

Demostración:

Sea $\boldsymbol{x} \in B_{(\boldsymbol{a},r)} \implies \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < r$

Haciendo $0 < r - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| = \delta$ *(es estrictamente positivo.)*

Vamos a probar que $B_{(\boldsymbol{x},\delta)} \subset B_{\boldsymbol{a},r}$

$\boldsymbol{y} \in B_{(\boldsymbol{x},\delta)} \implies \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| < \delta$

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\| \leq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| <$$

$$< \delta + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| = r - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| = r$$

[9] *si todos sus puntos son interiores*

es decir: $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| < r$ *, por lo tanto* $y \in B_{(\boldsymbol{a},r)} \;\therefore\; B_{(\boldsymbol{x},\delta)} \subset B_{(\boldsymbol{a},r)}$

Luego $B_{(\boldsymbol{a},r)}$ *es un conjunto abierto.*

Del mismo modo se puede probar que el complemento de la bola cerrada de centro $\boldsymbol{a}$ *y rado* r *es un conjunto abierto.*

$$B_{[\boldsymbol{a},r]} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n / \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \leq r\}$$

$$\boldsymbol{X} = \overline{B_{[\boldsymbol{a},r]}}; \quad \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| > 0\}$$

Vamos a demostrar que $\boldsymbol{X}$ *es un conjunto abierto.*

Sea un $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \implies \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| > r \implies \underbrace{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|-r}_{\delta} > 0$

queremos probar que: $\exists\, \delta > 0 \;/\; B_{(\boldsymbol{x},\delta)} \subset \boldsymbol{X}$*, tomamos un* $\boldsymbol{y} \in B_{(\boldsymbol{x},\delta)} \implies \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| < \delta$ *, se debe estudiar la norma* $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\|$ *y probar que es mayor que* r*.*

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a})\| \leq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| <$$

$$< \delta + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| - r + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| = r, \textit{ entonces}$$

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| - r + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\|$$

$$r < \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\| \;(\textit{tesis}) \;\therefore\; \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$$

$$B_{(\boldsymbol{x},\delta)} \subset \boldsymbol{X} \;\therefore\; \boldsymbol{X} \textit{ es un conjunto abierto.}$$

1.8.4. *Punto Frontera*

Dado un conjunto $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *puede suceder cualquiera de las siguientes posibilidades:*

1. $\boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{X}$
2. $\boldsymbol{x} \in \overline{\overset{\circ}{X}}$ *(interior del complemento de* $\boldsymbol{X}$*)*
3. *El punto* $\boldsymbol{x}$ *es tal que* $\forall\, r > 0 : B_{(\boldsymbol{x},r)} \cap \boldsymbol{X} \neq \emptyset \;\wedge\; B_{(\boldsymbol{x},r)} \cap \overline{\boldsymbol{X}} \neq \emptyset$

Un punto que verifica la tercera condición es un punto al que llamamos punto frontera del conjunto $\boldsymbol{X}$. [10]

1.8.5. *Punto Adherente del Conjunto X*

Dado el conjunto $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$, *dado el punto* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Diremos que el punto $\boldsymbol{x}$ *es un punto adherente del conjunto* $\boldsymbol{X}$ *sii* $\forall r > 0$:

$$B_{(\boldsymbol{x},r)} \cap \boldsymbol{X} \neq \emptyset$$

Todo punto frontera es adherente.

1.8.6. *Clausura de un Conjunto X* $(\overline{X})$

Es el conjunto formado por todos los puntos adherentes del conjunto $\boldsymbol{X}$

Ejemplo:

$$\overline{B_{(\boldsymbol{a},r)}} = B_{[\boldsymbol{a},r]}$$

1.8.7. *Conjunto Cerrado*

El conjunto $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ *se dice que es cerrado sii es igual a su clausura* [11]

$$\boldsymbol{X} = \overline{X}$$

1.8.8. *Conjunto Acotado*

Dado $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ *diremos que es un conjunto acotado si existe un número* $c > 0$ *tal que* $\|\boldsymbol{x}\| \leq c$; $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ [12]

es decir que: $\boldsymbol{X} \subset B_{[\boldsymbol{0},r]}$ [13]

Nos preguntamos si el conjunto $\boldsymbol{X} \subset B_{[\boldsymbol{a},r]}$ *es acotado.*

Si $\boldsymbol{X} \subset B_{[\boldsymbol{a},r]}$; $\boldsymbol{x}$ *es tal que:* $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \leq r$, *debemos ver que* $\exists\, c > 0 \;/\; \|\boldsymbol{x}\| < c$.

Sea un $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{X} \subset B_{[\boldsymbol{a},r]}$, *entonces debemos probar que* $\|\boldsymbol{y}\| \leq c$

[10] *punto que no necesariamente pertenece al conjunto* $\boldsymbol{X}$
[11] *todos sus puntos son adherentes*
[12] $c \in \mathbb{R}$
[13] *definición equivalente*

$\|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{a}\| \leq r + \|\boldsymbol{a}\| = c \implies \|\boldsymbol{y}\| \leq c \ ; \ \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$

$\therefore$ $\boldsymbol{X}$ *es un conjunto acotado*

1.9. *Entornos*

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

El conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ *se dice entorno de* $\boldsymbol{x}$ *si existe* $r > 0$ *tal que* $B_{(\boldsymbol{x},r)} \subset E$.

Es decir, E *es el entorno de* $\boldsymbol{x}$*, si* $\boldsymbol{x}$ *es punto interior de* E.

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \qquad E = B_{(\boldsymbol{x},r)} \ ; \qquad E(\boldsymbol{x}).$$

Entendemos por entorno de un punto a todo conjunto ***abierto*** *que lo contenga.*

1.9.1. *Entorno Reducido* (E')

Un conjunto $E' \subset \mathbb{R}^n$ *es entorno reducido de* $\boldsymbol{x}$*, si* $\boldsymbol{x} \notin E$ *y:*

1. $\boldsymbol{x} \notin E'$
2. $E' \cup \{\boldsymbol{x}\} = E$ *donde* E *es un elemento de* $\boldsymbol{x}$

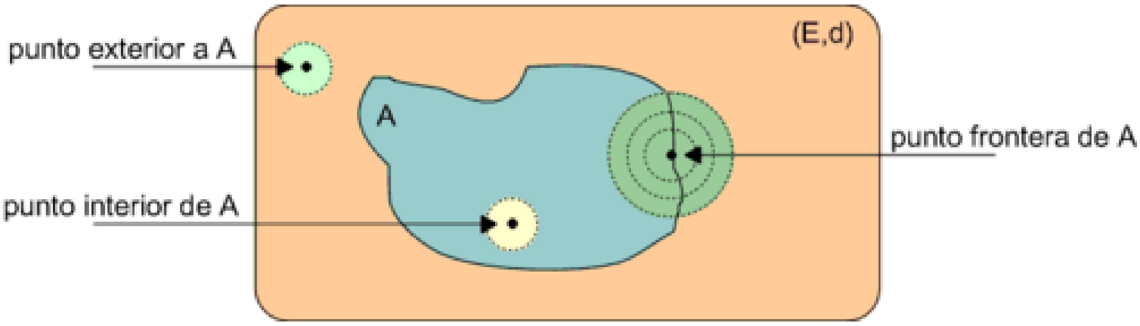
$E' = B'_{(\boldsymbol{x},r)} \ ; \qquad E' = B_{(\boldsymbol{x},r)} - \{\boldsymbol{x}\} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}^+$

Implícitamente está presente la norma.
Los entornos más comunes son las bolas abiertas pero no las únicas.

1.9.2. *Punto Aislado de un Conjunto*

Dado un conjunto $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$ *, y un punto* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ *, diremos que el punto aislado del conjunto* $\boldsymbol{X}$ ***si existe*** *un* $r > 0$ *tal que* $B_{(\boldsymbol{x},r)} \cap \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}\}$

Ejemplos:

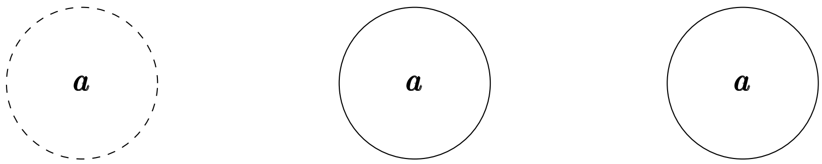


1.9.3. *Relación de Inclusión de Conjuntos*

Dado un conjunto $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^n$

1. $\overset{\circ}{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$

   Ejemplos:

   $\boldsymbol{A} = \overset{\circ}{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{A}}$ $\quad$ $\overset{\circ}{\boldsymbol{A}} \subset \boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{A}}$ $\quad$ $\overset{\circ}{\boldsymbol{A}} \subset \boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{A}}$

2. $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$

3. $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}^n$ *son conjunto abiertos.*

   Un conjunto deja de ser abierto cuando alguno de sus elementos deja de ser interior; el conjunto $\emptyset$ *no tiene elementos.*

4. *La unión de un número cualquiera de abiertos es abierto.*

5. *La intersección de un número finito de abiertos es abierto.*

1.10. Funciones

Una función de un conjunto $\boldsymbol{A}$ *(dominio de* f*), en un conjunto* $\boldsymbol{B}$ *(codominio de* f*), es una relación de* $\boldsymbol{A}$ *en* $\boldsymbol{B}$ *que a cada elemento de* $\boldsymbol{A}$ *(*$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$*) asigna un único elemento* $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$ *que llamaremos imagen de* $\boldsymbol{a}$ *por* f *y vamos a representar:*

$$f: \ \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) \ ; \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \ \wedge \ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n \ ; \qquad \underbrace{\boldsymbol{B} = \mathbb{R}}_{en\ general} \ \text{o subconjunto de } \mathbb{R}$$

Es decir que no queda elemento en el dominio que no tenga su correspondiente imagen y esa imagen es única. En este curso vamos a estudiar funciones reales de varias variables reales, es decir, $f: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ *, donde* $\boldsymbol{A}$ *será un conjunto tal que* $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$ *, como de costumbre.*

Vamos a marcar:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ , \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$
$$\boldsymbol{y} = \mathbb{R} \ , \qquad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$$

Ejemplos:

- $\diamond$ $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$
- $\diamond$ $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$
- $\diamond$ $n = 2$; $\quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$

  $$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

1.10.1. Representación Gráfica de Funciones

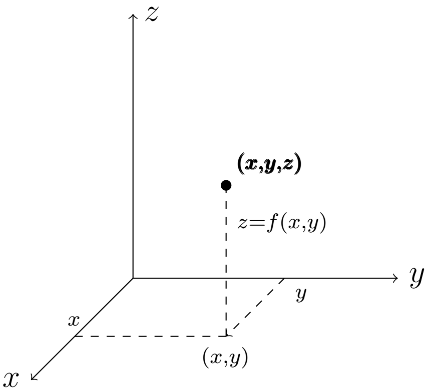
Si $n = 2$ *, tendremos en general una función:*

$$f: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B} \ ; \qquad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^2$$

Cada par de números reales posee su correspondiente imagen y esta es única.

$$z = f(x, y)$$

Representación gráfica:



$z = f(x,y)$

(x,y,z)

$\underbrace{(x,y,f(x,y))}_{n+1 \text{ uplas}}$

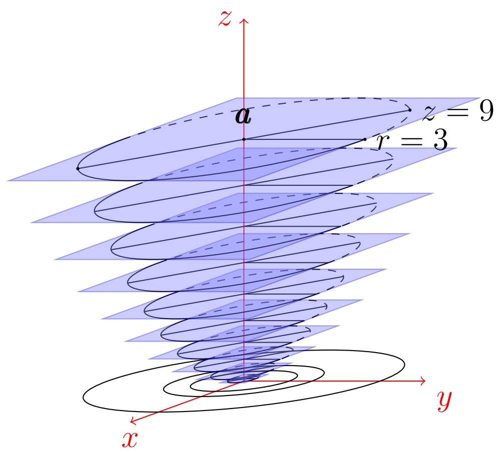
1.10.2. *Conjunto de Nivel C*

Es el conjunto de puntos $\boldsymbol{x}$ *pertenecientes al dominio de la función tal que* $f(\boldsymbol{x}) = c$.

$$C_N = \{\boldsymbol{x} \in Dmf \ / \ f(\boldsymbol{x}) = c\}$$

Ejemplo:

$f(x,y) = x^2 + y^2$ *(paraboloide de sección circular)*



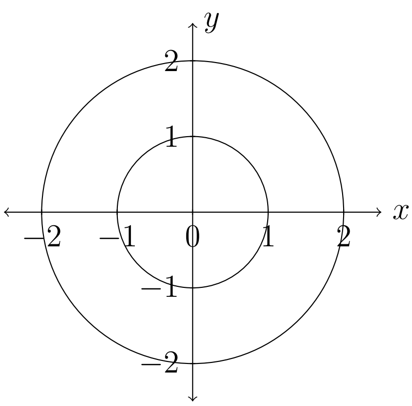
Para obtener las curvas de nivel, hacemos z constante.

$$\begin{cases} z &= x^2 + y^2 \\ z &= cte. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z &= 1 \\ z &= x^2 + y^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad \textit{Circunferencia en el plano z=1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z &= 4 \\ z &= x^2 + y^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad \textit{Circunferencia en el plano z=4} \end{cases}$$

Dadas estas intersecciones, se proyectan sobre el plano "xy"



Para todo punto de "xy" que esté en la circunferencia (z=1), sus imágenes van a se 1 (en una circunferencia de altura 1.)

Entonces para representar las curvas de nivel de una función de dos variables se resuelve la ecuación:

$$\begin{cases} z &= f(x, y) \\ z &= cte. \end{cases}$$

Como en el ejemplo, $z = x^2+y^2$*, esta función tiene como gráfica un paraboloide de sección circular.*

Si se toma el plano $z = 1$ *se tendrá el sistema* $\begin{cases} z &= 1 \\ z &= x^2 + y^2. \end{cases}$

que es equivalente a $x^2 + y^2 = 1$*. Si se proyecta sobre el plano* $z = 0$ *a esta circunferencia se tendrá que para todos los puntos (x,y) que pertenezcan a la proyección, su imagen por la función z será 1.*

Si se toma el plano $z = 4$ $(x^2 + y^2 = 4)$ *se tendrá un proceso análogo que proyectará sobre el plano* $z = 0$, *a un conjunto igual a la circunferencia con centro en el origen y radio 2.*

Si n=2, el conjunto de nivel ***C*** *se llama* ***curva de nivel****.*

Si n=3, se llama ***superficie de nivel****.*

2. *Unidad* N° *2*

2.1. *Límite*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$; $A \subset \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$; $\boldsymbol{a}$ *un punto no aislado.*

$f(x)$ *tiene límite* L $(L \in \mathbb{R})$ *para* x *tendiento a* $\boldsymbol{a}$ *si y solo si:*

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L \iff \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \ \wedge\ 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ [14] ; $L \in \mathbb{R}$

Observaciones:

1. $\boldsymbol{a}$ *no necesariamente pertenece al dominio* $\boldsymbol{A}$ *de la función, debe ser adherente, la función puede no estar definida en el punto donde se considera el límite (pero sí en el entorno reducido)*

2. $$\forall\, \boldsymbol{x} \in E'(\boldsymbol{a}) \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \in E(L)$$
   $$\boldsymbol{x} \in B'(\boldsymbol{a}, \delta) \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \in B(L, \epsilon)$$

3. $f(E'(\boldsymbol{a})) \subset E(L)$

   Las imágenes por f *de todos los puntos que pertenecen al entorno reducido de* $\boldsymbol{a}$ *caen dentro del entorno del punto* L.

4. *Decir que:*

   $\lim_{x \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$ *es equivalente a decir:*

   $$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x}) - L] = 0 \iff \lim_{x \to \boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x}) - L| = 0$$

   en efecto: se sabe que $\lim_{x \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$, *es decir que:*

   $$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \ \wedge\ 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - L| < \epsilon$$

   $$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x}) - L] = 0 \ \Rightarrow\ |\,((\boldsymbol{x}) - L) - 0| = |f(\boldsymbol{x}) - L| < \epsilon;\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \ \wedge\ 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$$

[14] *son n-uplas*

Hasta aquí la definición que dimos bajo la hipótesis de que el punto es no aislado.

2.2. *Definición para un Punto Aislado*

*Si **a** es un punto aislado del dominio, es por definición.*

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$$

[15]

Ejemplos de demostración de límite

1. *Probar que el* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} 2x - 3y = -1$

   tomado $\epsilon > 0$*, queremos probar que* $\exists\ \delta > 0$*, que depende de* ϵ *y del punto donde se toma el límite.*

   $\epsilon > 0\ ;\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$

   $|f(\boldsymbol{x}) - L| = |2x - 3y - (-1)| < \epsilon\ ; si \quad \left.\begin{array}{l} 0 < |x-1| < \delta \\ 0 < |y-1| < \delta \end{array}\right\}$ (es lo que queremos demostrar.)

   Demostración :

   $$|f(\boldsymbol{x}) - L| = |(2x - 3y) - (-1)| = |2x - 3y - (2 \cdot 1 - 3 \cdot 1)| =$$

   $$= |2x - 3y - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1| = |2(x-1) - 3(y-1)| \leq$$

   $$\leq |2(x-1)| + |3(y-1)| = 2\underbrace{|x-1|}_{\delta} + 3\underbrace{|y-1|}_{\delta} < 5\delta < \epsilon\ \therefore$$

   $$\therefore\ \text{basta tomar } \delta < \frac{\epsilon}{5}$$

   (δ *en función de* ϵ) *para que se verifique que:*

   $|f(\boldsymbol{x}) - L|\ ;\quad$ *o sea :* $\ |2x - 3y - (-1)| < \epsilon$

[15] *no nos podemos mover.*

Esta es una de las maneras de demostrar que el límite de una función es tal.

Demostrando lo mismo de otra manera:

Dado un $\epsilon > 0$ *se quiere encontrar* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *, de modo que ocurra:*

$$|2x - 3y - (-1)| < \epsilon \quad ; si \quad \begin{array}{l} x \in Dmf \ \wedge \ 0 < |x-1| < \delta \\ y \in Dmf \ \wedge \ 0 < |y-1| < \delta \end{array}$$

Por la propiedad del valor absoluto:

$$-\delta + 1 < x < \delta + 1 \qquad ; x \neq 1 \quad (1)$$

$$-\delta + 1 < y < \delta + 1 \qquad ; y \neq 1 \quad (2)$$

multiplicando (1) *por 2 y* (2) *por -3 (se invierte la desigualdad) y se suman.*

$$-2\delta + 2 < 2x < 2\delta + 2$$
$$-3\delta - 3 < -3y < 3\delta - 3$$

$$-5\delta - 1 < 2x - 3y < 5\delta - 1 \qquad \textit{(restando m.a.m (-1))}$$

$$-5\delta < 2x - 3y - (-1) < 5\delta$$ [16]

$$|2x - 3y - (-1)| < 5 \ \delta < \epsilon \quad \therefore$$

$$\therefore \ \textit{bastará tomar } \delta < \frac{\epsilon}{5} \ \textit{para obtener}: \ |2x - 3y - (-1)| < \epsilon$$

2. *Probar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} 5x - 4y = 1$

   Dado $\epsilon > 0$ *debemos encontrar un* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$

[16] *se hace menor porque nosotros queremos que resulte menor que* ϵ *(nosotros establecemos el orden).*

Si $0 < \|(x, y) - (1, 1)\|_M \; \delta \Longrightarrow |(5x - 4y) - 1| < \epsilon$

$(x, y) \in Dmf \;\wedge\; (x, y) \neq (1, 1) \Longrightarrow \|(x, y) - (1, 1)\|_M = máx\{|x - 1|; |y - 1|\} < \delta$

$$\begin{array}{ll} x \neq 1 \; ; & |x - 1| < \delta \\ y \neq 1 \; ; & |y - 1| < \delta \end{array}$$

$|(5x - 4y) - 1| = |(5x - 4y) - (5 \cdot 1 - 4 \cdot 1)| = |5x - 4y - 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1| =$

$$= |5(x - 1) - 4(y - 1)| \leq |5(x - 1)| + |(-4)(y - 1)|$$

$$= 5\underbrace{|x - 1|}_{\delta} + 4\underbrace{|y - 1|}_{\delta} < 9\delta < \epsilon \;\therefore$$

$$\therefore \text{ basta tomar } \delta < \frac{\epsilon}{9}$$

Demostrado de otra manera

$$\begin{array}{lll} x \neq 1 \;\wedge\; |x - 1| < \delta & \Longrightarrow & -\delta + 1 < x < \delta + 1 \; (1) \\ y \neq 1 \;\wedge\; |y - 1| < \delta & \Longrightarrow & -\delta + 1 < y < \delta + 1 \; (2) \end{array}$$

Multiplicando (1) por 5 y multiplicando (2) por (-4)

$-5\delta + 5 < 5x < 5\delta + 5 \quad (3)$
$-4\delta - 4 < -4y < 4\delta - 4 \quad (4)$

$-9\delta + 1 < 5x - 4y < 9\delta + 1$ (restando m.a.m por -1)

$-9\delta < 5x - 4y - 1 < 9\delta$

sii $|(5x - 4y) - 1| < 9\delta < \epsilon \qquad \therefore \qquad \delta < \dfrac{\epsilon}{9}$

Teorema 3 *Si un función tiene límite, ese límite es único.*

Observación : *Límite en el punto* $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Demostración:

$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x) = L_1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x) = L_2$; *donde* $L_1 \neq L_2$, *es decir* :

$$|L_1 - L_2| = \epsilon \; > 0.$$

Sea $\dfrac{\epsilon}{3} > 0$

Como $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x) = L_1 \;\Rightarrow\; \exists\; \delta_1 \; > 0 \;/\; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| \; < \dfrac{\epsilon}{3}$ (1)

Como $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x) = L_2 \;\Rightarrow\; \exists\; \delta_2 \; > 0 \;/\; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| \; < \dfrac{\epsilon}{3}$ (2)

tomando un número menor al menor de los δ $(\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\})$ *entonces de* (1) *y* (2) *se verifican simultaneamente.*

$$\epsilon = |L_1 - L2| = |L_1 - f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) - L_2| \; \leq |f(\boldsymbol{x}) - L_1| + |f(\boldsymbol{x}) - L_2 \; < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{2}{3}\epsilon$$

Absurdo *porque no puede ser* $\epsilon \; < \; \dfrac{2}{3}\epsilon$

Absurdo por que proviene de suponer $L_1 \neq L_2$; *luego* $L_1 = L_2$

2.3. *Álgebra de Límites*

Sean $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L_1 \; ; \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = L_2$$

2.3.1. *Suma de Funciones*

Dadas dos funciones f *y* g *se define* ***la suma***

$(f + g) : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\qquad (f + g)$ *es una nueva función*

$(f + g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \qquad f + g$ *actuando sobre el punto* $\boldsymbol{x}$

2.3.2. *Producto por un Número Real*

$$(\lambda f) : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\lambda f)\,(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$$

2.3.3. *Producto de Dos Funciones*

$$(f \cdot g) : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f \cdot g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})$$

2.3.4. *Cociente de Dos Funciones*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$$

2.4. *Operaciones con Límites*

1. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})) = L_1 \pm L_2$

   En realidad lo que se quiere indicar es :

   $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \pm \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = L_1 \pm L_2$

2. *Si* $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

   $$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} [\lambda \cdot f(\boldsymbol{x})] = \lambda \cdot L$$

3. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})] = L_1 \cdot L_2$

4. *Si* $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = L_2 \quad \wedge \quad L_2 \neq 0 \implies \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left[\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\right] = \frac{L_1}{L_2}$

2.5. *¿ Cómo se trabaja para demostrar límite ?*

Ejemplos:

(I) *Probar que el límite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ [17]

Notemos que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *y* $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$

$0 < \|(x,0) - (0,y)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ (1)

[17] *es una función que a cada par (x,y) le asocia la primera componente.*

$|f(x,y) - L| = |\boldsymbol{x} - 0| = |\boldsymbol{x}| \ < \epsilon \quad (2)$

Sea $\epsilon > 0$, se debe encontrar un δ, si ocurre (1) se tendrá el (2), o sea debe ser $|x| < \epsilon$, siempre que se tenga $0 < \|(x,y)\| < \delta$.

$|f(\boldsymbol{x}) - L| = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon \qquad \therefore\ \delta = \epsilon$

Cualquiera δ menor sirve. Se puede tomar $\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{3}$, etc.

(II) *Probar que:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [18]

$$0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \quad (3)$$

Probar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ *es equivalente a probar que:*

$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \ \ (\delta = \delta(\epsilon))$ *de modo tal que:*

$$0 < \|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| \ < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - L| < \epsilon \ \Longrightarrow \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \epsilon$$

Sea $\epsilon > 0$

$$\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \underbrace{\leq}_{(3)} \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon$$

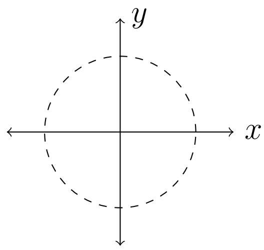
(III) *¿ Existe* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ *?*

[18] *buscamos una cantidad pequeña cuando nos aproximemos al origen.*

Nos acercamos al origen por el eje "y"

$x = 0$

$f(x,y) = \dfrac{0}{0+y^2}$



Par todos los puntos de un $E^{'}(0,0)$ *nos acercamos al origen por el eje* x.

$y = 0$

$f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+0} = 1$. *Para todos los puntos de un* $E^{'}(0,0)$

$\therefore$ *No existe el límite.*

(IV) *Probar que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} = 0$

$$\left|\frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2 \cdot y}{x^2}\right| = |y|$$

Dado $\epsilon > 0$ *debemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que:*

$0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ (4) $\Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - L| < \epsilon$

De este modo $|f(x) - L| = \left|\dfrac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} - 0\right| < \epsilon$

sabemos que $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon$

basta tomar $\delta = \epsilon$ *(cualquier* δ *menor sirve)*

2.6. *Composición de Funciones*

Consideramos $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}^m$ $\quad$ *(m y n* $\in \mathbb{N}$*)*

$$f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$$ [19]
$$g : \boldsymbol{B} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definimos la composición

[19] *a funciones de este tipo llamamos función vectorial a valores vectoriales*

Análisis II

$(g \circ f) : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

f asigna n-uplas en m-uplas, o sea cada n-upla está asociada a una m-upla.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{y} = \overbrace{(y_1, y_2, \ldots, y_m)}^{imagen\ de\ x_n}$$

La función g actúa sobre puntos que son imágenes de $\boldsymbol{x}$ que están en el dominio de f.

2.6.1. *Límite de una Función Compuesta*

Teorema 4 *:*

(H) *Sea* $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ *y* $g : \boldsymbol{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que:*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \ \wedge \ \lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{b}) \qquad \text{donde } \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

(T) $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{b})$

(D)

Como el $\lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{b}) \Rightarrow$ *dado* $\eta > 0, \exists \upsilon > 0 / 0 < \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| < \upsilon \Longrightarrow |g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{b})| < \eta$ (6)

$$(\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \ ; \ \ \upsilon > 0)$$

como el $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \Longrightarrow$ *dado* $\upsilon > 0, \ \exists \delta > 0 / \ 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \Longrightarrow \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\| < \upsilon$ (7)

de (6) *y* (7) *se tiene que* $\forall \eta > 0, \ \exists \delta > 0$

$$si\ 0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta \Longrightarrow \|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\| < \upsilon \Longrightarrow |g\left[f(\boldsymbol{x})\right]-g(\boldsymbol{b})| < \eta$$

es decir si $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta \Longrightarrow |\left(g \circ f\right)(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{b})| < \eta$

Luego $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left(g \circ f\right)(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{b})$

Teorema 5 *:*

Son equivalentes:

1. $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$
2. *Para todo entorno de L ,(E(L)), existe un entorno reducido* $E'(\boldsymbol{a})$ *tal que* $f\left[E'(\boldsymbol{a}) \cap \boldsymbol{A}\right] \subset E(L)$

[20]

2.7. Continuidad de una Función en un Punto

Dada una función $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{a} \in Dmf$)

f es continua en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ /\ \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})| < \epsilon$

1. $f(\boldsymbol{a})$ *existe* (*la función debe esta definida en* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$)
2. *Existe* $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = L$
3. $L = f(\boldsymbol{a}) \Longrightarrow$ *es continua si* $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$

   $f\left[E(\boldsymbol{a})\right] \subset E\left[f(\boldsymbol{a})\right]$

   La imagen de los puntos que pertenecen al $E(\boldsymbol{a})$, *caen en un entorno de* $f(\boldsymbol{a})$, *es decir* $(E\left[f(\boldsymbol{a})\right])$.

   * *Dado un abierto* $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$, *se dice que la función es continua en* $\boldsymbol{A}$ *cuando es en cada punto de* $\boldsymbol{A}$.
   * *Si* $\boldsymbol{a}$ *es un punto aislado de* $\boldsymbol{A}$; *la función es continua en* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ *(por definición de punto aislado).*
   * *Que una función sea continua es una* ***propiedad local***. [21]

[20] *esto quiere decir que* $\mathbf{1} \Longleftrightarrow \mathbf{2}$ (**1** *es equivalente a* **2**)
[21] *lo que pasa en un punto*

2.8. *Límite Iterado o Límite Sucesivos*

(En el límite, $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}$, todas las componentes tienden simultaneamente a $\boldsymbol{a}$)

Sea $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$

$f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, *sea* $\boldsymbol{H} \subset \mathbb{R}^n$ *de modo tal que* $\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{A} \neq \emptyset$, *y sea* $\boldsymbol{p} \in \overline{\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{A}}$. [22]

diremos que f *tiene límite* $\boldsymbol{b}$ *para* $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{a}$ *sobre* $\boldsymbol{H}$ *si la función*

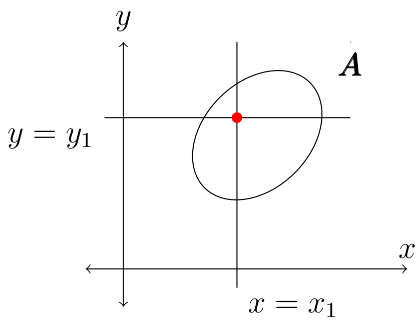
$$f\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} \xrightarrow[\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}]{} \boldsymbol{b}$$

$f\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}}$ *significa que* f *toma valores sobre (en el conjunto)* $\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{A}$

Sea $n = 2$; *y* $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^2$ *abierto.*

Sea $\boldsymbol{H}$ *una recta paralela a uno de los ejes coordenados por ejemplo:*

$\boldsymbol{H} = x_1$ *(recta* $x = x_1$*)*



$$\boldsymbol{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = x_1\}$$

$$f(x,y)\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = f(x_1, y)$$

(depende solo de la variable y*)*

supongamos que para el punto $p = (x_1, y_1)$,

tiene sentido $\lim\limits_{y \to y_1} f(x_1, y)$

supongamos que $\boldsymbol{H} = y_1$ *(recta* $y = y_1$*)*

$\boldsymbol{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = y_1\}$

[22] *punto adherente*

$$f(x,y)\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = f(x,y_1)$$

también tiene sentido $\lim\limits_{x\to x_1} f(x,y_1)$

(1° caso) $\boldsymbol{H} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x = x_1\} \longrightarrow f\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = f(x_1,y)$

(2° caso) $\boldsymbol{H} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ y = y_1\} \longrightarrow f\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = f(x,y_1)$

si existe $\lim\limits_{y\to y_1} f(x_1,y) = \varphi(x_1)$ *(depende del x que se tome)*

$$\lim_{y\to y_1} f(x_1,y) = \varphi(x)$$

(*debe definirse un función* $\varphi(x)$ *para todos los* $x \in E'(x_1)$ *sobre* y_1 *(en dirección de* y_1*)*)

se podría:

$$\lim_{x\to x_1}\varphi(x) = \lim_{x\to x_1}\left(\lim_{y\to y_1} f(x,y)\right) \qquad (1)$$

si existe $\lim\limits_{x\to x_1} f(x,y_1) = \Psi(y_1)$

$$\lim_{x\to x_1} f(x,y_1) = \Psi(y)$$

(*debe definirse un función* $\Psi(y)$ *para todos los* $y \in E'(y_1)$ *sobre* x_1 *(en dirección de* x_1*)*)

se podría :

$$\lim_{x\to x_1}\Psi(y) = \lim_{y\to y_1}\left(\lim_{x\to x_1} f(x,y)\right) \qquad (2)$$

Los límites (1) y (2) son por definición los límites iterados (o sucesivos).

Límite Iterado por Definición $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_1}\left(\lim\limits_{y\to y_1} f(x,y)\right) \\ \lim\limits_{y\to y_1}\left(\lim\limits_{x\to x_1} f(x,y)\right) \end{cases}$

$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_x^0)$ *punto donde se toma el límite.*

$\lim\limits_{x_1\to x_1^0}\left[\lim\limits_{x_2\to x_2^0}\left(\ldots \lim\limits_{x_n\to x_n^0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ldots\right)\right]$ *(iteración de límites)*

Para pesar:

Si existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y)$ *y* $\lim\limits_{y\to y_1}\left(\lim\limits_{x\to x_1} f(x,y)\right)$, *¿ Ambos son iguales ?.*

2.8.1. *Relación Entre el Límite Doble y los Límites Iterados*

Teorema 6

Sea $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^2$

(H) *Supongamos que*
$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = L \quad \wedge \quad \exists \lim\limits_{x\to x_1} f(x,y) = \Psi(y); \quad \forall y \in E'(y_1)$

(T) $\lim\limits_{y\to y_1} \Psi(y) = L$

Análogamente:

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = L \quad \wedge \quad \exists \lim\limits_{y\to y_1} f(x,y) = \varphi(x); \quad \forall x \in E'(x_1)$

entonces

$$\lim_{x\to x_1} \varphi(x) = L$$

(D) *por (H)* $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_1,y_1)} f(x,y) = L$, *lo que implica que*

dado $\epsilon_1 > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ / $\left.\begin{matrix} 0<|x-x_1|<\delta_1 \\ 0<|y-y_1|<\delta_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon_1$ (1)

por (H) $\exists \lim\limits_{x\to x_1} f(x,y) = \Psi(y) \quad \forall y \in E'(y_1)$ *resulta que*

dado $\epsilon_2 > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ / $0 < |x - x_1| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x,y) - \Psi(y)| < \epsilon_2$ (2)

[23]

$$|\Psi(y) - L| = |\Psi(y) - f(x,y) + f(x,y) - L| \leq$$
$$\leq |\Psi(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - L| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$$

$$Luego \lim_{y \to y_1} \Psi(y) = L$$

Conclusiones:

* *Si existen los tres límites deben ser iguales (es lo que marca el teorema)*
* *Si existen los límites iterados y son distintos, entonces no existe el límite doble.*

Ejemplos:

1. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y} \qquad f(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \longrightarrow \mathbb{R}$

   Como $(0,0) \notin Dmf$ *pero* $(0,0) \in \overline{Dmf}$

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

   $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0} -\frac{y}{y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

   * *Los límites iterados son distintos.*
   * *El límite doble no existe.*

2. $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \qquad f(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \longrightarrow \mathbb{R}$

   Como $(0,0) \notin Dmf$ *pero* $(0,0) \in \overline{Dmf}$

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

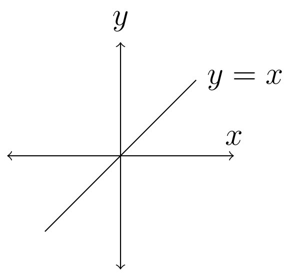
   $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

[23] *(queremos probar que dado un* $\epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ |\Psi(y) - L| < \epsilon$ *si* $0 < |y - y_1| < \delta$ *)*

* *Los límites iterados son iguales.*

* *Nos aceracmos al origen por medio de una recta (la restricción que se tome debe pasar por el origen).*

$\boldsymbol{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x\}$



$$f\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = \frac{2xx}{x^2+x^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

luego $\lim\limits_{x\to 0} f\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

(con esta condición ya se podría asegurar que el límite doble no existe, porque en uno de los infinitos caminos que pasa por $(0,0)$ *se obtiene un valor diferente al de los límites iterados).*

haciendo $\boldsymbol{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = mx\ \}$

$$f\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = \frac{2xmx}{x^2+(mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2(1+m)} = \frac{2m}{1+m^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f\Big|_{\boldsymbol{H}\cap\boldsymbol{A}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2m}{1+m^2}\right) = \frac{2m}{1+m^2}$$

* *O sea que para cada valor de m obtenemos un valor distinto. Concluimos así que el límite* ***no existe****.*

3.

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x} & si \quad x \neq 0 \\ x = 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

estudiamos en límite en $(0,0)$ *. Siendo que* $(0,0) \in \overline{Dmf}$

se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\ y\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\ 0\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\ y\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right)=\nexists\lim_{y\to 0}\ \Psi(y)$$

Estudiamos el límite doble, vamos a probar que existe y vale 0

$$\textit{dado } \epsilon>0,\quad \exists\delta>0\ /\ |f(x,y)-L|<\epsilon\quad \textit{si}\ \begin{cases}0<|x-0|<\delta\\0<|y-0|<\delta\end{cases}$$

$$|y\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}-0|=|y\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}|=|y|\cdot\underbrace{|\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}|}_{|\ |\le 1\ y\ \exists|x|>0}\le|y|<\delta<\epsilon$$

Luego:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$$

2.9. *Conjuntos Conexos*

Dado un conjunto $\boldsymbol{A}\subset\mathbb{R}^n$ *, decimos que* $\boldsymbol{A}$ *es conexo si existen dos abiertos* $U_1\subset\mathbb{R}^n$, $U_2\subset\mathbb{R}^n$ *,tal que:*

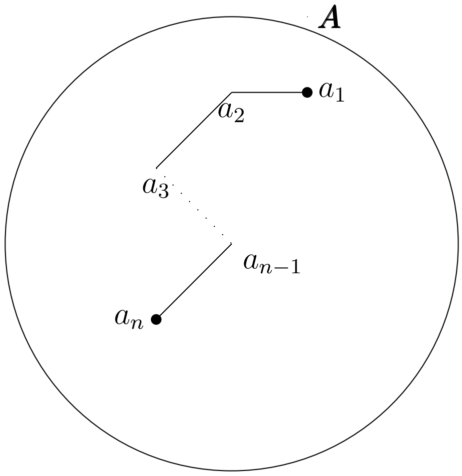
1. $U_1\cap\boldsymbol{A}\neq\emptyset$; $U_2\cap\boldsymbol{A}\neq\emptyset$
2. $U_1\cap U_2\neq\emptyset$
3. $\boldsymbol{A}\subset U_1\cup U_2$

Cuando esto NO ocurre se dice que $\boldsymbol{A}$ *es un conjunto conexo.*

Ejemplos:

Un conjunto de un único punto es un conjunto conexo.

Un conjunto de un número finito de puntos es disconexo. (si el número es finito, son puntos aislados.)



Existe $r_i > 0 \ / \ a_i \ \in B_{(a_1,r_i)}$
supongamos que hacemos:

$$\boldsymbol{U_1} = \bigcup_{i=1}^{n-1} B_{(a_1,r_i)}$$
$$\boldsymbol{U_2} = B_{(a_n,r_n)}$$

$$\boldsymbol{U_1} \cap \boldsymbol{U_2} = \emptyset$$

Un intervalo en $\mathbb{R}$ *es un conjunto conexo.*

2.10. *Caminos en* $\mathbb{R}^n$

Observación: *curvas que podamos definir en* $\mathbb{R}^n$

Sea un intervalo $\boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}^n$ *(intevalo real) y sea una función* $f : \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que a cada* $t \in \boldsymbol{I}$ *tenga su correspondiente n-upla.*

$$t \ \longrightarrow \ f(t) \ \text{ una n-upla}$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$$

Siendo f *una función continua en el intervalo* $\boldsymbol{I}$*.*

Donde a cada f_i*;* $i = 1, 2, \ldots, n$ *es una función escalar continua (función real de una variable real)*

O sea entenderemos por función continua $f \iff f_i(t);\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ *si cada una de las componentes lo son.*

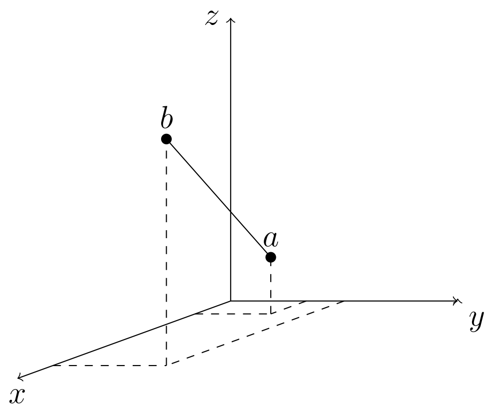
Al conjunto $f(\boldsymbol{I})$ *llamaremos caminos en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos:

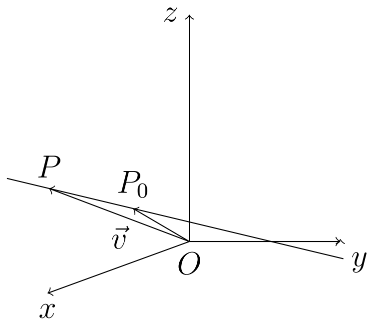
1. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \ ; \ 0 \leq t \leq 1\}$

   $$f_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

   $$t \longrightarrow x = (1-t) \cdot \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \ \ \textit{imagen de} \ \ [0,1] \ \textit{en} \ \ \mathbb{R}^n$$



2. *Sea* $P_0 \in \mathbb{R}^3$ *; sea* $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^3$ *escribimos como camino la recta que pasa por* P_0 *y es paralelo al vector* $\vec{\boldsymbol{v}}$ [24]



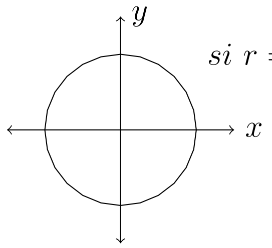
$\overline{OP} = \overline{OP_0} + t\vec{v}\ ; \quad t \in \mathbb{R}$
si las coordenadas son :

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$
$P = (x, y, z)$

[24] *a cada punto de* $\mathbb{R}^n$ *le podemos asociar un vector*

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3 \;\; / \;\; \underbrace{(x,y,z)}_{caminos} = \underbrace{(x_0+tv_x,y_0+tv_y,z_0+tv_z)}_{función\ que\ depende\ de\ t}$$

si $\boldsymbol{I} = -\infty < t < \infty \quad / \quad t \longrightarrow (x_0+tv_x,y_0+tv_y,z_0+tv_z)$

3. 

si $r = 1$

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos t \\ y = r\cdot\operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$f([0,2\pi]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow (r\cdot\cos t, r\cdot\operatorname{sen} t)$$

$f(t) = (r\cdot\cos t, r\cdot\operatorname{sen} t)$

$f(t)$ *extremo libre del vector que recorre un camino.*

En un contexto físico t puede ser considerado como el tiempo.

Sea $f(t)$ *(función continua) donde* $t_0, t_1 \in \boldsymbol{I}$ *se quiere estudiar la variación de la función* f *al pasar del punto* t_0 *al punto* t_1 *respecto del "tiempo t" es decir:*

$$\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$$

vector que representa aproximadamente la velocidad del movimiento del punto $f(t)$.

Suponemos reemplazar t_1 *por un punto variable* t .

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

si consideramos [25] $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

si este límite existe es por definición el vector derivado de $f(t)$ *que indicaremos con* $\boldsymbol{f'(t_0)}$.
donde entenderemos:

$$f'(t) = \left(f_1'(t); f_2'(t); \ldots; f_n'(t)\right)$$

[25] *(estudiamos)*

[26]

a este nuevo vector se le puede aplicar el mismo proceso anterior.

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

si este límite existe se tendrá por definición el vector derivado de la función $f'(t)$ *en el punto* t_0

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f'(t) - f'(t_0)}{t - t_0} = f''(t_0)$$

se derivan las componentes:

$$\begin{array}{c} f''(t) = \left(f_1''(t); f_2''(t); \ldots; f_n''(t)\right) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f^m(t) = \left(f_1^m(t); f_2^m(t); \ldots; f_n^m(t)\right) \end{array}$$

*El intervalo **I** puede ser de cualquier tipo.*

2.11. *Clase de una Función*

Diremos que una función $f : \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es de clase "**K**" o* $C^{\boldsymbol{K}}$ *si es continua y admite derivadas continuas hasta el orden **K**; si sabemos que una función es de clase* $C^{\boldsymbol{K}}$*, entonces sabemos que existen y son continuas.*

$$f';\ f'';\ \ldots\ ; f^{\boldsymbol{K}-1};\ f^{\boldsymbol{K}}$$

Si f *es de clase* $C^{\boldsymbol{K}}$*, entonces es de clase* $\boldsymbol{K} - 1$.
luego existen:

$$f^0; f';\ f'';\ \ldots\ ; f^{\boldsymbol{K}-1};\ f^{\boldsymbol{K}}$$

donde entenderemos por f^0 *a la función si derivar.*

*Si la función es de clase **K** para cualquier* $\boldsymbol{K} \in \mathbb{N}$ *se dice que la función* f *es de clase* C^∞.

Como estas funciones, $f : \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, definen curvas en el espacio* $\mathbb{R}^n$ *cuando* f *es de clase **K**, diremos que la curva es de clase **K**, por lo tanto cuando* f *es continua, resulta así que la curva es continua.*

[26] *(derivadas de cada componente, está asociado a un nuevo vector.)*

Si la curva es regular en todos los puntos de un intervalo I se dice que la curva es regular en I o también lisa o suave.
Si existe algún punto en dicho intervalo donde la curva no es regular, el mismo es un punto singular.

Comunmente la función $f(t)$, se llama representación vectorial paramétrica de la curva que describe.

Aplicaciones físicas:

$$\mid f^{'}(t_0) \mid \quad \textit{(velocidad instantanea)}$$

$$f^{''}(t_0) \quad \textit{(aceleración instantanea)}$$

3. *Unidad N° 3 y N° 4*

3.1. *Derivadas Direccionales*

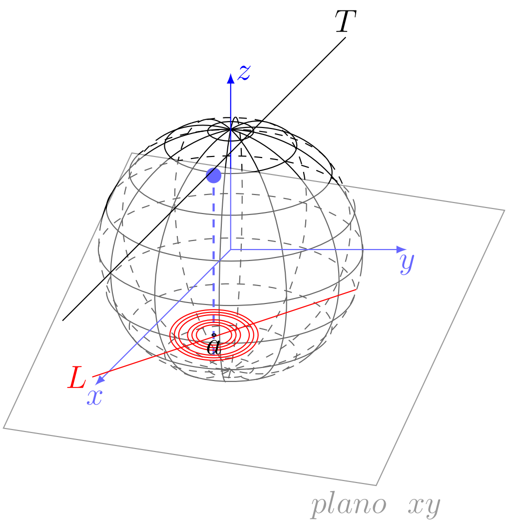
Sea $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y sea* $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$
Suponemos que $\boldsymbol{a} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{A}}$ *un vector* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \; / \; \vec{v} \neq \vec{0}$

Se quiere estudiar el comportamiento de la función restringiendonos sobre los puntos de una recta que pasa por el punto $\boldsymbol{a}$ *y tiene la dirección del vector* $\vec{v}$*, para puntos próximos al punto* $\boldsymbol{a}$*, es decir vamos a estudiar el comportamiento de la función* f *sobre el conjunto* $\boldsymbol{L}$ *de puntos de la forma:*

$$\boldsymbol{L} = \{\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + t \cdot \vec{v}\ ; \quad t \in \mathbb{R}\}$$

para valore de t *próximos a cero.*

Por ejemplo si $n = 2$



Estudiar el comportamiento de la función f *en un entorno de* $\boldsymbol{a}$*, equivale a estudiar el comportamiento de la función que a cada valor de* t *asigna el valor de* $f(\boldsymbol{a} + t\vec{v})$*, para* t *próximos a cero.*

$$t \longrightarrow f(\boldsymbol{a} + t\vec{v})$$

Condiciones que deben cumplir los puntos que vamos a estudiar

1. $f(\boldsymbol{a} + t\vec{v})$ *debe estar definida en las proximidades de* $\boldsymbol{a}$

2. $\boldsymbol{a} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{A}}$; $\exists\ r > 0\ /\ B_{(\boldsymbol{a},r)} \subset \boldsymbol{A}$

3. *Se deben determinar los valores de t de modo tal que:*

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}\| < r$$

De este modo no se cae fuera de la $B_{(\boldsymbol{a},r)}$, por que de los contrario puede ocurrir que $\boldsymbol{z}$ no esté incluido en $\boldsymbol{A}$. (Se debe trabaja con un entorno de $\boldsymbol{A}$, para lo cual se debe tener un t tal que el disco que determina t esté incluido en $\boldsymbol{A}$).

$$\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a}\| = \|(\boldsymbol{a} + t\vec{v}) - \boldsymbol{a}\| = \|t\vec{v}\| = \mid t \mid \cdot \|\vec{v}\| < r$$

$$t : \mid t \mid < \frac{r}{\|\vec{v}\|}$$

Definición: "Diremos que la función f tiene en el punto "a" derivada en la dirección del vector $\vec{v}$, si la función que a cada t hace corresponder valores de $f(\boldsymbol{a}+t\vec{v})$, tiene límite para $t \to 0$ como cociente incremental, es decir si existe: "

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

Si existe el límite vamos a anotarlo :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})$$

derivada de la función f en el punto $\boldsymbol{a}$, según la dirección del vector $\vec{v}$.

Observaciones:

1. *∂ es simplemente una notación, a diferencia de lo que se vió para una variable que es un cociente diferencial.*

2. *Esta definición de derivada direccional es **diferente** de la definición que se encuentra en los libros clásicos de derivadas direccional, para la cual se exige otras condiciones sobre la función f.*

3.1.1. *Derivadas Parciales*

Sea un $n \in \mathbb{N}$ *cualquiera y además* $\mathbb{R}^n$*. Tenemos:* $f: \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$

Sea la derivada de una función f *en cualquier punto y en la dirección de un vector de la base canónica se tiene:*

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n); \quad t \in \mathbb{R}; \quad |\, t \,| < \frac{r}{\|\vec{v}\|}$$

$$\{\vec{\boldsymbol{e}}_i\}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \textit{vectores de la base canónica.}$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}_i = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{e}_i$$

$$\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{v} = \boldsymbol{a} + t \cdot \vec{e}_i$$

$$\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + (0, \dots, t, \dots, 0)$$

$$\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i = (a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n)$$

$$\frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}$$

[27]

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i) - f(\boldsymbol{a})}{t} =$$

$$= \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}$$

La función depende de t*, ubicadas en las coordenadas i-ésimas.*

Si el límite existe es:

[27] *Todas las coordenadas permanecen constantes excepto* $(\boldsymbol{a}_i + t)$ *i- ésimo*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{a})$$

derivada parcial de la función respecto de $\boldsymbol{x}_i$ en el punto $\boldsymbol{a}$

Ejemplo:

$f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = x^2 \cdot y$

$\boldsymbol{a} = (x,y); \qquad \vec{v} = \vec{\boldsymbol{e}}_1 = (1,0)$

$\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{v} = (x,y) + t \cdot (1,0) = (x+t, y)$

$$\frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{v}_i) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \frac{1}{t} \cdot \left[(x+t)^2 \cdot y - x^2 \cdot y\right] = \frac{1}{t} \cdot [\cancel{x^2 y} + 2xty + t^2 y - \cancel{x^2 y}]$$

$$= \frac{1}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t}(2xy + ty) = 2xy + ty$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_1) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{v}_i) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t \to 0} 2xy + ty = 2xy$$

por definición $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}) \qquad (1)$

$$\boldsymbol{a} = (x,y); \qquad \vec{v} = \vec{\boldsymbol{e}_2}$$

$$\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2 = (x,y) + t \cdot (0,1) = (x, y+t)$$

$$\frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \frac{x^2 \cdot (y+x) - x^2 y}{t} = \frac{\cancel{x^2 y} + x^2 t - \cancel{x^2 y}}{t} = x^2$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_2)}{t} = \lim_{t \to 0} x^2 = x^2$$

por definición $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}) \qquad (2)$

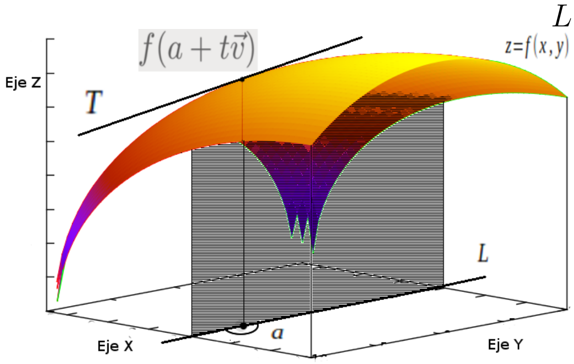
(1) y (2) derivadas parciales.

Observaciones:

1. *Cuando derivamos respecto de x, las otras variables permanecen constantes (por teoría y lo que vimos.)*
2. *Que una función admita derivadas parciales no significa que sea* ***derivable****.*

Consecuencias:

(1) $f: \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R};\quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^2$



$$L = \{\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + t\vec{v},\quad t \in \mathbb{R}\}$$

$$|\ t\ | < \frac{r}{\|\vec{v}\|}$$

Si existe $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}) > 0$

Podemos decir que la función $f\Big|_{\boldsymbol{a}+t\vec{v}}$ *es creciente.*

(2) *La existencia de las derivadas parciales de una función en un punto, no implica la continuidad de la función en el mismo.*

Sea $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[28]

Calculamos las derivadas parciales en el origen.

[28] *La función f está definida en todo el plano*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2)-xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-yx^2+y^3}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2)-xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}\right\}\ \textit{Derivadas parciales para todo el plano}$$

para cualquier punto fuera del origen estas derivadas están definidas. Estudiando su comportamiento en el origen, tenemos:

$\boldsymbol{a} = (0,0); \quad t \in \mathbb{R}; \quad \vec{\boldsymbol{e}}_1 = (1,0); \quad \boldsymbol{a} + t\vec{\boldsymbol{e}}_1 = (t,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\vec{\boldsymbol{e}}_1)-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Como existe este límite, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

Calculando $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})$

$\boldsymbol{a} = (0,0); \quad t \in \mathbb{R}; \quad \vec{\boldsymbol{e}}_2 = (0,1); \quad \boldsymbol{a} + t\vec{\boldsymbol{e}}_2 = (0,t)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\vec{\boldsymbol{e}}_2)-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Como existe el límite, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Analizando la continuidad en el origen, debe ser:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Sea $y = x$

$$f\Big|_{y=x} = \frac{x^2}{x^2+y2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{xy}{x^2+y^2}\right|_{y=x} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

Prof. Mauricio A. LUGO

Luego $f(x,y)$ no es continua en el origen.

(3) *Sea* $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ *f es continua pues* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x_0^3 y_0}{x_0^6+y_0^2}$ *existe en el origen, si ahora no acercamos al origen mediante la parábola cúbica.*

$y = x^3$

$$f(x,y)\Big|_{y=x^3} = \frac{x^3 x^3}{x^6+(x^3)^2} = \frac{1}{2}$$

Tomando $\lim\limits_{x\to 0} f\Big|_{y=x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$ *, entonces la función no es continua en el origen.*

Estudiemos las derivadas direccionales en el origen:

$\boldsymbol{a} = (0,0)$; $\vec{\boldsymbol{v}} = (\alpha, \beta)$; $t \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{a} + t\vec{\boldsymbol{v}} = (\alpha t, \beta t)$

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+t\vec{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{t^3\alpha^3 t\beta}{t^6\alpha^6+t^2\beta^2}\right] = \frac{1}{t}\left[\frac{t^4\alpha^3\beta}{t^2(t^4\alpha^6+\beta^2)}\right] = \frac{1}{\cancel{t}}\left[\frac{t^{\cancel{4}}\alpha^3\beta}{\cancel{t^2}(t^4\alpha^6+\beta^2)}\right]$$

Si ahora tomamos el límite cuando $t \longrightarrow 0$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\boldsymbol{a}+t\vec{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{t\alpha^3\beta}{t^4\alpha^6+\beta^2}\right) = 0$ [29] *, entonces el límite existe por lo cual* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ *, por lo tanto existen todas las derivadas direccionales en el origen.*

Conclusión:

[29] *si* $\beta \neq 0$

Análisis II

Prof. Mauricio A. LUGO

Análisis II

La existencia de las derivadas direccionales no asegura la continuidad de la función en un punto.

Que la función admita derivadas parciales o derivadas direccionales no significa que sea continua.

(4) *Supongamos tener:*

$$f: \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\quad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}\ ;\quad dado\ \vec{\boldsymbol{v}}\ ;\quad \exists\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})$$

Dado un vector $\vec{\boldsymbol{u}} = \lambda \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ [30]

Nos preguntamos si existe la derivada de la función en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ *y que relación tiene con la derivada en dirección del vector* $\vec{\boldsymbol{v}}$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\vec{\boldsymbol{u}}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\lambda\vec{\boldsymbol{v}}) - f(\boldsymbol{a})}{t} \underbrace{=}_{\text{mult. y div. por } \lambda}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\lambda \cdot f(\boldsymbol{a} + \overbrace{t\lambda}^{\tau}\vec{\boldsymbol{v}}) - \lambda \cdot f(\boldsymbol{a})}{\lambda \cdot t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\lambda\left[f(\boldsymbol{a} + \tau\vec{\boldsymbol{v}}) - f(\boldsymbol{a})\right]}{\tau} =$$

$$= \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\boldsymbol{a}) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})} \qquad o\ sea \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \lambda\vec{v}}(\boldsymbol{a}) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})}$$

(5) *Supongamos tener:*

$$f: \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R};\quad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A};\quad \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V};\quad \exists\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})$$

[30] $\vec{\boldsymbol{u}}$ múltiplo de $\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\text{dado } \vec{v}, \quad \exists \ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})$$

$$\text{dado } \vec{w}, \quad \exists \ \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(\boldsymbol{a})$$

$$\vec{v} + \vec{w} \text{ es un vector.}$$

Nos preguntamos si:

$$¿\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v} + \vec{w}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}) + \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(\boldsymbol{a}) \ ?$$

Sea $f: \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & si \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

vamos a ver que existen las derivadas direccionales en todos los puntos del plano.

$$\boldsymbol{a} = (x,y); \qquad \vec{v} = (\alpha, \beta); \quad \boldsymbol{a} + t\vec{v} = (x + t\alpha, y + t\beta)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\vec{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{(x+t\alpha)^2 (y + t\beta)}{(x+t\alpha)^2 + (y+t\beta)^2} - 0 \right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2x\alpha y^3 + x^4 \beta - x^2 y^2 \beta}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y)$$

Analizando $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

suponemos tener:

$$\vec{\boldsymbol{w}} = (\gamma, \delta); \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(0,0) = \frac{\gamma^2 \delta}{\gamma^2 + \delta^2}$$

hacemos $\vec{v}+\vec{w}=(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)=(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}+\vec{w}}(0,0)=\frac{(\alpha+\gamma)^2(\beta+\delta)}{(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2}\neq\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\gamma^2\delta}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(0,0)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial f}{\partial(\vec{v}+\vec{w})}(\boldsymbol{a})\neq\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})+\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(\boldsymbol{a})$$

3.2. *Primer Teorema del Valor Medio*

Sea $f:\boldsymbol{A}\longrightarrow\mathbb{R}$; $\boldsymbol{A}\subset\mathbb{R}^n$, *abierto y conexo*

Sea $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$; $[\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{a}+\vec{v}]\subset\boldsymbol{A}$ *y suponemos que:*

$f\Big|_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\vec{v}]}$ *es continua y además* $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial\vec{v}}(\boldsymbol{x})$, $\forall\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\vec{v})$

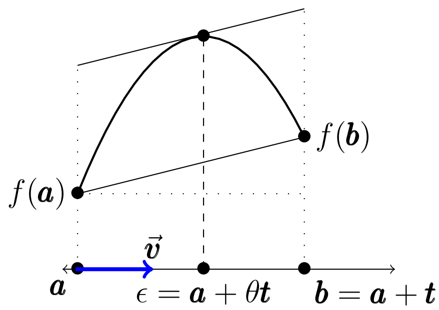
entonces existe un $\theta\in(0,1)$ / $f(\boldsymbol{a}+\vec{v})-f(\boldsymbol{a})=\dfrac{\partial f}{\partial\vec{v}}(\boldsymbol{a}+\theta\vec{v})$

Demostración:

Consideramos la función

$$\epsilon:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$t\longrightarrow f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\vec{v})$$



$\epsilon(t)$ *es continua en* $[0,1]$, *derivable en* $(0,1)$

$$\left.\begin{array}{l}\epsilon(t)=f(\boldsymbol{a}+t\vec{v})\\ \epsilon(1)=f(\boldsymbol{a}+\vec{v})\\ \epsilon(0)=f(\boldsymbol{a})\end{array}\right\}\qquad(1)$$

Aplicando el teorema del valor medio, por ser una función de una variable

$$\epsilon(1) - \epsilon(0) = \epsilon'(\theta) \qquad 0 < \theta < 1 \qquad (2)$$

$$\epsilon'(\theta) = \lim_{t \to 0} \frac{\epsilon(\theta + t) - \epsilon(\theta)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + (\theta + t)\vec{v}) - f(\boldsymbol{a} + \theta\vec{v})}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\vec{v} + \theta\vec{v}) - f(\boldsymbol{a} + \theta\vec{v})}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + \theta\vec{v} + t\vec{v}) - f(\boldsymbol{a} + \theta\vec{v})}{t}$$

$\boldsymbol{a} + \theta\vec{v}$ *es un punto que pertenece al intérvalo* $[\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{a} + \vec{v}]$ *por que* $0 < \theta < 1$.

$$= \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a + \theta\vec{v}) \ (3)$$

reemplazando (1) *y* (3) *en* (2) *tenemos:*

$$\epsilon(1) - \epsilon(0) = \epsilon'(\theta) \qquad 0 < \theta < 1$$

$$\boxed{f(a + \vec{v}) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a + \theta\vec{v})}$$

La única condición fue que sea continua en el intervalo y admita derivada en la dirección del vector $\vec{v}$

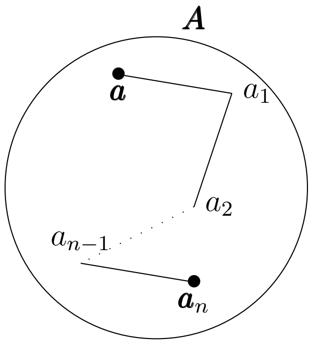
Corolario 1

Si $\boldsymbol{A}$ *es un conjunto conexo;* $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$; $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

f *es una función que posee derivadas direccionales en todos los puntos*

$x \in \boldsymbol{A}$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = 0$; $\forall \vec{v} \implies$ *la función es continua en* $\boldsymbol{A}$

Demostración:



$$a_1 = \boldsymbol{a} + \vec{v}$$

aplicando el teorema tenemos:

$$f(a_1) - f(a) = 0 \implies f(a_1) = f(a)$$

Sea $\boldsymbol{x}$ *un punto cualquiera de* $\boldsymbol{A}$*;* $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ *, uniendo* $\boldsymbol{a}$ *con* $\boldsymbol{x}$ *por medio de una poligonal cuyos vértices son:* $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \dots\ ,\boldsymbol{a}_n$ [31]

$$\boldsymbol{x};\ [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}_1];\ [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2];\ [\boldsymbol{a}_{n-1},\ \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{x}]$$

aplicando a cada segmento de la poligonal el teorema, se tendrá.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}_1) - f(\boldsymbol{a}) = 0 &\implies f(\boldsymbol{a}_1) = f(\boldsymbol{a}) \\ f(\boldsymbol{a}_2) - f(\boldsymbol{a}_1) = 0 &\implies f(\boldsymbol{a}_2) = f(\boldsymbol{a}_1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \quad f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}_n) \quad \therefore \quad f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

Conclusión:

Como $\boldsymbol{x}$ *es un punto cualquiera de* $\boldsymbol{A}$*, entonces* f *es constante en* $\boldsymbol{A}$

[31] *uniendo por medio de segmentos*

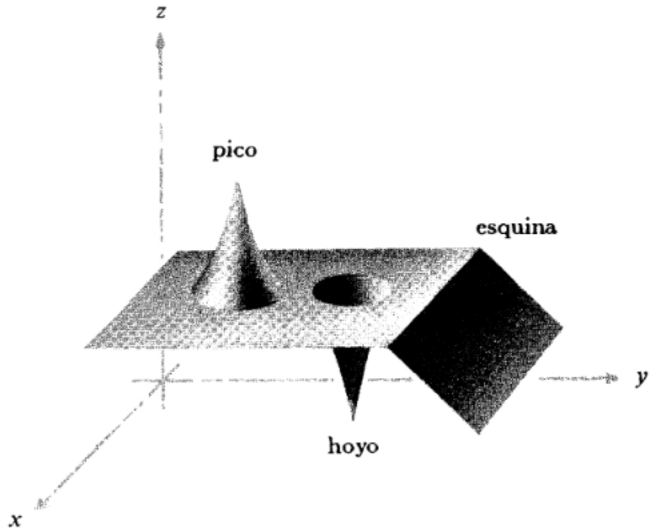
3.3. *Diferenciabilidad*

Para funciones de una variable, para que sea diferenciable basta con que sea deribable.

Supongamos tener:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si f es diferenciable en un punto x_0, o en todos los puntos de un cierto abierto del plano, su gráfica debe ser suficientemente lisa, es decir no puede haber:



*Es decir debe ser una superficie lo suficientemente **lisa**, de modo tal que admita plano tangente.*

En $\mathbb{R}^3$ la ecuación de un plano vertical está dada por:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}$$

Sea $z_0 = (x_0,\ y_0)$ donde la función es diferenciable, es decir, admite plano tangente.

La pendiente de ese plano tangente en la dirección de los ejes x e y están dadas por las derivadas parciales:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)\ ; \quad \boldsymbol{b} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)$$

*y el valor de la constante **c** se determina sabiendo que cuando, $x = x_0$ y $y = y_0$, debe valer $f(x_0, y_0)$*

Luego si admite plano tangente, la ecuación estará dada por:

$$\boldsymbol{z} = f(x_0,\ y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)(y - y_0) \qquad (1)$$

Este plano debe ser tal que se " ***aproxime*** *" a $f(x,y)$ en un entorno del punto $(x_0,\ y_0)$*

que aproxime:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; x_0 *punto donde f es derivable, entonces:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)$$

llamando $x = x_0 + t$ resulta que $t = x - x_0$, reemplazando:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$$

el límite de una constante, es una constante, tendremos así:

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

operando:

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right] = 0$$

La recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto $(x_0,\ f(x_0))$ que está dada por $\mathrm{L}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, es una buena " ***aproximación*** *" de $f(x)$ en un entorno de x_0, en el siguiente sentido:*

$$\frac{f(x) - \mathrm{L}(x)}{x - x_0} \longrightarrow 0 \quad cuando \quad x \to x_0$$

es decir:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$ [32]

[32] *$f(x) - \mathrm{L}(x)$ tiende más velozmente a cero, aún dividiéndolo por $x - x_0$ cuando $x \to x_0$*

3.4. *Transformaciones Lineales*

Dados los espacios vectoriales $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$*, una transformación lineal de* $\mathbb{V}$ *en* $\mathbb{W}$ *es una aplicación que verifica las siguientes condiciones:*

(1) $\mathrm{T}\ (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \mathrm{T}\ (\vec{v}_1) + \mathrm{T}\ (\vec{v}_2) \qquad \forall\ \vec{v}_1\ ,\ \vec{v}_2\ \in \mathbb{V}$

(2) $\mathrm{T}\ (\kappa\ \vec{v}_1) = \kappa\ \mathrm{T}\ (\vec{v}_1) \qquad \forall\ \vec{v}_1\ \in \mathbb{V}\ ;\ \forall\ \kappa\ \in\ \mathbb{R}$

Ejemplos:

Suponemos tener el conjunto de las funciones reales de variable real, deriva bles

Sea $\mathbb{V}$ *el conjunto de todas las funciones reales que admiten derivadas:*

D *: operador de derivabilidad*

D *: es una transformación lineal.*

(1) $\mathrm{D}\ (f + g) = \mathrm{D}\ (f) + \mathrm{D}\ (g)$

(2) $\mathrm{D}\ (\lambda\ f) = \lambda\ \mathrm{D}\ (f)$

Si la dimensión de $\mathbb{V} = m$ *y la dimensión de* $\mathbb{W} = n$ *la transformación lineal* T *tiene asociada ua matriz de clase* $n \times m$

Definición:

f *es diferenciable en* $x = \boldsymbol{a}$ *, si existe una transformación lineal* T *de modo tal que:*

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{f(x) - f(\boldsymbol{a}) - \mathrm{T}\ [x - \boldsymbol{a}]}{\|\ x - \boldsymbol{a}\ \|} = 0 \qquad (2)$$

Donde $\mathrm{T}\ [x - \boldsymbol{a}]$ *entenderemos el producto matricial entre la matríz asociada a la transformación lineal* T *, que también indicaremos con* T *y la matríz columna* $x - \boldsymbol{a}$

$$[x - \boldsymbol{a}] = \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}$$

llamando $\mathrm{r}(x) = f(x) - f(\boldsymbol{a}) - T\ [x - \boldsymbol{a}]$ *, entonces una función* f *es diferenciable en el punto* $x = \boldsymbol{a}$

Si existe una transformación lineal $\mathrm{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *y una* $\mathrm{r} : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de modo que* $f(x) = f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{T}\,[x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r}\ (x)$ *y*

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\mathrm{r}\ (x)}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = 0 \qquad (3)$$

En la definición (3) *estamos diciendo que* $\mathrm{r}\ (x)$ *es una función que tiende a cero cunado* x *tiende a* $\boldsymbol{a}$ *más rápidamente que la cantidad de por sí pequeña dada por* $\|x - \boldsymbol{a}\|$*; es decir,* $\mathrm{r}\ (x)$ *es un infinitésimo de orden superior a* $\|x - \boldsymbol{a}\|$ [33]

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\left| f(x) - f(\boldsymbol{a}) - \mathrm{T}\ [x - \boldsymbol{a}] \right|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = 0 \qquad (4)$$

[34]

Además se puede probar que si una tal transformación lineal T *existe, ella es única.*

Consecuencias:

Veamos que información se puede obtener sobre la función f *sabiendo que existe una matríz* T *que siempre está asociada a una transformación lineal a la que también indicamos como* $\mathrm{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) *Si* f *es diferenciable en un punto* $x = \boldsymbol{a}$ *, entonces existe* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}); \forall\ \vec{v}\ \wedge\ \vec{v} \neq \vec{0}$

Vamos a probar que existen todas las derivadas en dirección de cualquier vector no nulo.

Sea $\boldsymbol{a} \in \mathcal{U}$*;* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *y* $t \in \mathbb{R}$ *de modo tal que:*

$|t| < \dfrac{\mathrm{r}}{\|\vec{v}\|}$ *llamamos* $\boldsymbol{x}$ *a lo puntos de la forma* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t\vec{v}$ *luego como* f *es diferenciable:*

$$f(\boldsymbol{a} + t\vec{v}) - f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{T}\ [t\vec{v}] + \mathrm{r}\ (\boldsymbol{a} + t\vec{v}) \qquad (1)$$

queremos probar que existen las derivadas:

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\vec{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})$$

[33] (2) *es equivalente a* (3)
[34] *Concepto equivalente*

dividiendo (1) *por* t

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+t\vec{v})-f(\boldsymbol{a})}{t}=\frac{\mathrm{T}\ [t\vec{v}]}{t}+\frac{\mathrm{r}\ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})}{t}$$

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+t\vec{v})-f(\boldsymbol{a})}{t}=\mathrm{T}\ [\vec{v}]+\frac{\mathrm{r}\ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})}{t}$$

queremos probar que el límite del $1°$ *miembro existe*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\vec{v})-f(\boldsymbol{a})}{t}=\lim_{t\to 0}\left[T[\vec{v}]+\frac{\mathrm{r}\ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}T[\vec{v}]+\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{r}(\boldsymbol{a}+t\vec{v})}{t} \qquad (2)$$

Trabajando con:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{r}\ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|\mathrm{r}\ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})|}{|t|}=\lim_{t\to 0}\frac{|\mathrm{r}\ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})|\ \|\vec{v}\|}{|t|\ \|\vec{v}\|}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{|\mathrm{r}\ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})|\ \|\vec{v}\|}{\|t\ \vec{v}\|}=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{|\mathrm{r}\ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})|}{t\ \|\vec{v}\|}}_{0}\ \lim_{t\to 0}\|\vec{v}\|=0$$

$$x=\boldsymbol{a}+t\vec{v}\Rightarrow x-\boldsymbol{a}=t\vec{v}\ \textit{como}\ x\to\boldsymbol{a},\quad t\vec{v}\to 0,\quad t\to 0$$

$$\frac{\mathrm{r}\ \ (x)}{\|x-\boldsymbol{a}\|}=\frac{\mathrm{r}\ \ (\boldsymbol{a}+t\vec{v})}{\|t\ \vec{v}\|}$$

$\therefore$ *en* (2) *se tiene que:*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\vec{v})-f(\boldsymbol{a})}{t}=\mathrm{T}\ [\vec{v}]$$

como T $[\vec{v}]$ *existe, entonces:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}\ (\boldsymbol{a})\ =\mathrm{T}\ \ [\vec{v}\ ]}$$

(2) *Si la función es diferenciable en un punto, existen las derivadas parciales de la función en el punto, ya que:*

$$\mathrm{T}\ [\vec{v}] = \mathrm{T}\ [\vec{\boldsymbol{e}}_i] \qquad \vec{v} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathrm{T}\ [\boldsymbol{e}_i] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

(3) *Una transformación lineal queda bien determinada cuando se conoce como actua sobre los vectores de la base*

Dado un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ en función de sus componentes podemos escribirlo como combinación:

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \ \ ; \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\ \boldsymbol{e}_i$$

Entonces dada una transformación lineal cualquiera $\mathrm{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y un vector $\vec{v}$, probaremos que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left|\mathrm{T}\ (\vec{v})\right| \leq \delta \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\mathrm{T}\ (\vec{v}) = \mathrm{T}\ \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\ \vec{\boldsymbol{e}}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}(\vec{v}_i\ \vec{\boldsymbol{e}}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\ \mathrm{T}\ (\vec{\boldsymbol{e}}_i)$$

tomando módulo:

$$\left|\mathrm{T}\ (\vec{v})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\ \mathrm{T}\ (\vec{\boldsymbol{e}}_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\vec{v}_i| \left|\mathrm{T}\ (\vec{\boldsymbol{e}}_i)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\vec{v}_i|\ \delta_1 = \delta_1\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\vec{v}_i|}_{\|\ \|_S} \leq \underbrace{\sqrt{n}\ \delta_1}_{\delta}\ \|\vec{v}\|_S$$

(4) *Si la función f es diferenciable en el punto $\boldsymbol{a}$, entonces f es continua en $x = \boldsymbol{a}$*

$$f \quad \textit{es continua en } x = \boldsymbol{a} \iff \lim_{x \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{a}) \ \cong\ \lim_{x \to \boldsymbol{a}} \left[f(x) - f(\boldsymbol{a})\right] = 0$$

como f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$.

$$f(x) = f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{T}\ [x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r}\ (x) \qquad \textit{con} \ \lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\mathrm{r}\ (x)}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = 0$$

$$f(x) - f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{T}\ [x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r}\ (x)$$

tomando módulo

$$\left|f(x) - f(\boldsymbol{a})\right| = \left|\mathrm{T}\ [x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r}\ (x)\right| \leq \left|\mathrm{T}\ [x - \boldsymbol{a}]\right| + \left|\mathrm{r}\ (x)\right| \leq$$

$$\leq \alpha\ \|x - \boldsymbol{a}\| + \left|\mathrm{r}\ (x)\right|$$

tomando límite:

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \left|f(x) - f(\boldsymbol{a})\right| \leq \lim_{x \to \boldsymbol{a}} \alpha \cdot \|x - \boldsymbol{a}\| + \lim_{x \to \boldsymbol{a}} \mathrm{r}\ (x)$$

trabajando con:

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \left|\mathrm{r}\ (x)\right| = \lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\left|\mathrm{r}\ (x)\right|\ \|x - \boldsymbol{a}\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = \underbrace{\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\mathrm{r}\ (x)}{\|x - \boldsymbol{a}\|}}_{0} \cdot \lim_{x \to \boldsymbol{a}} \|x - \boldsymbol{a}\|$$

luego:

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \left|f(x) - f(\boldsymbol{a})\right| = 0 \ \textit{ es decir } \ \lim_{x \to \boldsymbol{a}} f(x) - f(\boldsymbol{a}) \implies \lim_{x \to \boldsymbol{a}} f(x) = f(\boldsymbol{a})$$

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$; $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i$; $\qquad \vec{\boldsymbol{e}}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Prof. Mauricio A. LUGO

Calculando T *en* $\vec{v}$ [35]

$$\mathrm{T}(\vec{v}) = \mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \; \mathrm{T}(\vec{\boldsymbol{e}}_i) \qquad\qquad \mathrm{T}\;(\vec{\boldsymbol{e}}_i) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_i}(\boldsymbol{a})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \; \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$$

esto se puede escribir como:

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$\mathrm{T} = d\ f(\boldsymbol{a}) = D\ f(\boldsymbol{a})$ *diferencial de la función* f *en el punto* $\boldsymbol{a}$*, la matriz asociada a la transformación lineal es aquella cuyos elementos son derivadas parciales evaluadas en el punto* $\boldsymbol{a}$*.*

Si se tiene una función tal que:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Sea $\mathrm{T}_{m\times n}$ *la matriz cuyos elementos son derivadas parciales de las componentes del vector de* $\mathbb{R}^m$ *respecto de la variable en* $\mathbb{R}^n$

***Ejemplo*:**

$f :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad\qquad (x, y) \to (u,\ v,\ w)$

$(x, y) \to (u(x, y),\ v(x, y),\ w(x, y))$

$$[\ \mathrm{T}\ ] = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Todas las derivadas parciales evaluadas en el punto donde creemos que f *es diferenciable.*

[35] T *actuando como transformación lineal sobre* $\vec{v}$

3.5. *Diferencial de una Función Compuesta*

3.5.1. *Regla de la Cadena*

Sea $h = g \circ f$, *entonces si* f *es diferenciable debe existir* $\mathrm{T} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ /

$h : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

$r : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} h(x) = h(\boldsymbol{a}) + \mathrm{T} \ \ [x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r} \ (x) \\ \\ \lim\limits_{x \to \boldsymbol{a}} \dfrac{\mathrm{r} \ \ (x)}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)_{(x)} = (g \circ f)_{(\boldsymbol{a})} + \mathrm{T} \ \ [x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r} \ (x)$$

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\mathrm{r} \ \ (x)}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = 0$$

$(g \circ f)_{(x)} - (g \circ f)_{(\boldsymbol{a})} = \mathrm{T} \ \ [x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r} \ (x) \ \circledast$ *de modo que* $\lim\limits_{x \to \boldsymbol{a}} \dfrac{\mathrm{r} \ (x)}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = 0$

H)

Sea $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A}' \subset \mathbb{R}^m$, $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \boldsymbol{A}' \longrightarrow \mathbb{R}$

definida $g \circ f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ $y = f(x)$, $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a})$

Suponemos f *diferenciable en el punto* $\boldsymbol{a}$ *y* g *diferenciable en el punto* $\boldsymbol{b}$

Entonces:

T)

(1) $g \circ f$ *es diferenciable en el punto* $\boldsymbol{a}$

(2) $d \ \ (g \circ f)_{(\boldsymbol{a})} = d \ g \, (f(\boldsymbol{a})) \cdot d \ f(\boldsymbol{a})$

Demostración:

Como la función f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, entonces se cumple la definición.

$$\begin{cases} f(x) = f(\boldsymbol{a}) + d\ f(\boldsymbol{a})[x-\boldsymbol{a}] + \mathrm{r}_1(x) \\ \\ \lim\limits_{x\to\boldsymbol{a}} \dfrac{\mathrm{r}\ (x)}{\|x-\boldsymbol{a}\|} = 0 \qquad (1) \end{cases}$$

como g es diferenciable en $\boldsymbol{b}$

$$\begin{cases} g(y) = g(\boldsymbol{b}) + d\ g(\boldsymbol{b})[y-\boldsymbol{b}] + \mathrm{r}_2\ (y) \\ \\ \lim\limits_{y\to\boldsymbol{b}} \dfrac{\mathrm{r}\ _2\ (y)}{\|y-\boldsymbol{b}\|} = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

$$f(x) - f(\boldsymbol{a}) = d\ f(\boldsymbol{a})[x-\boldsymbol{a}] + \mathrm{r}_1\ (x) \qquad (3)$$

$$g(y) - g(\boldsymbol{b}) = d\ g(\boldsymbol{b})[y-\boldsymbol{b}] + \mathrm{r}_2\ (y) \qquad (4)$$

Reemplazando (3) en (4) se tiene:

$$g(f(x)) = g(f(\boldsymbol{a})) + d\ g(f(\boldsymbol{a}))[f(x) - f(\boldsymbol{a})] + \mathrm{r}_2\ (f(x))$$

$$(g\circ f)_{(x)} - (g\circ f)_{(\boldsymbol{a})} = d\ g(f(\boldsymbol{a}))\ [d\ f(\boldsymbol{a})[x-\boldsymbol{a}] + \mathrm{r}_1\ (x)] + \mathrm{r}_2\ (f(x))$$

$$(g\circ f)_{(x)} - (g\circ f)_{(\boldsymbol{a})} = d\ g(f(\boldsymbol{a}))\cdot d\ f(\boldsymbol{a})[x-\boldsymbol{a}] + d\ g(f(\boldsymbol{a}))\cdot \mathrm{r}_1\ (x) + \mathrm{r}_2\ (f(x))$$

Se quiere obtener $\circledast$ $\therefore$ $(g\circ f)_{(\boldsymbol{a})}$ *será diferenciable si se prueba que:*

$$\lim_{x\to\boldsymbol{a}} \frac{d\ g(f(\boldsymbol{a}))\cdot \mathrm{r}_1\ (x)}{\|x-\boldsymbol{a}\|} = 0$$

llamando $y = f(x)$

$$\frac{\mathrm{r}_2\ (y)}{\|x-\boldsymbol{a}\|} \xrightarrow[x\to\boldsymbol{a}]{} 0 \qquad \text{(a demostrar)}$$

$$\left|\frac{d\ g(f(\boldsymbol{a}))\cdot \mathrm{r}_1(x)}{\|x-\boldsymbol{a}\|}\right| = \left|d\ g(f(\boldsymbol{a}))\right| \cdot \frac{|\mathrm{r}_1\ (x)|}{\|x-\boldsymbol{a}\|} \leq \alpha \cdot \frac{|\mathrm{r}_1\ (x)|}{\|x-\boldsymbol{a}\|} \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to\boldsymbol{a}} \left|\frac{d\ g(f(\boldsymbol{a}))\cdot \mathrm{r}_1\ (x)}{\|x-\boldsymbol{a}\|}\right| \leq \alpha\cdot \lim_{x\to\boldsymbol{a}} \frac{\mathrm{r}_1\ (x)}{\|x-\boldsymbol{a}\|} = 0$$

$\lim\limits_{x \to \boldsymbol{a}} \dfrac{\mathrm{r}_2\ (y)}{\|x - \boldsymbol{a}\|}$ (6) *debemos demostrar que es 0 cuando* $x \to \boldsymbol{a}$, $y \to \boldsymbol{b}$

de (2) *sabemos que* $\lim\limits_{y \to \boldsymbol{b}} \dfrac{\mathrm{r}_2\ (y)}{\|y - \boldsymbol{b}\|} = 0$ *y también que* f *es diferenciable*

$$\frac{f(x) - f(\boldsymbol{a})}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = \frac{d\ f(\boldsymbol{a})[x - \boldsymbol{a}]}{\|x - \boldsymbol{a}\|} + \frac{\mathrm{r}_1\ (x)}{\|x - \boldsymbol{a}\|}$$

aplicando norma m.a.m

$$\frac{\|f(x) - f(\boldsymbol{a})\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = \frac{\|d\ f(\boldsymbol{a})\| \cdot \cancel{\|x - \boldsymbol{a}\|}}{\cancel{\|x - \boldsymbol{a}\|}} + \frac{\|\mathrm{r}_1\ (x)\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} \leq \beta + \frac{\|\mathrm{r}_1\ (x)\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} \qquad (7)$$

como

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\|\mathrm{r}_1\ (x)\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = 0 \ \Rightarrow \ \forall\ \epsilon > 0\ ,\ \ \exists\ \eta_1 > 0\ :\ 0 < \|x - \boldsymbol{a}\| < \eta_1 \Rightarrow \frac{\|\mathrm{r}_1\ (x)\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} < \epsilon < 1$$

luego en (7)

$$\frac{\|f(x) - f(\boldsymbol{a})\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} < \beta + 1 = \kappa$$ *aplicando límite m.a.m*

$$\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\|f(x) - f(\boldsymbol{a})\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} < \kappa \qquad (8)$$

$$Sea\ \epsilon > 0\ ,\ \ \frac{\epsilon}{\kappa} > 0 \ \Longrightarrow \forall\ \frac{\epsilon}{\kappa}\ ,\ \ \exists\ \eta_2 > 0\ :\ 0 < \|y - \boldsymbol{b}\| < \eta_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|\mathrm{r}_2\ (y)\| < \frac{\epsilon}{\kappa} \cdot \|y - \boldsymbol{b}\| \qquad (9)$$ *por* (2)

para η_2, $\exists\ \eta_3 > 0\ /\ 0 < \|x - \boldsymbol{a}\| < \eta_3$, *entonces como la función* f *es diferenciable en* $\boldsymbol{a}$ *esta resulta continua en* $\boldsymbol{a}$ $\|f(x) - f(\boldsymbol{a})\| < \eta_2$ (10) *entonces* $\|y - \boldsymbol{b}\| < \eta_2 \ \Rightarrow \ \|\mathrm{r}_1\ (x)\| \ < \ \dfrac{\epsilon}{\kappa} \cdot \|y - \boldsymbol{b}\|$ *cuando* $x \to \boldsymbol{a}$

El (10) *está cumpliendo una condición para* $x \to \boldsymbol{a}$

Sea $\eta <$ *mín* $\{\eta_1\ ,\ \eta_3\}$ [36] *se cumplen simultaneamente* (8) *y* (10) $\therefore$ (9)

[36] *mínimo de los* η *en el dominio donde están los* x

Luego $\|\mathrm{r}_2\ (y)\| \ < \ \frac{\epsilon}{\kappa} \cdot \|y - \boldsymbol{b}\| = \frac{\epsilon}{\kappa} \cdot \|f(x) - f(\boldsymbol{a})\|$ *dividiendo m.a.m por* $\|x - \boldsymbol{a}\|$

$$\frac{\|\mathrm{r}_2\ (y)\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} < \frac{\epsilon}{\kappa} \cdot \frac{\|f(x) - f(\boldsymbol{a})\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} < \frac{\epsilon}{\kappa} \cdot \kappa = \epsilon$$

hemos probado que:

$$0 < \|x - \boldsymbol{a}\| < \eta \implies \frac{\mathrm{r}_2\ (y)}{\|x - \boldsymbol{a}\|} < \epsilon$$

o lo que es lo mismo:

$$\boxed{\lim_{x \to \boldsymbol{a}} \frac{\|\mathrm{r}_2\ (y)\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} = 0} \qquad (11)$$

entonces se verifica $\circledast$ *para* $\mathrm{T} \ = d\ g(f(\boldsymbol{a})) \cdot d\ f(\boldsymbol{a})$ *producto matricial y* $\mathrm{r}\ (x) = d\ g(f(\boldsymbol{a})) \cdot \mathrm{r}_1\ (x) + \mathrm{r}_2\ (y)$

luego $(g \circ f)_{(x)}$ *es diferenciable en* $x = \boldsymbol{a}$

$$(g \circ f)_{(x)} - (g \circ f)_{(\boldsymbol{a})} = d\ g(f(\boldsymbol{a})) \cdot d\ f(\boldsymbol{a})[x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r}\ (x)$$

con la condición de:

$$\frac{\|\mathrm{r}\ (x)\|}{\|x - \boldsymbol{a}\|} \xrightarrow[\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}]{} 0$$

luego por la definición de diferencial en el punto $\boldsymbol{a}$

$$d\ (g \circ f)_{(\boldsymbol{a})} = d\ g(f(\boldsymbol{a})) \cdot d\ f(\boldsymbol{a})$$

Ejemplo:

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad t \to (e^t\ ,\ \cos t)$$

$$f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \to (x, y)$$

supongamos que está definida en el dominio de modo tal que:

$$h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$d\,f = \begin{bmatrix} \dfrac{d(e^t)}{dt} \\ \\ \dfrac{d(\cos t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$dg = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

$$d(g \circ f) = dg \cdot df = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}_{1\times 2} \cdot \begin{bmatrix} e^t \\ \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}_{2\times 1} = y \cdot e^t - x \cdot \operatorname{sen} t \underbrace{=}_{\text{en funcion de } t} e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t$$

$$\frac{dh}{dt} = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$$

Derivando como función compuesta:

$$(g \circ f)_{(t)} = e^t \cos t$$

$$\frac{d(g \circ f)_{(t)}}{dt} = e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t$$

$$= e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$$

3.5.2. *Casos Particulares de la Regla de la Cadena*

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

f *es una función que depende de una sola variable*

$f(t) = (x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t));$ $\qquad t \to (x,\ y,\ z)$

$g(x,\ y,\ z);$ $\qquad (x,\ y,\ z) \to g(x,\ y,\ z)$

$df: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3;$ $dg: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$df = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \\ \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad df = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

$$h = g \circ f; \qquad dh = d(g \circ f) = dg(f) \cdot df; \qquad dh = dg \cdot df$$

$$dh = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}_{1\times 3} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \\ \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}}$$

(2) $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x\ ,\ y,\ z) = (u(x,y,z);\ v(x,y,z);\ w(x,y,z))$$

$$f: (u,\ v,\ w) \longrightarrow f(u,\ v,\ w)$$

$$f \circ g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[dg] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$f:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(u,\ v,\ w)$

$$[df] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

$h = f \circ g\ ; \qquad h = h(x,\ y,\ z)$

$dh = df(g)\cdot dg \qquad dh = dg \cdot df$

$$[dh] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{dh}{dy} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{dh}{dz} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}$$

3.6. *Clase de una Función*

Sea $f:\ \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n\ ;\quad \boldsymbol{A}$ *abierto*

Se dice que la función f *es de clase* κ $(\mathcal{C}^\kappa)$ $(\kappa \in \mathbb{N})$, *si* f *es una función continua y admite derivadas parciales continuas hasta el orden* κ *inclusive.*

Si una función f*es de orden* κ, *obviamente es de orden* $\kappa - 1$.
Por $\mathcal{C}^0$ *entendemos las funciones continuas.*

Y sea $\{\mathcal{C}^1,\ \mathcal{C}^2,\ \mathcal{C}^3,\ \ldots\}$ *el conjunto de las funciones continuas derivables hasta el orden* 1.

Si una función f *admite derivadas parciales continuas de todos los ordenes diremos que es indefinidamente diferenciable. Lo indicaremos con* $\mathcal{C}^\infty$

Teorema 7 *Toda función de clase $\mathcal{C}^1$ es diferenciable*

Sea $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{A}$ abierto, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A}$ tal que f admite en el punto $\boldsymbol{c}$ perteneciente a $\boldsymbol{A}$, derivadas parciales continuas, entonces f es diferenciable en el punto $\boldsymbol{c}$

Demostación:

$$\text{Sea} \quad n = 2 \quad c = (a,b); \quad \vec{v} = (k,k); \quad T[\vec{v}] = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{v}_i$$

vamos a estudiar el comportamiento de la función en los puntos $x = c + \vec{v}$

$$f(x) = f(c) + T(c)\big[x - c\big] + r(x)$$
$$\lim_{x \to c} \frac{r(x)}{\|x - c\|} = 0$$

Sea:

$$c + \vec{v} = (a,b) + (h,k) = (a+h, b+k)$$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot k + r(\vec{v})$$
$$r(\vec{v}) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot k$$

sumando y restando $f(a, b+k)$

$$r(\vec{v}) = \Big[f(a+h, b+k) - f(a, b+k)\Big] + \Big[f(a, b+k) - f(a,b)\Big] - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot k$$

aplicando el teorema del valor medio

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k)\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)\cdot k-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot k; \quad \theta_1,\theta_2\in(0,1)$$

$$r(\vec{v})=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right]\cdot h+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]\cdot k$$

$$\frac{r(\vec{v})}{\|\vec{v}\|}\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|\cdot\frac{h}{\|\vec{v}\|}+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]\cdot\frac{k}{\|\vec{v}\|}$$

$$\frac{r(\vec{v})}{\|\vec{v}\|}\leq\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\overbrace{(\underbrace{a+\theta_1 h}_{\to a},\underbrace{b+k}_{\to b})}^{\to(a,b)}-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|}_{\to 0}+\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|}_{\to 0} \qquad \therefore$$

$$\lim_{x\to c}\frac{r(x)}{\|x-c\|}=0$$

Luego f es diferenciable en $\boldsymbol{c}=(a,b)$

Teorema 8 *Sea f una función tal que admita $n-1$ derivadas continuas y de la derivada respecto de la última variable exista, entonces la función es diferenciable en el punto.*

Demostración:

Sea $n=2$ *y* $f:\boldsymbol{A}\longrightarrow\mathbb{R}; \quad \boldsymbol{A}\subset\mathbb{R}^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{c})$ *es continua y existe* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{c})$

Para $n=2;$ *sea* $\boldsymbol{c}=(a;b); \quad \vec{v}=(h;k) \quad \boldsymbol{x}=(a+h;b+k)$

$$\mathrm{r}\ (\vec{v})=f(a+h;b+k)-f(a;b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\cdot k$$

queremos probar que:

$$\frac{\left|\mathrm{r}\ (\vec{v})\right|}{\|\vec{v}\|}\xrightarrow[\|\vec{v}\|\to 0]{}0$$

restando y sumando $f(a;b+k)$

$$r\ (\vec{v}) = f(a+h;b+k) - f(a;b+k) + f(a;b+k) - f(a;b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\cdot k$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h;b+k)\cdot h - [f(a;b+k) - f(a;b)] - \frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\cdot k$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h;b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\right]\cdot h + \left[\frac{f(a;b+k) - f(a;b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\right]\cdot k$$

$$r\ (\vec{v}) \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h;b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\right|\cdot \mid h \mid + \left|\frac{f(a;b+k) - f(a;b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\right|\cdot \mid k \mid$$

$$\frac{r\ (\vec{v})}{\|\vec{v}|} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h;b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\right|\cdot \underbrace{\frac{\mid h \mid}{\|\vec{v}\|}}_{\leq 1} + \left|\frac{f(a;b+k) - f(a;b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\right|\cdot \underbrace{\frac{\mid k \mid}{\|\vec{v}\|}}_{\leq 1}$$

$$\therefore$$

$$\frac{r\ (\vec{v})}{\|\vec{v}|} \leq \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h;b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\right|}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\left|\frac{f(a;b+k) - f(a;b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\right|}_{\text{solo se incrementa la } 2^{\text{da}} \text{ variable cuando } \|\vec{v}\| \to 0;\ k \to 0}$$

$$\left(\textit{recordando que } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{x\to 0} \frac{f(a;b+k) - f(a;b)}{k}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left|r\ (\vec{v})\right|}{\|\vec{v}\|} = 0$$

Definición:

Sea $f : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$; $\quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$

Si la función es diferenciable en cada punto $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, *diremos que la función es diferenciable en el conjunto* $\boldsymbol{A}$

Conclusión:

Si la función f es diferenciable en un punto, la $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})$ es combinación lineal de las derivadas parciales de la función en el punto.

$$T[\vec{v}] = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a})$$

$$T[\vec{v}] = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{v}_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \vec{v}_i$$

3.7. Expresión de la Diferencial de una Función

Dada una función $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{A}$ *abierto.*

Si f es diferenciable en cada punto del conjunto $\boldsymbol{A}$ diremos que f es diferenciable en $\boldsymbol{A}$ [37].

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$; $\vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$

$$\prod_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ / \ \pi_i(x) = x_{ij}$$

Con $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, calculamos la diferencial:

$$d\ \pi_i(\boldsymbol{a})\vec{v} = d\ x_i(\boldsymbol{a})\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\alpha_i$$

Como x_j es independiente de x_i

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \qquad\qquad d\ x_i(\boldsymbol{a}) \cdot \vec{v} = \vec{v}_i$$

[37] *es una T.L. : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuyo valor en un vector $\vec{v}$ está dado por la fórmula* $T[\vec{v}] = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\vec{v}_i$

por lo tanto:

$$d\ x_i(\boldsymbol{a}) \cdot \vec{v} = \alpha_i$$

$$T[\vec{v}] = d\ f(\boldsymbol{a}) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot \vec{v}$$

$$T[\vec{v}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot d\ x_i(\boldsymbol{a}) \cdot \vec{v}$$

Por lo cual si esta igualdad se verifica para todos los valores de $\vec{v}$ puede decirse que:

$$d\ f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot d\ x_i$$

y si la función es diferenciable en el conjunto $\boldsymbol{A}$, esta relación se verifica para todo $\boldsymbol{a}$, podemos escribir así:

$$\boxed{d\ f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot d\ x_i}$$

3.8. *Función Gradiente*

Dada la función $f\ \ /\ \ f : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}\ ;\ \ \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$ que es diferenciable en el punto "$\boldsymbol{a}$", asociando a la misma una nueva función, llamada gradiente de f en el punto "$\boldsymbol{a}$".

Simbolizada con $\boldsymbol{grad}\ f(\boldsymbol{a})$ *ó* $\nabla f(\boldsymbol{a})$

El operador ∇ (nabla), asocia a una función escalar, una función vectorial[38].

Esta función vectorial[39] *es tal que si $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ \ldots, v_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, el producto escalar $< \nabla f(\boldsymbol{a}), \vec{v} >$ produce la derivada de la función en la dirección del vector $\vec{v}$.*

$$< \nabla f(\boldsymbol{a}), \vec{v} > = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}) \qquad (1)$$

$$< \nabla f(\boldsymbol{a}), \vec{v} > = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot v_i$$

[38] *en cada punto donde f es diferenciable*
[39] *vector*

Estamos definiendo un vector que está asociado a una función escalar f.

Si $\vec{v}$ es uno de los vectores canónicos.

$\vec{v} = e_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

$$< \nabla f(\boldsymbol{a}), \vec{v} > = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot 1 \qquad (2)$$

de (1) y (2) se pueden encontrar las componentes del vector gradiente.

$$\boxed{\nabla\ f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)}$$

*Tiene por componentes las derivadas parciales evaluadas en el punto "**a**". En cada punto donde f es diferenciable.*

Esta función vectorial [40] brinda información sobre el comportamiento de la función f; por ejemplo:

Indica la dirección en que la función crece más rápidamente y también se probará que el gradiente de la función en el punto "a" es perpendicular a la curva de nivel de f.

Se probará que el gradiente indica la dirección según la cual la función es creciente.

Para ello:

1.

$$\vec{w} = \nabla f(\boldsymbol{a})$$

$$< \nabla f(\boldsymbol{a}), \vec{w} > = \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(\boldsymbol{a})$$

$$< \nabla f(\boldsymbol{a}), \vec{w} > = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|^2 > 0$$

*Luego $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{w}}(\boldsymbol{a}) > 0$, es decir la función f es creciente en la dirección del vector gradiente de f en "**a**".*

[40] *gradiente*

2. *Vamos a probar que le gradiente de la función indica la dirección según la cual la función crece más rápidamente.*

   Sea:

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ \|\vec{v}\| = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$$

   Se quiere probar que la derivada de la función en la dirección de $\vec{v}$ es, menor o igula que la derivada en la dirección del gradiente.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}) \leq \frac{\partial f}{\partial\left(\nabla f(\boldsymbol{a})\right)}(\boldsymbol{a})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}) &= < \nabla f(\boldsymbol{a}), \vec{v} > \ \leq \ \| < \nabla f(\boldsymbol{a}), \vec{v} > \| \ \leq \\ &\leq \ \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cdot \|\vec{v}\| \ = \ \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cdot \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| = (\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|)^2 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial\left(\nabla f(\boldsymbol{a})\right)}(\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

   se ha probado que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}) \leq \frac{\partial f}{\partial\left(\nabla f(\boldsymbol{a})\right)}(\boldsymbol{a})$$

   $\therefore$ *la función crece más rápidamente en la dirección del gradiente.*

3. *El gradiente de la función en el punto "**a**" es perpendicular a la curva de nivel de la función en el punto.*

$$\mathcal{C}, f^{-1}(c) = \{x \in \boldsymbol{A} \ / \ f(x) = c\}$$

   Sea $x = \boldsymbol{a}$ donde la función es diferenciable.

   *Sea $\mathcal{C}$ un arco de curva que pasa por "**a**", que admite una parametrización dada por la función* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(0) = \boldsymbol{a} \qquad\qquad \varphi \text{ es diferenciable}$$

   $\mathcal{C}$ *es tal que provenga de todos los puntos con $f(x) = c$*

   $g = f^\circ\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [41]

[41] *la imágenes de los puntos de $[-\epsilon, \epsilon]$ están en $\mathbb{R}$*

$g = g(t)$

calculando:

$$\left[\frac{d\ g}{d\ t}\right] = d\ f(\varphi(0)) \cdot d\ \varphi(0) = 0$$

$$(f^{\circ}\varphi)_{(x)} = c$$

Calculando la derivada en el 1^{er} *miembro, igualando a la derivada en el* 2^{do} *miembro*

$\dfrac{d\ g}{d\ t} = d\ f(\varphi(0)) \cdot d\ \varphi(0) = 0 \qquad \varphi' = (\varphi_1',\ \varphi_2',\ \ldots, \varphi_n')$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0) = 0$$

lo podemos escribir como:

$$< \nabla f(\varphi(0)), \varphi'(0) > = 0$$

$< \nabla f(\boldsymbol{a}), \varphi'(0) > = 0$ *producto escalar de dos vectores, igual a cero*

Sea $P = (x, y, z)$ *punto donde* f *es diferenciable.*

$$\lambda = \begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \\ z = Z(t) \end{cases}$$

Parametrización de una superficie que pasa por P

$$f(x,y,z) = f(X(t),\ Y(t),\ Z(t)) = f^*(t) = c$$

$$\frac{d\,f^*}{d\,t}(t) = \frac{d\,f}{d\,x}\cdot\frac{d\,x}{d\,x} + \frac{d\,f}{d\,y}\cdot\frac{d\,y}{d\,t} + \frac{d\,f}{d\,z}\cdot\frac{d\,z}{d\,t} = 0$$

$$\left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)}_{\nabla f(\boldsymbol{a})}, \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial t},\ \frac{\partial y}{\partial t},\ \frac{\partial z}{\partial t}\right)}_{\lambda'} \right\rangle = 0$$

$$\therefore\quad \nabla f(\boldsymbol{a}) \perp \lambda'$$

1. $< \nabla f, \vec{v} >= \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\boldsymbol{a}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot v_i$

2. $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\ \ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$

***Ejemplos**:*

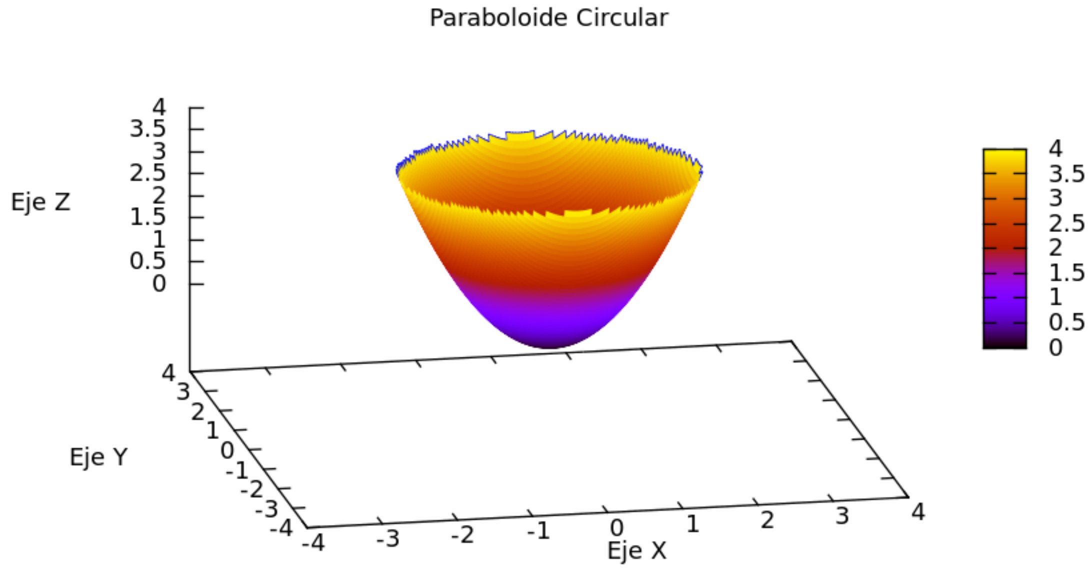
- *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ /\ f(x,y) = x^2 + y^2$

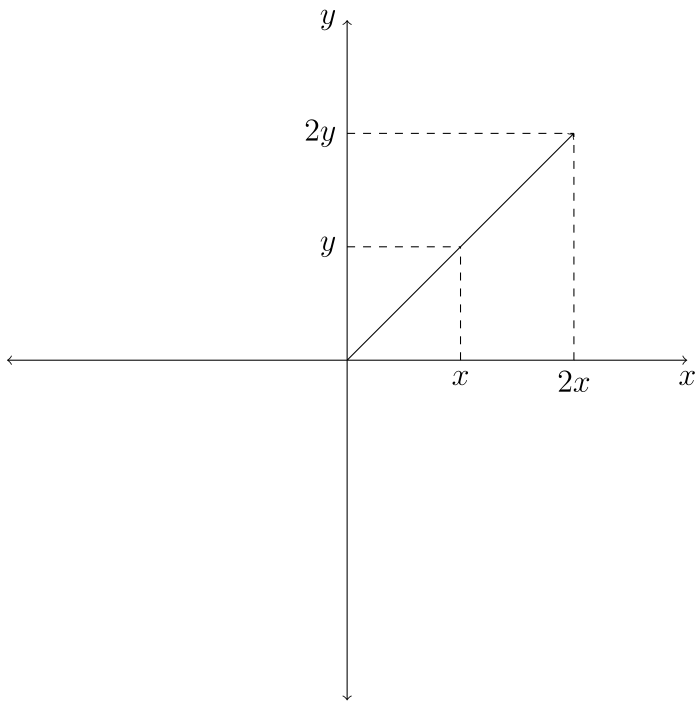
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \therefore \qquad \nabla f = (2x, 2y)$$

Tomando el vector gradiente de la función en el punto $(1,1)$ *o sea* $\nabla f(1,1) = (2,2)$ *, el vector gradiente es un vector que en cada punto que uno considere vale* $(2x, 2y)$*, a medida que se aleje del origen el gradiente crece más rápidamente .*

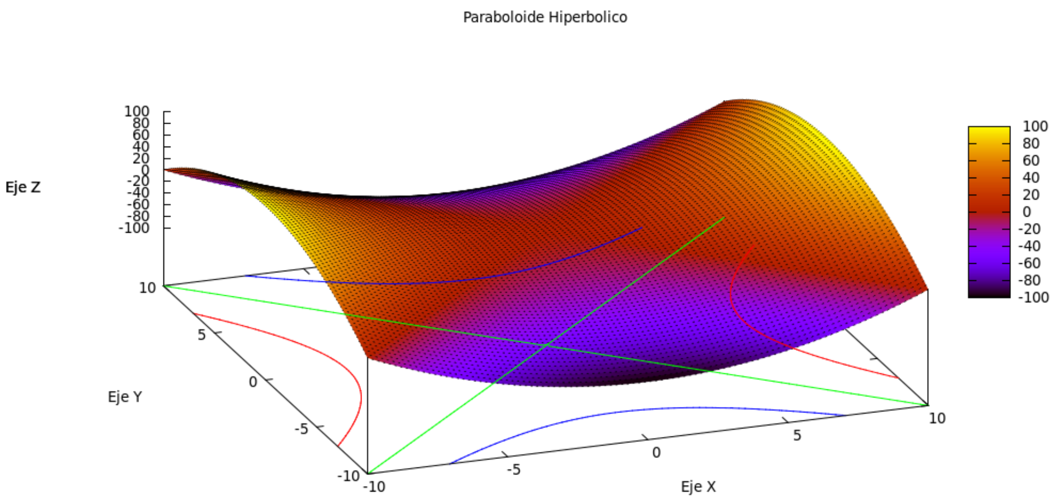
Para igual desplazamiento sobre el plano horizontal, la función crece más rápidamente .
Cuando $c = 0$ *(origen de coordenadas).*

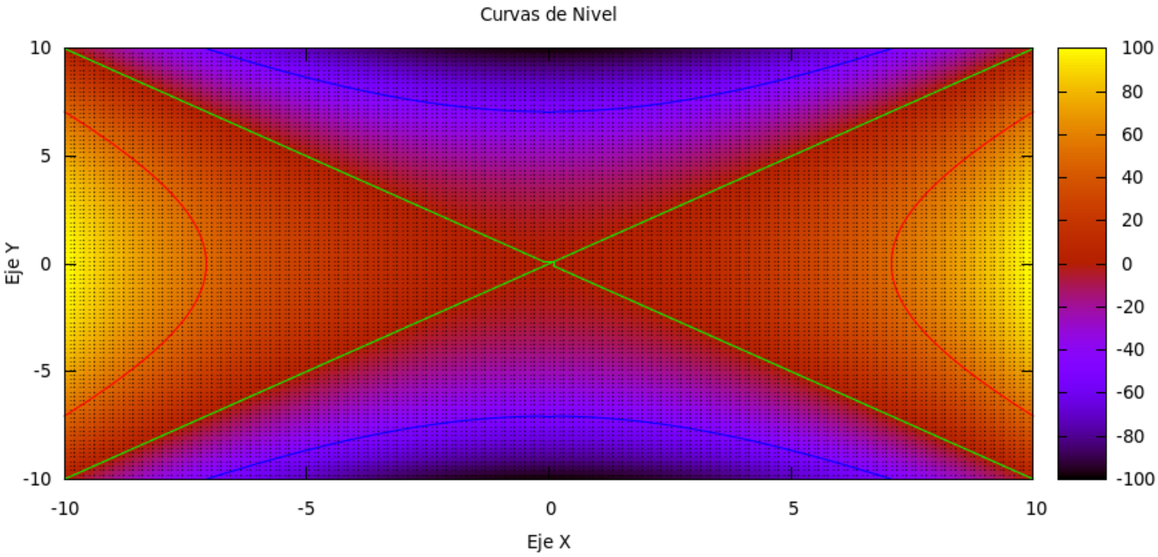
Ahora si $c > 0$*, circunferencia con centro en el origen y radio* $\sqrt{c}$





- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $z = x^2 - y^2$





Para $c > 0: \qquad c = x^2 - y^2$

Para $c < 0: \qquad c = y^2 - x^2$

$$\nabla f = (2x, -2y)$$

3.9. *Teorema del Valor Medio*

Sea $f : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}; \quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n; \quad \boldsymbol{A}$ *Abierto* ; $\quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \boldsymbol{A} \quad \textit{(segmento cerrado)}$$

Sea f *continua en* $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ *y sea diferenciable en todo punto de* $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,
$\exists\ x_0 \in (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\ /\ f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = d\ f(x_0) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ [42]

Demostración:

$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}; \quad [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \subset \boldsymbol{A}$

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \\ \varphi(0) &= \boldsymbol{a} \\ \varphi(1) &= \boldsymbol{b} \\ \varphi([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]) &= [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \end{aligned}$$

$g = f^\circ\varphi\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$; *$g$ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.*

Aplicando el teorema del valor medio para funciones de una variable (g es una función de una veriable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} g(1) - g(0) &= \frac{d\ g}{d\ t}(x_0) \cdot (1 - 0) \qquad * \\ g(1) &= (f^\circ\varphi)_{(1)} = f(\varphi(1)) = f(\boldsymbol{b}) \\ g(0) &= (f^\circ\varphi)_{(0)} = f(\varphi(1)) = f(\boldsymbol{a}) \\ \frac{d\ g}{d\ t} &= d\ f\ (\varphi(t)) \cdot d\ \varphi(t) \\ &= d\ f\ \underbrace{(\varphi(t))}_{x_0} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \\ &= d\ f\ (x_0) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

reemplazando todo en $*$

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = d\ f(x_0) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

Corolario 1 :

Si el conjunto $\boldsymbol{A}$ *es abierto, conexo y* $d\ f(x) = 0;\ \ \forall x \in \boldsymbol{A}$, *entonces* f

[42] *donde el segundo miembro se debe interpretar como producto matricial*

es constante en $\boldsymbol{A}$.

Dado $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \subset \boldsymbol{A}$; $\quad f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = 0 \implies f(\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a})$

$x \in \boldsymbol{A}$; $\quad \boldsymbol{a} = a_1, a_2, \ldots, a_n \quad$ *(extremos de la poligonal)*

$$f(x) = f(a_n) = f(a_{n-1}) = \ldots = f(a_1) = f(a)$$

Corolario 2 :

Si f *es una función tal que* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right| \leq M_i, \quad \forall i$; *tiene sus derivadas parciales acotadas en el conjunto* $\boldsymbol{A}$ *entonces* $\mid f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) \mid \leq M \cdot \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|$ [43]

***Demostración*:**

Sea $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \subset \boldsymbol{A}$ *; por el teorema del valor medio:*

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) &= d\ f(x_0) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}); \qquad x_0 \in (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\ f}{\partial\ x_i}(x_0) \cdot (\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{a}_i) \\
\mid f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) \mid &= \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial\ f}{\partial\ x_i}(x_0)\right| \cdot \mid \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{a}_i \mid \leq\ M^* - \text{máx}\{M_i\} \\
&\leq M^* \sum_{i=1}^{n} \mid \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{a}_i \mid = M^* \cdot n \cdot \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_s = M \cdot \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|
\end{aligned}$$

Sea $x = \boldsymbol{a}$; $\quad T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $\quad \mathrm{r} : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x) = f(\boldsymbol{a}) + T[x - \boldsymbol{a}] + \mathrm{r}\ (x) \\
\frac{\mathrm{r}\ (x)}{\|x - \boldsymbol{a}\|} \xrightarrow[x \to \boldsymbol{a}]{} 0
\end{aligned}$$

Para todo x *próximos a* $\boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned}
f(x) - f(\boldsymbol{a}) &\approxeq T[x - \boldsymbol{a}] \\
f(x) - f(\boldsymbol{a}) &\approxeq d\ f(\boldsymbol{a}) \cdot [x - \boldsymbol{a}] \\
f(\boldsymbol{a} + h) - f(\boldsymbol{a}) &\approxeq d\ f(\boldsymbol{a}) \cdot \|h\|
\end{aligned}$$

[43] *no crece indefinidamente el valor de* $f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$

3.10. *Aplicaciones de la Diferencial*

Una de las aplicaciones prácticas más importantes del teorema del valor medio y sus corolarios es establecer la estimación del error que se comete al determinar una magnitud cuando se conocen los errores de medición.

Sea $f: \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}; \quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$

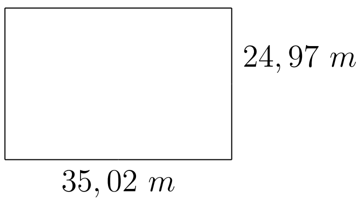
f diferenciable en todo el conjunto $\boldsymbol{A}$.

Una función de la cual se desea conocer empíricamente el valor que toma en un cierto punto $\boldsymbol{b}$. Si se determina exactamente $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ el valor buscado será $f(\boldsymbol{b})$, pero por razones relacionadas con el hecho mismo de medir se determinan valores $f(\boldsymbol{a})$ para "$\boldsymbol{a}$" próximos a "$\boldsymbol{b}$". Supongamos conocer la presición del instrumento de medición usado, ese dato permitirá asegurar que existen valores $\epsilon_i > 0 \ / \ | b_i - a_i | < \epsilon_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$ de modo tal que si f está en las condiciones del teorema y del corolario 2 se tendrá :

$$\Big| f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) \Big| \leq M \cdot \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$$

Ejemplo:

Determinar utilizando diferenciales el valor aproximado del área de un rectángulo de $35,02\ m$ de de base y $24,97\ m$ de altura.



$\mathcal{A} =$ *función de x e y*

$x \to$ *base* ; $y \to$ *altura*

$\mathcal{A} = x \cdot y$

$$d\ \mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} \cdot dy$$

cuando tenemos $\vec{v} = (h, k)$

$$d\ \mathcal{A} \cdot \vec{v} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \cdot h + \frac{\mathcal{A}}{\partial y} \cdot k$$

$$d\ \mathcal{A} = y \cdot dx + x \cdot dy \qquad \textit{vamos a aproximar}$$

$$\textit{tomando} \quad \boldsymbol{a} = (35, 25) \Longrightarrow \vec{v} = (0.02, -0.03)$$

$$f(\boldsymbol{a} + h, \boldsymbol{b} + k) - f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \approxeq d\ f(\boldsymbol{a}) \cdot \vec{v}$$

$$f(\boldsymbol{a} + h, \boldsymbol{b} + k) \approxeq f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + d\ f(\boldsymbol{a}) \cdot \vec{v} \qquad *$$

$$d\ f(\boldsymbol{a}) \cdot \vec{v} = y \cdot h + x \cdot k$$

$$= 25 \cdot 0.02 - 35 \cdot 0,03 = -0.55$$

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 35 \cdot 25 = 875$$

volviendo a $*$

$$(35.02) \cdot (24.97) \approxeq 35 \cdot 25 + (-0.55) = 874.45\ m^2$$

$$(35.02) \cdot (24.97) = 874.4494\ m^2 \qquad \textit{error de 6 diez milésimas}$$

3.11. *Derivadas Sucesivas o de Orden Superior*

Dada una función $f \;/\; f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ *(abierto), se tiene que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Cada una de ellas determina una nueva función definida, también en general de $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$*; con* $i = 1, 2, \ldots, n$

A esta nueva función se le puede aplicar la definición de derivadas y si ella existe, se tendrá la derivada de la derivada de la función.

***Ejemplo**:*

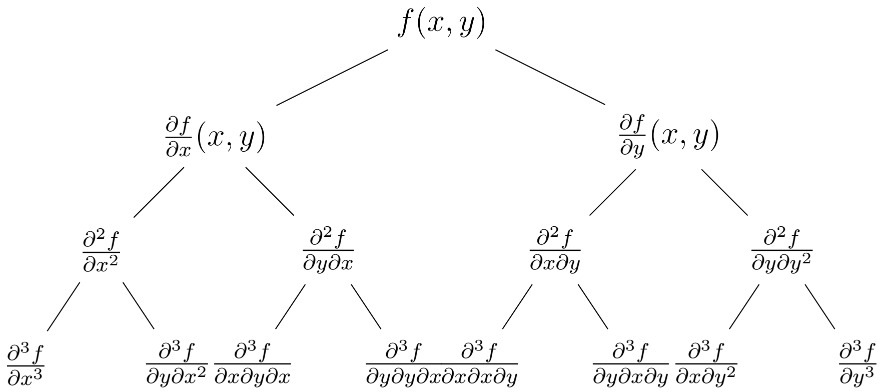
Si se hubiera calculado $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ *de existir se hubiera tenido.*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i};1\leq i\leq n$$

derivada 2^{da} de la función f, primero respecto de x_i, después respecto de x_j [44]

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x_k x_j x_i} \qquad 1\leq i,j,k\leq n$$

Suponemos estar en $\mathbb{R}^2$ / $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ [45]*, se tiene que:*



Si f es de dos variables tenemos 2^n derivadas parciales deorden n

A las derivadas de la forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x};\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

las llamamos derivadas cruzadas o mixtas.

***Ejemplo**:*

1. $f(x,y)=xy+(x+2y)^2$

[44] o también $f'_{x_i x_j}$

[45] *El dominio de la función derivada no excede el dominio de la función original.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2\cdot(x+2y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2\cdot(x+2y)\cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 5$$

en este ejemplo es $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\cdot(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

fuera del origen esta función admite derivadas parciales y sucesivas, además se verifica que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

vamos a calcular en el origen las derivadas cruzadas, suponemos $y \neq 0$, *nos acercamos al origen por los puntos de la forma* $(0,y)$.

$$Si \quad y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(0,y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y)-f(0,y)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\left[\frac{ty\cdot(t^2-y^2)}{t^2+y^2}\right] = \frac{-y^3}{y^2} = -y$$

Calculamos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$$ [46]

[46] *esta derivada segunda en el origen vale -1*

Ahora nos acercamos al origen por los puntos $x \neq 0$

$$\begin{aligned} &si \ \ (x,0) \ \Rightarrow \ f(x,0) = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{t} \\ &\qquad\qquad = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \left[\frac{xt \cdot (x^2 - t^2)}{x^2 + t^2} - 0 \right] = \frac{x^3}{x^2} = x \end{aligned}$$

Calculamos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$$

Las derivadas cruzadas son distintas.

3.12. *Teorema de Schwarz*

Bajo que condiciones se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas.

H) *Dada una función:*

$$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n; \quad f \in \mathcal{C}^2, \quad en\ \boldsymbol{c} \in \mathcal{U}$$

T)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{c}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{c})$$

Demostración: *Para* $n = 2$

$f(x,y)$ $\quad$ $\boldsymbol{c} = (a,b)$ $\quad$ $\boldsymbol{c} \in \mathring{\mathcal{U}}$ $\quad$ *entonces*

$\exists \epsilon > 0 \ / \ (a-\epsilon, a+\epsilon) \times (b-\epsilon, b-\epsilon) \ \subset \ \mathcal{U}$ [47]

$\forall t \ \in \ (-\epsilon, \epsilon)$

consideramos una función auxiliar:

$$\varphi(t) = f(a+t, b+t) - f(a+t, b) + f(a, b+t) - f(a,b)$$

[47] *entorno de centro* $\boldsymbol{c}$

Definimos:

$$\boldsymbol{\xi(x) = f(x, b+t) - f(x, b)}$$
$$\xi(a+t) = f(a+t, b+t) - f(a+t, b)$$
$$\xi(a) = f(a, b+t) - f(a, b)$$

haciendo :

$$\varphi = \xi(a+t) - \xi(a) \qquad (1)$$

por el teorema del valor medio para funciones de una variable

$$\xi(a+t) - \xi(a) = \xi'(a+\theta t)\cdot t; \qquad \theta \in (0,1) \qquad (2)$$

de(1) *y* (2)

$$\varphi(t) = \xi'(a+\theta t)\cdot t; \qquad \theta \in (0,1) \qquad (3)$$

Como:

$$\xi(x) = f(x, b+t) - f(x, b)$$
$$\xi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, b)$$
$$\xi'(a+\theta t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta t, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta t, b) \qquad (4)$$

reemplazando (4) *en* (3)

$$\varphi(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta t, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta t, b)\right]\cdot t; \qquad \theta \in (0,1) \quad (I)$$

Sabiendo que $f(x,y)$ *es de clase* $\mathcal{C}^2$ *, sabemos que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *es diferenciable en "**c**".*
Si $f(x,y)$ *es diferenciable podrá expresarse.*

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot k + \mathrm{r}\ (a, \vec{v}) \qquad (5)$$

paraa un punto $\boldsymbol{c} = (a,b)$ *y un vector* $\vec{v} = (h,k)$

Considerando:

Análisis II

1^{ero} : $\vec{v} = (\theta t, t)$ *y* $\boldsymbol{c} = (a, b)$ *y expresando* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *, por ser diferenciables como:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta t, b+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\theta t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)t + \mathrm{r}_1\ (a+\theta t, b+t) \qquad (6)$$

2^{do} : $\vec{v} = (\theta t, 0)$ $\boldsymbol{c} = (a, b)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta t, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\theta t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)0 + \mathrm{r}_2\ (a+\theta t, 0) \qquad (7)$$

reemplazando (6) *y* (7) *en* (I) *.*

$$\varphi(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\cdot t + (\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2)\right]\cdot t$$

dividiendo m.a.m por t^2

$$\frac{\varphi(x)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) + \frac{(\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2)}{t}$$

aplicando límite a ambos miembros

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) + \lim_{t\to 0}\frac{(\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2)}{t}$$

como :

$$\lim_{t\to 0}\frac{(\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2)}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \qquad (8)$$

Análogamente tomamos:

$$\mu(y) = f(a+t, y) - f(a,y)$$
$$\varphi(t) = \mu(b+t) - \mu(b)$$
$$\varphi(t) = \mu'(b+\theta t)\cdot t$$

y llegamos a:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad (9)$$

como los primeros miembros de (8) *y* (9) *son iguales, también son los segundos.*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)}$$

3.13. *Diferencial de Orden Superior*

Sea $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$; $\quad \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\quad \mathcal{U}$ *abierto* $\quad$ *y* $\quad \boldsymbol{c} \in \mathcal{U}$

tomando $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$
$$d\ f(\boldsymbol{c}) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}) \cdot \alpha_i$$

expresión:

$$d\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot d\ x_i$$

Para $n = 2$; $\qquad \vec{v} = (h, k)$

$$d\ f(\boldsymbol{c}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{c}) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{c}) \cdot k$$

cuando se quiere calcular:

$$d\ f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot k$$

Derivamos la función respecto de la primer variable y a ese resultado lo multiplicamos por la primera componente del vector la derivamos la función respecto a la segunda variable y a ese resultado lo multiplicamos por la segunda componente del vector.

Calculamos:

$$d\ (d\ f \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot k\right) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot k\right) \cdot k$$
$$d^2\ f \cdot \vec{v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot h \cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \cdot h \cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot k^2$$

Si la función f es diferenciable y si las derivadas parciales son continuas en el punto $\boldsymbol{c}$, entonces por el teorema de Schwartz las derivadas iguales.

$$\boxed{d^2\ f\cdot\vec{v}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\cdot h\cdot k+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\cdot k^2}$$

Diferencial segunda de la función en un punto en a dirección del vector $\vec{v}$.

$$d\ \left(d^2 f\cdot\vec{v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}[x]\cdot h+\frac{\partial}{\partial y}[x]\cdot k$$

$$=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\cdot h^3+2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y)\cdot h^2\cdot k+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)\cdot h\cdot k^2+$$

$$+\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y)\cdot h^2\cdot k+2\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}\cdot h\cdot k^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)\cdot k^3$$

Si la función es de clase $\mathcal{C}^3$ [48] entonces las derivadas cruzadas son iguales.

$$d^3 f\cdot\vec{v}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\cdot h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y)\cdot h^2\cdot k+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y)\cdot h\cdot k^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)\cdot h^3$$

Diferencial tercera de la función en el punto $\boldsymbol{x}=(x,y)$ en la dirección del vector $\vec{v}$.

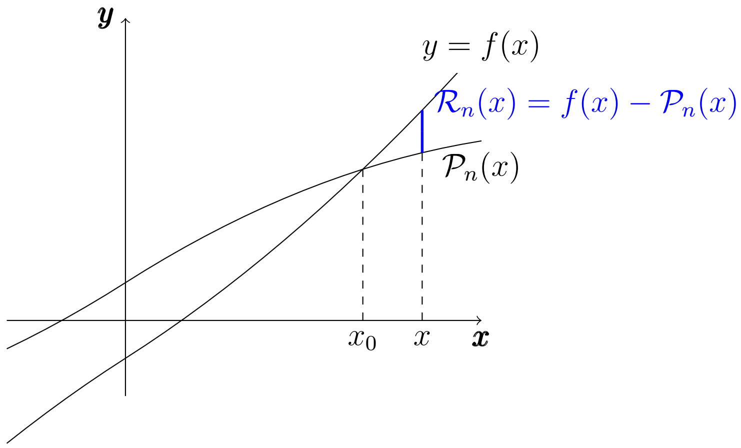
[48] *pedimos que se de clase 3*

4. *Unidad N° 5*

4.1. *Fórmula de Taylor y Mc Laurin para Funciones de una Variable*

En muchos casos resulta conveniente aproximar el valor de una función derivable no polinómica (e^x, $\operatorname{sen} x, lnx$) mediante un polinomio particular elegido y precisar la aproximación o error que se comete al reemplazar el valor de la función en un punto x_0 del dominio de dicha aplicación por el valor en el mismo punto del polinomio.
O sea, si una función $y = f(x)$ tiene "n-derivadas" sucesivas finitas en un punto $x = x_0$, existe un único polinomio de grado n cuyas derivadas sucesivas coincidan con las derivadas sucesivas de la función $f(x)$ en dicho punto $x = x_0$, y, por lo tanto interesa conocer para el $x \in \mathcal{D}mf$, el valor de la diferencia $\mathcal{R}_n(x) = f(x) - \mathcal{P}_n(x)$

El valor de $\mathcal{R}_n(x)$ recibe el nombre de término complementario



Por lo dicho anteriormente; sea $f(x)$ una función que admite n-derivadas finitas en un punto $x = x_0$.
Sea $\mathcal{P}_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n$ un polinomio de grado n, con $c_i \in \mathbb{R}$; $0 \leq i \leq n$, cuyo valor en $x = x_0$ sea igual a la función en $x = x_0$. Es decir:

$$\mathcal{P}_n(x_0) = f(x_0); \quad \mathcal{P}'(x_0) = f'(x_0); \quad \mathcal{P}''(x_0) = f''(x_0); \ldots ; \mathcal{P}^n(x_0) = f^n(x_0) \qquad (*)$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos expresar al polinomio $\mathcal{P}_n(x)$ según las potencias del binomio $(x - x_0)$, para la cual basta efectuar las divisiones sucesivas por dicho binomio.

O sea:

$\forall x_0 \in \mathbb{R}:\ \mathcal{P}_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \ldots + c_n(x-x_0)^n$

Calculando los coeficientes $c_i \in \mathbb{R};\quad 0 \leq i \leq n$ *de modo que cumpla las condiciones* $(*)$*, para lo cual realizamos las derivadas sucesivas de* $\mathcal{P}_n(x)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_n(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \ldots + c_n(x-x_0)^n \\
\mathcal{P}_n'(x) &= c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_2(x-x_0)^2 + \ldots + nc_n(x-x_0)^{n-1} \\
\mathcal{P}_n''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-x_0) + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot c_n(x-x_0)^{n-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathcal{P}_n^{(n)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n
\end{aligned}
$$

Luego en $x = x_0$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(x_0) &= c_0 \longrightarrow c_0 = \mathcal{P}_n(x_0) \\
\mathcal{P}'(x_0) &= c_1 \longrightarrow c_1 = \mathcal{P}'(x_0) \\
\mathcal{P}''(x_0) &= 2c_2 = 2!c_2 \longrightarrow c_2 = \frac{\mathcal{P}''(x_0)}{2!} \\
\mathcal{P}'''(x_0) &= 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3 \longrightarrow c_3 = \frac{\mathcal{P}'''(x_0)}{3!} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\mathcal{P}^{(n)}(x_0) &= n!c_n \longrightarrow c_n = \frac{\mathcal{P}^{(n)}(x_0)}{n!}
\end{aligned}
$$

Reemplazando: [49]

$$\mathcal{P}_n(x) = \mathcal{P}(x_0) + \mathcal{P}'(x_0)(x-x_0) + \frac{\mathcal{P}''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{\mathcal{P}'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + .. + \frac{\mathcal{P}(x_0)^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$

Si $x_0 = 0$ [50]

$$\mathcal{P}_n(x) = \mathcal{P}(0) + \mathcal{P}'(0)x + \frac{\mathcal{P}''(0)}{2!}x^2 + \frac{\mathcal{P}'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\mathcal{P}(0)^{(n)}}{n!}x^n$$

[49] *Función Polinómica llamada* ***Polinomio de Taylor***

[50] *Polinomio de MacLaurin*

Luego, por (∗)

$$\begin{aligned} c_0 &= f(x_0) \\ c_1 &= f'(x_0) \\ c_2 &= \frac{f''(x_0)}{2!} \\ c_3 &= \frac{f'''(x_0)}{3!} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ c_n &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \end{aligned}$$

Por lo tanto [51]

$$\mathcal{P}_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Como:

$$\mathcal{R}_n(x) = f(x) - \mathcal{P}_n(x) \Longrightarrow f(x) \approxeq \mathcal{P}_n(x) - \mathcal{R}_n(x)$$

$$\therefore \quad f(x) \approxeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\mathcal{R}_n(x)}_{TC}$$

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}(\xi)(x-x_0)^{n+1}; \qquad x_0 < \xi < x$$

$$\textit{reemplazando } f(x) \approxeq \mathcal{P}_n(x) + \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}(\xi)(x-x_0)^{n+1}; \qquad x_0 < \xi < x$$

$$\textit{si} \quad x_0 = 0 \qquad f(x) \approxeq f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underbrace{\mathcal{R}_n(x)}_{TC}$$

O bien por el resto de Taylor (TC) $\xi = x_0 + \theta(x-x_0); \qquad 0 < \theta < 1$

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

[51] *Polinomio de Taylor correspondiente a la función* $f(x)$ *en* $x = x_0$

si $x_0 = 0$

$$\mathcal{R}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

4.2. *Fórmula de Taylor para Funciones de dos Variables*

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n+1$ *veces derivables en todo el intervalo* $\mathcal{I}$ *que contiene un punto* x_0*, entonces para cada* $x \in \mathcal{I}$, $\exists$ *un* z *entre* x_0 *y* x *tal que:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''}{2!}(x_0))(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^k}{k!}(x_0)(x - x_0)^k + \mathrm{r}\ (x)$$

con $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathrm{r}\ (x)}{|\ x - x_0\ |} = 0$ (1) *tienen esta propiedad*

El respo puede tener otras expresiones.

Nuestro propósito es obtener una expresión análoga para n-variables de modo tal que esta fórmula de Taylor dada por (1) *se obtenga como caso particular.*

En realidad ya conocemos una aproximación de primer orden:

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciable en el punto* x_0*, entonces:*

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + df(x_0)[x - x_0] \quad + \mathrm{r}\ (x, x_0) \\ \\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathrm{r}\ (x)}{\|x - x_0\|} = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x^i - x_0^i) + \mathrm{r}\ (x, x_0)$$

4.2.1. *Fórmula de Taylor de Primer Orden*

Sea $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A}$ *abierto y* f *diferenciable en* x_0.

$\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$

Prof. Mauricio A. LUGO

$$\begin{cases} f(x_0+\vec{h}) = f(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + \mathrm{r}_1\ (\vec{h}) \\ \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\mathrm{r}\ (x)}{\|x-x_0\|} = 0 \end{cases}$$

Fórmula de Taylor que conocemos hasta ahora.

4.2.2. *Fórmula de Taylor de Segundo Orden*

$f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

f *es una función de clase* $\mathcal{C}^3$ *en* $\boldsymbol{A}$

$\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$

para todo punto de la forma $\boldsymbol{x} = x_0 + \vec{h}$

$$\begin{cases} f(x_0+\vec{h}) = f(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + \dfrac{1}{2!}\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)h_i h_j + \mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h}) \\ \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h})}{\|x-x_0\|^2} = 0 \end{cases}$$

[52]

En la primera sumatoria sumamos sólo sobre el índice i. En cambio sobre la segunda sumatoria sumamos sobre los índices i y j, entonces tenemos n^2 *sumandos.*

Supongamos la aplicación:

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ / $g(t) = x_0 + th$; $\quad t \in [0,1]$ *entonces* $g^\circ f :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d\,f}{d\,t}(x_0+th) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)h_i$$

[52] *o equivalentemente* $\dfrac{\mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h})}{\|h\|^2} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

integrando ambos miembros entre 0 y 1

$$\int_0^1 \frac{d\,f}{d\,t}(x_0+th)\cdot dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)h_i\right)\cdot dt$$

$$f(x_0+th)\ \Big|_{t=0}^{t=1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)h_i\right)\cdot dt}_{(1)}$$

Integrando por partes (1) *y llamando*

$$\boldsymbol{u = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)\cdot h_i} \qquad d\ u = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0+th)h_i h_j\cdot dt$$

$$v=(t-1) \qquad \boldsymbol{d\ v = dt}$$

reemplazando en (1)

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+th)h_i\cdot(t-1)\Big|_{t=0}^{t=1} - \sum_{j=1}^{n}\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0+th)h_ih_j\cdot(t-1)\cdot dt\right]$$

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i\cdot(-1)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0+th)h_ih_j\cdot(1-t)\cdot dt\right]$$

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0+th)h_ih_j\cdot(1-t)\cdot dt}_{(2)}$$

(2) *es un resto de primer orden, resolviendo la integral definida, tenemos.*

$$\boldsymbol{u = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0+th)h_ih_j} \qquad du = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x_0+th)h_ih_jh_k\cdot dt$$

$$v = -\frac{(1-t)^2}{2} \qquad \boldsymbol{d\ v = (1-t)\cdot dt}$$

reemplazando en (2)

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i+\sum_{i,j=1}^{n}\left\{-\frac{\partial^2 f(x_0+h)}{\partial x_j\partial x_1}\left(-\frac{1}{2}\right)h_ih_j+\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f(x_0+h)}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}h_ih_jh_k(1-t)^2dt\right\}$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_0+h)}{\partial x_j\partial x_1}h_ih_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f(x_0+h)}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}h_ih_jh_k\,(1-t)^2dt$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_0+h)}{\partial x_j\partial x_1}h_ih_j+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^1\frac{\partial^3 f(x_0+h)}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}h_ih_jh_k(1-t)^2dt}_{\mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h})}$$

pero el resto $\mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h})$ *debe verificar la condición que hemos pedido:*

$$\frac{|\ \mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h})\ |}{\|\vec{h}\|^2}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

El integrando es una función continua de la variable t *y por lo tanto acotada en un entorno del punto* x_0*, es decir que existe un* M, N >0 *tal que los* $|\ h_i\ |,\quad i=1,2,\ldots n$*; son suficientemente pequeños como se comprobará a continuación:*

$$\underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^1 \underbrace{\left|\frac{\partial^3 f(x_0+h)}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}h_ih_jh_k\right|}_{\leq \mathsf{M}}\underbrace{\left|(1-t)^2\right|}_{\leq \mathsf{N}}\underbrace{\mid h_i\mid\mid h_j\mid\mid h_k\mid}_{nros.}dt}_{por\ estar\ acotada\ entre\ 0\ y\ 1} \leq \mathsf{MN}\mid h_i\mid\mid h_j\mid\mid h_k\mid$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_0+h)}{\partial x_j\partial x_1}h_ih_j+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{n}\mathsf{MN}\mid h_i\mid\mid h_j\mid\mid h_k\mid}_{(3)}$$

$$(3)=\underbrace{\frac{1}{2}\mathsf{MN}}_{C}\sum_{i,j,k=1}^{n}\mid h_i\mid\mid h_j\mid\mid h_k\mid = C\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\mid h_i\mid\sum_{j=1}^{n}\mid h_j\mid\sum_{k=1}^{n}\mid h_k\mid\right)=$$

$$=C\cdot\|\vec{h}\|_S^3 < C\cdot n\cdot\|\vec{h}\|^3$$

de este modo:

$$\mid \mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h})\mid \leq C\cdot n\cdot\|\vec{h}\|^3 \qquad \textit{dividiendo por} \quad \|\vec{h}\|^2$$

$$\frac{\mid \mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h})\mid}{\|\vec{h}\|^2}\leq C\cdot n\cdot\|\vec{h}\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

4.2.3. *Forma Explícita del Resto*

Para el resto [53] $\mathrm{r}_1\ (x_0,\vec{h})=\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_0+\vec{h})(1-t)h_ih_j\cdot dt$ *de donde:*

$$\mathrm{r}_1\ (x_0,\vec{h})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{p})h_ih_j$$

siendo $\boldsymbol{p}$ *un punto perteneciente al segmento* $[x_0,x_0+\vec{h}]$

Del mismo modo $\mathrm{r}_2\ (x_0,\vec{h})=\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^1\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x_0+\vec{h})\frac{(t-1)^2}{2}h_ih_jh_k\cdot dt$

así:

[53] (2)

$$\mathrm{r}_2\ (x_0, \vec{h}) = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p}) h_i h_j h_k$$

siendo $\boldsymbol{p}$ *un punto perteneciente al segmento* $[x_0, x_0 + \vec{h}]$

Desarrollo de Taylor de Tercer Orden

$$f(x_0 + \vec{h}) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} h_i h_j h_k + \mathrm{r}_3\ (x_0, \vec{h})$$

tal que:

$$\frac{\mathrm{r}_3\ (x_0, \vec{h})}{\|\vec{h}\|^3} \underset{\vec{h}\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donde:

$$\mathrm{r}_3\ (x_0, \vec{h}) = \frac{1}{4!}\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^4 f}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p}) h_i h_j h_k h_l$$

siendo $\boldsymbol{p}$ *un punto perteneciente al segmento* $[x_0, x_0 + \vec{h}]$ [54]

Ejemplo:

Calculando el desarrollo de Taylor de segundo orden para la función

$f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$ *en el punto* $\boldsymbol{p} = (0, 0)$; $\vec{h} = (h_1, h_2)$

$f(0, 0) = \operatorname{sen} 0 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + 2y)\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cos(x + 2y)\Big|_{(0,0)} = 2$$

[54] *La función* f *es de* $\mathcal{C}^4$ *en* $\boldsymbol{A}$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(0,0) = -\operatorname{sen}(x+2y)\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0) = -2\operatorname{sen}(x+2y)\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(0,0) = -2 \cdot 2\operatorname{sen}(x+2y)\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f(\boldsymbol{p}+\vec{h}) = f(h_1,h_2)$$

$$\begin{aligned} f(h_1,h_2) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x^2}(0,0)h_1^2 + 2\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0)h_1h_2 + \\ + \frac{\partial f}{\partial y^2}(0,0)h_2^2 + \mathrm{r}_2\ (\boldsymbol{p},\vec{h}) \end{aligned}$$

$$f(h_1,h_2) = h_1 + 2h_2 + \mathrm{r}_2\ (\boldsymbol{p},\vec{h})$$

$$\operatorname{sen}(h_1+2h_2) = h_1 + 2h_2 + \mathrm{r}_2\ (\boldsymbol{p},\vec{h})$$

5. *Unidad* N° *6*

5.1. *Función Implícita*

Supongamos tener en el plano una recta no vertical, es decir, una no paralela al eje y.

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; ax + by + c = 0, \quad b \neq 0\}$$

Si $(x_1, y_1) \in \mathcal{R}$, $\quad y_1 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$ *expresión explícita, o sea que se puede "despejar " y_1 en función de x_1.*

De este modo para cualquier punto $(x, y) \in \mathcal{R}$ se puede escribir y como función de x.

Sea $F(x, y) = ax + by + c, \quad b \neq 0; \quad \exists\; y = g(x) \;\; / \;\; F(x, g(y)) = 0$ [55]

Si hubiera un $b = 0$, entonces no es posible una $y = f(x)$ (recta paralela al eje y), pues a un valor de x le corresponden infinitos valores de y.

En este caso decimos que $f(x, y) = 0$ define "implícitamente" la función $y = g(x)$.

Además puede ocurrir que una expresión $F(x, y) = 0$ defina en el entorno de algún punto más de una función, con adecuadas condiciones.

***Ejemplo**:*

Supongamos tener :

$x^2 + y^2 = 1$	$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 - 1 = 0\}$
despejando y	*(con el agregado de la condición adicional de considerar el signo)*
$g_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$	$g_1(x) : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$
$g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$	$g_2(x) : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$

[55] *Análogamente se puede despejar x_1 en función de y_1*

Definida implícitamente por la expresión : $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Supongamos tener :

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + 2 = 0$$

No define nunca una función $y = f(x)$ *o* $x = f(y)$ *, pues:*

$$x^2 + y^2 = -2$$

Pero puede ocurrir que aún verificándose la igualdad, tampoco defina una función $y = f(x)$ *o* $x = f(y)$.

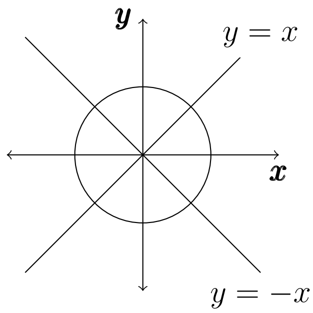
$F(x,y) = x^2 + y^2 = 0$ $(0,0)$ *es el único punto que verifica esta condición*

No existe la posibilidad que F defina $y = f(x)$ *o* $x = f(y)$ *porque es una relación que sólo cumple un punto.*

$$F(x,y) = x^2 - y^2$$

En un entorno de $(0,0)$ *no define nunca una función* $y = f(x)$ *ni* $x = f(y)$ *porque:*

En un $E_{(0,0)}$ *a cada x le corresponde dos valores de y*



- *La tangente en el punto no debe ser vertical*
- *Debe existir un punto en el cual se verifique la igualdad*
- *Debe existir la derivada de F y* $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ *(Tangente vertical)*

Teorema 9 *(de la función implícita)*
Consideraciones previas:

- *Condiciones de existencia, unicidad, continuidad y derivabilidad de una función definida implícitamente. (ξ definida implícitamente por la función $\Gamma(x,y)$)*

- *Se podrá calcular la derivada sin conocer las expresión explícita.*

Sea $f:\ \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A}$ *(abierto)*

$(x_0, y_0) \in \boldsymbol{A} \ / \quad f(x_0, y_0) = c \quad \wedge \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Entonces existe un rectángulo abierto $\mathcal{I} \times \mathcal{J} \subset \boldsymbol{A}$ *, con centro en el punto* (x_0, y_0) *de modo tal que:*

$f^{-1}(c) \cap (\mathcal{I} \times \mathcal{J})$ *es el gráfico de una función* $\xi :\ \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ *que si* f *es del clase* $\mathcal{C}^k$*, resulta también de* $\mathcal{C}^k$ *y :*

$$\xi'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \xi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}$$

Observaciones:

1. *El rectángulo* $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ *contiene a* (x_0, y_0) *quiere decir que* $x_0 \in \mathcal{I}, \quad y_0 \in \mathcal{J}$.

2. *Pedimos que* $\mathcal{I} \times \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \times \overline{\mathcal{J}} \subset \boldsymbol{A}$ *(incluimos los bordes de* $\mathcal{J}$*).*

3. *Decimos que* $f^{-1}(c) \cap (\mathcal{I} \times \mathcal{J})$ *es el gráfico de una función* $\xi :\ \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ *es decir para cada* $x \in \mathcal{I}$*, existe un único* $y \in \mathcal{J}$ *de modo tal que :*

   $f(x, \xi(x)) = c$

   $x \in \mathcal{I}, \quad \exists!\ y \in \mathcal{J}, \qquad f(x,\ \underbrace{\xi(x)}_{y}) = c, \qquad y = \xi(x).$

4. *En la demostración del teorema vamos a probar que existe el rectángulo* $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$*, pero nada nos va permitir determinar el tamaño de* $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$*.*

5. ξ *está definida **implícitamente** por* $f(x,y) = c$.

Demostración:

Suponemos que: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$

Como f *es de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* $\boldsymbol{A}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *es continua, entonces existe* ϵ *y* δ *positivos de modo tal que:*

$\mathcal{I} = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{I} = (y_0 - \epsilon,\ y_0 + \epsilon)$

de modo tal que: $\qquad$ $(x_0, y_0)\ \in \mathcal{I} \times \mathcal{J} \subset \boldsymbol{A}$

$\forall\ (x,y) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$*; para cada* $x \in \mathcal{I}$ *la función que a cada* y *le asigna el valor* $f(x,y)$ *es una función continua con derivadas positivas de modo tal que ella es estrictamente creciente y al verificarse que* $f(x,y) = c$, *se tendrá:*

$$f(x_0, y - \epsilon) < c \qquad y \qquad f(x_0, y_0 + \epsilon) > c$$

Como f *es de clase* $\mathcal{C}^k$, $f(x,y)$ *es continua en* $E_{(x_0,y_0)}$, *por lo tanto puede hacerse extensivo el razonamiento.*

Por hipótesis $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ *la función* f *es estrictamente creciente.*

Por el teorema del valor intermedio, para cada $x \in \mathcal{I}$, *existe un único* y *en función de* x, *que mostraremos,* $y = \xi(x)$ *de modo tal que:*

$$f(x, \xi(x)) = c$$

como $y \in \mathcal{I}$ *se tendrá que* $f^{-1}(c) \cap (\mathcal{I} \times \mathcal{J})$ *es el gráfico de la función* $\xi :\ \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$

Ahora vamos a probar la continuidad de la función $\xi\ :\ \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$, *para luego probar que es de clase* $\mathcal{C}^k$, *o sea, probaremos que para* $x \in \mathcal{I}$, *existe* $\xi'(x)$ *y es de clase* $\mathcal{C}^{k-1}$ *(entonces* ξ *es de clase* $\mathcal{C}^k$ *)*

$\kappa = \xi(x - h) - \xi(x)$ $\qquad\qquad$ κ *incremento de la función* ξ

trabajamos en el rectángulo $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$

$$\xi\ (x + h) = \xi(x) + \kappa$$

considerando el valor de f *en* $x + h$

$$\underbrace{f(x+h,\xi(x)+\kappa)}_{c} - f(x,\xi(x)) \quad = \quad 0 \quad \textit{incremento de } f$$

porque no salimos del rectángulos $\mathcal{I}\times\mathcal{J}$*, en la cual* $f(x,\xi(x)) = c$

Aplicando el teorema del valor medio, $\theta_1,\ \theta_2\ \in (0,1)$ *de modo tal que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 h,\ \xi(x)+h)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x+h,\ \xi(x)+\theta_2 k)\kappa = 0$$

restando y sumando $f(x+h,\ \xi(x))$*, para aplicar el valor medio*

$$\frac{\kappa}{h} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1 h,\ \xi(x)+h)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x+h,\ \xi(x)+\theta_2 k)} \qquad (1)$$

κ *depende de* h*, porque* $\kappa = \xi(x+k) - \xi(x)$.

Vamos a probar la continuidad de la función ξ *en el punto* x_0 *de modo tal que se verifique* $\xi(x_0) = y_0$.

Para eso debemos probar que:

$$\lim_{x\to x_0} \xi(x) = y_0 \iff \forall\epsilon > 0,\ \ \exists\delta > 0\ \ /\ \mid x - x_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid \xi(x) - \xi(x_0) \mid < \epsilon$$

Para eso la construcción de los intervalos $\mathcal{I}$ *y* $\mathcal{J}$ *resultarán útiles a la vez que servirán para mostrar que* δ *dependiente de* ϵ

Ya se mostró la existencia de una función de x *que notamos* $y = \xi(x)$*, para para eso la construcción de los cada* x *del intervalo* $\mathcal{I}$ *de modo tal que:*

$f(x,\xi(x)) = c$ *en el rectángulo* $\mathcal{I}\times\mathcal{J}$.

Donde y es el conjunto de los x *tal que:* $\mathcal{I} = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$;
$\mathcal{I} = (y_0 - \epsilon,\ y_0 + \epsilon)$ *o equivalentemente:*

$y = \xi(x)$; $\quad y_0 = \xi(x_0)$; *resulta* $\qquad \mid x - x_0 \mid \Longrightarrow \mid \xi(x) - \xi(x_0) \mid < \epsilon$

Es decir que la función ξ *es continua en* x_0 *y verifica* $y_0 = \xi(x_0)$
Por todo el razonamiento anterior

$\forall\ (x,y):\ (x,\ \xi(x))$ resulta ξ función continua, luego
$\kappa = \xi(x+h) - \xi(x)\ \ \kappa \to 0\ \ si\ \ h \to 0$ [56].

tomando límite (1)

$$\lim_{h\to 0}\ \frac{\kappa}{h} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ \xi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ \xi(x))}$$

el segundo miembro existe por que es el cociente de dos derivadas, el denominador no se anula por que estamos en el rectángulo.

como el segundo miembro existe, el primero es:

$$\lim_{h\to 0}\ \frac{\xi(x+h) - \xi(x)}{h} = \xi'(x)$$

$$\xi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial}(x,\ \xi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ \xi(x))}$$

Vamos a probar que la función y ξ es de clase $\mathcal{C}^k$, si la función f lo es

Supongamos primeros que $\mathcal{C}^1$.

Sus derivadas son continuas ($\mathcal{C}^0$), luego ξ' es el cociente de dos funciones continuas, cuyo denominador no se anula, por lo tanto es continua, entonces ξ es de clase $\mathcal{C}^1$.

$$f^{-1}(c) = \{(x,y) \in \boldsymbol{A}\ / f(x,y) = c\}$$

Teorema 10

Sea $f:\ \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}$ Abierto, $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, f es de clase $\mathcal{C}^k$.

$(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *(marcaremos)* $(x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$

$P_0 = (x_0, y_0) \in \boldsymbol{A}$

[56] *por definición de continuidad*

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) \neq 0$ *entonces:*

$\exists\ B_{(x_0,\delta)}, \quad \mathcal{J} = (y_0+\epsilon,\ y_0-\epsilon)\ \ /\ B\times\mathcal{J} \subset B\times\overline{\mathcal{J}} \subset \boldsymbol{A}$

y si $f(x,y)=c$ *en un entorno de* $P_0 \quad \Longrightarrow\ f^{-1}(c)\cap(B\times\mathcal{J})$

es el gráfico de una función $\xi:\ B_{(x_0,\delta)} \to \mathcal{J}\ \ /$

$$\forall x\in B:\ \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}(x,y) \qquad \textit{siendo} \qquad y=\xi(x)$$

Si f *es de clase* $\mathcal{C}^k$ $(k>1)$ ξ *es de clase* $\mathcal{C}^k$.

Observaciones:

1. *Decimos que* $\xi:\ B_{(x_0,\ \delta)} \longrightarrow \mathcal{I}$ *es una función definida implícitamente por la ecuación* $f(x,y)=c$.
2. *Decir que* $f^{-1}(c)\ \cap\ (B\times\mathcal{J})$ *es el gráfico de una función* $\xi:\ B_{(x_0,\ \delta)} \longrightarrow \mathcal{J}$ *significa que:* $\forall\ x\in B_{(x_0,\ \delta)},\ \exists!\ y\in\mathcal{J}\ \ /$ $f(x,y)=f(x,\ \xi(x))=c$ *, y en el punto* x_0; $\xi(x_0)=y_0$.

Demostración:

Como por hipótesis se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)\neq 0$, *suponemos que* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)>0$, *como* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *es continua ya que la función es de clase* $\mathcal{C}^k$, *existe un* $\delta>0$ *y* $\epsilon>0\ \ /\ B_{(x_0,\delta)},\ \ \mathcal{J}=(y_0-\epsilon,\ y_0+\epsilon)$ *son tales que* $B\times\mathcal{J}\subset\boldsymbol{A}$ *como la función en el punto* $(x_0,y_0)=c$ *y la* $\dfrac{\partial f}{\partial y}>0$ *en* $B\times\mathcal{J}$*; la función que a cada* $x\in B$ *y a cada* $y\in\mathcal{J}$ *hace corresponder el valor* $f(x,y)$ *es estrictamente creciente en el intervalo* $\mathcal{J}$ *por lo tanto, como* $f(x,y)=c$ *y la* $\dfrac{\partial\ f}{\partial\ y}(x,y)\ >\ 0$ [57].

En $B\times\mathcal{J}$*; la función que a cada* x *de* B, *a cada* y *de* $\mathcal{J}$ *le hace corresponder el valor* $f(x,y)$ *es estrictamente creciente en el intervalo* $\mathcal{J}$, *por lo*

[57] *incremento parcial de la función* f *en la dirección* $\vec{e}_i$

Prof. Mauricio A. LUGO

tanto $f(x,y)=c$ [58].

$$f(x_0,y_0)=c$$

$$f(x_0,y_0-\epsilon)<c$$

$$f(x_0,y_0+\epsilon)>c$$

Y por la continuidad de la función f *y de la* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en el punto* P_0 *se tendrá además que la función* f [59], *será estrictamente creciente,*
$\forall\ x\ \in\ B,\ \exists!\ y\ \in \mathcal{J}\ \ /\ f(x,y)=c.$

Luego:

$y=\xi(x)$, *es decir que existe una función:*
$\xi:\ B_{(x_0,\ \delta)}\ \longrightarrow\ \mathcal{J}$, *única tal que:*

si $f(x,y)=c$

$f^{-1}(c)\ \cup\ (B\times\mathcal{J})$ *es la gráfica de* ξ. [60]

La función ξ *es continua en* B [61] *y la misma admite derivadas parciales, así para cada* $x\ \in\ B(x_0,\delta)$ *vamos a calcular la* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\quad i=1,2,\ldots,n$ *y se* e_i *un vector de la base canónica de* $\mathbb{R}^n$, *formamos el incremento* κ. [62]

$$\kappa=\kappa(t)=\xi(x+te_i)-\xi(x) \qquad \textit{incremento parcial}$$

$$\xi(x+te_i)=\xi(x)+k$$

$$f(x,\xi(x))=f(x+te_i,\xi(x+te_i))=f(x+te_i,\xi(x)+\kappa)=c$$

$f(x+te_i,\xi(x)+\kappa)-f(x,\xi(x))=0$ *incremento parcial de* f *en la dirección de* e_i

tomando t *de modo tal que el punto* $x+t\vec{e_i}\in B_{(x_0,\delta)}$, *aplicando el teorema*

[58] *es estrictamente creciente sobre la variable* y
[59] *mirada como función de variable* y
[60] *Demostramos existencia y unicidad*
[61] *Demostración Análoga*
[62] *Depende de* t

del valor medio:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta_1 t\vec{e}_i, \xi(x)+\kappa)\cdot t + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x)+\theta_2 k)\cdot k = 0 \quad \theta_1, \theta_2 \in (0,1)$$

restando, sumando y agrupando:

$$\frac{k}{t} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta_1 t\vec{e}_i, \xi(x)+\kappa)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x)+\theta_2 k)}$$

Por ser ξ una función continua, cuando $t \to 0, \quad k \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \kappa = \lim_{t\to 0} \kappa(t) = 0$$

luego:

$$\lim_{t\to 0} \frac{k}{t} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}$$

como el segundo miembro existe porque $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ y existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ entonces existe el primero, que es límite del incremento en la dirección de $\vec{e}_i$ [63]

$$\lim_{t\to 0} \frac{k}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\xi(x+t\vec{e}_i) - \xi(x)}{t} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)$$

Si suponemos que f es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces las derivadas parciales son funciones continuas. [64]

***Ejemplo**:*

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ *gráfica en "xy" de $\mathcal{C}_{(0,1)}$*

   $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$

[63] *derivada parcial de ξrespecto de x_i en el punto*
[64] *Razonamiento Análogo*

Prof. Mauricio A. LUGO

Calculando:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0$, *entonces en un* $\mathcal{E}_{(1,1)}$ *cuya amplitud no sabemos, existe una única función* $y = \xi(x)$ *continua y derivable cuya derivada* $\dfrac{df}{dx}$ *se puede resolver aplicando el teorema:*

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)} = -\frac{2}{2} = -1$$

y también para todos los puntos de un $E_{(1,1)}$ *se puede calcular:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

si se hubiera " despejado" $y = \xi(x) = \sqrt{1-x^2}$ *(arco superior) y hubiéramos calculado directamente* y' *es la derivada del segundo miembro*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

Calculando:

$$\frac{dy}{dx}(1,1) = -\frac{x}{y}(1,1) = -1$$

La función f *define implícitamente a la función* $y = \xi(x)$ *(Localmente en el punto donde se cumple las condiciones del teorema).*

6. *Unidad* N° *7*

6.1. *Relación de Orden*

Dado un conjunto X*, cualquiera, una relación* $\mathcal{R}$ *definida en* X *está dada por un subconjunto del producto cartesiano* $X \times X$*.*

Diremos que $\mathcal{R}$ *es una relación de orden si es antisimétrica y transitiva*

Antisimétrica $\quad (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow x = y$

Transitiva $\quad (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$

Si además $\mathcal{R}$ *es reflexiva,* $(x, x) \in \mathcal{R}$ *, el orden es amplio o no estricto.*

En general vamos a marcar una relación de orden con el símbolo " $\leq$ *".*

$(X, \ \leq)$ *el conjunto* X *con la relación* $\mathcal{R}$ $(\leq)$ *se dice un conjunto ordenado.*

Si $x, y \in X$ *tal que se cumple que* $x \leq y$ *o* $y \leq x$*, diremos que dos elementos* x *e* y *son comparables entre si.*

Cuando el orden definido en X *es tal que todo par de elementos de* X *son comparables, es decir que el orden definido en* X *es un orden total (lineal) y el conjunto* X *se define totalmente ordenado.*

Por ejemplo: $(\mathbb{R}, \ \leq)$

$\mathbb{R}$ *es el conjunto totalmente ordenado, porque dado dos números se los puede comparar.*

6.2. *Extremos de Conjuntos*

Sea $(X, \ \leq)$ *un conjunto totalmente ordenado y sea* $\boldsymbol{A} \subset X$*.*

Un elemento $k \in X$ *se dice que es cota superior del conjunto* $\boldsymbol{A}$ *si* $x \leq k, \quad \forall x \in \boldsymbol{A}$*.*

Dicho de otro modo, k es cota superior del conjunto $\boldsymbol{A}$ *cuando k no es sucedido en el orden por ningún elemento del conjunto* $\boldsymbol{A}$.

Del mismo modo, un elemento $k' \in X$, se dirá que es una cota inferior del conjunto $\boldsymbol{A}$ si $k' \leq x, \quad \forall x \in \boldsymbol{A}$, es decir:

k' no es precedido en el orden por ningún elemento del conjunto $\boldsymbol{A}$.

Un elemento "$\boldsymbol{a}$" $\in X$ diremos que es ***supremo*** *del conjunto $\boldsymbol{A}$, si ocurre:*

1. *$\boldsymbol{a}$ es cota superior del conjunto $\boldsymbol{A}$*
2. *$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{a}'$ donde $\boldsymbol{a}'$ es cota superior del conjunto $\boldsymbol{A}$*

Dicho de otro modo, el supremos de un conjunto $\boldsymbol{A}$ es la menor de las cotas superiores.

Indicareos $\boldsymbol{a} = \ sup(\overline{A})$

Del mismo modo un elemento $\boldsymbol{b} \in X$ es ***ínfimo*** *de $\boldsymbol{A}$ si*

1. *$\boldsymbol{b}$ es cota inferior del conjunto $\boldsymbol{A}$*
2. *$\boldsymbol{b}' \leq \boldsymbol{b}$ donde $\boldsymbol{b}'$ es cota inferior del conjunto $\boldsymbol{A}$*

Es decir que el ínfimo de un conjunto es la mayor de las cotas inferiores

1 *Indicaremos* $\boldsymbol{b} = \ inf(\overline{A})$

Vamos a demostrar que ***el supremo de un conjunto es único***

Sea $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ los supremos del conjunto $\boldsymbol{A}$, por ser $\boldsymbol{a}$ el supremos y ser $\boldsymbol{a}'$ cota superior del conjunto $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{a}'$$

y recíprocamente por ser supremo y ser $\boldsymbol{a}$ cota superior del conjunto $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{a}' \leq \boldsymbol{a}$$

Luego $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, entonces existe un único supremo

Axioma del Supremo

Todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo de $\mathbb{R}$ (subconjunto del conjunto de los números reales).

Máximo

Si $a = sup(A) \in \boldsymbol{A}$ pertenece al conjunto $\boldsymbol{A}$, llamaremos $\boldsymbol{a}$ al máximo del conjunto.

Mínimo

Si $\boldsymbol{b} = inf(A) \in \boldsymbol{A}$llamamos al $\boldsymbol{b}$ mínimo del conjunto.

6.3. *Extremos de Funciones*

Sea $f:\ \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n,$ abierto y conexo; $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$.

Diremos que la función f tiene en el punto $x = \boldsymbol{a}$ un máximo relativo [65] si existe un $r > 0$ tal que:

$$\forall y \in B_{(\boldsymbol{a},r)}:\ f(y) \leq f(\boldsymbol{a}) \qquad (f(y) < f(\boldsymbol{a}))$$

Análogamente decimos que la función f tiene en $x = \boldsymbol{a}$ un mínimo relativo [66] si existe un $r > 0$ tal que:

$$\forall y \in B_{(\boldsymbol{a},r)}:\ f(y) \geq f(\boldsymbol{a}) \qquad (f(x) > f(\boldsymbol{a}))$$

Definición:

Diremos que la función f tiene un extremo absoluto en $x = a$

$$\forall x \in \boldsymbol{A}:\ f(x) \leq f(\boldsymbol{a}) \qquad (f(x) < f(\boldsymbol{a}))$$

[67]

La palabra local o relativo en la definición anteriores hacen referencia a que el valor que toma la función en $x = \boldsymbol{a}$ se la compara con los valores que toma la función en un entorno de $x = \boldsymbol{a}$. Mientras la palabra absoluto indica que estamos comparando la función en $x = \boldsymbol{a}$ con los valores que toma la función en los restantes puntos del dominio.

Una función puede tener varios extremos locales y además puede tomar valores mayores que un máximo local o menor que un mínimo local.

[65] *máximo estricto relativo*
[66] *mínimo relativo estricto*
[67] *Máximo Absoluto*

6.3.1. *Condición Necesaria para la Existencia de Extremos*

[68]

Teorema 11
Sea $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$, *abierto y conexo;* $\quad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$

La condición necesaria pero no suficiente para la existencia de un extremos en $x =$ *es que:*

$$df(\boldsymbol{a}) = 0$$

Demostración:

$df(\boldsymbol{a}) = 0$ *implica que todos las derivadas parciales de la función* $x = \boldsymbol{a}$ *sea cero*

$$df(\boldsymbol{a}) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0 \qquad \forall i$$

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

considerando fijas $\quad a_1, a_2, \ldots, a_n \quad \Longrightarrow f(x) = f(x_1, a_2, \ldots, a_n) = f^*(x_1)$

para que $f^*(x_1)$ *admite extremos en* $x_1 = a_1$ *debe ser :*

$$\frac{df^*}{dx_1}(a_1) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$$

Del mismo modo, sean $a_1, x_2, \ldots, a_n \Longrightarrow f(x) = f(a_1, x_2, \ldots, a_n) = f^{**}(x_2)$

$$\frac{df^{**}}{dx_2}(a_2) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sea $\quad a_1, a_2, \ldots, a_n \Longrightarrow f(x) = f(a_1, a_2, \ldots, x_n) = f^*(x_n)$

$$\frac{df^*}{dx_n}(a_n) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

como $df(x) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) v_i$

[68] *condición necesaria pero no suficiente*

se tiene que:

$df(\boldsymbol{a}) = 0$ *por lo demostrado*

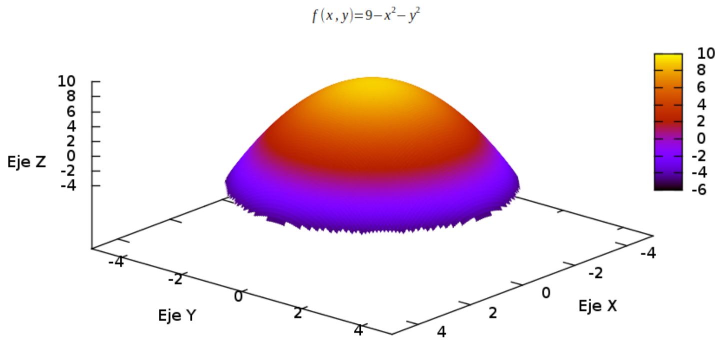
pues:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0$$

Ejemplo:

1. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = 9 - x^2 - y$

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$ [69]

   En el punto $(0,0)$ *es el único punto en el cual se anulan simultaneamente las derivadas parciales, por lo tanto en él la función puede tomar un máximo o un mínimo*

   A un punto como este lo llamamos "Punto Crítico "

   Comparados:

   $$\forall (x,y) \neq (0,0) \ : \ f(x,y) = 9 - x^2 - y^2 = 9 - (x^2 + y^2) < 9 = f(0,0)$$

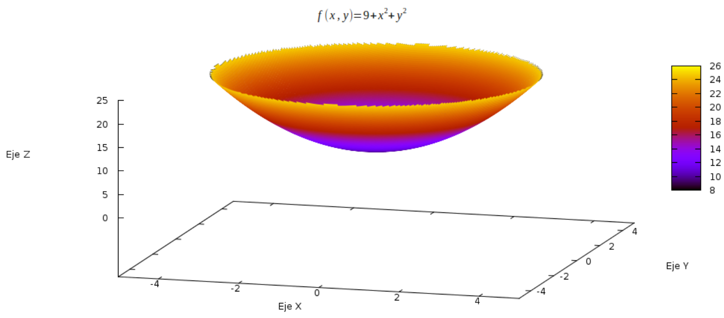
   o sea que: $\forall (x,y) \neq (0,0) \ : \ f(x,y) < f(0,0)$

   $\therefore$ *La función tiene en* $(0,0)$ *un máximo absoluto.*

2. $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x,y) = 9 + x^2 + y^2$

[69] *Se anulan simultaneamente en* $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$ [70]



Comparando:

$$\forall (x,y) \neq (0,0) \;:\; f(x,y) = 9 + (x^2 + y^2) > 9 = f(0,0)$$

3. $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

[71]

Nos acercamos al origen por los punto de la forma $(x,0)$ *así* $f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0)$

Nos acercamos al origen por los punto de la forma $(0,y)$ *así* $f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0)$

En $(0,0)$ *la función no tiene máximo ni mínimo (no tiene un extremos local, aún cuando en él se anulan simultaneamente las derivadas parciales)*

Para hallar los extremos de una función vamos a proceder del modo siguiente

1. *Se resolverá un sistema de n ecuaciones, dada por:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

[70] $(0,0)$ *es el único punto crítico*
[71] $(0,0)$ *único punto crítico*

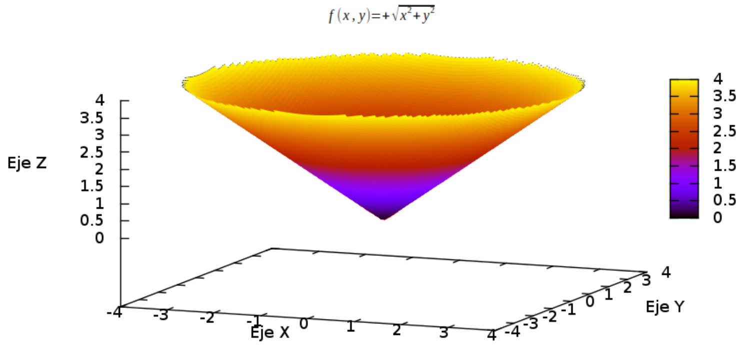
Obtenemos un número finito o infinito de raíces a las que indicaremos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *son siempre* $n-$*uplas, a las que denominaremos puntos críticos o extremantes, por que en ellos puede haber un extremo local o un extremo absoluto.*
El examen directo de la función en los puntos de un entorno de los punto críticos indicará si la función admite un mínimo o un mánimo local.

2. *Puede ocurrir que la función* $f(x)$ *tenga un extremo relativo en* $x = \boldsymbol{a}$ *y que no sea derivable en* $x = \boldsymbol{a}$*, entonces en ese caso no se puede aplicar el razonamiento anterior, sino que hay que estudiar el comportamiento de la función.*

***Ejemplo**:*

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

En $(0,0)$ *tiene un mínimo absoluto, sin embargo la función en el origen no es derivable.*



En efecto :

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2+0}-0}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \begin{cases} 1 & si \quad h>0 \\ -1 & si \quad h<0 \end{cases}$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 1 \\ \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = -1 \end{array}\right\} \text{La función no es derivable en el origen respecto a } x$$

Si no acercamos por lo puntos de la forma $(0,h)$ *se comprueba que la función no es derivable respecto de* y

Análisis II

6.3.2. *Condición Suficiente para la Existencia de Extremos*

El desarrollo lo hacemos para $n = 2$.

Definición:

Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto y conexo $\boldsymbol{A}$ llamado Hessiano y lo notamos con $\mathcal{H}$ al siguiente determinante funcional. [72]

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} (x, y) = \frac{\partial f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \right)^2 \qquad \forall (x, y) \in \boldsymbol{A}$$

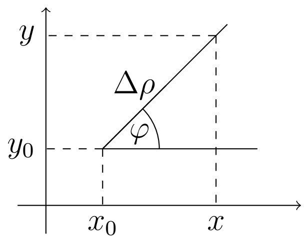
Considerando $P_0(x_0, y_0)$; sea un vector $h \in \mathbb{R}^2$; $\vec{v} = (\Delta x, \Delta y)$
$P(x, y) = (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ *punto cualquiera*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

Si existe un $r > 0$ / $0 < \Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < r$ y $\Delta f < 0$

entonces la función f tiene en el punto $P_0(x_0, y_0)$ un máximo local

Si existe un $r > 0$ /
$0 < \Delta\rho < r$ *y* $\Delta f > 0$
entonces la función tiene un mínimo local en $P_0(x_0, y_0)$



Teorema 12
Sea $f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\boldsymbol{A}$ abierto y conexo; $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^2$, $P_0(x_0, y_0)$ un punto fijo y sea f de clase $\mathcal{C}^3$ [73] *en todo $\boldsymbol{A}$ y suponemos que P_0 es un punto crítico, entonces en P_0 ocurre:*

1. *f tiene en P_0 máximo local si $\mathcal{H}(x_0, y_0) > 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$*

[72] *Cunado lo evaluamos en el punto (x, y) se transforma en un determinante*
[73] *con $\mathcal{C}^2$ alcanza*

2. *f tiene en P_0 máximo local si* $\mathcal{H}(x_0, y_0) > 0$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$

3. *f no tiene extremo local sino un punto de ensilladura si* $\mathcal{H}(x_0, y_0) < 0$

4. *f puede o no tener extremos local si el* $\mathcal{H}(x_0, y_0) = 0$

Demostración:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

desarrollaremos la función f en un entorno de P_0 por la fórmula de Taylor de primer orden.

Tomamos el vector $\vec{h} = (\Delta x, \Delta y)$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \mathrm{r}_1\ (P_0, \vec{h}) \qquad (2)$$

escribimos el resto [74]

$$\mathrm{r}_1\ (P_0, \vec{h}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\eta, \mu) \cdot \Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\eta, \mu) \cdot \Delta x \Delta y + \frac{\partial f}{\partial y^2}(\eta, \mu) \cdot \Delta y^2\right] \qquad (3)$$

las derivadas son continuas por ser f de clase $\mathcal{C}^3$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\eta, \mu) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \xi_1(\Delta x, \Delta y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\eta, \mu) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) + \xi_2(\Delta x, \Delta y) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta, \mu) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + \xi_3(\Delta x, \Delta y)
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

[75] *reemplazando (4) en (3) y esto en (2)*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\Delta y^2 + \Gamma_0(\Delta x, \Delta y)\right]$$

[74] *como la derivada parciales son continuas se puede escribir como la función más un infinitésimo*

[75] $\xi_i(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\Delta\rho \to 0]{} 0 \qquad i = 1, 2, 3$

Prof. Mauricio A. LUGO

$$\Gamma_0 = \xi_i \Delta x^2 + 2\xi_2 \Delta x \Delta y + \xi_3 \Delta y^2 \longrightarrow 0 \qquad \Gamma_0 \ \textit{depende de} \ \ \xi_i$$

llamando:

$$\mathcal{A} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0); \qquad \mathcal{B} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0); \qquad \mathcal{C} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$\Delta f = \frac{1}{2} \cdot \left[\mathcal{A}\Delta x^2 + 2\mathcal{B}\Delta x \Delta y + \mathcal{C}\Delta y^2 + \Gamma_0(\Delta x, \Delta y)\right] \qquad (5)$$

$\Delta x = \Delta\rho \cdot \cos\varphi$

$\Delta x = \Delta\rho \cdot \operatorname{sen}\varphi$

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left[\mathcal{A}(\Delta\rho)^2 \cos^2\varphi + 2\mathcal{B}(\Delta\rho)^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + \mathcal{C}(\Delta\rho)^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \Gamma_0(\Delta x, \Delta y)\right] \qquad (6)$$

Suponemos que $\mathcal{A} \neq 0$, entonces multiplicamos y dividimos por $\mathcal{A}$ y sacando factor común $(\Delta\rho)^2$

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{\mathcal{A}\cos^2\varphi + 2\mathcal{B}\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + \mathcal{C}\operatorname{sen}^2\varphi}{\mathcal{A}} + \Gamma_0(\Delta x, \Delta y)\right]$$

Sumando y restando $\dfrac{\mathcal{B}^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{\mathcal{A}}$

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{\mathcal{A}\cos^2\varphi + 2\mathcal{A}\,\mathcal{B}\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + \mathcal{B}\operatorname{sen}^2\varphi}{\mathcal{A}} + \frac{(\mathcal{A}\,\mathcal{C} - \mathcal{B}^2)}{\mathcal{A}}\operatorname{sen}^2\varphi + \Gamma_0(\Delta x, \Delta y)\right]$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{(\mathcal{A}\cos^2\varphi + \mathcal{B}\operatorname{sen}^2\varphi)^2}{\mathcal{A}} + \frac{\mathcal{H}(x_0, y_0)}{\mathcal{A}}\operatorname{sen}^2\varphi + \Gamma_0(\Delta x, \Delta y)\right] \qquad (7)$$

1. *Supongamos que $\mathcal{H}(x_0, y_0) > 0 \quad \wedge \quad \mathcal{A} < 0$, entonces (7) se tendrá la suma de dos cantidades negativas que no se anulan simultaneamente, por que para que ello suceda debe ser, $\operatorname{sen}\varphi = 0$ y $\cos\varphi = 0$ y eso no ocurre porque $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, entonces la función resultante es la suma de dos cantidades negativas no nulas y una función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$, para poner de manifiesto su signo, la indicaremos con $-m^2\varphi$ [76] por el teorema de Bolzano $(*)$ existe $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ de modo tal que $-m^2\varphi_0$ sea el máximo de la función $-m^2\varphi$*

$$-m^2(\varphi_0) = \textit{máx}\{-m(\varphi)\} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

[76] *función de φ*

Luego:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left\{-m^2(\varphi)+\Gamma_0\right\} \leq \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left\{-m^2(\varphi_0)+\Gamma_0\right\} \qquad (8)$$

Γ_0 *es un infinitésimo cuando* $\Delta\rho \longrightarrow 0$, *luego* $\exists r > 0$ *tal que:*
$\Delta\rho < r \quad \Longrightarrow \quad \Gamma_0 < \dfrac{m^2(\varphi_0)}{2}$ [77]

reemplazando en (8) *se tendrá*

$$\Delta\rho < \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left\{\frac{m^2(\varphi_0)}{2}\right\} < 0$$

luego f *en* P_0 *tiene un* ***máximo local***

2. *Supongamos que* $\mathcal{H}(x_0, y_0) > 0 \quad \wedge \quad \mathcal{A} > 0$ *entonces en* (7) *se tendrá razonando de un modo totalmente análogo al anterior:*

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\{m^2(\varphi)+\Gamma_0\} > \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\{\underbrace{m^2(\varphi_0)}_{mínimo}+\Gamma_0\}$$

como $\Gamma \to 0$ *cuando* $\Delta\rho \to 0$, $\exists r > 0 \ / \ \Delta\rho < r \Longrightarrow \Gamma_0 > -\dfrac{m^2(\varphi_0)}{2}$
así:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left\{\frac{m^2(\varphi_0)}{2}\right\} > 0$$

Luego f *tiene en* P_0 *un* ***mínimo local*** [78]

3. *Supongamos que* $\mathcal{H} > 0 \quad \wedge \quad \mathcal{A} > 0$ *supongamos que en* (7), *es* $\varphi = 0$, *resulta:*

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left\{\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{A}}+\Gamma_0\right\} = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\{\mathcal{A}+\Gamma_0\}$$

como $\Gamma_0 \to 0$ *cuando* $\Delta\rho \to 0$, $\exists r > 0 \ / \ \Delta\rho < r \Rightarrow \Gamma_0 > -\dfrac{\mathcal{A}}{2}$
entonces

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left\{\mathcal{A}-\frac{\mathcal{A}}{2}\right\} = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\frac{\mathcal{A}}{2} > 0$$

$\Delta f > 0$, *es decir que en la dirección* $\varphi = 0$ *el incremento de la función es positivo.*

[77] *Lo hago menor que una cantidad que me convenga*
[78] (∗) *Teorema de Bolzano*
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua en todo el intervalo* $[a,b] \Rightarrow \exists p, q \in [a,b] \ / f(p) = máx\{f(x)\} \wedge f(p) = mín\{f(x)\}; \quad \forall x \in [a,b]$

Sea ahora la dirección $\varphi \ / \ \cot\varphi = -\dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ *en* (7) *tendremos:*

$$\frac{(\mathcal{A}\cos\varphi + \mathcal{B}\operatorname{sen}\varphi)^2}{\mathcal{A}} + \frac{\mathcal{H}(x_0,y_0)}{\mathcal{A}}\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\left[\mathcal{A}\left(-\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}\right)+\mathcal{B}\right]}{\mathcal{A}} + \frac{\mathcal{H}(x_0,y_0)}{\mathcal{A}}\operatorname{sen}^2\varphi$$
$$= \frac{\mathcal{H}(x_0,y_0)}{\mathcal{A}}\operatorname{sen}^2\varphi$$

Luego:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{\mathcal{H}(x_0,y_0)}{\mathcal{A}}\operatorname{sen}^2\varphi + \Gamma_0\right]$$

haciendo un razonamiento totalmente análogo al anterior se tendrá que:

$$\Delta f < 0$$

Por lo tanto la función no tiene un extremos sino un punto que llamaremos de ensilladura, no tiene extremos por que para cada punto muy próximos a P_0 *la función toma distintos signos.*

4. *Supongamos* $\mathcal{H}(x_0,y_0) = 0$

   En este caso se puede presentar cualquier posibilidad, entonces se hace necesario estudiar el comportamiento de la función con el auxilio de otros métodos, por ejemplo el desarrollo de Taylor de segundo orden, o comparar el valor de la función en distintos puntos de un entorno de P_0 *con* $f(P_0)$

Ejemplos

1. $f(x,y) = 9 + x^2 + y^2, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

   a) *encontrar los puntos críticos*

   $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

   igualando a cero el sistema $(0,0)$ *punto crítico.*

   b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0; \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

   Evaluando las derivadas parciales en el punto crítico [79]

   $$\mathcal{H}(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

   $\mathcal{H}(0,0) > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0 \Longrightarrow f(x,y)$ *tiene en* $(0,0)$ *un mínimo.*

2. $f(x,y) = 3x^2 - xy^2; \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

   a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 - y^2 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2xy = 0 \end{cases}$$

   $9x^2 - y^2 = (3x - y) \cdot (3x - y) = 0; \qquad y = \pm 3x$ *anula a* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

   $(0,0)$ *punto crítico, se anulas ambas derivadas simultaneamente*

   b) *Calculando el* $\mathcal{H}$

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x$$

   $$\mathcal{H}(0,0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[79] *en este caso son constantes*

c) $\mathcal{H}(0,0) = 0$

Estudiamos lo que sucede en un entorno del punto crítico, nos movemos por el eje x*, comparando la función en* $(0,0)$; $(x,0)$

$f(x,0) = 3x^3$

$$\left.\begin{array}{l} Si\ (x,0);\quad x>0;\quad f(x,0)>0 \\ \\ Si\ (x,0);\quad x<0\quad f(x,0)>0 \end{array}\right\} \textit{para ptos. próximos al origen } f \textit{ cambia de signo}$$

Sería un equivalente al punto de inflexión; en el plano tangente corta a la superficie. El punto $(0,0)$ *es un punto de ensilladura*

3. $f(x,y) = x^2y^2; \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

a) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 = 0 \end{array}\right. \qquad \mathbb{S} = \{(x,y)\ /\ x=0 \ \ \vee \ \ y=0\}$$

Analizando que sucede en $(0,0)$*, es un punto crítico.*

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4xy; \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x^2$

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c) *¿Qué sucede con la función en un entorno de este punto crítico?*

$f(0,0) = 0$

$\forall (x,y): \quad f(x,y) = x^2y^2 \quad (fuera\ del\ origen)$

$$f(x,y) = x^2y^2 \geq 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0) \ \exists \ \textit{mínimo local}$$

Estudiar el incremento de la función es equivalente a estudiar el diferencial segundo de la función.

Prof. Mauricio A. LUGO

6.4. Extremos Condicionados

Supongamos el siguiente problema:

Se quiere determinar un polígono de área máxima de entre todos los polígonos que tienen perímetro constante c; por ejemplo hallar un rectángulo de área máxima de entre todos los rectángulos de perímetro igual a 100 unidades.

$$\begin{cases} \mathcal{A} = x \cdot y \\ \\ 2(x+y) = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A} = x \cdot y \\ \\ (x+y) = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A} = x \cdot y \\ \\ y = 50 - x \end{cases} \qquad \mathcal{A} = x(50-x)$$

Habrá que extremar el área como función de una variable x (como si fuera una función de una vadiable independiente).

Entonces con este ejemplo se ve que extremar una función de dos variables x e y se redujo a encontrar el máximo de una función de una variable independiente, gracias a la relación que ligaba las variables x e y que permitió despejar y en función de x, entonces lo que se hace para extremar una función de dos variables es buscar un método que permita, cuando la función que liga x con y sea tal que una de ellas se escriba como función de la otra, extremar funciones de dos variables.

Por ejemplo en el caso anterior:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = x \cdot y \\ \\ x + y = 50 \end{cases}$$

En general lo que se tiene es:

La primera es una cierta $z = f(x,y)$ y la segunda $g(x,y) = 0$, en general se tiene este sistema.

Análisis II

De modo tal que se tratará de encontrar los extremos de la función: $f(x,y)$ *con la* ***condición*** $g(x,y) = 0$*, es decir que se tratará de encontrar los extremos de la función* $f(x,y)$ *restingida a la curva del plano dada por* $g(x,y) = 0$

Se trata de extremar $f\Big|_l \;; \quad l = \{(x,y): \quad g(x,y) = 0\}$

Geométricamente entonces el planteo responderá a lo siguiente:

Sea $z = f(x,y)$ *una función diferenciable de* x *y de* y*; variables que están relacionadas o ligadas entre sí por la función* $g(x,y) = 0$*, a la que suponemos también diferenciable.*
Si se verifica para los puntos de un cierto entorno que $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ *se podrá considerar* $y = y(x)$ *en este entorno, entonces* z *será* $z = f(x, y(x)) = z^*(x)$.

Luego se buscará extremar la función z^* *mediante la información que se tenga sobre* $f(x,y)$ *y* $g(x,y)$ *sin necesidad de conocer la expresión explícita de la función* $y = y(x)$.

Entonces geométricamente el problema se reduce a extremar $z^*(x)$ *sobre la curva* l.

Si sobre los puntos de la curva l *se cumple las condiciones que aseguren la existencia, unicidad, derivabilidad y diferenciabilidad de la función* $y = y(x)$*, entonces la condición* ***necesaria*** *pero no suficiente para la existencia de extremos de la función* $z^*(x)$ *es que la derivada respecto de* x *sea igual a cero.*

$$\frac{dz^*}{dx} = 0$$

habiéndose obtenido $y = y(x)$ *a partir de* $g(x,y) = 0$

$$\frac{dz^*}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))$$

función compuesta que depende de una variable x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = c$$

es decir:

$$(1)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0 \end{cases}$$

y la otra función que nos dará información es g

multiplicando (1) por dx

$$(2)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial x}dy = 0 \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}dy = 0 \end{cases}$$

entonces despejando $\dfrac{dy}{dx}$ en (1) o dy en (2) se tendrá

$$(3)\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema (3) [80] da los puntos críticos o extremos en los cuales pueden existir extremos:

***Observaciones**:*

1. *Si las condiciones que se impusieron no se verifican pueden existir extremos singulares.*

2. *dx es la diferencial de la variable independiente x, es decir que se podrá representar el incremento de la variable independiente x.*
   Mientras que dy es el diferencial de la función $y = y(x)$ [81]

3. *El sistema (3) da las condiciones necesarias pero no suficientes para la existencia de extremos; para estudiar la condición suficiente habrá que estudiar el signo de la diferencial segunda ($d^2 f$) de la función f que dará el signo del incremento de la función.*

[80] *sistema de dos ecuaciones*
[81] *diferencial funcional*

Análisis II

6.5. *Método de los Multiplicadores de Lagrange*

El método consiste en la introducción de nuevos parámetros llamados multiplicadores de Lagrange, reduciendo los cálculos significativamente y eliminando la necesidad de distinguir entre variables independientes y variables dependientes.

Supongamos que buscamos extremar la función $z = f(x, y)$ *con la condición* $g(x, y) = 0$

Siendo f *y* g *diferenciables y* $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$

Si se hubiera supuesto que $\dfrac{\partial g}{\partial x} \neq 0$*, entonces se podría haber encontrado* $x = x(y)$ *y repetir todo el proceso obteniendo* $z^*(y)$ [82]
multiplicando por λ *la segunda ecuación del sistema* (2) *y sumándola a la primera del mismo sistema resulta:*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right) dy = 0 \qquad (4)$$

que (4) *sea cero, no significa que ambos sumando deban ser simultaneamente cero, pues que* dx *y* dy *no son independientes* [83] *sino que habiendo calculado un valor* λ *de modo que se anule el coeficiente de* dy *se tiene lo siguiente:*

$$(4') \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(4′) *con el agregado de la condición nos da:*

$$(5) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\[2ex] g(x, y) = 0 \end{cases}$$

[82] *Vamos a introducir un nuevo parámetro*
[83] *dy depende de x*

El sistema (5) permite encontrar los puntos críticos y los valores de λ correspondiente.

Lagrange observó que la ecuación del sistema (5) correspondientes a buscar los extremos de la función $F(x,y):\ f(x,y)+\lambda g(x,y)$ considerando λ como constante y x e y como variables independientes además de estudiar el signo de la $d^2f(x,y)$ es equivalente a estudiar el signo de la $d^2F(x,y)$ puesto que sobre la condición $g(x,y)=0, \qquad F(x,y)=f(x,y)$

$$\textit{enotonces}: \qquad d^2F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^2 F$$

es decir que el cálculo de d^2F se efectúa considerando en F, x e y como variables independientes [84].

***Observaciones**:*

1. *Si $\frac{\partial g}{\partial y}=0$ no puede despejarse $y=y(x)$; por lo tanto no se puede calcular λ, de modo tal que en (4) se anule el coeficiente de dy, entonces si $\frac{\partial g}{\partial x}\neq 0$ podrá hacerse $x=x(y)$ y seguir el método intercambiando x con y.*

2. *En los puntos singulares de la curva g, es decir en aquellos puntos en los cuales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ se anulan simultáneamente, no puede encontrarse un sistema equivalente (5), ni aún intercambiando x con y, entonces el método no es aplicable.*

***Ejemplo**:*

Hallar los extremos de la función $z=f(x,y)=x\cdot y$ sobre $x^2+y^2=1$. Es decir: queremos extremar sobre la circunferencia $\mathcal{C}_{(0,1)}$ de la función $x\cdot y$

$$\begin{cases} z = x\cdot y \\ \\ g(x,y)=x^2+y^2-1=0 \end{cases} \qquad \textit{extremamos } f(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1}$$

[84] *en definitiva hay que resolver (5)*

$F(x,y) = x \cdot y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda y \\ \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

igualando a cero:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 & \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 & \lambda = -\dfrac{x}{2y} \end{array}\right\} (2) \qquad \begin{array}{l} 2x^2 = 2y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 = y^2 (3) \end{array}$$

reemplazando (3) *en la condición*

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ g(x,y) &= x^2 + x^2 - 1 = 0 \\ &= 2x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Para cada valor de x tendremos dos valores de y, entonces vamos a formar cuatro puntos:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

en estos puntos estudiaremos el signo de $d^2 f(x,y)$

Teniendo en cuenta que dx y dy son dependientes, estando ligadas por la relación $d(x^2 + y^2 - 1) = 0$

$$Sgn(d^2 f) = Sgn(d^2 F)$$

Calculando $d^2 F$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$$

la d^2f sobre la condición

$$d^2f = d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

$$= 2\lambda dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2$$

quedó expresado el d^2f en término de λ, eligiendo P_1

$$\lambda = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \qquad en \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$d^2f = d^2F = 2\left(-\frac{1}{2}\right)dx^2 + 2dxdy + 2\left(-\frac{1}{2}\right)dy^2$$

$$= -(dx^2 - 2dxdy + dy^2) = -(dx - dy)^2$$

calculando el dy de la condición: $d(x^2 + y^2 - 1) = 0$, derivando directamente.

$$2xdx + 2ydy = 0 \Longrightarrow dy = -\frac{x}{y}dx \quad en\ P_1\ ,\ dy = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -dx \quad en\ P_1$$

$$d^2f = d^2F = -(dx + dy)^2 = -4dx^2$$

el signo del $d^2f = -1$

$$Sgn\ d^2f = Sgn\ d^2F = -1$$

como estamos en un punto crítico, este signo del incremento de la función

$$Sgn\ \Delta f = Sgn\ d^2f = -1$$

entonces en P_1 tiene un ***máximo local***

7. *Unidad* N° *8*

7.1. *Integrales Múltiples*

Cuando se está en presencia de una función $f \;\; / \; f : \boldsymbol{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n$
la definición de integral plantea en principio dos tipos de dificultades:

1. *La posible estructura* [85] *compleja* [86] *del conjunto sobre el cual se quiere integrar.*

2. *La discontinuidad que puede presentar la función.*

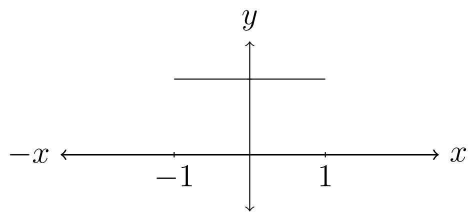
Cuando n=1 [87] *la primera dificultad se resolvía considerando el conjunto* $\boldsymbol{A}$ *como un intervalo* $[a, b]$ [88] *y para solucionar la segunda se pedía que la función presentará en* $[a, b]$ *a lo sumo un número finito de discontinuidades con salto finito en esos puntos.*

Cuando $n = 2$ *la cuestión ya varía fundamentalmente.*

***Por Ejemplo**:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |\, x \,| < 1 \\ \\ -1 & si \quad |\, x \,| > 1 \end{cases}$$

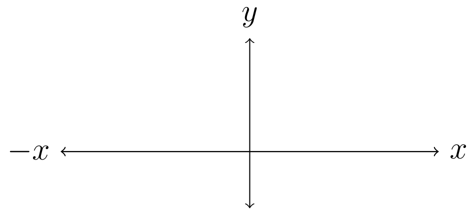
si estamos en $n = 1$



1 *y* -1 *son puntos de discontinuidad*

[85] *conformación*
[86] *complicada*
[87] *función real de variable real*
[88] *integramos sobre un intervalo cerrado*

si estamos en $n = 2$



existen infinitos puntos de discontinuidad

Para resolver este tipo de dificultades vamos a considerar en $\mathbb{R}^n$ conjunto que llamares rectángulos, de la siguiente forma:

$$\mathcal{A} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

Donde cada intervalo $[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i] \in \mathbb{R}$

Marcamos una partición del intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, es un conjunto de subintervalos que llamaremos $\mathcal{P} = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$

$\boldsymbol{a} = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \boldsymbol{b}$

$$I_1 = [t_0, t_1]$$

$$I_2 = [t_1, t_1]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_n = [t_{n-1}, t_n]$$

Una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo $\boldsymbol{A}$ es una familia $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n)$ donde cada $\mathcal{P}_i$ es una partición de $[\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i]$.

Es decir que se tiene una familia de rectángulos de $\mathbb{R}^n$ que cubre el rectángulo

A.

$$\mathcal{P}_1 = (I_1^1, I_1^2, \ldots, I_1^{h_1})$$

$$\mathcal{P}_2 = (I_2^1, I_2^2, \ldots, I_2^{h_2})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{P}_n = (I_1^1, I_1^2, \ldots, I_n^{h_n})$$

[89]

de modo tal que un rectángulo de la partición $\mathcal{P}$ se formará de la siguiente manera

$$I_1^{j_1} \times I_2^{j_2} \times \ldots \times I_n^{j_n}$$

$$1 \leq j_1 \leq h_1$$

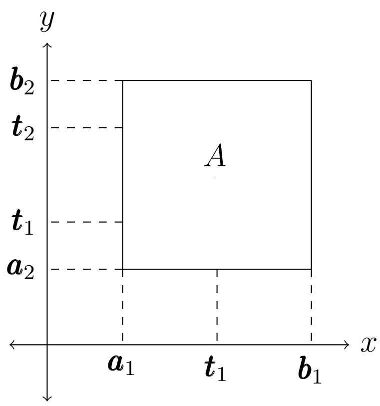
$$1 \leq j_2 \leq h_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 \leq j_n \leq h_n$$

[90]

Por lo tanto en la partición tendremos $h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_n$ rectángulos



$\mathcal{A} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$
$\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$

$\mathcal{P}_1$ *es una partición de* $[a_1, b_1]$
$\mathcal{P}_2$ *es una partición de* $[a_2, b_2]$

[89] *h depende de i*
[90] *cantidad que divide a los subintervalos en rectángulos*

$\mathcal{P}_1 = \{I_1^1, I_1^2\}$

$\boldsymbol{a}_1 = t_0 < t_1 < t_2 = \boldsymbol{b}_1$
$I_1^1 = [t_0, t_1]$
$I_1^2 = [t_1, t_2]$
para $h_1 = 2$

$\mathcal{P}_2 = \{I_2^1, I_2^2, I_2^3\}$

$\boldsymbol{a}_1 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = \boldsymbol{b}_1$
$I_2^1 = [t_0, t_1]$
$I_2^2 = [t_1, t_2]$
$I_2^3 = [t_1, t_2]$
para $h_2 = 3$

sucesivamente haciendo la subdivición del rectángulo $\mathcal{A}$ sería:

$$R_{j_1,j_2,\ldots,j_n} = I_1^{j_1} \times I_2^{j_2} \times \ldots \times I_n^{j_n}$$

Dado el rectángulo $\mathcal{A}$, definimos el volumen $\mathcal{A}$ y lo notamos $vol(\mathcal{A}) = v(\mathcal{A})$ al producto:

$$v(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

producto de la longitudes de sus lados.

Dada una partición $\mathcal{P}$, llamaremos norma de la partición a la longitud de la mayor diagonal del mayor rectángulo que integra $\mathcal{P}$, indicando a la misma como $\|\mathcal{P}\|$.

Dada una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo $\mathcal{A}$ diremos que otra partición $\mathcal{P}'$ es mas fina que $\mathcal{P}$ [91] si cada rectángulo de $\mathcal{P}$ puede escribirse como la unión de rectángulos de $\mathcal{P}'$

Si el rectángulo $\mathcal{R}$ de la partición $\mathcal{P}$ se escribe como unión de rectángulos de $\mathcal{R}'$ de la partición $\mathcal{P}'$ se tendrá que:

$$v(\mathcal{R}) = \sum v(\mathcal{R}')$$

Dada una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo $\mathcal{A}$, es posible encontrar particiones arbitrariamente finas de modo que se verifique que el volumen de uno de los dos rectángulos:

$$v(\mathcal{R}_{j_1,j_2,\ldots,j_n}) < \xi; \qquad \xi > 0$$

Para obtener esto basta considerar particiones arbitrariamente finas sobre el intervalo $[a_i, b_i]$

[91] *lo indicaremos $\mathcal{P} \leq \mathcal{P}'$*

Sea $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, *siendo* f *una función continua y acotada sobre el rectángulo* $\mathcal{A}$.

Diremos que es acotada si $\exists\ M > 0 \ \ / \ \left|f(x)\right| \leq M, \quad \forall x \in \mathcal{A}$.

Supongamos tener una función $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, *donde* $\mathcal{A}$ *es un rectángulo en* $\mathbb{R}^n$.

Para el rectángulo $\mathcal{A}$ *se toma una partición* $\mathcal{P}$ *para cada rectángulo* $\mathcal{R}$ *de la partición* $\mathcal{P}$, *definimos los siguientes números:*

$$m_{\mathcal{R}}(f) = \acute{\imath}nf\{f(x), \quad x \in \mathcal{R}\} \qquad (1)$$

$$M_{\mathcal{R}}(f) = sup\{f(x), \quad x \in \mathcal{R}\} \qquad (2)$$

(1) *y* (2) *existe porque* $\mathcal{A} \neq \emptyset$ *y* $f(x)$ *es acotada.*

Definimos la siguiente suma de Riemann

$s(f, \mathcal{P}) = \sum\limits_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}} m_{\mathcal{R}}(f) v(\mathcal{R})$ *Suma inferior de Riemann*

$S(f, \mathcal{P}) = \sum\limits_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}} M_{\mathcal{R}}(f) v(\mathcal{R})$ *Suma superior de Riemann*

En general se tiene que $s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P})$

$$Si \quad \mathcal{P} \leq \mathcal{P}' \quad (\mathcal{P}' \ mas\ fina\ que\ \mathcal{P})$$

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P})$$

Es decir que la sucesión de sumas "s", es una sucesión creciente a medida que se refina la partición, mientras que la sucesión S *se hace decreciente a medida que se refina la partición.*

definimos la integral de Darboux y vamos a indicarlo como:

$$\underline{\int_{\mathcal{A}}} f \ d\mathcal{A} = sup\ (s(f, \mathcal{P}))$$

$$\overline{\int_{\mathcal{A}}} f \ d\mathcal{A} = \acute{\imath}nf\ (s(f, \mathcal{P}))$$

de la definición de la integral de Darboux resulta:

$$\underline{\int_{\mathcal{A}}} f \; d\mathcal{A} \;\; \leq \;\; \overline{\int_{\mathcal{A}}} f \; d\mathcal{A}$$

Una función $f:\ \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *se dice que* $\mathcal{R}-$ *integrable si :*

$$\underline{\int_{\mathcal{A}}} f \; d\mathcal{A} \;\; = \;\; \overline{\int_{\mathcal{A}}} f \; d\mathcal{A}$$

cuando esto ocurre vamos a indicar:

$$\int\limits_{\mathcal{A}} f(x)\ dx = \int\limits_{\mathcal{R}} \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \ dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Teorema 13 (1) *Condición de Integrabilidad*
$\overset{\circ}{X} \subset \mathbb{R}^n$ *y* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* X, *entonces la función* f *es* $\mathcal{R}-$ *integrable.*

Sea $\mathcal{P}$ *una partición del rectángulo* X *y sea* $\xi > 0$ *de modo tal que para todo rectángulo* $\mathcal{R}$ *de la partición* $\mathcal{P}$ *se tendrá el número:*

$$M_{\mathcal{R}}(f) - m_{\mathcal{R}}(f) < \frac{\xi}{v(\mathcal{R})}$$

multiplicando m.a.m por $v(\mathcal{R})$*:*

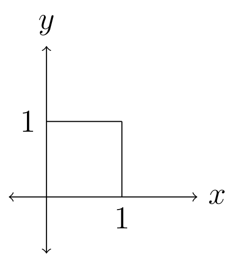
$$M_{\mathcal{R}}(f) \cdot v(\mathcal{R}) - m_{\mathcal{R}} \cdot v(\mathcal{R}) < \xi$$

sumando sobre todos los rectángulos $\mathcal{R}$ *de la aplicación*

$$\sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{P}} \left[M_{\mathcal{R}}(f) \cdot v(\mathcal{R}) - m_{\mathcal{R}} \cdot v(\mathcal{R}) \right] = S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \xi$$

Ejemplo*: de una función no integrable en un rectángulo*

$f:\ \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \mathcal{A} = [0,1] \times [0,1]$



$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x \text{ es racional} \\ \\ 1 & si \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera del rectángulo $\mathcal{A}$ y de este modo formando las sumas de Riemann

$$m_{\mathcal{R}}(f) = ínf\{f(x), \quad x \in \mathcal{R}\} = 0$$

$$M_{\mathcal{R}}(f) = sup\{f(x), \quad x \in \mathcal{R}\} = 1$$

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{P}} m_{\mathcal{R}} v(\mathcal{R}) = 0$$

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{P}} M_{\mathcal{R}} v(\mathcal{R}) = \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{P}} v(\mathcal{R}) = v(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = 1$$

como $S(f,\mathcal{P}) = s(f,\mathcal{P}) = 1$, entonces ***no es integrable****, por que la función, porque es constantemente 1* [92].

f es NO $\mathcal{R}-$ integrable

Ejemplo *de la función integrable*

$$m_{\mathcal{R}}(f) = c$$

$$M_{\mathcal{R}}(f) = c$$

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{P}} m_{\mathcal{R}}(f) v(\mathcal{R}) \\ &= \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{P}} c \cdot v(\mathcal{R}) = c \cdot \sum_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}} v(\mathcal{R}) \\ &= c \cdot v(\mathcal{A}) = c \cdot s = c \end{aligned}$$

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{\mathcal{R}\in\mathcal{P}} M_{\mathcal{R}}(f) \cdot v(\mathcal{R}) = c$$

$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = 0; \quad \xi > 0 \Rightarrow$ *f es $\mathcal{R}-$ integrable sobre el rectángulo $\mathcal{A}$*

(2) *si f y g son dos funciones integrables sobre el rectángulo $\mathcal{A}$*

$$\int_{\mathcal{A}} (f+g) = \int_{\mathcal{A}} f + \int_{\mathcal{A}} g$$

[92] *no verifica la condición*

(3) *Si* $\lambda \in \mathbb{R} \implies \displaystyle\int_{\mathcal{A}} \lambda f = \lambda \int_{\mathcal{A}} f$

(4) *Si* $f \leq g, \quad \forall x \in \mathcal{A} \implies \displaystyle\int_{\mathcal{A}} f \leq \int_{\mathcal{A}} g$

(1), (2), (3), (4) *propiedades de las integrales*

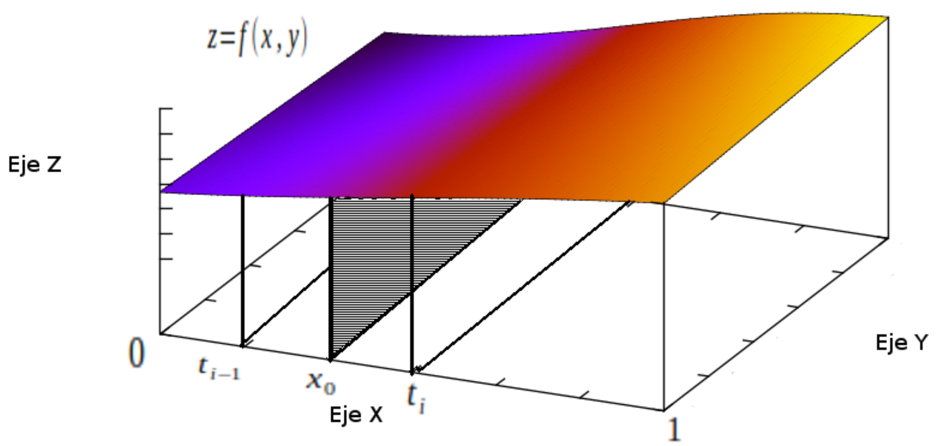
7.2. Método de Cálculo de Integrales Múltiples por Medio de Integrales Sucesivas (Iteradas)

Sea X *un rectángulo en* $\mathbb{R}^n$*, veremos que la integral de una función* $\mathcal{R}-$*integrable sobre el rectángulo* X *se reduce el cálculo de integrales definidas sobre* $\mathbb{R}$

Sea $X = [0,1] \times [0,1]$

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, continua y positiva*

Sea $\mathcal{P}$ *una partición de* X *del modo siguiente:* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ *partición del intervalo* $[0,1]$ *sobre el eje* x*, de modo tal que se tenga una partición del rectángulo* $\mathcal{R}$ *dada por los siguientes rectángulos* $[t_{i-1}, t_i] \times [0,1]$



tomando un punto fijo x_0 *entre* t_{i-1} *y* t_i *(*$x_0 \in [t_{i-1}, t_i]$ *), como* x_0 *es fijo, entonces:*

$$f(x_0, y) = f_{x_0}(y) \quad \textit{(depende solo de } y\textit{)}$$

Si queremos calcular el área que está debajo de $f(x,y)$

El área que está por debajo de $f_{x_0}(y)$ y encima de $\{x_0\} \times [0,1]$

$$\int_0^1 f_{x_0}(y)\ dy$$

Si esta integral existe $\forall x_0 \in [t_{i-1}, t_i]$ se tendrá una función

$$F(x) = \int_0^1 f_x(y)\ dy$$

Si se quiere calcular el volumen de la forma que está por debajo de la gráfica de la función $f(x,y)$ y por encima del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ hacemos:

$$[t_i - t_{i-1}] \int_0^1 f_x\ dy \quad \approxeq \quad [t_i - t_{i-1}] \int_0^1 f(x,y)\ dy$$

Si queremos el volumen que está por debajo de $f(x,y)$, sobre el rectángulo X $\ (\mathcal{R}:\ [0,1] \times [0,1])$ se tendrá que hacer:

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \int_0^1 f(x,y)\ dy$$

$\displaystyle\int_X f$ *integral de la función sobre el rectángulo X*

$$\int_X f \quad \approxeq \quad \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \int_0^1 f(x,y)\ dy$$

Cuando la norma de la partición adoptada tiende a 0 $\ (n \to \infty)$ se tendrá que el segundo miembro no es mas que:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}_{def.\ de\ int.\ definida} \quad F(x) = \int_0^1 F(x) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ dy\ dx$$

Si se hubiera hecho otra partición $\mathcal{P}$ de modo de dividir el segmento $[0,1]$ ubicado sobre el otro eje, si se hubiera hecho un razonamiento totalmente análogo, se hubiera llegado a que la integral sobre X

$$\int_X f\ dx \quad \approxeq \quad \sum_{i=1}^{n} (\tau_i - \tau_{i-1}) \underbrace{\int_0^1 f_{\mathcal{Y}}(x) dx}_{\varphi(\mathcal{Y})}$$

De modo que tomando límite cuando la norma de la partición tiende a 0, en el segundo miembro se tendrá :

$$\int_0^1 \varphi(\mathcal{Y})\ dy$$

$$\therefore \quad \int_X f\ dy = \int_0^1 F(x)\ dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dy \right)\ dx$$

$$\int_X f\ dx = \int_0^1 \varphi(\mathcal{Y})\ dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dx \right)\ dy$$

$\mathbb{R}^n$:
$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]; \quad d\mathcal{A}$ $(diferencial\ de\ área)$

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)\ d\mathcal{A} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots\ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x, \ldots, x_n)$$

7.3. *Teorema de Fubini*

Esto está justificado porque es posible hacer el cambio de orden de integración

Sea $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R};$ $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d];$ f *es continua, entonces:*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx = \int_{\mathcal{R}} f(x,y)\ d\mathcal{A} = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy$$

Demostración:
Vamos a probar que :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx \ = \int_{\mathcal{R}} f(x,y)\ d\mathcal{A}$$

Sea $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d$, *una partición de intervalo* $[c, d]$ *en partes iguales para cada* $x \in [c, d]$ *se define la función:*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \quad = \quad \int_c^d f_X(y)\, dy$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathcal{Y}_k}^{\mathcal{Y}_{k+1}} f(x, y)\, dy \qquad (1)$$

usando el teorema del valor medio del cálculo integral:

$$\int_{\mathcal{Y}_k}^{\mathcal{Y}_{k+1}} f(x, y)\, dy = f(x, \overline{\mathcal{Y}_k}(x))(\mathcal{Y}_{k+1} - \mathcal{Y}_k) \qquad (2)$$

$$\mathcal{Y}_k < \overline{\mathcal{Y}_k}(x) < \mathcal{Y}_{k+1} \qquad \textit{depende de } x, k \textit{ y } n$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, \overline{\mathcal{Y}_k}(x))(\mathcal{Y}_{k+1}, \mathcal{Y}_k) \qquad (3)$$

Por la definición de integral de una variable independiente como límite de la suma de Riemman se tiene

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \qquad (4)$$

$$\int_a^b F(x)\, dx = \lim_{x \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(\mathcal{P}_j)(x_{j+1} - x_j) \qquad (5)$$

$$x_j < \mathcal{P}_j < x_{j+1} \qquad (j \textit{ coordenada de } x)$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \qquad (\textit{es una partición del } [a, b] \textit{ en } n \textit{ partes})$$

llamando:

$C_{jk} = (\mathcal{P}_j, \overline{\mathcal{Y}_k}(\mathcal{P}_j)) \in \mathcal{R}_{jk} \quad (6)$

($\mathcal{R}_{jk}$ rectángulo de la partición $\mathcal{P}$ del rectángulo $\mathcal{R}$ que se obtiene de considerar la partición hechas sobre $[a,b]$ y $[c,d]$)

entonces sustituyendo (6) *en* (5)*:*

$$\int_a^b F(x)\ dx = \lim_{x\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(C_{jk})(x_{j+1} - x_j)$$

$$F(\mathcal{P}_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(C_{jk})(\mathcal{Y}_{k+1} - \mathcal{Y}_k)$$

entonces:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_a^b F(x)\ dx = \qquad \text{por } (5)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(\mathcal{P}_j)(x_{j+1} - x_j) = \qquad \text{por } (3) \text{ para } x = \mathcal{P}_j$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathcal{P}_j, \overline{\mathcal{Y}_k}(\mathcal{P}_j)) \cdot (\mathcal{Y}_{k+1} - \mathcal{Y}_k) \cdot (x_{j+1} - x_j)$$

$$= \int_{\mathcal{R}} f(x,y)\ d\mathcal{A}$$

luego:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx \ = \ \int_{\mathcal{R}} f(x,y)\ d\mathcal{A}$$

con un razonamiento análogo al anterior se prueba que:

$$\int_{\mathcal{R}} f(x,y)\ d\mathcal{A} = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$

Prof. Mauricio A. LUGO

Observaciones:

La $\int\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)\ d\mathcal{A}$*, se escribe frecuentemente como* $\iint\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dx\ dy$*, en esta expresión dx dy no indica un determinado orden de integración*

$$\int\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)\ d\mathcal{A} = \iint\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)\ dx\ dy$$

7.4. *Integración Sobre un Recinto Simple*

Sea X *un rectángulo en* $\mathbb{R}^n$ *y* $f:\ X \to \mathbb{R}$ *continua, con* $X = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

se puede demostrar que:

$$\int\limits_{\mathcal{R}} f(x)\ d\mathcal{A} = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x)\ dx_n dx_{n-1} \cdot \ldots \cdot d_1 = n!\ (posibilidades)$$

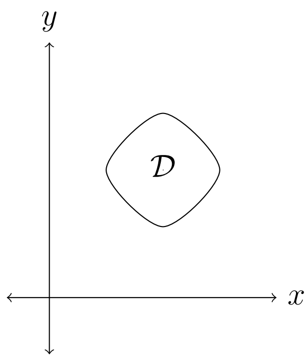
[93]

7.5. *Integral Doble Sobre una Región Cualquiera del Plano*

Sea $\mathcal{D}$ *una región cualquiera que está encerrada por curvas que son el gráfico de una función continua*

Sea $f:\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

Se quiere calcular la integral sobre $\mathcal{D}$



[93] *Combinaciones posibles*

Tomando un rectángulo auxiliar $\mathcal{R}$ *que incluya a* $\mathcal{D}$ *y definiendo una función auxiliar:*

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \quad (x,y) \in \mathcal{D} \\ \\ 0 & si \quad (x,y) \in \mathcal{R} - \mathcal{D} \end{cases}$$

f^* *es una función integrable sobre un rectángulo* $\mathcal{R}$*, y por la definición, la integral:*

$$\int_{\mathcal{R}} f^*(x,y)\, d\mathcal{R} = \int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy$$

ya que:

$$\int_{\mathcal{R}} f^*(x,y)\, d\mathcal{R} = \int_{\mathcal{D}} f^*(x,y)\, d\mathcal{R} + \int_{\mathcal{R}-\mathcal{D}} f^*(x,y)\, d\mathcal{R}$$

$$= \int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, d\mathcal{R}$$

[94]

por la forma en que se definió f^**, integral es independiente del rectángulo auxiliar que se tomó ya que siempre es fuera de* $\mathcal{D}$*,* $f^* = 0$

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, d\mathcal{R} = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy$$

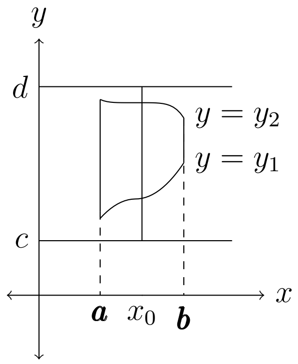
[95]

[94] *La integral del primer término es independiente del camino que elijamos*
[95] *No significa dx dy ningún orden de integración*

7.6. Cálculo de la Integral Doble

7.6.1. Primer Caso

Sea una región como la siguiente:



$\mathcal{D}$ *Dominio de Integración*

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ a \leq x \leq b; \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

$y_1(x)$, $y_2(x)$, *gráfico de la función continua en* $[a, b]$.

Para integrar buscamos el rectángulo auxiliar :

$c \ < \ y_1(x) \ \leq \ y \ \leq y_2(x) \ d \quad \Longrightarrow \quad$ *nuestro rectángulo auxiliar es:*

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ a \leq x \leq b \ , \ \ c < y_1(x) \leq y \leq < d\}$$

Considerando la función auxiliar:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & si \quad (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0 & si \quad (x, y) \in \mathcal{R} - \mathcal{D} \end{cases} \qquad\qquad f^* \ : \ \ \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$

tomando x_0 *fijo entre* ***a*** *y* ***b***

calculamos el área sobre $\mathcal{R}$

$$\int_{\mathcal{R}} f^* \ (x, y) \ dx \cdot y$$

restringiendo f^* *a* (x_0, y) [96]

[96] *en* $f^*(x_0, y)$ *podemos calcular*

$$\int_{c}^{d} f^*(x_0, y) \cdot dy = \int_{c}^{y_1(x_0)} f^*(x_0, y) \cdot dy + \int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f^*(x_0, y) \cdot dy + \int_{y_2(x_0)}^{d} f^*(x_0, y) \cdot dy =$$

$$= 0 + \int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f^*(x_0, y) \cdot dy + 0$$

Ésta integral se hizo manteniendo fijo a x_0 entre ***a*** *y* ***b****, si este proceso se repite para cada x entre* ***a*** *y* ***b*** *se tendrá:*

$$\int_{c}^{d} f^*(x, y) \cdot dy = \int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f^*(x, y) \cdot dy = \mathsf{F}(x) \qquad (1)$$

$$\iint_{\mathcal{R}} f^*(x, y) \cdot dxdy = \int_{a}^{b} \overbrace{\int_{c}^{d} f^*(x, y) \cdot dydx}^{\mathsf{F}(x)}$$

$$= \int_{a}^{b} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \cdot dy \right] dx \qquad (2)$$

De (2) y (3) se concluye por Fubini:

$$\int_{\mathcal{R}} f^*(x, y)\, d\mathcal{A} = \int_{a}^{b} \left[\int_{c}^{d} f^*(x, y) \cdot dy \right] dx$$

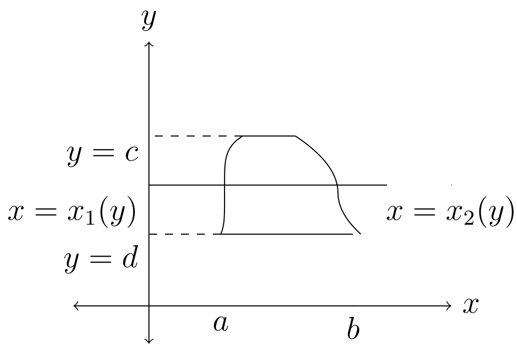
$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dxdy = \int_{a}^{b} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \cdot dy \right] dx$$

[97]

Primero se integró respecto de la variable cuyos extremos de variación eran funcionales y la última se realizó respecto de la variable que varia respecto de extremos fijos. [98]

7.6.2. *Segundo Caso*

Sea la región:



x_1, x_2, *funciones continuas de la variable* y.

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1(y) \leq x \leq x_2(y); \quad c \leq y \leq d\}$$

Por una construcción análoga al primer caso

En el rectángulo auxiliar:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a < x_1(y) \leq x \leq x_2(y) < b; \quad c \leq y \leq d\}$$

considerando la función auxiliar:

$$g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & si \quad (x, y) \in \mathcal{D} \\ \\ 0 & si \quad (x, y) \in \mathcal{R} - \mathcal{D} \end{cases}$$

para un y fijo tal que $c < y_0 < d$

$g(x, y_0)$ *depende sólo de* x*, por lo tanto integrando respecto de* x*:*

[97] *primera fórmula de integración*
[98] *para que el resultado es un número.*

$$\int_{a}^{b} g(x,y_0)\cdot dx \;=\; \int_{a}^{x=x_1(y_0)} g(x,y_0)\cdot dx + \int_{x_1(y_0)}^{x_2(y_0)} g(x,y_0)\cdot dx + \int_{x_2(y_0)}^{b} g(x,y_0)\cdot dx \;=$$

$$= \int_{x_1(y_0)}^{x_2(y_0)} f(x,y_0)\cdot dx$$

si este proceso se realiza para todo y tal que $c \;<\; y \;<\; d$

$$\int_{a}^{b} g(x,y) \;=\; \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\cdot dx$$ [99]

$\therefore$ *se puede calcular:*

$$\int_{c}^{d}\left[\int_{a}^{b} g(x,y)\;dx\right]\cdot dy \;=\; \int_{c}^{d}\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\;dx\right]\cdot dy$$

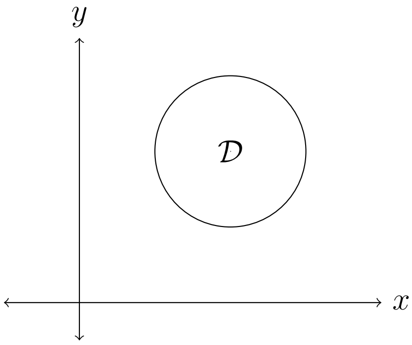
luego como:

$$\int_{\mathcal{R}} g(x,y)\;d\mathcal{A} \;=\; \int_{\mathcal{D}} f(x,y)\;d\mathcal{A}$$

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\;dx\cdot dy \;=\; \int_{c}^{d}\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\;dx\right]\cdot dy$$

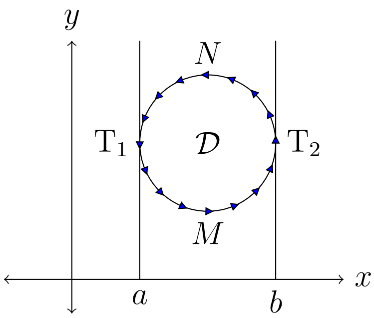
7.6.3. ***Tercer Caso***

Sea una región:



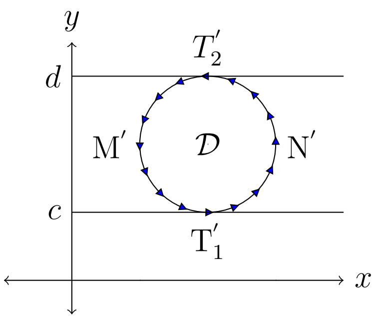
$\mathcal{D}$ es una región cualquiera, encerrada por la curva de una función (borde continuo)
Cualquiera paralela a los ejes coordenados corta la curva C en a los sumo dos puntos.

Encontrando dos rectas paralelas al eje y [100] *por los puntos* T_1 *y* T_2 *que divide a la curva en dos arcos simples* $y = y_1(x)$ *e* $y = y_2(x)$ *dados por* $\mathrm{T}_1\widehat{M}\mathrm{T}_2 = y = y_1(x)$ *y* $\mathrm{T}_1\widehat{M}\mathrm{T}_2 = y = y_2(x)$



La recta tangentes tienen ecuación:
$x = a; \quad x = b$
$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

Si se hubiera trazado rectas tangentes paralelas al eje x, tangentes en los puntos $\mathrm{T'}_1$ *y* $\mathrm{T'}_2$*, se hubiera descompuesto la curva* $\mathcal{C}$ *en dos arcos*



$\mathrm{T}_1'\widehat{M'}\mathrm{T}_2' = x = x_1(y)$

$\mathrm{T}_1'\widehat{N'}\mathrm{T}_2' = x = x_2(y)$

[100] *tangente extremas*

La recta tangentes tienen ecuación:

$y = c; \quad y = d$

$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ c \leq y \leq d; \ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$

Hemos descripto la región $\mathcal{D}$ *de dos maneras distintas* $f: \ \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, *usando la primera descripción:*

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\ d\mathcal{A} \ = \int_a^b \left[\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)\ dy \right] \cdot dx \qquad (1)$$

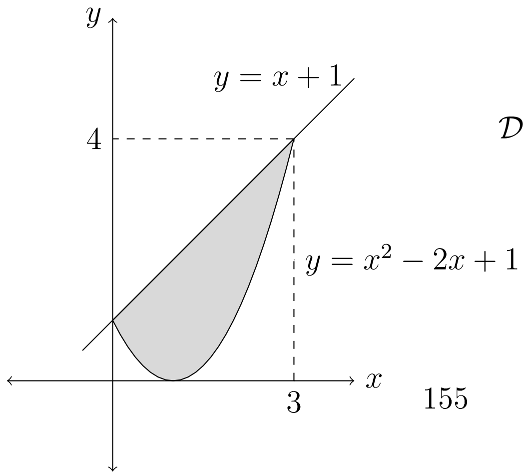
usando la segunda descripción

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\ d\mathcal{A} \ = \left[\int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)\ dx \right] \cdot dy \qquad (2)$$

Como los primeros miembros de (1) *y* (2) *son iguales:*

$$\int_a^b \left[\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)\ dy \right] \cdot dx \ = \int_c^d \left[\int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x,y)\ dx \right] \cdot dy$$

Ejemplos:



$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ 0 \leq x \leq 3, \ (x-1)^2 \leq y \leq x + 1\}$

a)

$$\int\limits_{\mathcal{D}} (x+3y)\cdot d\mathcal{A} = \int\limits_{0}^{3}\int\limits_{y=(x-1)^2}^{y=x+1} (x+3y)\; dy\cdot dx =$$

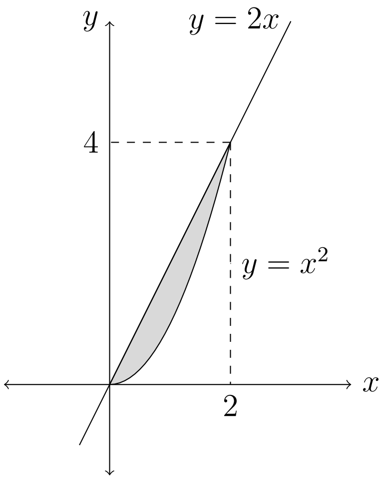
$$= \int\limits_{0}^{3} \left[xy + \frac{3}{2}y^2\right]_{y=(x-1)^2}^{y=x+1} dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{3} x(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 - \left[x(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^4\right]\cdot dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{3} \left(\frac{5}{2}x^2 + 4x + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x^2 - 5x + \frac{3}{2}\right)\cdot dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{3} -\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{3}{10}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{567}{20}\; ua$$

b) 

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\; 0\le x\le 2,\;\; x^2\le y\le 2x\}$$

Describiendo en el otro sentido

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\; \frac{y}{2}\le x\le \sqrt{y},\;\; 0\le y\le 4\}$$

Plantendo en el primer sentido de integración :

$$\int_0^2 \int_{y=x^2}^{y=2x} dy \cdot dx = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=2x} = \int_0^2 (2x^2 + 2x^2) - \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 -\frac{x^4}{2} - x^3 + 4x^2 \; dx = \left[-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{52}{15} \; ua$$

Planteando en el segundo sentido de integración :

$$\int_0^4 \int_{x=\frac{y}{2}}^{\sqrt{x}} (x+y) \; dx \cdot dy = \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \frac{y}{2} + y^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^4 y^{\frac{3}{2}} + \frac{y}{2} - \frac{5}{8}y^2 \; dy = \left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{y^2}{4} - \frac{5}{24}y^3 \right]_{y=0}^{y=4} = \frac{52}{15} \; ua$$

7.7. *Propiedades de las Integrales*

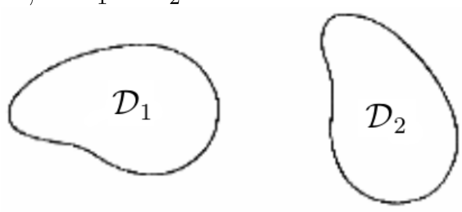
Sean f y g dos funciones integrables en un dominio $\mathcal{D}$

1. $$\int_{\mathcal{D}} (f+g) \cdot d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{D}} f \cdot d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}} g \cdot d\mathcal{A}$$

2. $f; \quad \lambda \in \mathbb{R}$

   $$\int_{\mathcal{D}} \lambda \cdot f \cdot d\mathcal{A} = \lambda \cdot \int_{\mathcal{D}} f \cdot d\mathcal{A}$$

3. $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$



$\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son conjuntos disjuntos salvo en alguna región de sus frontera o su frontera, y que esta sea el gráfico de funciones continuas entonces:

$$\int_{\mathcal{D}} f \cdot d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{D}_1} f \cdot d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{D}_2} f \cdot d\mathcal{A}$$

4. $\left| \int_{\mathcal{D}} f \cdot d\mathcal{A} \right| \leq \int_{\mathcal{D}} |\, f \,| \cdot d\mathcal{A}$

Análisis II

Prof. Mauricio A. LUGO

Índice alfabético