Universität Hannover
Logik und Formale Systeme
Hausübungsblätter

Gruppenmitglied 01: Holtermann, Lukas

Gruppenmitglied 02: Duc Nguyen, Nam

Gruppenmitglied 03: Lünsmann, Mario

e-Mail 01: Lukas.Holtermann@gmx.de

e-Mail 02: Y

e-Mail 01: mr.ml.fwm@t-online.de

Übungsblattnummer: Hausübungsblatt 02

Status: Lösung 01

Punkte/Prozente:

Anmerkungen/Verbesserungsvorschläge:

Logik und Formale Systeme

Hausübungsblatt 02 - Abgabetermin 13.05.2019

1 Hausübungen

1.1 Aufgabe 1

1.1.1 (a)

Zeigen durch Äquivalenzumformungen und Wahrheitstafeln jeweils eine KNF und DNF:
$\varphi_1 := ((P_1 \vee P_2) \to P_2) \wedge P_3$
Zu erst Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\overset{\text{Imp.Aufl.}}{=\!=} (\neg(P_1 \vee P_2) \vee P_2) \wedge P_3 \\
&\overset{\text{de-Morgan}}{=\!=} ((\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee P_2) \wedge P_3 \\
&\overset{\text{Distributivität}}{=\!=} (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_2 \vee P_2) \wedge P_3 = \text{KNF}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\overset{\text{Imp.Aufl.}}{=\!=} (\neg(P_1 \vee P_2) \vee P_2) \wedge P_3 \\
&\overset{\text{de-Morgan}}{=\!=} ((\neg P_1 \wedge \neg P_2) \vee P_2) \wedge P_3 \\
&\overset{\text{Ergebnis}}{=\!=} ((\neg P_1 \wedge \neg P_2) \wedge P_3) \vee (P_2 \wedge P_3) = \text{DNF}
\end{aligned}$$

Dann zeigen via Wahrheitstafeln:

P_1	P_2	P_3	$(P_1 \vee P_2)$	$\to P_2$	$\wedge P_3$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Tabelle 1: **Wahrheitstafel φ_1**

1.1.2 (b)

Zeigen durch Äquivalenzumformungen und Wahrheitstafeln jeweils eine KNF und DNF:
$\psi_1 := (P_1 \leftrightarrow P_2) \vee (P_2 \wedge P_3)$
Zu erst Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned}\psi_1 &\overset{\text{Biimp.Aufl.}}{=\!=\!=} ((P_1 \to P_2) \wedge (P_2 \to P_1)) \vee (P_2 \wedge P_3)\\ &\overset{\text{Imp.Aufl.}}{=\!=\!=} ((\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_2 \vee P_1)) \vee (P_2 \wedge P_3)\\ &\overset{\text{Distributivität}}{=\!=\!=} ((\neg P_1 \vee P_2) \vee (P_2 \wedge P_3)) \wedge ((\neg P_2 \vee P_1) \vee (P_2 \wedge P_3)) = \text{KNF}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1 &\overset{\text{Biimp.Aufl.}}{=\!=\!=} ((P_1 \to P_2) \wedge (P_2 \to P_1)) \vee (P_2 \wedge P_3)\\ &\overset{\text{Imp.Aufl.}}{=\!=\!=} ((\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_2 \vee P_1)) \vee (P_2 \wedge P_3)\\ &\overset{\text{Distributivität}}{=\!=\!=} (\neg P_1 \wedge (\neg P_2 \vee P_1)) \vee (P_2 \wedge (\neg P_2 \vee P_1)) \vee (P_2 \wedge P_3) = \text{DNF}\end{aligned}$$

Dann zeigen via Wahrheitstafeln:

P_1	P_2	P_3	$(P_1 \leftrightarrow P_2)$	$\vee$	$(P_2 \wedge P_3)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

***Tabelle 2:* Wahrheitstafel ψ_1**

1.2 Aufgabe 2

1.2.1 (1)

Zeigen über Induktion über K.
Es gilt bei $K = 1$:
$\neg \bigwedge_{i=1}^{1} \varphi_i = \neg(\varphi_1) \equiv (\neg\varphi_1) = \bigvee_{i=1}^{1} \neg\varphi_i$
Siehe Belegung für Wahrheitstafel:

P_1	P_2	$\neg P_1$	$\neg P_2$	$\neg(P_1 \wedge P_2)$	$(\neg P_1 \vee \neg P_2)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

***Tabelle 3:* Wahrheitstafel Belegungen de-Morgansche Regeln (1)**

Induktionsvoraussetzung: Es gilt für bel. Formeln die über Konjunktionen verbunden sind.
Induktionsschritt: $K \to K+1$

Somit gilt:
$\neg \bigwedge_{i=1}^{K+1} \varphi_i \equiv \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_{K+1}) \overset{\text{I.V.}}{=\!=} \bigvee_{i=1}^{K} (\neg\varphi_i \vee \neg\varphi_{K+1}) \equiv \bigvee_{i=1}^{K+1} \neg\varphi_i$

1.2.2 (2)

Zeigen über Induktion über K.
Es gilt bei $K = 1$:
$\neg \bigvee_{i=1}^{1} \varphi_i = \neg(\varphi_1) \equiv (\neg\varphi_1) = \bigwedge_{i=1}^{1} \neg\varphi_i$
Siehe Belegung für Wahrheitstafel:

P_1	P_2	$\neg P_1$	$\neg P_2$	$\neg(P_1 \vee P_2)$	$(\neg P_1 \wedge \neg P_2)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Tabelle 4: **Wahrheitstafel Belegungen de-Morgansche Regeln (2)**

Induktionsvoraussetzung: Es gilt für bel. Formeln die über Disjunktionen verbunden sind.
Induktionsschritt: $K \to K+1$
Somit gilt:
$\neg \bigvee_{i=1}^{K+1} \varphi_i \equiv \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_{K+1}) \overset{\text{I.V.}}{=\!=} \bigwedge_{i=1}^{K} (\neg\varphi_i \wedge \neg\varphi_{K+1}) \equiv \bigwedge_{i=1}^{K+1} \neg\varphi_i$

1.3 Aufgabe 3

1.3.1 (a)

Es gilt:

$\models \varphi_{n+1} \wedge \varphi_{n+2} \to \varphi_n$ und $\not\models \varphi_n \to (\varphi_{n+2} \to \neg\varphi_{n+1})$

Nach Endlichkeitssatz gilt: Eine Menge Φ Form$_{AL}$ ist immer dann erfüllbar, wenn all deren endliche Teilmengen ϕ_i mit $i = 1 \ldots n$ erfüllbar sind.

Es gilt somit die Voraussetzung: $\phi_i \subseteq \Phi$ muss in jeder Teilmenge erfüllbar sein.

Somit gilt:

$\models \varphi_{n+1} \wedge \varphi_{n+2} \to \varphi_n = TAUT$, das heißt es gilt:

$\mathfrak{I}_1 = \varphi_{n+1} \vee \mathfrak{I}_2 = \varphi_{n+2} = 1$ oder $\mathfrak{I} = (\varphi_{n+1} \wedge \varphi_{n+2}) = 1$ also haben eine erfüllende Belegung jeweils.

Wenn aber die Teilmengen ϕ_i von Φ bereits erfüllbar sind s.o. dann gilt ja gerade nach Endlichkeitssatz $\mathfrak{I}_n = \varphi_n = 1$, wegen der Implikation.

Da gilt:

$\mathfrak{I}_n \models \phi_i$ gilt somit aber auch $\mathfrak{I}_n \models \Phi$ nach Voraussetzung s.o. . $\square$

1.3.2 (b)

Es gilt folgende Formelmenge in Form einer Wahrheitstafel:

Stelle	φ_n	φ_{n+1}	φ_{n+2}	$\varphi_{n+1} \land \varphi_{n+2} \to \varphi_n$	$\varphi_n \to (\varphi_{n+2} \to \neg\varphi_{n+1})$
1. (n = 1)	1	0	0	1	0
2. (n = 1 + 1)	1	1	0	1	0
3. (n = 1 + 2)	1	1	1	1	0
4. (n = 1 + 3)	1	1	1	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	1	0
n = 1 + (n - 1)	1	1	1	1	0

Tabelle 5: **Wahrheitstafel Form$_{AL}$**

Somit gilt: $\varphi_{n+1} \land \varphi_{n+2}$ evaluieren zu 1 und $\varphi_n = 1$ laut Tabelle an der ersten Stelle $n = 1$

Somit gilt:

$1 \to 1 = 1$

Dies gilt überall daher gilt:

$\models \varphi_{n+1} \land \varphi_{n+2} \to \varphi_n$ eine Tautologie laut Wahrheitstafel!

Aber bei $\varphi_n \to (\varphi_{n+2} \to \neg\varphi_{n+1})$, gilt ja: $\varphi_{n+2} = 1 \to \overbrace{\neg(\varphi_{n+1} = 1)}^{\textit{wird zu } 0}$, daher gilt $1 \to 0 = 0$ und da $\varphi_n = 1$ gilt auch hier: $1 \to 0 = 0$.

Somit gilt: $\not\models \varphi_n \to (\varphi_{n+2} \to \neg\varphi_{n+1})$, wie auch belegt durch die Wahrheitstafel s.o. .