Leibniz Universität Hannover
Logik und Formale Systeme
Hausübungsblätter

Gruppenmitglied 01:	Holtermann, Lukas	Matrikelnummer: 10022034
Gruppenmitglied 02:	Duc Nguyen, Nam	Matrikelnummer: 10006592
Gruppenmitglied 03:	Lünsmann, Mario	Matrikelnummer: 10016353
e-Mail 01:	Lukas.Holtermann@gmx.de	
e-Mail 02:	nguyennam1995@icloud.com	
e-Mail 03:	mr.mpaotq@t-online.de	

Übungsblattnummer: Hausübungsblatt 8

Status: Lösung 01

Punkte/Prozente:

Anmerkungen/Verbesserungsvorschläge:

Logik und Formale Systeme

Hausübungsblatt 8 - Abgabetermin 01.07.2019

1 Hausübungen

1.1 Aufgabe 1

(a)

Es gilt: umwandeln in prenex NF und negations NF zur leichteren Sichtung der geforderten Werte.

Somit gilt: $\varphi_1 := \Big(\forall x\big(R(x) \to \neg R(f(x))\big) \wedge \exists y\big(\neg R(f(f(y))) \to R(x)\big)\Big) \to \exists x(R(c) \wedge \neg x = c)$

$\equiv \Big(\forall x\big(\neg R(x) \vee \neg R(f(x))\big) \wedge \exists y\big(\neg\neg R(f(f(y))) \vee R(x)\big)\Big) \to \exists x(R(c) \wedge \neg x = c)$

$\equiv \neg\Big(\forall x\big(\neg R(x) \vee \neg R(f(x))\big) \wedge \exists y\big(R(f(f(y))) \vee R(x)\big)\Big) \vee \exists x(R(c) \wedge \neg x = c)$

$\equiv \Big(\neg\forall x\big(\neg R(x) \vee \neg R(f(x))\big) \vee \neg\exists y\big(R(f(f(y))) \vee R(x)\big)\Big) \vee \exists x(R(c) \wedge \neg x = c)$

$\equiv \Big(\exists x\big(R(x) \wedge R(f(x))\big) \vee \forall y\big(\neg R(f(f(y))) \wedge \neg R(x)\big)\Big) \vee \exists x(R(c) \wedge \neg x = c)$

$\equiv \Big(\exists z\big(R(z) \wedge R(f(z))\big) \vee \forall y\big(\neg R(f(f(y))) \wedge \neg R(x)\big)\Big) \vee \exists u(R(c) \wedge \neg u = c)$

$\equiv \exists z\forall y\exists u\big(R(z) \wedge R(f(z)) \vee \big(\neg R(f(f(y))) \wedge \neg R(x)\big) \vee (R(c) \wedge \neg u = c)$

Somit gilt:

Vorkommende Terme $:= \{(R(z) \wedge R(f(z))), (\neg R(f(f(y))) \wedge \neg R(x)), (R(c) \wedge \neg u = c)\}$

Vorkommende atomare Formeln $:= \{R(z), R(f(z)), \neg R(f(f(y))), \neg R(x), R(c), \neg u = c\}$

freie Variablen $:= \{x\}$

gebundene Variablen $:= \{u, y, z\}$

(b)

Es gilt erneut: umwandeln in prenex NF und negations NF zur leichteren Sichtung der geforderten Werte.

Somit gilt: $\varphi_2 := \Big(\big(\neg\forall z R(z) \vee \exists x \neg R(f(x))\big) \vee \neg\forall y\big(\neg y = z \wedge \neg\exists y R(f(x))\big)\Big) \to R(z)$

$\equiv \neg\Big(\big(\neg\forall z R(z) \vee \exists x \neg R(f(x))\big) \vee \neg\forall y\big(\neg y = z \wedge \neg\exists y R(f(x))\big)\Big) \vee R(z)$

$\equiv \Big(\neg\big(\neg\forall z R(z) \vee \exists x \neg R(f(x))\big) \wedge \neg\neg\forall y\big(\neg y = z \wedge \neg\exists y R(f(x))\big)\Big) \vee R(z)$

$\equiv \Big(\big(\neg\neg\forall z R(z) \wedge \neg\exists x \neg R(f(x))\big) \wedge \forall y\big(\neg y = z \wedge \neg\exists y R(f(x))\big)\Big) \vee R(z)$

$\equiv \Big(\big(\forall z R(z) \wedge \forall x R(f(x))\big) \wedge \forall y \big(\neg y = z \wedge \forall y \neg R(f(x))\big) \Big) \vee R(z)$

$\equiv \Big(\big(\forall u R(u) \wedge \forall x R(f(x))\big) \wedge \forall y \big(\neg y = v \wedge \forall w \neg R(f(t))\big) \Big) \vee R(z)$

$\equiv \forall u \forall x \forall y \forall w \big(R(u) \wedge R(f(x)) \wedge (\neg y = v \wedge \neg R(f(t))) \vee R(z)\big)$

Somit gilt:

Vorkommende Terme $:= \{R(u) \wedge R(f(x)), R(f(x)) \wedge \neg y = v \wedge \neg R(f(t)), \neg y = v \wedge \neg R(f(t)), \neg y = v \wedge \neg R(f(t)) \vee R(z)\}$

Vorkommende atomare Formeln $:= \{R(u), R(f(x)), \neg R(f(t)), R(z), \neg y = v\}$

freie Variablen $:= \{t, v, z\}$

gebundene Variablen $:= \{x, y, u, w\}$

1.2 Aufgabe 2

(a) Es gilt: $\varphi_1 \mathrel{\widehat{=}} \exists x_1 \exists x_2 (E(x_1, x_2) \wedge \neg E(x_2, x_1)) \wedge \forall x_1 \exists x_2 (E(x_1, x_2) \wedge \neg E(x_2, x_1))$

Der erste Part beschreibt einen gerichteten Graphen, also $\exists x_1 \exists x_2 (E(x_1, x_2) \wedge \neg E(x_2, x_1))$

Somit gilt:

$$x_1 \xrightarrow{E(x_1,x_2) \wedge \neg E(x_2,x_1)} x_2$$

Abbildung 1: **Gerichteter Graph**

Der zweite Part hingegen beschreibt einen Graphen bei dem gilt: $\neg E(x_2, x_1)) \wedge \forall x_1 \exists x_2 (E(x_1, x_2) \wedge \neg E(x_2, x_1))$

Dabei gilt:

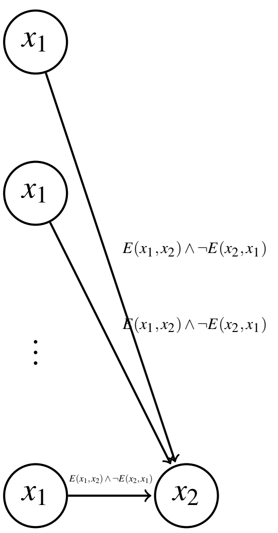

Abbildung 2: **Gerichteter Graph Verallgemeinerung**

Das heißt: Dies entspricht einer Verallgemeinerung in der Art, dass x_1 auf x_2 eine gerichtete Kante besitzen während x_2 nie eine gerichtete Kante auf irgendein x_1 besitzt.

Da dies eine Signatur eines Graphen σ ist der einen gerichteten Graphen beschreibt, das heißt eine Kante, die nur in eine Richtunggeht, kann dies auch aufgrund der zweiten Regel nicht eine Tautologie sein. Erfüllbar ist es jedoch!

(b)

Es gilt: $\varphi_2 \mathrel{\hat{=}} \forall x \forall y \forall z((E(x,y) \land E(y,z)) \rightarrow E(x,z)) \land \forall w \exists v(\neg E(w,w) \land \neg E(w,v))$

Somit gilt:

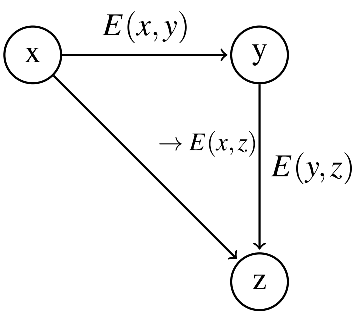

Abbildung 3: **Transitivität**

Dies gilt durch:

$\forall x \forall y \forall z((E(x,y) \land E(y,z)) \rightarrow E(x,z))$

Das heißt, die erste Formel beschreibt rein mathematisch über die Signatur des Graphen eine Transitivitätsbeziehung, da gilt:

Legende:

$\rightarrow \ \hat{=}$ „hat eine Kante mit“

$x \rightarrow y$ und $y \rightarrow z$, dann gilt $x \rightarrow z$

Der zweite Part $\forall w \exists v(\neg E(w,w) \land \neg E(w,v))$ sagt aus, dass die einzelnen Ecken keine Kante auf sich selbst haben, d.h. es gibt keine Schleifen aber dafür besitzt jede Ecke eine Kante zu einer anderen.
Nur bei z gilt dies eben nicht, da z keine Kante zu x oder y besitzt s.o. . Wenn von z aus es weiter Ecken gäbe würde die Bedingung erüllt werden. Wegen der Transitivität und der Tatsache, dass es keine bidirektionalen Kanten gibt gilt: Erfüllbar aber keine Tautologie!