

Analysis B

Vorlesung im Sommersemester 2019

Elmar Schrohe
Institut für Analysis
Leibniz Universität Hannover
Welfengarten 1
30167 Hannover

INHALTSVERZEICHNIS

9. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n	3
10. Kurven	15
11. Kurvenintegrale, Vektorfelder und Potentiale	17
12. Gewöhnliche Differentialgleichungen	20
13. Norm von Matrizen. Exponentialabbildung	29
14. Lineare Differentialgleichungen	32
15. Riemann-Integral	35
16. Integration über Flächen. Der Gaußsche Integralsatz	41
Literatur	46

9. DIFFERENTIALRECHNUNG IM \mathbb{R}^n

Normen. Es seien (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) zwei Punkte in \mathbb{R}^3 . Dann ist ihr Abstand nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Insbesondere ist der Abstand des Punktes (x_1, x_2, x_3) zum Ursprung $(0, 0, 0)$ gerade $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

9.1. Definition. Es sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{die (euklidische) Norm von } x.$$

Der Abstand zweier Punkte $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ ist dann gerade $\|x - y\|$.

Die euklidische Norm hat folgende Eigenschaften

- (N1) Es ist $\|x\| \geq 0$ für jedes x . Ferner ist $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (N2) $\|cx\| = |c|\|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.
- (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle x, y .

Allgemeiner: Eine Norm auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) ist eine Abbildung $V \ni v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften (N1), (N2), (N3).

Für die Euklidische Norm gilt

$$(1) \quad |x_j| \leq \|x\| \leq |x_1| + \dots + |x_n|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ der Vektoren x und y in \mathbb{R}^n ist gegeben durch

$$(2) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Hier gilt:

- (SP1) $\langle cx + dy, z \rangle = c\langle x, z \rangle + d\langle y, z \rangle$, $c, d \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
- (SP2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (SP3) $\langle x, x \rangle$ ist reell und ≥ 0 ; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Es gilt

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Auch den Begriff des Skalarprodukts kann man auf \mathbb{K} -Vektorräume verallgemeinern. Man fordert dann im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Eigenschaften (SP1), (SP2), (SP3).

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ersetzt man (SP2) durch

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (\text{konjugiert komplex}).$$

Ein Beispiel ist dann gegeben durch

$$\langle z, w \rangle = \sum z_j \overline{w_j}.$$

Folgen in \mathbb{R}^n .

9.2. Grenzwerte. Es sei $a \in \mathbb{R}^n$ und (a_k) eine Folge in \mathbb{R}^n , d.h. jedes a_k ist ein n -Vektor $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$. Wir schreiben $\lim a_k = a$ oder $a_k \rightarrow a$, falls gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit $\|a_k - a\| \leq \varepsilon$ für alle $k \geq n_0$.

9.3. Satz. Mit obigen Bezeichnungen ist äquivalent

- (i) $a_k \rightarrow a$
- (ii) Für $j = 1, \dots, n$ gilt $a_{kj} \rightarrow a_j$.

In diesem Fall ist $\lim a_k = (\lim a_{k1}, \dots, \lim a_{kn})$.

Beweis. Folgt aus 9.1(1). ◁

9.4. Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Mit $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$ bezeichnen wir die offene Kugel mit Radius r um x .
- (b) Wir nennen eine Teilmenge U von \mathbb{R}^n offen, falls zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert so dass $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ gilt. (Intuitiv: Wir können von x aus in jeder Richtung ein kleines Stück weitergehen, ohne U zu verlassen.)

Beachte: Die offene Kugel $B(x, r)$ ist offen.

Stetigkeit und partielle Ableitungen. Im Folgenden sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Sie ordnet jedem $x \in U$ ein m -Tupel

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

zu. Durch $x \mapsto f_1(x), \dots, x \mapsto f_m(x)$ werden dann m Funktionen f_1, \dots, f_m von U nach \mathbb{R} definiert, die sogenannten Komponentenfunktionen von f .

9.5. Beispiel. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\sin(x_1 + x_2), x_1 + 2x_3).$$

Dann hat f die Komponentenfunktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(x_1 + x_2) \\ f_2(x) &= x_1 + 2x_3. \end{aligned}$$

Es ist eigentlich besser (aber oft unpraktisch), die Vektoren *vertikal* zu schreiben, also

$$(1) \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

9.6. Definition. Wir nennen f stetig in $x_0 \in U$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon, \text{ falls } \|x - x_0\| < \delta.$$

Man sieht leicht: f ist genau dann stetig in x_0 , wenn für jede Folge (x_k) mit $x_k \rightarrow x_0$ gilt: $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$. Ferner ist f genau dann stetig in x_0 , wenn alle Komponentenfunktionen $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, stetig in x_0 sind.

9.7. Partielle Ableitung. Es sei $x \in U$ und $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der j -te Einheitsvektor. Wir nennen f in x „in die j -te Koordinatenrichtung differenzierbar“ oder „nach x_j partiell differenzierbar“, falls der Grenzwert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \end{aligned}$$

(„partielle Ableitung von f nach x_j in x “) existiert. Man schreibt auch $\partial_{x_j} f(x)$, manchmal sogar $f_{x_j}(x)$.

Ist f in jedem Punkt partiell nach x_j differenzierbar, so heißt f auf U partiell nach x_j differenzierbar.

Ist f in alle Koordinatenrichtungen ($j = 1, \dots, n$) partiell differenzierbar, so heißt f partiell differenzierbar in x bzw. in U . Sind die partiellen Ableitungen stetig, so heißt f stetig partiell differenzierbar. Ebenso definiert man k -fache partielle Differenzierbarkeit z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x)$.

9.8. Satz. Genau dann ist f in x nach x_j differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion $f_i, i = 1 \dots m$, in x nach x_j differenzierbar ist. In diesem Fall ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

Beweis. Folgt aus Satz 9.3. ◁

9.9. Bemerkung. Es sei f_i eine Komponentenfunktion von f . Wählt man die $x_k, k \neq j$ fest und betrachtet die Funktion

$$g(t) = f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

die für t nahe bei x_j definiert ist, so gilt – falls der Grenzwert existiert –

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = g'(x_j).$$

Die partielle Ableitung einer Komponentenfunktion ist also eine gewöhnliche Ableitung bei festgehaltenen anderen Variablen.

9.10. Beispiel. Für die Funktion aus Beispiel 9.5 ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \begin{pmatrix} \cos(x_1 + x_2) \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &= \begin{pmatrix} \cos(x_1 + x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sofort sehen wir, dass die partiellen Ableitungen selbst wieder partiell differenzierbar sind (sogar beliebig oft). Wir haben z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right) (x) = 0 = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x).$$

9.11. Beispiel. $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2} = \|x\|$. Dann ist r auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar, mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{1}{2} (\sum x_k^2)^{-1/2} \cdot 2x_j = \frac{x_j}{r}.$$

9.12. Gradient, Divergenz, Rotation, Laplaceoperator, Wärmeleitung, Wellen.

(a) Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($m = 1!$) partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

der *Gradient* von f . Manchmal schreibt man auch $\nabla f(x)$ „Nabla f “. Die Funktion $\text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ordnet jedem Punkt $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ den Vektor $\text{grad } f(x) \in \mathbb{R}^n$ zu.

Ganz allgemein nennt man eine Funktion $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

(b) Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m = n!$) ein partiell differenzierbares Vektorfeld, so heißt $\text{div } g = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_j}$ die Divergenz von g in x .

Formal ist

$$\text{div } g = \langle \nabla, g \rangle,$$

wobei ∇ als der „Vektor“ $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ interpretiert wird.

- (c) Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld, so heißt

$$\operatorname{rot} g = \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}, \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right)$$

die Rotation von g in x (Englisch: $\operatorname{curl} g$). Formal ist

$$\operatorname{rot} g = \nabla \times g.$$

- (d) Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) zweimal stetig partiell differenzierbar setzt man

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

und nennt $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ den Laplace-Operator. Wichtigster Operator der Math. Physik. Beachte: $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$.

- (e) Die Gleichung $\Delta f = 0$ heißt Laplacegleichung; ihre Lösungen *harmonische Funktionen*. Die inhomogene Gleichung $\Delta f = g$ (bei gegebenem g und gesuchtem f heißt meist Potentialgleichung).

Beispiel: $\Delta E = 4\pi\rho$ (E elektrisches Potential, ρ Ladungsdichte) ist die Gleichung für das elektrische Feld bei gegebener Ladungsverteilung.

- (f) Weiterhin sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Für Funktionen $f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta_x f = 0$$

die Wärmeleitungsgleichung; hier bedeutet $\Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ und $k \geq 0$ ist die Leitfähigkeit.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta_x f = 0$$

ist die Wellengleichung; c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

WARNUNG: Sind die Variablen x und t , und kommt ein Δ vor, so versteht man die Gleichung meist so, dass Δ nur bzgl. der x -Variablen wirkt.

9.13. Satz. (Satz von Schwarz). Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist

$$\partial_{x_j} \partial_{x_k} f(x) = \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x), \quad x \in U;$$

man kann also die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen.

Mehrfache Anwendung des Satzes zeigt, dass man für eine ℓ -mal stetig partiell differenzierbare Funktionen die Reihenfolge für ℓ partielle Ableitungen vertauschen kann.

9.14. Richtungsableitung. Ist v ein beliebiger Vektor in \mathbb{R}^n , so ist die partielle Ableitung von f nach v in x

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h},$$

sofern der Limes existiert.

9.15. Schwäche der partiellen Ableitung. Auf $D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind stetig (Folgerung 6.3). Partiiell differenzierbare Funktionen sind jedoch u.U. nicht stetig. Man führt daher einen stärkeren Ableitungsbegriff ein.

Totale Differenzierbarkeit.

9.16. Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in $x \in U$ total differenzierbar, falls eine (von x abhängige) lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

existiert, so dass für alle h mit $\|h\| < \varepsilon$ (ε wie in 9.4) gilt:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \varphi(h),$$

wobei $\varphi : \{h : \|h\| < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion ist mit

$$(1) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

Die lineare Abbildung A ist die Ableitung von f in x . Schreibe $A = f'(x)$.

Man nennt f (total) differenzierbar auf U , falls f in jedem Punkt $x \in U$ (total) differenzierbar ist.

Klar: A ist gegeben durch Matrix in $\text{Mat}_{mn}(\mathbb{R})$ "Jacobi-Matrix". Wie sieht diese Matrix aus?

9.17. Satz. Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $x \in U$ ist äquivalent

- (i) f total differenzierbar in x ;
- (ii) alle Komponentenfunktionen f_i , $i = 1, \dots, m$, sind total differenzierbar

In diesem Fall ist f stetig. Ferner ist f in alle Koordinatenrichtungen partiell differenzierbar, und für die Jacobi-Matrix $A = (a_{ij})$, die $f'(x)$ darstellt, gilt

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

Beweis. –

◁

Nicht jede partiell differenzierbare Funktion ist auch total differenzierbar. Es gilt jedoch folgender Satz:

9.18. Satz. Folgendes ist äquivalent:

- (i) f ist auf U stetig total differenzierbar, d.h., f ist in jedem Punkt $x \in U$ total differenzierbar, und die (matrixwertige) Funktion $x \mapsto f'(x)$ ist stetig.
- (ii) f ist auf U stetig partiell differenzierbar, d.h., f ist in jedem Punkt $x \in U$ partiell differenzierbar, und die Funktionen $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sind stetig.

9.19. Satz (Kettenregel). Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abbildungen mit $g(V) \subseteq U$. Ist g differenzierbar in $x \in V$ und f differenzierbar in $g(x) \in U$, so ist $f \circ g : V \rightarrow \mathbb{C}^m$ differenzierbar in x , und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x),$$

wobei \circ auf der rechten Seite die Komposition von linearen Abbildungen/Matrizen bedeutet. Insbesondere ergibt sich die Formel

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ g)_i(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(g(x)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x).$$

Beweis. Für $y = g(x)$ schreibe $f(y+h) = f(y) + Ah + \varphi(h)$ und $g(x+h) = g(x) + Bh + \psi(h)$ mit $A = f'(y)$, $B = g'(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x+h) &= f(g(x+h)) = f(g(x) + Bh + \psi(h)) \\ &= f \circ g(x) + ABh + A\psi(h) + \varphi(Bh + \psi(h)). \end{aligned}$$

Zeige noch: $A\psi(h) + \varphi(Bh + \psi(h)) = o(\|h\|)$: Zunächst ist

$$\frac{\|A\psi(h)\|}{\|h\|} = \left\| A \left(\frac{\psi(h)}{\|h\|} \right) \right\| \leq \|A\| \left\| \frac{\psi(h)}{\|h\|} \right\| \rightarrow 0.$$

Nun zu $\varphi(Bh + \psi(h))$.

Für alle $h \neq 0$ mit $Bh + \psi(h) = 0$ ist nichts zu zeigen. Stets ist $\|Bh + \psi(h)\| \leq \|B\|\|h\| + \frac{\psi(h)}{\|h\|}\|h\| \rightarrow 0$. Es folgt:

$$\frac{\|\varphi(Bh + \psi(h))\|}{\|h\|} = \frac{\|\varphi(Bh + \psi(h))\|}{\|Bh + \psi(h)\|} \frac{\|Bh + \psi(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|\varphi(Bh + \psi(h))\|}{\|Bh + \psi(h)\|} \left(\|B\| + \frac{\psi(h)}{\|h\|} \right) \rightarrow 0.$$

◁

9.20. Folgerung. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U, v \in \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}(!)$ differenzierbar in x . Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle.$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist stets $|\langle \text{grad } f(x), v \rangle| \leq \|\text{grad } f(x)\| \|v\|$, wobei Gleichheit nur bei linearer Abhängigkeit von $\text{grad } f(x)$ und v gilt.

Es folgt: Unter allen v mit $\|v\| = 1$ wird $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ maximal für das (eindeutig bestimmte) v , das in Richtung von $\text{grad } f(x)$ zeigt. Der Gradient gibt daher die Richtung des steilsten Anstiegs von f an.

Beweis. Definiere die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $g(t) = x + tv$. Sie ist differenzierbar in 0 mit $g'(0) = v$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $x + tv \in U$ für alle $|t| < \varepsilon$. Nach 9.19 ist $f \circ g$ differenzierbar in 0, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = (f \circ g)'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(x) \circ v = \langle \text{grad } f(x), v \rangle.$$

9.21. Die Tangentialfläche an den Funktionsgraphen. Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar in $x \in U$. Der Graph von f ist die Menge

$$G_f = \{(y, f(y)) : y \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Die Identität

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \varphi(h)$$

können wir umschreiben ($y = x + h$)

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \varphi(y - x).$$

Da f Werte in \mathbb{R} annimmt, kann man statt $f'(x)(y - x)$ auch $\langle \text{grad } f(x), y - x \rangle$ schreiben. Dass $\varphi(h)/\|h\|$ gegen 0 konvergiert, besagt, dass f nahe x gut durch die affin-lineare Funktion

$$l(y) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), y - x \rangle$$

genähert werden kann. Den Graphen $\mathcal{G}_l = \{(y, l(y)) : y \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ von l nennt man die *n-dimensionale Tangentialfläche* an den Graphen von u in x .

9.22. Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ferner sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so klein, dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$(1) \quad f(x + h) - f(x) = \int_0^1 f'(x + th) dt \cdot h.$$

Beachte die Kurzschreibweise: $f'(x) = (\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_n} f(x))$, und $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Beweis. Wir definieren die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $g(t) = f(x + th)$. Dann gilt nach der Kettenregel $g'(t) = f'(x + th)h$. Folglich

$$f(x + h) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = \int_0^1 f'(x + th) dt \cdot h.$$

◁

9.23. Folgerung (Schranksatz). Unter den Voraussetzungen von Satz 9.22 sei zusätzlich $\|f'(x + th)\| \leq M$ für alle $0 \leq t \leq 1$. Dann folgt aus 9.22(1), dass $\|f(x + h) - f(x)\| \leq M \|h\|$.

9.24. Multi-Indices. Es sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Wir setzen $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$: Länge des Multi-Index, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$.

$\partial_x^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$, falls f $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbar ist. Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

9.25. Satz (Taylorformel mit Restglied). Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ N -mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(x + h) = \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial^\alpha f(x + th) dt \cdot h^\alpha.$$

Beweis. Definiere $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $g(t) = f(x + th)$. Nach der Taylorformel in \mathbb{R} ist

$$g(1) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} g(0) + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \frac{d^N}{dt^N} g(t) dt.$$

Dann folgt die Behauptung aus der leicht zu zeigenden Formel

$$\frac{d^k}{dt^k} g(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + th) h^\alpha.$$

◁

9.26. Definition. Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann setzt man

$$(\text{Hess } f)(x) = (\partial_{x_j} \partial_{x_k} f(x))_{j,k=1,\dots,n}$$

„Hessesche Matrix von f in x “: Symmetrische $n \times n$ -Matrix nach dem Satz von Schwarz.

9.27. Lemma. Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in U$. Dann gilt

$$(1) \quad f(x + h) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(x) h, h \rangle + R_3(x, h),$$

wobei $R_3(x, h)/\|h\|^2 \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Beweis. Zunächst macht man sich klar, dass für reellwertige Funktionen ($m = 1$) gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=0} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= f(x) \\ \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(x) h_j = \langle \text{grad } f(x), h \rangle \\ \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha &= \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(x) h, h \rangle \end{aligned}$$

Dann schätzt man den Fehler ab.

◁

9.28. Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt $x \in U$ ein lokales Maximum für f , falls

(1) $f(x) \geq f(y)$ für alle y in einer Umgebung von x

Analog heißt x lokales Minimum, falls

(2) $f(x) \leq f(y)$ für alle y in einer Umgebung von x .

Extremum ist der Oberbegriff für Maximum oder Minimum.

Man spricht von einem isolierten Maximum/Minimum/Extremum, falls Gleichheit in (1) bzw. (2) nur für $x = y$ gilt.

9.29. Satz. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und x lokales Extremum für f . Dann ist $\text{grad } f(x) = 0$.

Beweis. Für $j = 1, \dots, n$ betrachte $g(t) = f(x + te_j)$. Da U offen ist, ist g für $-\varepsilon < t < \varepsilon$ definiert. Die Funktion g ist differenzierbar nach der Kettenregel und hat in 0 ein lokales Extremum. Es folgt: $\partial_{x_j} f(x) = g'(0) = 0$. \triangleleft

9.30. Definition. Es sei A selbstadjungierte Matrix. Dann ist $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$, somit $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$. Man nennt A

- positiv definit, falls $\langle Ax, x \rangle > 0 \forall x \neq 0$
- negativ definit, falls $\langle Ax, x \rangle < 0 \forall x \neq 0$
- indefinit, falls es sowohl ein x mit $\langle Ax, x \rangle > 0$ als auch ein y mit $\langle Ay, y \rangle < 0$ gibt.

Beispiel:

- $A = \text{Id}$ positiv definit: $\langle Ax, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 > 0 \forall x \neq 0$
- $A = -\text{Id}$ negativ definit: $\langle Ax, x \rangle = \langle -x, x \rangle = -\|x\|^2 < 0 \forall x \neq 0$.

9.31. Definitheit und Eigenwerte. Eine selbstadjungierte Matrix ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten nach einem Satz der Linearen Algebra. Dann gilt:

- A positiv definit \Leftrightarrow alle Eigenwerte > 0 .
- A negativ definit \Leftrightarrow alle Eigenwerte < 0 .
- A indefinit \Leftrightarrow es gibt sowohl positive als auch negative Eigenwerte.

9.32. Hurwitz-Kriterium. Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine reelle, symmetrische $n \times n$ -Matrix. Dann gilt:

$$A \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

9.33. Satz. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in U$ mit $\text{grad } f(x) = 0$.

- Ist $(\text{Hess } f)(x)$ positiv/negativ definit, so hat f in x ein isoliertes Minimum/Maximum.
- Ist $(\text{Hess } f)(x)$ indefinit, so hat f in x kein lokales Extremum.

Beweis. Nach 9.27 ist

$$f(x+h) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(x)h, h \rangle + R_3(x, h),$$

wobei

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} R_3(x, h) / \|h\|^2 = 0.$$

Hier ist $\text{grad } f(x) = 0$. Ist $\text{Hess } f(x)$ positiv definit und $\lambda > 0$ der kleinste Eigenwert, so ist

$$\langle \text{Hess } f(x)h, h \rangle \geq \lambda \|h\|^2.$$

Andererseits existiert wegen (1) ein $\delta > 0$ mit

$$|R_3(x, h)| < \frac{\lambda}{4} \|h\|^2,$$

falls $\|h\| < \delta$. Es folgt:

$$f(x+h) > f(x) + \frac{\lambda}{4}\|h\|^2 > f(x), \quad \|h\| < \delta.$$

Analog schließen wir für negativ definites $\text{Hess } f(x)$.

(b) Wähle einen Eigenvektor h_+ zu einem positiven Eigenwert λ_+ , und einen Eigenvektor h_- zu einem negativen Eigenwert λ_- , von $\text{Hess } f(x)$ mit $\|h_{\pm}\| = 1$.

Dann ist $\langle \text{Hess } f(x)h_+, h_+ \rangle = \lambda_+ \|h_+\|^2 = \lambda_+$ und $\langle \text{Hess } f(x)h_-, h_- \rangle = \lambda_-$.

Für $t \rightarrow 0$ betrachte $f(x+th_+)$ und $f(x+th_-)$. Es gilt

$$f(x+th_{\pm}) - f(x) = \lambda_{\pm}t^2 + o(t^2).$$

Für kleines t ist dieser Ausdruck positiv bei “+” und negativ bei “-”. ◁

Lokale Invertierbarkeit und Lösen von Gleichungen.

9.34. Definition. Eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ zwischen zwei offenen Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt (C^1) -Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig differenzierbar sind.

9.35. Lemma. Ist $f : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus, so ist $f'(x)$ invertierbar für jedes $x \in U$ und

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}.$$
◁

Beweis. Die Identität $f^{-1}(f(x)) = x$ liefert beim Ableiten: $(f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) = \text{Id}$.

9.36. Frage. Wäre es sinnvoll, den Begriff des Diffeomorphismus $f : U \rightarrow V$ für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^k$ einzuführen?

Antwort: Nein, denn wie oben wäre $f'(x)$ invertierbar. Dies geht nur für $k = n$. ◁

9.37. Satz von der lokalen Invertierbarkeit. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ferner sei $a \in U$ und $f'(a)$ invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen $V(\subseteq U)$ von a und V' von $f(a)$ in \mathbb{R}^n mit folgenden Eigenschaften

- (i) $f : V \rightarrow V'$ ist bijektiv.
 - (ii) Die Umkehrabbildung $g = f^{-1} : V' \rightarrow V$ ist ebenfalls differenzierbar, und (vgl. Satz 6.7)
- $$(1) \quad g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}, \quad x \in V.$$

Die Einschränkung von f auf V ist also ein Diffeomorphismus (‘ f ist lokal ein Diffeomorphismus’).

Bemerkung: Zeigt man die Differenzierbarkeit von g , so folgt (1) sofort wie in 9.35.

9.38. Beispiel. Die Polarkoordinatenabbildung in \mathbb{R}^2 . Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

Hier ist

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist stets invertierbar, denn $\det f'(r, \varphi) = r > 0$.

Also ist für jeden Wert von $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ die Abbildung f lokal invertierbar; es ist

$$(1) \quad (f^{-1})'(f(r, \varphi)) = (f'(r, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Setzt man $x = f_1(r, \varphi) = r \cos \varphi$, $y = f_2(r, \varphi) = r \sin \varphi$, so ist $f^{-1}(r, \varphi) = (x, y)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$ und (1) schreibt sich

$$(f^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Beachte: Die Abbildung f ist jedoch nicht injektiv (also nicht überall invertierbar), da für alle (r, φ) gilt: $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$.

9.39. Implizite Funktionen. Viele Beziehungen zwischen Größen x und y in den Naturwissenschaften sind als *explizite* Funktionen gegeben, d.h. von der Form $y = f(x)$. Manchmal hat man jedoch lediglich eine Beziehung der Form $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, wobei $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine gegebene Funktion ist, $m \leq n$, d.h. man hat m Gleichungen für die n Unbekannten x_1, \dots, x_n .

Frage: Kann man m der Unbekannten daraus bestimmen? D.h., kann man die Menge $L = \{x \in U : F(x) = 0\}$ darstellen in der Form $L = \{(y, g(y)) : y \in U'\}$ für ein geeignetes $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$?

9.40. Beispiel. Global geht das in der Regel nicht. Für $F(x, y) = x - y^2$ ist die Menge $L = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ eine (liegende) Parabel. Wir können x global als Funktion von y darstellen: $L = \{(x, y) : y \in \mathbb{R}, x = y^2\} = \{(y^2, y) : y \in \mathbb{R}\}$, aber es gibt keine Funktion $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$ mit $L = \{(x, g(x)) : x \in U'\}$, da wir zu $x < 0$ gar keine Lösung erhalten und zu $x > 0$ zwei: $L = \{(x, y) : y = \pm\sqrt{x}, x \geq 0\}$. Aber lokal, in der Umgebung $V = V_1 \times V_2$ eines Punktes (x_0, y_0) mit $x_0 > 0$ auf L können wir L als Graph darstellen, entweder durch $L \cap V = \{(x, \sqrt{x}) : x \in V_1\}$ oder $L \cap V = \{(x, -\sqrt{x}) : x \in V_1\}$, je nachdem ob $V_2 \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ oder $V_2 \subseteq \mathbb{R}_{<0}$.

9.41. Satz (Satz über die implizite Funktion). Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Für einen Punkt $(a, b) \in U$ sei $F(a, b) = 0$ und die $m \times m$ -Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ von a und $V_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ von b sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2$ mit $F(x, g(x)) = 0$.

Ferner gilt: Ist $(x, y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x, y) = 0$, so ist $y = g(x)$ (d. h. die Gleichung ist eindeutig nach y auflösbar). Es gilt

$$(1) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)).$$

9.42. Beispiel. Wir betrachten die 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9 \\ (2) \quad & x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9. \end{aligned}$$

Sie beschreiben die Schnittmenge zweier Kugeln mit Radius 3 um $(0, 0, 1)$ bzw. $(0, 0, -1)$. Aus (1) und (2) erhalten wir (Differenz) sofort $z = 0$ und dann $x^2 + y^2 = 8$. Die Menge $L = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ ist also der Kreis um den Ursprung in der (x, y) -Ebene mit Radius $\sqrt{8}$.

Lokal können wir die Punkte aus L als Graph über x (für $-\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$) bzw. über y darstellen (für $-\sqrt{8} < y < \sqrt{8}$); nie als Funktion von z .

Was sagt der Satz von der impliziten Funktion? Hier ist

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 9 \\ x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - 9 \end{pmatrix}$$

und

$$F'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2(z - 1) \\ 2x & 2y & 2(z + 1) \end{pmatrix}.$$

Die erste und die zweite Spalte von F' sind linear abhängig. Die zweite und die dritte Spalte sind linear unabhängig, falls $y \neq 0$; die erste und dritte Spalte sind linear unabhängig, falls $x \neq 0$;

Nach dem Satz können wir also lokal y und z als Funktion von x darstellen, sofern $y \neq 0$ (d.h. $x \neq \pm\sqrt{8}$; das ist die Standard-Variante). Andererseits kommt es auf die Reihenfolge der Variablen nicht an. Wir können alternativ x und z als Funktion von y darstellen, sofern $x \neq 0$.

9.43. Satz (Extrema unter Nebenbedingungen). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar,

$$M = \{x \in U : g(x) = 0\}$$

und $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$ ein Punkt mit $\text{Rang}(g'(a)) = k$ (also maximal). Ferner sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die in a ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ einnimmt.

(Das heißt, es gibt eine Umgebung U von a derart, dass entweder $f(a) \leq f(x) \forall x \in M \cap U$ oder $f(a) \geq f(x) \forall x \in M \cap U$.)

Dann existiert $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ (die λ_k heißen Lagrangesche Multiplikatoren) so, dass

$$\text{grad } f(a) = \lambda g'(a).$$

9.44. Bemerkung. Wann sind wir sicher, dass f auf M ein Extremum hat?

In Analysis A hatten wir gesehen, dass eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

Die Verallgemeinerung für höhere Dimensionen lautet: Eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an. Dabei ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^n kompakt, wenn sie *abgeschlossen* und *beschränkt* ist.

Abgeschlossen nennt man eine Menge, wenn ihr Komplement offen ist. Eine Nullstellenmenge einer stetigen Funktion wie in Satz 9.43 ist stets abgeschlossen. Ebenso ist eine Menge der Form $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq 0\}$ mit stetigem h abgeschlossen.

Beschränkt heißt sie, wenn sie in einer großen Kugel $B(0, R)$, R groß, enthalten ist.

Unter den Voraussetzungen von Satz 9.43 ist also nur noch Beschränktheit nachzuprüfen.

9.45. Beispiel. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1, z)$.

Klar: f, g sind stetig differenzierbar. Die Menge $M = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$ ist gerade der Einheitskreis in der (x, y) -Ebene, insbesondere also beschränkt. Ferner

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Bemerkung 9.44 wissen wir, dass f auf M ein Maximum und ein Minimum hat.

Auf M hat g' den Rang 2, da wegen $x^2 + y^2 = 1$ stets $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. Nach 9.43 existiert $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ mit

$$\text{grad } f(a) = \lambda g'(a)$$

also

$$(1, 1, 1) = (\lambda_1 \cdot 2x, \lambda_1 \cdot 2y, \lambda_2).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2x\lambda_1 = 1 \\ (2) \quad & 2y\lambda_1 = 1 \\ (3) \quad & \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

Ferner ist wegen der Nebenbedingung

$$\begin{aligned} (4) \quad & x^2 + y^2 = 1 \\ (5) \quad & z = 0. \end{aligned}$$

Wegen (1) ist $\lambda_1 \neq 0$, (1) und (2) liefern dann $x = y$, (4) liefert dann $x = y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, (5) liefert $z = 0$. Wir haben also zwei Kandidaten: $a_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$ und $a_2 = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$. Einsetzen liefert $f(a_1) = \sqrt{2}$, $f(a_2) = -\sqrt{2}$. Somit ist a_1 das Maximum und a_2 das Minimum von f unter der Nebenbedingung g .

10. KURVEN

Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

10.1. Definition.

- (a) Eine stetige Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt auch Kurve in \mathbb{R}^n .
- (b) Ist f in $t \in D$ differenzierbar, so heißt $f'(t) \in \mathbb{R}^n$ Tangentialvektor an die Kurve f in t .
- (c) Ist f differenzierbar und $f'(t_0) = 0$, so heißt t_0 singulärer Punkt. Sind alle Punkte nicht-singulär, so heißt f reguläre Kurve.

10.2. Beispiele.

- (a) Seien $a, b > 0$. Definiere $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$ Ellipse mit Halbachsen a und b . Tangentialvektor $f'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$. Regulär.
- (b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definiere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = a + vt$. Gerade durch a mit Richtungsvektor (=Tangentialvektor) v . Regulär.
- (c) Sei $r > 0$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definiere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$ Schraubenlinie. Regulär.
- (d) Sei $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion. Definiere $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $f(t) = (t, \varphi(t))$. Graph der Kurve. Regulär.

10.3. Schnittwinkel. Sind $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei reguläre Kurven und ist $f(t_1) = g(t_2)$ für geeignete $t_1 \in D_1, t_2 \in D_2$, so heißt die Zahl

$$\vartheta = \arccos \frac{(f'(t_1), g'(t_2))}{\|f'(t_1)\| \|g'(t_2)\|}$$

der Schnittwinkel von f und g im Punkt $f(t_1) = g(t_2)$.

10.4. Rektifizierbarkeit, Länge. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

eine Partition von $[a, b]$. Dann ist

$$\text{Pol}(f; t_0, \dots, t_N) = \sum_{j=1}^N \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|$$

die Länge des Polygonzugs durch $f(t_0) \dots f(t_k)$. Man nennt f rektifizierbar mit Länge $L = L(f)$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jede Partition $a = t_0 < \dots < t_k = b$ der Feinheit $< \delta$

$$|L(f) - \text{Pol}(f; t_0, \dots, t_N)| < \varepsilon.$$

10.5. Satz. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist f rektifizierbar mit der Länge

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beweisidee. Man zeigt (relativ einfach), dass

$$\left| \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| dt \right| \leq 2 \sup\{\|f'(t_j) - f'(t)\| : t \in [t_{j-1}, t_j]\} (t_j - t_{j-1}).$$

Das supremum liegt dabei beliebig nahe an Null, falls die Feinheit der Zerlegung hinreichend klein ist. \triangleleft

10.6. Beispiel. Seien $r, \alpha > 0$. Betrachte $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Dann ist $\|f'(t)\| = r$ für alle t nach 10.2(a), also

$$L(f) = \int_0^\alpha r \, dt = r\alpha.$$

Speziell: α ist Bogenlänge im Einheitskreis von dem Punkt $(1, 0)$ zu dem Punkt $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, bzw., komplex betrachtet, von 1 zu $e^{i\alpha}$.

10.7. Definition. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion und gilt

$$\begin{aligned} \varphi : [\alpha, \beta] &\rightarrow [a, b] \quad \text{ist bijektiv} \\ \varphi^{-1} : [a, b] &\rightarrow [\alpha, \beta] \quad \text{ist stetig differenzierbar,} \end{aligned}$$

so heißt φ Parametertransformation.

Beachte: Weil φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind, ist $\varphi'(t) \neq 0 \, \forall t$.

Weil φ bijektiv ist, ist φ entweder monoton wachsend oder monoton fallend, also entweder $\varphi' > 0$ und $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ (orientierungserhaltend) oder $\varphi' < 0$ und $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a$ (orientierungsumkehrend).

10.8. Satz. Die Kurvenlänge ist von der Parametrisierung unabhängig, d. h., sind φ, f wie in 10.7 und $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $F(t) = f(\varphi(t))$, so gilt

$$L(f) = L(F).$$

Beweis. Nach der Kettenregel ist $F'(t) = f'(\varphi(t)) \circ \varphi'(t)$, also für $\varphi' > 0$:

$$L(F) = \int_\alpha^\beta \|F'(t)\| \, dt = \int_\alpha^\beta \|f'(\varphi(t))\| \varphi'(t) \, dt = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt = L(f).$$

Für $\varphi' < 0$ analog. ◁

10.9. Bemerkung. Tangentialvektor: Wegen $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ gilt: gleiche Richtung für orientierungserhaltendes φ , entgegengesetzte für orientierungsumkehrendes φ .

Der Winkel zwischen zwei Kurven bleibt wegen obiger Identität gleich bei orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

11. KURVENINTEGRALE, VEKTORFELDER UND POTENTIALE

11.1. Definition/Erinnerung.

- (a) Eine Funktion $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein Vektorfeld.
- (b) Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt stückweise glatt, falls es eine Partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ von $[a, b]$ gibt mit der Eigenschaft, dass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$, $j = 1, \dots, N$, zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf $[t_{j-1}, t_j]$ fortsetzbar ist.

11.2. Definition. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stückweise glatte Kurve mit Bild $\gamma = \Gamma$ und $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wir definieren das Kurvenintegral von F über γ

$$(1) \quad \int_{\gamma} \langle F, dx \rangle$$

durch

$$\int_{\gamma} \langle F, dx \rangle = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Dabei ist die Partition wie oben.

11.3. Bemerkung.

- (a) Manchmal schreibt man statt $\int_{\gamma} \langle F, dx \rangle$ auch $\sum \int_{\gamma} F_i dx_i$.
- (b) Motivation aus Mechanik, wo Arbeit gegen ein Kraftfeld entlang der Kurve geleistet wird. Auf kleinen Stücken gilt $W = \vec{F} \cdot d\vec{x}$

11.4. Beispiel. In \mathbb{R}^2 sei $F(x, y) = (1, 1)$ und $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann ist

$$\int_{\gamma} \langle F, dx \rangle = \int_0^{\pi} \langle (1, 1), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_0^{\pi} -\sin t + \cos t dt = [\cos t + \sin t]_0^{\pi} = -2.$$

11.5. Lemma und Bemerkung. Das Integral $\int_{\gamma} \langle F, dx \rangle$ ist von der Kurvenparametrisierung unabhängig, solange die Orientierung erhalten bleibt.

Man schreibt daher in (1) oft \int_{Γ} statt \int_{γ} und spricht von der orientierten Kurve Γ . Die Parametrisierung muss sich der Leser selbst suchen; eine geschickte Wahl spart viel Arbeit.

Beweis. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ bijektiv und differenzierbar mit $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$, so ist

$$\begin{aligned} \int_c^d \langle F(\gamma(\varphi(s))), (\gamma \circ \varphi)'(s) \rangle ds &= \int_c^d \langle F(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Ändern wir die Orientierung (d.h. $\varphi(c) = b, \varphi(d) = a$), so kehrt sich das Vorzeichen um. \triangleleft

11.6. Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Man sagt, F habe das Potential oder auch die Stammfunktion V auf U , falls $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion ist mit $\text{grad } V = F$.

11.7. Satz. Das Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ habe das Potential $V \in C^1(U, \mathbb{R})$. Dann gilt für jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Bild $\gamma = \Gamma \subseteq U$

$$\int_{\Gamma} \langle F, dx \rangle = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

(Potential am Endpunkt – Potential am Anfangspunkt).

Beweis. O.B.d.A. γ glatt

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \langle F, dx \rangle &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b \langle \text{grad } V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b (V \circ \gamma)'(t) dt \\
 &= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)).
 \end{aligned}$$

◁

11.8. Folgerung. Hat F ein Potential $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, so gilt für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve, die in U verläuft,

$$\int_{\Gamma} \langle F, dx \rangle = 0.$$

11.9. Beispiel. Das Vektorfeld F aus 11.4 hat das Potential $V(x, y) = x + y$. Es gilt also $\int_{\gamma} \langle F, dx \rangle = V(\gamma(\pi)) - V(\gamma(0)) = V(-1, 0) - V(1, 0) = -2$.

Frage: Wann hat F ein Potential?

11.10. Notwendige Bedingung. Hat $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Potential $V \in C^2(U, \mathbb{R})$, so ist

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \text{„Integrabilitätsbedingung“}$$

nach dem Satz von Schwarz, da $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$.

11.11. Beispiel. Die Integrabilitätsbedingung ist nicht hinreichend. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachte

$$F(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}.$$

Eine kurze Rechnung zeigt: Dieses Vektorfeld ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und erfüllt die Integrabilitätsbedingung. Als Kurve wählen wir $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. $\Gamma = \text{Bild } \gamma$ ist eine geschlossene, glatte Kurve (der Einheitskreis), aber

$$\int_{\gamma} (F_1 dx + F_2 dy) = \int_{\gamma} (-y dx + x dy) = \int_0^{2\pi} (-\sin t (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t) dt = 2\pi.$$

Daher kann F nach 11.8 kein Potential haben.

11.12. Definition. Wir nennen eine offene Teilmenge U von \mathbb{R}^n ein Gebiet, falls sich je zwei Punkte aus U durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg in U verbinden lassen (‘wegzusammenhängend’).

11.13. Satz. Sei U ein Gebiet und $V_1, V_2 \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit

$$\text{grad } V_1 = \text{grad } V_2.$$

Dann ist $V_1 - V_2 = \text{const}$. Genau dann liefern also zwei Potentiale dasselbe Gradientenfeld, wenn sie bis auf eine Konstante übereinstimmen.

Beweis. Wähle einen festen Punkt $y_0 \in U$. Nun sei y ein beliebiger Punkt in U , $\gamma : [a, b]$ eine stückweise glatte Kurve von y_0 nach y . Dann gilt nach 11.7

$$V_1(y) - V_1(y_0) = \int_{\gamma} \langle \text{grad } V_1, dx \rangle = \int_{\gamma} \langle \text{grad } V_2, dx \rangle = V_2(y) - V_2(y_0).$$

Also $V_2(y) - V_1(y) = V_2(y_0) - V_1(y_0) = \text{const } \forall y$.

11.14. Satz. Es sei U ein Gebiet in \mathbb{R}^n , F ein stetiges Vektorfeld auf U . Dann ist äquivalent

- (i) Für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve ist $\int_{\gamma} \langle F, dx \rangle = 0$.
- (ii) F besitzt ein Potential V .

Man erhält V wie folgt: Man wählt einen festen Punkt $x_0 \in U$. Zu $x \in U$ wählt man einen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ_x von x_0 nach x und setzt

$$V(x) = \int_{\gamma_x} \langle F, dx \rangle.$$

wählt,

Beweisidee. Nach 11.8 ist nur (i) \Rightarrow (ii) zu zeigen.

Rechne nach, dass die Formel ein Potential definiert. Wegen (i) hängt es nicht von der Wahl des Wegs ab. \triangleleft

11.15. Definition. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, falls es einen Punkt $x_0 \in U$ (den sogenannten Sternpunkt) gibt, so dass für jedes $x \in U$ die Strecke $\{x_0 + t(x - x_0) : 0 \leq t \leq 1\}$ ganz in U liegt.

11.16. Beispiel.

- (a) Kugeln sind sternförmig.
- (b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ ist sternförmig mit Sternpunkt $(-1, 0)$.
- (c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig.
- (d) (Zeichnung)

11.17. Lemma. Ist U offen und sternförmig und erfüllt $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ die Integrabilitätsbedingung, so hat F auf U eine Stammfunktion.

11.18. Bemerkung. Statt ‘sternförmig’ genügt, dass U Gebiet ist und man jede stetige geschlossene Kurve in U auf einen Punkt zusammenziehen kann (‘einfach zusammenhängend’).

Beispiel: $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig, aber einfach zusammenhängend. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist weder sternförmig noch einfach zusammenhängend.

12. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

12.1. Definition.

- (a) Eine gewöhnliche Differentialgleichung (im Gegensatz zur partiellen) ist eine Gleichung der Form

$$F(t, x(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0, \quad t \in J,$$

für eine gesuchte Funktion $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, J Intervall. Dabei ist

$$F : U \subseteq J \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Funktion, in die die Werte von x und seinen Ableitungen eingesetzt werden. F kann Werte in \mathbb{R}^m annehmen, d.h., man hat m Gleichungen.

- (b) Die Differentialgleichung (Dgl) heißt explizit, falls sie nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist:

$$x^{(k)} = f(t, x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)).$$

- (c) Eine Dgl der Form $\sum_{j=0}^k A_j(t)x^{(j)} + f(t) = 0$ heißt linear; weiterhin heißt sie homogen, falls $f = 0$
inhomogen, falls $f \neq 0$.
- (d) Ist $x^{(k)} = f(t, x, \dots, x^{(k-1)})$ eine Dgl, $t_0 \in J$, so besteht die Anfangswertaufgabe (AWA) darin, eine Lösung x zu finden, deren erste $k - 1$ Ableitungen in t_0 die vorgegebenen Anfangswerte

$$x(t_0) = c_0, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = c_{k-1}$$

annehmen.

12.2. Beispiel. Bewegung eines Massepunktes unter dem Einfluss der Schwerkraft:

$$\text{Physik: } x''(t) = -g, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für $t_0 \in \mathbb{R}$ fest:

$$x'(t) - x'(t_0) = \int_{t_0}^t x''(s) ds = - \int_{t_0}^t g ds = -g(t - t_0).$$

Es folgt

$$x'(t) = -gt + c, \quad c = gt_0 + x'(t_0)$$

und

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t x'(s) ds = - \int_{t_0}^t (gs + c) ds = -\frac{1}{2}g(t^2 - t_0^2) + c(t - t_0) \\ x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d \end{aligned}$$

mit

$$d = x(t_0) + \frac{1}{2}gt_0^2 - ct_0 = x(t_0) + \frac{1}{2}gt_0^2 - gt_0^2 - x'(t_0)t_0.$$

Also hat die Lösung der Differentialgleichung die Form $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$, wobei c und d sich aus den Startwerten $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ berechnen lassen. Zu jeder Wahl von $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ gibt es genau eine Lösung.

Einige Lösungsverfahren.

12.3. Separation der Variablen/Trennung der Veränderlichen. Möglich für Differentialgleichungen der Form

$$x' = f(t)g(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

mit stetigen Funktionen f, g .

Fall I: $g(x_0) = 0 \Rightarrow$ Mögliche Lösung ist $x \equiv x_0$.

Fall II: $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Falls eine Lösung existiert, so ist auch $g(x(t)) \neq 0$ für t nahe t_0 wegen Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto g(x(t))$.

Dann gilt dort

$$(1) \quad \int_{t_0}^t f(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dy}{g(y)}.$$

Dies liefert eine implizite Gleichung der Form $G(t, x) = 0$. Auflösbar nach x ?

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{t_0}^t f(s) ds - \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)} \right] = -\frac{1}{g(x)} \neq 0,$$

folglich: ja.

12.4. Bemerkung. Ist $g(x_0) = 0$, so kann es u.U. vorkommen, dass man Lösungen der Form I und Lösungen der Form II oben zu einer Lösung zusammenstückeln kann.

12.5. Beispiel. $x' = \frac{t}{x}, x(t_0) = x_0 \neq 0$. Wir verwenden die Methode der Trennung der Veränderlichen mit $f(t) = t, g(x) = \frac{1}{x}$. Damit lautet die Gleichung 12.3(1)

$$\int_{t_0}^t s ds = \int_{x_0}^x y dy$$

Integration liefert die implizite Gleichung

$$\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$$

Es folgt

$$x^2 - t^2 = x_0^2 - t_0^2 = c$$

und damit

$$x = \pm \sqrt{c + t^2} \quad \text{falls } t^2 \geq -c \quad (\text{explizite Lösung})$$

12.6. Rückführung auf Separation der Variablen.

(a) $x' = f(at + bx + c)$. Setze $u(t) = at + bx(t) + c$. Dann folgt $u' = a + bx'(t) = a + bf(u)$. Finde u , liefere x .

(b) $x' = f(x/t)$. Setze $u = \frac{x}{t}$. Dann ist

$$u' = \frac{x't - x}{t^2} = \frac{1}{t} \left(x' - \frac{x}{t} \right) = \frac{1}{t} (f(u) - u).$$

Finde u mit Separation der Variablen.

12.7. Lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

$$\begin{aligned} x' + a(t)x &= f(t) & f \equiv 0: & \text{homogen, sonst inhomogen} \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

- (a) Homogene Differentialgleichung. Ist $x_0 = 0$, so ist $x(t) \equiv 0$ eine Lösung. Ist hingegen $x_0 \neq 0$, so gilt (Stetigkeit) zumindest für t nahe t_0 : $x(t)/x_0 > 0$. Es folgt:

$$\ln \frac{x}{x_0} = - \int_{t_0}^t a(s) ds, \quad \text{also}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Somit existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$, und $x(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

- (b) Inhomogene Differentialgleichung. Ansatz: Variation der Konstanten.
Setze

$$F(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Dann ist $F(t) \neq 0$ für jedes t , $F'(t) + a(t)F(t) = 0$ und $F(t_0) = 1$.

Wir machen den Ansatz: $x(t) = C(t)F(t)$.

Damit $x(t_0) = x_0$ ist, muss $C(t_0) = x(t_0) = x_0$ gelten. Ferner erhalten wir:

$$f = x' + ax = (CF)' + aCF = C'F + CF' + aCF = C'F + C(F' + aF) \stackrel{F' + aF = 0}{=} C'F.$$

Somit ist

$$C'(t) = \frac{f(t)}{F(t)} = f(t) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Es folgt

$$C(t) = \int_{t_0}^t f(r) e^{\int_{t_0}^r a(s) ds} dr + C(t_0).$$

und damit

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^t f(r) e^{\int_{t_0}^r a(s) ds} dr + x_0 \right) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

12.8. Bemerkung. Verzichtet man auf das Stellen einer Anfangsbedingung, so ist $x' + a(t)x = f(t)$ eine inhomogene lineare Gleichung für die Funktion x , und man erhält die Regel:

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung = allgemeine Lösung der homogenen Gleichung + spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

12.9. Bernoullische Differentialgleichung.

$$x' + a(t)x + b(t)x^r = 0, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Spezialfälle:

- $r = 0$ $x' + a(t)x + b(t) = 0$ inhomogen linear.
- $r = 1$ $x' + (a(t) + b(t))x = 0$ homogen linear.

Also $r \neq 0, 1$. Wähle $k = 1 - r, z := x^k \Rightarrow x = z^{1/k}$. Die Differentialgleichung wird dann zu

$$\frac{1}{k} z^{1/k-1} z' + a(t) z^{1/k} + b(t) z^{r/k} = 0.$$

Multiplikation mit $kz^{\frac{k-1}{k}}$ liefert die leicht lösbare inhomogen lineare Dgl

$$z' + ka(t)z + kb(t) = 0.$$

oction auf Systeme erster Ordnung.

12.10. Lemma. Jede explizite Differentialgleichung k -ter Ordnung (ggf. mit Anfangswerten $x(t_0) = c_1, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = c_k$) ist äquivalent zu einem System von k Differentialgleichungen erster Ordnung (ggf. mit Anfangswert $(x_1(t_0), \dots, x_k(t_0)) = (c_1, \dots, c_k)$). Die Standardform einer expliziten Differentialgleichung ist also

$$x' = f(t, x) \quad (\text{ggf. mit Anfangsbedingung } x(t_0) = x_0)$$

mit einer Funktion $f : U \subseteq J \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $x_0 \in \mathbb{R}^k$.

Beweis. Es sei $x^{(k)} = g(t, x, \dots, x^{(k-1)})$ eine explizite Differentialgleichung. Wir setzen

$$x_1 = x; \quad x_2 = x'; \quad \dots \quad x_k = x^{(k-1)}.$$

Dann ist das Lösen von $x^{(k)} = g(t, x, \dots, x^{(k-1)})$ mit den Anfangswerten $x(t_0) = c_1, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = c_k$ äquivalent zum Lösen von

$$x'_1 = x_2; \quad \dots \quad x'_{k-1} = x_k; \quad x'_k = g(t, x_1, \dots, x_k)$$

mit den Anfangswerten $x_1(t_0) = c_0, \dots, x_k(t_0) = c_{k-1}$. Fasst man x_1, \dots, x_k als Vektor x auf und c_1, \dots, c_k als Vektor c , so lautet das letzte System

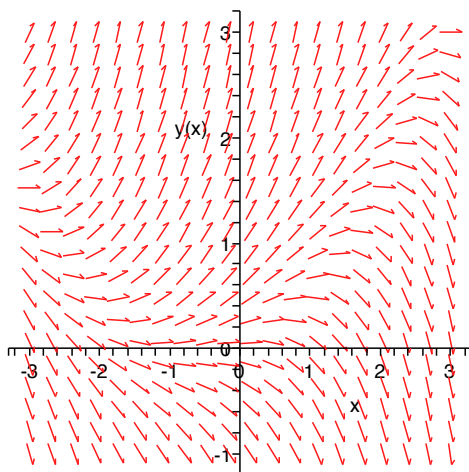
$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = c,$$

mit $f(t, x) = (x_2, \dots, x_k, g(t, x_1, \dots, x_k))$ und $c = (c_0, \dots, c_{k-1})$. ◁

Visualisierung.

12.11. Richtungsfeld. Eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$, $(t, x) \in U$, hat in t_0 die Steigung $f(t_0, x(t_0))$. An jedem Punkt (t, x) heften wir das ‘Steigungselement’, ein Geradenstückchen mit der Steigung $f(t, x)$ an und erhalten so das sog. Richtungsfeld. Die Lösungen der Differentialgleichung sind genau diejenigen Kurven, die sich an das Richtungsfeld anschmiegen. Das folgende Diagramm zeigt das Richtungsfeld für $x' = \frac{1}{4}(-t - t^2 + 4x)$

Richtungsfeld



Numerische Verfahren. Es gibt eine Reihe von Verfahren, die die Lösung einer Differentialgleichung der Form $x' = f(t, x)$ liefern. (Bemerkung: Sie funktionieren nur dann richtig, wenn man sicher sein kann, dass eine eindeutig bestimmte Lösung existiert.) Am bekanntesten ist das folgende

12.12. Runge-Kutta-Verfahren. Man unterteilt das Intervall $[t_0, t_0 + a]$ in n gleiche Teile und setzt

$$t_k = t_0 + kh, \quad h = a/n.$$

Bekannt ist der Startwert (t_0, x_0) .

Nun geht man induktiv wie folgt vor:

Ist (t_k, x_k) gegeben, so setzt man

$$\begin{aligned} y_{k1} &= f(t_k, x_k); \\ y_{k2} &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}y_{k1}\right); \\ y_{k3} &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}y_{k2}\right); \\ y_{k4} &= f(t_k + h, x_k + hy_{k3}); \\ y_k &= \frac{1}{6}(y_{k1} + 2y_{k2} + 2y_{k3} + y_{k4}); \\ x_{k+1} &= x_k + hy_k. \end{aligned}$$

Der Fehler ist dann von Ordnung h^4 (oder besser).

Zur Erklärung: Man bestimmt x_{k+1} aus x_k , indem man zu x_k die Intervalllänge h , multipliziert mit einer gemittelten Steigung y_k , addiert. In das Mittel gehen vier Größen ein:

- y_{k1} ist die Steigung in t_k ;
- y_{k2} ist die geschätzte Steigung in $t_k + \frac{h}{2}$, mittels $x(t_k + \frac{h}{2}) \approx x(t_k) + \frac{h}{2}x'(t_k) \approx x_k + \frac{h}{2}f(t_k, x_k)$.
- y_{k3} ist ebenfalls geschätzte Steigung in $t_k + \frac{h}{2}$, diesmal jedoch mittels $x(t_k + \frac{h}{2}) \approx x(t_k) + \frac{h}{2}y_{k2}$.
- y_{k4} ist die mittels $x(t_k + h) \approx x_k + hy_{k3}$ geschätzte Steigung in $t_k + h$.

Existenz- und Eindeutigkeitsätze.

12.13. Satz. (Existenzsatz von Peano) Es sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $b > 0$. Setze

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Ist $f = f(t, x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so hat die Anfangswertaufgabe

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

mindestens eine Lösung auf dem Intervall $]t_0 - c, t_0 + c[$, wobei

$$c = \min \left\{ a, \frac{b}{A} \right\} \text{ und } A = \sup \{ \|f(t, x)\| : (t, x) \in D \}.$$

Beachte: Das sup existiert wegen Stetigkeit von f und Kompaktheit von D .

Ohne Beweis.

12.14. Satz. (Existenz und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf). Bezeichnungen und Annahmen von Satz 12.13. Zusätzlich sei f lipschitzstetig in x in folgendem Sinn: Es gibt ein $L \geq 0$ mit

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

Dann hat die Anfangswertaufgabe eine eindeutige Lösung auf dem Intervall $]t_0 - d, t_0 + d[$, wobei $d = \min \left\{ a, \frac{b}{A}, \frac{1}{L} \right\}$.

12.15. Bemerkung. Die Bedingung aus 12.14(b) ist stets erfüllt, wenn die Funktion f auf einer Umgebung von D nach x stetig differenzierbar ist; wegen der Kompaktheit von D ist dann nämlich $\|\partial_x f(t, x)\|$ beschränkt auf D und somit

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \sup\{\|\partial_x f(t, x)\|\} \|x_1 - x_2\|.$$

Beweisidee von 12.14. Es sei $J_0 = [t_0 - r, t_0 + r]$ für ein $0 < r < d$.

Schritt 1 Trick: Wir integrieren und sehen, dass x genau dann die AWA $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ auf J_0 löst, wenn x auf J_0 stetig ist und

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in J_0$$

gilt.

Schritt 2 Wir definieren die Folge von Funktionen (ϕ_0, ϕ_1, \dots) wie folgt:

ϕ_0 ist die Funktion mit dem konstanten Wert x_0 . Ist ϕ_k gegeben, so setzen wir

$$\phi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_k(s)) ds, \quad t \in J_0.$$

Man kann dann zeigen, dass diese Folge von Funktionen in dem Raum $C([t_0, t_0 + c])$ gegen die Lösung der AWA konvergiert. \triangleleft

12.16. Beispiel. Was schief gehen kann.

(a) Verlust der Eindeutigkeit:

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$x' = x^{2/3}, \quad x(t_0) = x_0 \text{ auf } \mathbb{R}.$$

Problem: $x \mapsto x^{2/3}$ nicht lipschitzstetig in 0. Ist z.B. $x_0 = 0$, so sieht man mit Separation der Variablen, dass für jede Wahl von t_1 und t_2 mit $t_2 < t_0 < t_1$ durch

$$x_{t_1, t_2}(t) = \begin{cases} (\frac{1}{3}(t - t_2))^3 & t < t_2 \\ 0 & t_2 \leq t \leq t_1 \\ (\frac{1}{3}(t - t_1))^3 & t > t_1 \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare (!) Funktion definieren, die die Differentialgleichung samt Anfangsbedingung erfüllt. Wir erhalten also unendlich viele Lösungen auf \mathbb{R} .

Für $x_0 \neq 0$ analog.

(b) Endliches Lösungsintervall. $x' = -x^2$, $x(t_0) = x_0$ ist stetig auf \mathbb{R} und lipschitzstetig auf jedem Teilintervall $[-R, R]$.

Für $x_0 \neq 0$ liefert Separation der Variablen

$$-\int_{x_0}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_{t_0}^t 1 ds,$$

also $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t - t_0$ bzw.

$$x = \frac{1}{t - (t_0 - \frac{1}{x_0})}.$$

Die Lösung ist also für $x_0 \neq 0$ in einer Umgebung von $t = t_0$ eindeutig bestimmt. Für $t \rightarrow t_0 - \frac{1}{x_0}$ gilt $|x(t)| \rightarrow \infty$, d. h. die Lösung „explodiert“ bei Annäherung an $t_0 - \frac{1}{x_0}$ („in endlicher Zeit“).

Das folgende Lemma zeigt, dass man das Wachstum kontrollieren kann:

12.17. Lemma. (Gronwall'sches Lemma) Es sei J ein Intervall, $t_0 \in J$. Ferner sei $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $g \geq 0$, und es gelte

$$g(t) \leq A \left| \int_{t_0}^t g(s) ds \right| + B, \quad t \in J$$

mit geeigneten $A, B \geq 0$. Dann gilt für alle $t \in J$

$$g(t) \leq B e^{A|t-t_0|}.$$

Beweis. Zunächst sei $t \geq t_0$. Wir betrachten die Funktion

$$G(t) = A \int_{t_0}^t g(s) ds + B.$$

Nach Annahme ist $G'(t) = Ag(t) \leq AG(t)$. Die SdV-Technik liefert sofort:

$$G(t) \leq G(t_0) e^{A(t-t_0)}.$$

Wegen $g \leq G$ folgt die Behauptung. Analog für $t \leq t_0$. ◁

12.18. Definition. Es sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, J, \tilde{J} Intervalle (nicht notwendig offen) und $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sowie $\tilde{x} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$ in U verlaufende Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$.

Man nennt \tilde{x} Fortsetzung von x , falls $J \subseteq \tilde{J}$ und $\tilde{x}|_J = x$. Eine Lösung heißt maximal, falls sie keine Fortsetzung auf ein echt größeres Intervall hat.

12.19. Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich x , falls zu jedem $(t, x) \in U$ eine Umgebung U_0 und eine Konstante L existiert mit

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad (t, x_1), (t, x_2) \in U_0.$$

12.20. Satz. Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, x_0) \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. x .

Dann existiert eine eindeutige maximale Lösung x_{\max} der Anfangswertaufgabe

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Sie ist definiert auf einem offenen Intervall $]t_-, t_+[$. Nur dann ist $t_+ \neq +\infty$, wenn für $x \nearrow t_+$ die Lösungskurve $(t, x(t))$ an den Rand des Gebiets U stößt oder wenn $\lim_{t \nearrow t_+} \|x_{\max}(t)\| = +\infty$ ist. Analog für t_- .

Kurz: Die Lösungskurve $t \mapsto (t, x_{\max}(t))$ lässt sich solange fortsetzen, bis sie entweder explodiert oder an den Rand von U läuft. Oder: Die Lösungskurve verlässt (in jeder Richtung) jede kompakte Teilmenge von U .

12.21. Bemerkung. Verzichtet man auf die Lipschitzbedingung, so gilt – bis auf die Eindeutigkeit der Lösung – die Aussage des obigen Satzes ebenfalls.

Kurvenscharen und Orthogonaltrajektorien.

12.22. Kurvenscharen und Differentialgleichungen. Durch die Gleichung

$$(1) \quad F(t, x, c) = 0$$

sei eine Kurvenschar in \mathbb{R}^2 gegeben, die durch c parametrisiert ist, z.B. die Parabelschar $x - ct^2 = 0$, $c \in \mathbb{R}$. Gemeint: Für jedes c ist eine Kurve $x_c = x_c(t)$ definiert, die (1) erfüllt, z.B. $x_c(t) = ct^2$. Wir lösen nach c auf:

$$(2) \quad c = f(x, t); \quad \text{im Beispiel: } c = \frac{x}{t^2} \text{ für } t \neq 0.$$

Ableiten nach t liefert die Differentialgleichung

$$(3) \quad 0 = \frac{d}{dt} [f(x(t), t)] = \partial_x f(x(t), t) x'(t) + \partial_t f(x(t), t);$$

im Beispiel: $0 = \frac{x'}{t^2} - 2\frac{x}{t^3}$ bzw. $x' = 2x/t$ für $t \neq 0$.

Jede Lösung von (2) erfüllt dann (3) und umgekehrt.

12.23. Beispiel. Hyperbelschar $F(t, x, c) = t^2 - x^2 - c = 0$. Liefert die Dgl $2t - 2xx' = 0$, also für $x \neq 0$ die Differentialgleichung $x' = t/x$.

12.24. Orthogonaltrajektorien. Es seien F und f wie oben.

Eine Kurve, die jede der Kurven der Schar orthogonal schneidet, heißt *Orthogonaltrajektorie*. Man findet eine solche Kurve (lokal) wie folgt. Wir beschreiben die Kurvenschar lokal durch die Differentialgleichung 12.22(3). Diese sei von der Form $x' = h(t, x)$.

Die Kurve $t \mapsto (t, x(t))$ hat die Ableitung $(1, x'(t)) = (1, h(t, x))$. Damit die Orthogonaltrajektorie $t \mapsto (t, y(t))$ darauf senkrecht steht, muss sie die Ableitung $(1, y') = (1, -\frac{1}{h(t, x)})$ haben.

Wir erhalten daher als Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorie

$$y' = -\frac{1}{h(t, y)}.$$

12.25. Beispiel.

- (a) Die Orthogonaltrajektorie zu der Hyperbelschar aus 12.23 hat die Differentialgleichung $x' = -x/t$. Für $t_0 \neq 0$, $x_0 \neq 0$ erhält man mit Separation der Variablen für $t/t_0 > 0$ und $x/x_0 > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dy}{y} &= - \int_{t_0}^t \frac{ds}{s} \\ \Rightarrow \ln \frac{x}{x_0} &= \ln \frac{t_0}{t} \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{t_0 x_0}{t}. \end{aligned}$$

- (b) Die Orthogonaltrajektorie zur Parabelschar aus 12.23 hat die Dgl $x' = -\frac{t}{2x}$. Separation der Variablen liefert für $x_0, t_0 \neq 0$

$$x(t)^2 - x_0^2 = \frac{1}{2}(t_0^2 - t^2) \quad \text{bzw.} \quad x(t)^2 + \frac{1}{2}t^2 = x_0^2 + \frac{1}{2}t_0^2 \quad (\text{Ellipse}).$$

12.26. Die Differentialgleichung $x'' = f(x)$. Motivation: Physik: Bewegung eines Teilchens unter Kraft f , die nicht von t abhängt.

Sei $f \in C(J, \mathbb{R})$, $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a \in J$. Definiere

$$U : J \rightarrow \mathbb{R} \quad U(x) = - \int_a^x f(y) dy$$

(Bedeutung: potentielle Energie). Dann haben wir die Differentialgleichung

$$x''(t) = -U'(x(t)).$$

Wir wissen nach Peano: Lokal existiert eine Lösung. Multipliziere mit $x'(t)$:

$$\begin{aligned} x''(t)x'(t) &= -U'(x(t))x'(t) \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(x')^2 \right)' &= -(U(x))' \\ (1) \quad \Rightarrow \frac{1}{2}(x')^2 + U(x) &= \text{const} = E \quad (\text{Gesamt - Energie}). \end{aligned}$$

Speziell: Alle Bahnen laufen in Bereichen, wo $U(x) \leq E$ ist. Es gilt

$$x' = \pm \sqrt{2(E - U(x))}$$

(je nachdem, ob im Beobachtungsintervall $x'(t) \geq 0$ oder $x'(t) \leq 0$ ist). Separation der Variablen für Startwert $x(t_0) = x_0$

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{2(E - U(y))}} dy = t - t_0.$$

Auflösen nach x liefert Lösung.

Nette Beobachtung: Das Integral links liefert die Zeit, die das Teilchen braucht, um von $x(t_0)$ nach $x(t)$ zu kommen.

13. NORM VON MATRIZEN. EXPONENTIALABBILDUNG

Norm von Matrizen. Erinnerung. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Die Norm $\|z\|$ eines Vektors $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ ist definiert durch

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}.$$

Allgemein ist eine Norm auf einem \mathbb{K} -Vektorraum X eine Abbildung $x \mapsto \|x\|$ mit

- (N1) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$; $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- (N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$.

13.1. Definition. Die Norm einer Matrix in $\text{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$ ist definiert durch:

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

Ohne Beweis: Das supremum ist stets $< \infty$. Es stimmt überein mit

$$\sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} \quad \text{und} \quad \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}.$$

Damit gilt automatisch: $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ für alle x .

13.2. Lemma.

- (a) $\|\cdot\|$ ist Norm auf dem Vektorraum der $m \times n$ -Matrizen.
- (b) Für $A \in \text{Mat}_{mk}(\mathbb{K})$ und $B \in \text{Mat}_{kn}(\mathbb{K})$ ist $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- (c) Die Norm der Einheitsmatrix ist 1.

Beweis. (a)

- (i) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ klar
- (ii) $\|(\lambda A)x\| = |\lambda| \|Ax\|$, also $\|\lambda A\| = \sup \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} \stackrel{!}{=} |\lambda| \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \|A\|$.
- (iii) $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$, daher

$$\|A+B\| = \sup \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right\} \leq \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|.$$

- (b) $\|(AB)x\| \stackrel{\text{def}}{=} \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$.

(c) Klar. ◁

13.3. Satz. Der Vektorraum der $m \times n$ -Matrizen ist vollständig mit der obigen Norm, d.h. jede Cauchyfolge bezüglich der Norm aus 13.1 hat einen Grenzwert.

Mit anderen Worten: Ist (A_j) eine Folge von Matrizen mit $\|A_j - A_k\| \rightarrow 0$ für $j, k \rightarrow \infty$, so existiert eine Matrix A mit $\|A_j - A\| \rightarrow 0$. Dabei ist (A_j) genau dann eine Cauchy-Folge, wenn an jeder Position (i, k) die Einträge eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} bilden.

(ohne Beweis)

Wir können nun mit $n \times n$ -Matrizen fast wie mit Zahlen operieren.

Exponentialfunktion von Operatoren.

13.4. Satz. Es sei $A \in \text{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$. Wir setzen

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

- (a) Die Reihe für e^{tA} konvergiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ absolut in $\text{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$, d.h. $\sum \frac{\|(tA)^k\|}{k!}$ konvergiert in \mathbb{R} .
- (b) Die Funktion $t \mapsto e^{tA}$ ist differenzierbar (also auch stetig) auf \mathbb{R} , und $(e^{tA})' = A e^{tA} = e^{tA} A$.
- (c) Ist $B \in \text{Mat}_{nn}(\mathbb{K})$ mit $AB = BA$, so ist $e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}$ für alle t .

Beweis. Dies ist eine Potenzreihe mit Koeffizienten in $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$. Ihr Konvergenzradius ist unendlich: Wegen 13.2(b) ist $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ und somit

$$\lim \sqrt[k]{\|A^k\|/k!} \leq \|A\| \lim \sqrt[k]{1/k!} = 0.$$

Wir erhalten sofort (a).

(b) Wie in Kapitel 8: Potenzreihen sind (bel. oft) differenzierbar und können gliedweise abgeleitet werden

$$(e^{tA})' = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{t^{k-1}}{k!} A^k = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

(c) Vertauschen A und B , so kann man $e^{tA} e^{tB}$ wie im Fall komplexer Zahlen mit dem Cauchyprodukt und dem binomischen Lehrsatz berechnen, s. 4.18(b) aus Analysis A. \triangleleft

13.5. Frage. Wie berechnet man e^{tA} für ein $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$? Wichtigstes Hilfsmittel ist die Jordan-Zerlegung:

13.6. Erinnerung: Jordansche Normalform. Es sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ und $f_A = \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{n_j}$ mit paarweise verschiedenen λ_j das charakteristische Polynom. Dann gibt es Basen B_j von $\text{Kern}(\lambda_j \text{Id} - A)^{n_j}$ so, dass für $B = (B_1, \dots, B_r)$ gilt

$${}_B A_B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die $J_j, j = 1, \dots, r$ obere Dreiecksmatrizen von folgender Gestalt:

$$J_j = \begin{pmatrix} J_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{jk_j} \end{pmatrix}$$

wobei die J_{jk} (die sog. Jordan-Kästchen) quadratische Matrizen von der Form

$$J_{jk} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

sind. Bis auf die Reihenfolge der Kästchen ist die Zerlegung eindeutig. Dann ist

$$J = {}_B A_B = T^{-1} A T$$

mit $T = \text{kanon. Basis}(\text{Id})_B$. Beachte: In T stehen die Basisvektoren von B als Spaltenvektoren.

13.7. Lemma. Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Wir bestimmen dann e^{tJ} mit folgenden Resultaten:

(a) Seien J_1, \dots, J_r quadratische Matrizen und

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_r t} \end{pmatrix}.$$

(b) $e^{t(\lambda \text{Id} + B)} = e^{t\lambda \text{Id}} e^{tB} = e^{t\lambda} \text{Id} e^{tB} = e^{t\lambda} e^{tB}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

(c)

$$\exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^k/k! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $e^{(T^{-1}AT)t} = T^{-1}e^{tA}T.$

Beweis.

(a) Kästchensatz

(b) 13.4(c).

(c) Folgt weil

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$e^{t(T^{-1}AT)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (T^{-1}AT)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} T^{-1}A^jT = T^{-1}e^{tA}T.$$

◁

13.8. Folgerung. Es sei $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ eine Jordanbasis für $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $J = {}_B A_B$ die Jordan-Normalform. Dann ist

$$e^{tA} = T e^{Jt} T^{-1} \quad \text{mit } T = {}_{\text{kanon. Basis}} \text{Id}_B = \text{Spaltenmatrix}(w_1, \dots, w_n).$$

Dies ist bereits ein einfach zu berechnender Ausdruck. Es geht aber noch besser:

Man berechnet leicht $T e^{tJ}$, weil für ein beliebiges k -Tupel von n -Vektoren gilt:

$$(1) \underbrace{(v_1, \dots, v_k)}_{n \times k} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}}_{k \times k} = \underbrace{(v_1, t v_1 + v_2, \dots, \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 + \dots + v_k)}_{n \times k}.$$

Man erhält dann $T e^{Jt}$, indem man als v_1, \dots, v_k den zu einem Jordankästchen J_{jl} gehörigen Abschnitt aus der Basis B wählt und die Matrix auf der rechten Seite von (1) noch mit $e^{\lambda_j t}$ multipliziert.

14. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Im Folgenden sei

- $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall,
- $t_0 \in J, x_0 \in \mathbb{K}^n, (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C})$
- $A : J \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{K}^n)$ stetig,
- $f : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig.

14.1. Lemma. *Unter den obigen Annahmen ist die Anfangswertaufgabe*

$$x' - A(t)x = f, \quad x(t_0) = x_0$$

auf ganz J eindeutig lösbar.

Beweis. Wir wenden zunächst den Satz von Picard-Lindelöf an: $A(t)x$ und f sind stetig in t, x . Lipschitzstetig in x ? Ja, denn

$$\|(f(t) + A(t)x_1) - (f(t) + A(t)x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\|.$$

Also gibt es eine maximale Lösung, die wir bis zum Rand fortsetzen können, wenn sie nicht explodiert. Da $\|x'(t)\| \leq \|f(t)\| + \|A(t)\|\|x\|$ ist, kann das nicht passieren (Gronwall). \triangleleft

14.2. Lemma.

- Die Menge aller Lösungen von $x' - A(t)x = 0$ bildet einen n -dimensionalen Vektorraum, \mathcal{N}_A .
- Ist $u \in \mathcal{N}_A$ und $u(\bar{t}) = 0$ für ein $\bar{t} \in J$, so ist $u(t) = 0$ für alle t .

Beweis. (a) Klar: Vektorraum. Nach 14.2 ist eine Lösung in \mathcal{N}_A durch den Vektor $x(t_0) \in \mathbb{C}^n$ eindeutig bestimmt, also ist $x \mapsto x(t_0)$ ein Isomorphismus von \mathcal{N}_A nach \mathbb{C}^n und $\dim \mathcal{N}_A = \dim \mathbb{C}^n = n$.

(b) folgt aus 14.1. \triangleleft

14.3. Definition. Eine Basis $\{x^1, \dots, x^n\}$ von \mathcal{N}_A nennen wir ein Fundamentalsystem für die Dgl $x' = A(t)x$. Die daraus gebildete Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

heißt Fundamentalmatrix oder auch Fundamentalsystem. Im Allgemeinen ist ein FS nur schwer zu finden.

14.4. Satz. *Es sei Φ ein Fundamentalsystem für $x' = A(t)x$.*

- $x(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$ ist die Lösung der AWA $x' = A(t)x, x(t_0) = x_0$.
- Die Lösung der inhomogenen Anfangswertaufgabe $x' = A(t)x + f, x(t_0) = x_0$ ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}f(s)ds \\ &= \Phi(t) \left[\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}f(s)ds \right]. \end{aligned}$$

Beweis. (a) Es ist $x'(t) = \Phi'(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 = A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 = A(t)x(t)$ und $x(t_0) = x_0$.

(b) $x'(t) = A(t)\Phi(t) [\dots] + \Phi(t) [0 + \Phi(t)^{-1}f(t)] = A(t)x(t) + f(t); x(t_0) = x_0$. \triangleleft

Der Fall einer konstanten Matrix A . Nun sei zusätzlich A konstant in t .

14.5. Lemma. e^{tA} ist in Fundamentalsystem für die Dgl $x' = Ax$. Ein weiteres ist durch Te^{tJ} gegeben (Bezeichnungen von 13.8).

Beweis. e^{tA} ist eine invertierbare Matrix für jedes $t \in \mathbb{R}$. Ferner ist $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ nach 13.4. Damit ist e^{tA} ein Fundamentalsystem.

Aus $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$ folgt $Te^{tJ} = e^{tA}T$. Damit sind auch die Spaltenvektoren von Te^{tJ} linear unabhängig. Da

$$(Te^{tJ})' = TJe^{tJ} = T(T^{-1}AT)e^{tJ} = ATe^{tJ}$$

ist, bilden sie also ein Fundamentalsystem. <

14.6. Explizit. Man löst die AWA $x' = Ax, x(t_0) = x_0$ folgendermaßen: Man bestimmt Te^{tJ} nach 13.8. Nun berechnet man (z. B. mit Gauß-Algorithmus) die Lösung c von $Tc = x_0$ (d. h. $c = T^{-1}x_0$). Dann ist

$$x(t) = e^{tA}(e^{t_0A})^{-1}x_0 = e^{(t-t_0)A}x_0 = Te^{(t-t_0)J}T^{-1}x_0 = Te^{(t-t_0)J}c.$$

Auch die Lösung der inhomogenen Aufgabe vereinfacht sich:

$$x(t) = Te^{J(t-t_0)}T^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t Te^{J(t-s)}T^{-1}f(s)ds.$$

Wieder kann man $T^{-1}x_0$ bzw. $T^{-1}f(s)$ mit dem Gauß-Algorithmus bestimmen.

14.7. Reelle Lösungen. Ist A eine reelle Matrix, so ist man auch an *reellen* Lösungen von $x' = Ax$ interessiert.

Da A reell ist, hat das charakteristische Polynom reelle Koeffizienten. Also ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $f_A(\lambda) = 0$ auch $f_A(\bar{\lambda}) = 0$.

Es genügt dann, für alle reellen und jeweils *einen* der konjugiert komplex auftretenden Eigenwerte die Konstruktion aus 13.8 durchzuführen. Anschließend ersetzt man die zu den konjugiert komplexen Eigenwerten gehörigen Vektoren durch ihren Real- und ihren Imaginärteil und erhält damit ein reelles Fundamentalsystem.

Die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung. Nun seien $a_0, \dots, a_{n-1} : J \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen, $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ stetig.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)x^{(j)}(t) = f(t)$$

mit den Anfangswerten

$$(2) \quad x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Wir wandeln um in ein System, indem wir

$$x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$$

setzen. Wir erhalten als äquivalentes System

$$x' = Ax + F \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}.$$

Anfangswert: $X_0 = (x_0, \dots, x_{n-1})$.

Aus der bisherigen Theorie erhalten wir dann folgenden Satz:

14.8. Satz.

- (a) Die AWA (1), (2) ist auf J eindeutig lösbar.
 (b) Die Lösungen der homogenen Gleichung ((1) mit $f = 0$) bilden einen n -dimensionalen Vektorraum \mathcal{N} .

Als Fundamentalsystem bezeichnet man eine Basis von \mathcal{N} . Die Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x'_1 & & x'_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

heißt Fundamentalmatrix.

- (c) Die allgemeine Lösung von (1) (ohne Berücksichtigung von Anfangswerten) ist gegeben durch

$$x(t) = \sum_{j=1}^n d_j x_j(t) + \sum_{j=1}^n x_j(t) \int_{t_0}^t \frac{\det W_j(s)}{\det W(s)} ds, \quad d_j \in \mathbb{K} \text{ beliebig.}$$

Dabei ist $\det W$ die sog. Wronski-Determinante.

$$W = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W_j = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & f & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der AWA (1),(2) erhält man durch geeignete Wahl der d_j .

Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Nun seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ konstant. Wir können $J = \mathbb{R}$ wählen. Wir setzen zusätzlich $a_n = 1$ und nennen $\sum_{j=0}^n a_j \lambda^j$ das charakteristische Polynom für die homogene Differentialgleichung

$$\sum_{j=0}^n a_j x^{(j)} = 0$$

(es ist tatsächlich das charakteristische Polynom für die Matrix A vor 14.8).

14.9. Satz. Es sei $\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = \prod_{j=0}^r (\lambda - \lambda_j)^{n_j}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Dann bilden die Funktionen

$$x_{jk}(t) = t^k e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, r, k = 0, \dots, n_j - 1$$

ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung $\sum a_j x^{(j)} = 0$. Sind alle a_j reell, so erhält man ein reelles Fundamentalsystem, indem man für $\lambda_j = \alpha + i\beta$ mit $\beta_j \neq 0$ die Lösungen $t^k e^{(\alpha+i\beta)t}$ und $t^k e^{(\alpha-i\beta)t}$ durch $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$ und $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ ersetzt.

Die Lösungen der AWA erhält man als geeignete Linearkombination der x_{jk} .

15. RIEMANN-INTEGRAL

15.1. Intervalle und Zerlegungen. Es seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_j \leq b_j$ für $j = 1, \dots, n$. Wir nennen

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\}$$

ein kompaktes n -dimensionales Intervall und

$$I^\circ =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[= \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j < b_j, j = 1, \dots, n\}$$

sein Inneres.

Mit $|I|$ oder $\text{vol } I$ bezeichnen wir das n -dimensionale Volumen

$$|I| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Erinnerung. Eine Zerlegung Z eines Intervalls $[a, b]$ in \mathbb{R} ist eine endliche Punktmenge $\{t_0, \dots, t_N\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$. Die Feinheit $|Z|$ dieser Zerlegung ist definiert durch $|Z| = \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, N\}$.

Wir definieren nun die Zerlegung eines n -dimensionalen Intervalls I (wie oben) als ein Produkt $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$ wobei Z_j eine Zerlegung von $[a_j, b_j]$ ist. Die Zerlegung Z liefert eine Unterteilung des Intervalls I in endlich viele Intervalle I_1, \dots, I_K , die sich nur in den Seitenflächen schneiden. Es gilt:

$$I = \bigcup_{k=1}^N I_k, \quad I_j^\circ \cap I_l^\circ = \emptyset \quad (j \neq l), \quad |I| = \sum_{k=1}^K |I_k|.$$

Die Feinheit $|Z|$ von Z definiert man durch $|Z| = \max |Z_j|$.

15.2. Riemann-Integral. Es seien I, Z, I_j wie oben, $s = (s_1, \dots, s_K) \in I_1 \times \dots \times I_K$ ein so genannter Zwischenvektor. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} eine beschränkte Funktion, so nennen wir

$$S(f, Z, s) = \sum_{k=1}^K f(s_k) |I_k|$$

die Riemannsche Zwischensumme zur Zerlegung Z mit Zwischenvektor s .

Wir nennen f Riemann-integrierbar mit Riemann-Integral S , falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|S - S(f, Z, s)| < \varepsilon, \quad \text{falls } |Z| < \delta, s \text{ beliebig.}$$

In diesem Fall schreiben wir

$$S = \int_I f \, dx = \int_I f(x_1, \dots, x_n) \, d(x_1, \dots, x_n).$$

15.3. Satz. Es seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ Riemann-integrierbar und $c \in \mathbb{K}$. Dann sind $f + g$ und cf Riemann-integrierbar, und

$$\int_I f + g \, dx = \int_I f \, dx + \int_I g \, dx \quad \text{und} \quad \int_I cf \, dx = c \int_I f \, dx.$$

Sind f und g reellwertig, und ist $f \leq g$, so ist

$$\int_I f \, dx \leq \int_I g \, dx.$$

Beweis. Klar. ◁

15.4. Nullmengen. Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge* oder *Menge vom Maß Null*, falls man zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele kompakte Intervalle I_1, I_2, \dots findet mit der Eigenschaft dass

$$N \subseteq \bigcup I_j \text{ und } \sum |I_j| < \varepsilon.$$

15.5. Lemma.

- (a) *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*
- (b) *Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.*
- (c) *Ein Punkt in \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge.*
- (d) *Eine Menge der Form $\{x \in \mathbb{R}^n : x_j = c\}$ für ein festes j und $c \in \mathbb{K}$ ist eine Nullmenge.*

Beweis.

- (a) Es seien N_1, N_2, \dots Nullmengen und $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Zu jedem N_j finden wir abzählbar viele kompakte Intervalle $I_k^{(j)}$, $k = 1, 2, \dots$, mit

$$N_j \subseteq \bigcup_k I_k^{(j)}, \quad \text{und} \quad \sum_k |I_k^{(j)}| < \varepsilon/2^{j+1}.$$

Dann ist

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_k I_k^{(j)}, \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_k |I_k^{(j)}| < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^{j+1} = \varepsilon.$$

- (b) Klar.
- (c) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ mit $2^n \delta^n < \varepsilon$. Dann ist

$$y \in I_\delta = [y_1 - \delta, y_1 + \delta] \times \dots \times [y_n - \delta, y_n + \delta]$$

und $|I_\delta| < \varepsilon$.

- (d) Analog.

◁

15.6. Definition. Wir sagen von einer Eigenschaft, sie gelte fast überall, falls sie außerhalb einer Nullmenge gilt.

15.7. Lebesguesches Integrabilitätskriterium. Eine beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie fast überall stetig ist.

15.8. Folgerung. *Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.*

15.9. Satz von Fubini. $I_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ und $I_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ seien kompakte Intervalle. Dann ist $I = I_1 \times I_2$ kompaktes Intervall in \mathbb{R}^n , $n = n_1 + n_2$.

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ Riemann-integrierbar und existiert für jedes $y \in I_2$ das Integral

$$g(y) = \int_{I_1} f(x, y) dx,$$

so ist g auf I_2 Riemann-integrierbar, und es gilt:

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_2} g(y) dy = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x, y) dy \right) dx$$

15.10. Folgerung. *Ist I wie in 15.1 und $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, so gilt*

$$\int_I f(x) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1.$$

Ist f lediglich Riemann-integrierbar, so gilt diese Identität immer noch, sofern alle iterierten Integrale existieren.

Beweisidee zu 15.9: Wir betrachten den einfachen Fall $n_1 = n_2 = 1, n = 2$.

Zu $[a_1, b_1]$ wählen wir die Zerlegung $a = t_0 < t_1 < t_2 = b$ und zu $[a_2, b_2]$ die Zerlegung $a_2 = u_0 < u_1 < u_2 = b_2$. Als Zwischenvektor wählen wir $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2)$. Dann berechnen wir die Zwischensumme zu dieser Zerlegung. Wir erhalten für diesen einfachen Fall sofort die Aussage des Satzes von Fubini aus dem Distributivgesetz. Im allgemeinen Fall genauso. \triangleleft

15.11. Definition.

- (a) Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : B \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion. Wir definieren die Funktion $f_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ durch

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- (b) Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und I ein beschränktes Intervall, das B enthält. Wir nennen $f : B \rightarrow \mathbb{K}$ Riemann-integrierbar auf B , falls f_B auf I Riemann-integrierbar ist. Man sieht mit dem Lebesgue-Kriterium, dass dies nicht von der Wahl von I abhängt. In diesem Fall setzen wir

$$\int_B f(x) dx = \int_I f_B(x) dx.$$

- (c) Eine beschränkte Menge B heißt Jordan-messbar, falls ihre charakteristische Funktion χ_B , definiert durch

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall bezeichnen wir mit $|B|$ oder auch $\text{vol } B$ das Volumen

$$|B| = \int \chi_B dx.$$

15.12. Definition. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Rand ∂B von B ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ (nicht notwendig in B !), für die sich zu jedem $\varepsilon > 0$ Punkte $x_1 \in B$ und $x_2 \notin B$ finden lassen mit $x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon)$.

15.13. Satz. Die beschränkte Menge J ist genau dann Jordan-messbar, falls ihr Rand eine Nullmenge ist.

Beweis. B ist Jordan-messbar, wenn χ_B Riemann-integrierbar ist. Dies wiederum ist nach Lebesgue dazu äquivalent, dass sie fast überall stetig ist. Da die Unstetigkeitspunkte von χ_B gerade die Randpunkte von B sind, folgt die Behauptung. \triangleleft

15.14. Satz. Genau dann ist die Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{K}$ auf der Jordan-messbaren Menge B Riemann-integrierbar, wenn sie auf B fast überall stetig ist.

Beweis. Die Menge der Unstetigkeitspunkte von f_B in \mathbb{R}^n unterscheidet sich von der Menge der Unstetigkeitspunkte von f auf B höchstens durch die Nullmenge ∂B . \triangleleft

15.15. Satz. Es seien $f, g : B \rightarrow \mathbb{K}$ Riemann-integrierbar und $c \in \mathbb{K}$. Dann sind $f + g$ und cf Riemann-integrierbar, und

$$\int_B f + g dx = \int_B f dx + \int_B g dx \quad \text{und} \quad \int_B cf dx = c \int_B f dx.$$

Es ist

$$\left| \int_B f dx \right| \leq \int_B |f| dx.$$

Sind f und g reellwertig, und ist $f \leq g$, so ist

$$\int_B f dx \leq \int_B g dx.$$

Beweis. Klar. ◁

15.16. Lemma. Es seien A, B Jordan-messbar und f auf beiden Riemann-integrierbar.

- (a) Dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ Jordan-messbar.
- (b) Es sei $f : N \rightarrow \mathbb{K}$ Riemann-integrierbar und N eine Nullmenge. Dann ist $\int_N f dx = 0$.
- (c) Ist zusätzlich $A \cap B$ eine Nullmenge, so ist

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx.$$

Beweis. (a) Die Mengen $\partial(A \cup B)$, $\partial(A \cap B)$ und $\partial(A \setminus B)$ sind Teilmengen von $\partial A \cup \partial B$, also nach 15.5/15.13 Nullmengen.

(b) Es sei $|f| \leq C$. Dann ist

$$\left| \int_N f dx \right| \stackrel{15.15}{\leq} \int_N C dx \leq C |N| = 0.$$

(c) Folgt aus (a) und (b). ◁

15.17. Satz. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $f \geq 0$. Dann ist die Menge

$$M(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in B, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

eine Jordan-messbare Teilmenge des \mathbb{R}^n , und

$$|M(f)| = \int_B f dx.$$

Beweis. Als Riemann-integrierbare Funktion ist f beschränkt: $f \leq C$. Wähle ein kompaktes Intervall I mit $B \subseteq I$. Dann ist $M(f) \subseteq J = I \times [0, C]$, insbesondere also beschränkt.

Zeige nun dass $M(f)$ Jordan-messbar ist (weglassen).

Dann schließt man:

$$\begin{aligned} |M(f)| &= \int_J \chi_{M(f)} d(x, y) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_I \left(\int_0^C \chi_{M(f)}(x, y) dy \right) dx \\ &\stackrel{f_B \text{ wie in 15.11}}{=} \int_I \left(\int_0^{f_B(x)} 1 dy \right) dx = \int_I f_B(x) dx = \int_B f(x) dx. \end{aligned}$$

◁

15.18. Beispiel. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, d.h. eine Menge der Form

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

mit zwei Riemann-integrierbaren Funktionen $f_1 \leq f_2$. Dann ist M Jordan-messbar.

Ist $g : M \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, so ist

$$\int_M g(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} g(x, y) dx dy.$$

Beweis. O.d.B.A. sei $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq C$. Da $M = M(f_2) \setminus M(f_1)$ ist, folgt die Jordan-Messbarkeit aus 15.14. Mit $I = [a, b] \times [0, C]$ ist nach Definition:

$$\int_M g d(x, y) = \int_I g_M(x, y) d(x, y).$$

Weil g stetig ist, existiert für jedes feste $x \in [a, b]$ das Integral $\int_0^C g_M(x, y) dy$ und

$$\int_0^C g_M(x, y) dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x, y) dy$$

Aus dem Satz von Fubini folgt dann die Behauptung. \triangleleft

15.19. Substitutionsregel. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv. Die Jacobi-Determinante $\det \psi'(x)$ sei für jedes x positiv (oder für jedes x negativ). Ist $T \subseteq U$ Jordan-messbar, so ist $\psi(T)$ Jordan-messbar. Ist ferner $f : \psi(T) \rightarrow \mathbb{K}$ stetig, so ist f auch Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\psi(T)} f(y) dy = \int_T f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx.$$

(ohne Beweis)

15.20. Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 . Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : U = [0, \infty[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \psi(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sie bildet U bijektiv auf die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ ab. Die Jacobi-Determinante ist

$$\det \psi'(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r > 0.$$

Die Menge $\{(x, 0) : x \geq 0\}$ ist eine Nullmenge. Sie spielt für die Integration keine Rolle.

Die Kreisscheibe vom Radius R , $B(0, R) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ist (bis auf eine Nullmenge) das Bild von $\{(r, \varphi) : 0 < r \leq R; 0 < \varphi < 2\pi\}$. Also ist

$$\text{vol } B(0, R) = \int_{B(0, R)} 1 dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2.$$

15.21. Polarkoordinaten in \mathbb{R}^3 (Kugelkoordinaten). Setze

$$\begin{aligned} \psi : U &= [0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi(r, \varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\psi'(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

und

$$\det \psi'(r, \varphi, \vartheta) = -r^2 \sin \vartheta > 0.$$

Das Bild von ψ ist $\mathbb{R}^3 \setminus N$, wobei

$$N = \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\}$$

eine Nullmenge ist.

Es folgt für die Vollkugel vom Radius R , $B(0, R) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$:

$$\begin{aligned} |B_R| &= \int_{B_R} 1 d(x, y, z) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_\pi^0 r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr \\ &= 2\pi (\sin \vartheta)|_0^\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

15.22. Beispiel. Das Ellipsoid mit Halbachsen a, b und c ($a, b, c > 0$) ist

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Durch die stetig differenzierbare Abbildung $\psi(x, y, z) \rightarrow (ax, by, cz)$ wird die Einheitskugel $B(0, 1)$ bijektiv auf E abgebildet. Die Jacobi-Matrix ist $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Also ist

$$|E| = \int_E 1 \, d(u, v, w) = \int_{B(0,1)} abc \, d(x, y, z) = abc \, |B(0, 1)| = \frac{4}{3} \pi abc.$$

16. INTEGRATION ÜBER FLÄCHEN. DER GAUSSSCHE INTEGRALSATZ

Der Gaußsche Satz in der Ebene.

16.1. Orientierter Rand von Normalbereichen. Es sei $[a, b]$ ein Intervall, und f_1 und f_2 seien stückweise stetig differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$ mit $f_1 \leq f_2$. Ferner sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

Der Rand von M besteht dann aus den beiden vertikalen Abschnitten in $t = a$ zwischen $f_1(a)$ und $f_2(a)$ und in $t = b$ zwischen $f_1(b)$ und $f_2(b)$ sowie den Graphen von f_1 und f_2 . Wir beschreiben ihn nun durch vier stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, wobei

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2; & \gamma_1(t) &= (t, f_1(t)) \\ \gamma_2 : [f_1(b), f_2(b)] &\rightarrow \mathbb{R}^2; & \gamma_2(t) &= (b, t) \\ \gamma_3 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2; & \gamma_3(t) &= (a + b - t, f_2(a + b - t)) \\ \gamma_4(t) : [f_1(a), f_2(a)] &\rightarrow \mathbb{R}^2; & \gamma_4(t) &= (a, f_1(b) + f_2(b) - t)\end{aligned}$$

Die Kurve γ_3 ist gerade die Kurve $\tilde{\gamma}_3(t) = (t, f_1(t))$, aber in umgekehrter Richtung durchlaufen. Ähnliches gilt für γ_4 . Die Durchlaufrichtung der Kurven ist dann so, dass M stets zur Linken liegt (*positiv orientiert*).

16.2. Integral über Normalbereich. Bezeichnungen wie oben. Ferner sei Q stetig differenzierbare Funktion auf \mathbb{R}^2 . Dann ist nach Beispiel 15.18

$$\int_M \frac{\partial Q}{\partial y} d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b Q(x, f_2(x)) - Q(x, f_1(x)) dx$$

Das letzte Integral können wir als Kurvenintegral auffassen. Wegen $\gamma_1'(t) = (1, f_1'(t))$ und $\gamma_3'(t) = (-1, f_1'(a + b - t))$ ist es in der Schreibweise von 11.2:

$$- \int_{\gamma_3} Q dx - \int_{\gamma_1} Q dx.$$

Wir benutzen die Schreibweise

$$\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + \int_{\gamma} F_n dx_n = \int_{\gamma} \langle F, dx \rangle = \int_a^b \langle F(t), \gamma'(t) \rangle dt$$

für $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $(x = x_1, \dots, x_n)$ mit $(x_1, x_2) = (x, y)$ und $F = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix}$. Weil $\gamma_2'(t) = (0, 1)$ und $\gamma_4'(t) = (0, -1)$ ist, sind die entsprechenden Integrale über γ_2 und γ_4 beide Null.

Mit γ bezeichnen wir nun die aus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und γ_4 zusammengesetzte Kurve. Dann ist

$$\int_M \frac{\partial Q}{\partial y} d(x, y) = - \int_{\gamma} Q(x, y) dx.$$

16.3. Normalbereiche in y -Richtung. Nun seien $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$ und

$$M = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), a \leq y \leq b\}.$$

Wir beschreiben den orientierten Rand durch

$$\begin{aligned}\delta_1 : [\varphi_1(a), \varphi_2(a)] &\rightarrow \mathbb{R}^2; & \delta_1(t) &= (t, a) \\ \delta_2 : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2; & \delta_2(t) &= (\varphi_2(t), t) \\ \delta_3 : [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] &\rightarrow \mathbb{R}^2; & \delta_3(t) &= (\varphi_1(b) + \varphi_2(b) - t, b) \\ \delta_4(t) : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2; & \delta_4(t) &= (\varphi_1(t), a + b - t)\end{aligned}$$

und bezeichnen mit δ die zusammengesetzte Kurve. Wieder sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $M \subseteq G$, und P stetig differenzierbare Funktionen auf G . Dann ist nach Satz 15.18

$$\begin{aligned} \int_M \frac{\partial P}{\partial x} d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy \\ &= \int_a^b P(\varphi_2(y), y) - P(\varphi_1(y), y) dy = \int_{\delta_2} P dy + \int_{\delta_4} P dy = \int_{\delta} P dy \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Identität, weil die Integrale über δ_1 und δ_3 Null sind. Beachte das im Vergleich zu 16.2 verschiedene Vorzeichen

Der folgende Satz ist dann offensichtlich, wenn M sowohl bezüglich der x -Achse als auch bezüglich der y -Achse ein Normalbereich ist. Er gilt jedoch allgemeiner durch Zerlegung:

16.4. Satz von Gauß/Greensche Formel in der Ebene. Es sei M eine beschränkte offene Menge, deren Rand durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve γ positiv orientiert ist (d.h. M liegt beim Durchlaufen von γ stets zur Linken). Ferner seien Q und P stetig differenzierbar auf \mathbb{R}^2 . Dann ist

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d(x, y) = \int_{\gamma} P dy - Q dx.$$

Speziell ergibt sich:

$$\text{vol } M = \int_M d(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx.$$

Integration über Flächen.

16.5. Definition. Eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n heißt eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ($k \leq n$), falls zu jedem Punkt $m \in M$ eine Abbildung $\psi : T \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für eine (hinreichend kleine) offene Umgebung U von m in \mathbb{R}^n gilt:

$$M \cap U = \psi(T)$$

- (ii) $\text{Rang}(\psi'(t)) = k$ (d.h. maximal) für jedes $t \in T$

- (iii) Sind $\psi_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi_2 : T_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei solcher Abbildungen mit $U = \psi_1(T_1) \cap \psi_2(T_2) \neq \emptyset$, dann ist die Komposition $\psi_2^{-1} \psi_1 : \psi_1^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar.

Bedingung (i) besagt, dass in der Nähe jedes Punktes m die Mannigfaltigkeit M durch k freie Parameter beschrieben wird. (ii) stellt sicher, dass die k Variablen tatsächlich unabhängige Richtungen liefern. Man hat viel Freiheit bei den obigen Wahlen. Bedingung (iii) sorgt dafür, dass alle, die denselben Bereich von M beschreiben, „verträglich“ sind.

Man nennt eine solche Abbildung eine lokale Kartenabbildung.

Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 nennt man Flächen.

16.6. Beispiel: Die Sphäre S_r vom Radius r in \mathbb{R}^3 . Dies ist eine Fläche. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_1 : T &=]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi_1(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ihr Bild enthält alle Punkte der Sphäre mit Ausnahme des Halbkreises $\{(x, y, z) \in S_r : x \geq 0, y = 0\}$. Wir nehmen die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_2 &:]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi_2(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

hinzu, und erhalten als Bild alle Punkte der Sphäre außer $\{(x, y, z) \in S_r : x \leq 0, y = 0\}$.

Die Kartenwechselabbildung $\psi_2^{-1}\psi_1$ ordnet hier $(\varphi, \theta) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ das Paar (φ, θ) zu, falls $0 < \varphi < \pi$ und $(\varphi - 2\pi, \theta)$, falls $\pi < \varphi < 2\pi$. Nun fehlen uns nur noch der Nordpol und der Südpol. Dazu können wir in beiden Abbildungen θ von $-\pi/2$ bis $\pi/2$ laufen lassen.

16.7. Integration über Mannigfaltigkeiten. Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension k und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist $\psi : T \rightarrow M$ eine lokale Kartenabbildung, so definiert man das Integral von f über den Bildbereich von T unter ψ durch

$$\int_{\psi(T)} f(x) dS(x) = \int_T f(\psi(t)) \sqrt{\det(\psi'(t)^T \psi'(t))} dt.$$

Dabei ist $\psi'(t) \in \text{Mat}_{nk}(\mathbb{R})$ die Ableitung von ψ und $\psi'(t)^T \in \text{Mat}_{kn}(\mathbb{R})$ ihre Adjungierte. Es zeigt sich, dass das Produkt $\psi'(t)^T \psi'(t)$ eine invertierbare $k \times k$ -Matrix ist, deren Determinante überall positiv ist. Die Matrix $\psi'(t)^T \psi'(t)$ wird als Maßtensor bezeichnet, ihre Determinante als Gramsche Determinante. Die Schreibweise ' $dS(x)$ ', oft einfach nur ' dS ' auf der linken Seite deutet an, dass man nicht über eine Menge in \mathbb{R}^n , sondern über eine Mannigfaltigkeit integriert; dS heißt das Oberflächenmaß. Wir haben also

$$dS = \sqrt{\det(\psi'(t)^T \psi'(t))} dt.$$

Das Integral einer stetigen Funktion f über ganz M erhält man, indem man die Mannigfaltigkeit durch mehrere Karten überdeckt, die Funktion entsprechend zerlegt und dann integriert. Man schreibt

$$\int_M f dS.$$

Dabei gilt:

- Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der verwendeten Karten.
- Integrale über die Bilder von Nullmengen unter einer Kartenabbildung liefern keine Beiträge zum Wert des Integrals. Daher kann man sich manchmal auf die Wahl von Karten beschränken, die die Mannigfaltigkeit nur bis auf das Bild einer Nullmenge überdecken, s. Beispiele 16.8, 16.9.
- Ist $f \equiv 1$, so liefert uns das Integral das k -dimensionale Volumen der Mannigfaltigkeit.

$$\text{vol}_k(M) = \int_M 1 dS.$$

In ähnlicher Weise haben wir das Oberflächenmaß bei der Bestimmung von Kurvenlängen kennen gelernt, vgl. Satz 10.5: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so ist ihre Länge (d.h. ihr eindimensionales Volumen)

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma'(t)^T \gamma'(t)} dt = \int_\gamma 1 dS = \text{vol}_1(\gamma).$$

Die Kurvendarstellung γ spielt die Rolle von ψ . Die Determinante brauchen wir hier nicht zu bilden, da die Ableitung von γ ein n -Vektor ist und somit $\gamma'(t)^T \gamma'(t)$ eine Zahl.

16.8. Beispiel. Wir betrachten die Sphäre S_r vom Radius r in \mathbb{R}^3 . Wir haben die Karte (vgl. 16.6)

$$\begin{aligned}\psi &:]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi(\varphi, \theta) &= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Der Maßtensor bzw. die Gramsche Determinante sind

$$g(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \det g(\varphi, \theta) = r^4 \sin^2 \theta.$$

Das Bild von ψ ist die Sphäre ohne den Nullmeridian. Da er eine Nullmenge ist, spielt er für die Integration keine Rolle. Für $f : S_r \rightarrow \mathbb{C}$ ist also

$$\int_{S_r} f(x) dS(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\psi(\varphi, \theta)) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Insbesondere erhalten wir für die Oberfläche der Kugel vom Radius r

$$\text{vol}(S_r) = \int_{S_r} 1 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2.$$

16.9. Rotationsflächen. Es sei I ein Intervall in \mathbb{R} und $f : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ stetig differenzierbar und strikt positiv. Dann ist die Rotationsfläche des Graphen von f um die z -Achse

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit: Bis auf eine Nullmenge ist sie durch die Karte

$$\begin{aligned}\psi &: I \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \psi(t, \varphi) &= \begin{pmatrix} f(t) \cos \varphi \\ f(t) \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

gegeben.

Hier ist

$$\psi'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \cos \varphi & -f(t) \sin \varphi \\ f'(t) \sin \varphi & f(t) \cos \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Rang } 2).$$

und Maßtensor bzw. Gramsche Determinante sind von der Form

$$g(t, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det g(t, \varphi) = f(t)^2 (1 + f'(t)^2).$$

Das Volumen der Rotationsfläche ist daher – sofern das Integral existiert –

$$\text{vol}(M) = \int_0^{2\pi} \int_I f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt d\varphi = 2\pi \int_I f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

16.10. Der Gaußsche Integralsatz in \mathbb{R}^3 . Es sei U eine offene und beschränkte Menge in \mathbb{R}^3 . Der Rand von U sei eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $\partial U = M$.

Der äußere Einheitsnormalenvektor. Es sei x_0 ein Randpunkt von U . In einer Umgebung von x_0 sei der Rand gegeben durch die Abbildung $\psi : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\psi(t_0) = x_0$ für ein $t_0 \in T$. Die Spaltenvektoren von $\psi'(t_0)$ spannen nach Annahme (ii) in 16.5 einen zweidimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^3 auf. Es gibt also einen eindimensionalen Unterraum von \mathbb{R}^3 aus dazu senkrecht stehenden Vektoren. Wir wählen den aus, der Norm = 1 hat und nach außen zeigt, und nennen ihn ν . Nach außen zeigen heißt: Für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ liegt der Punkt $x + \varepsilon \nu$ außerhalb von U und der Punkt $x - \varepsilon \nu$ in U . außen. Wir nennen ν , genauer $\nu(x)$, den äußeren

Einheitsnormalenvektor in x . Wir nehmen an, dass wir diese Wahl auf dem Rand stetig treffen können.

Divergenz von Vektorfeldern. Es sei $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das auf einer Umgebung V von $U \cup M$ definiert ist. Die Divergenz von F ist die Funktion

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} F_j(x).$$

Mit $\langle F, \nu \rangle$ bezeichnen wir das Skalarprodukt des Vektors $F(x)$ mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor $\nu(x)$ in x .

Der Satz von Gauß besagt nun, dass

$$\int_U \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial U} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

16.11. Archimedisches Prinzip. Ein fester Körper A sei eingetaucht in eine Flüssigkeit der konstanten Dichte $c > 0$, deren Oberfläche mit der Ebene $\{x_3 = 0\}$ in \mathbb{R}^3 zusammenfalle. Die Physik sagt uns, dass im Punkt $x \in \partial A$ die Flüssigkeit einen Druck der Stärke $cx_3\nu(x)$ ausübt, wobei ν die äußere Normale ist (man beachte, dass x_3 negativ ist und der Druck nach innen gerichtet ist). Die Gesamtauftriebskraft ist

$$F = \int_{\partial A} cx_3\nu(x) dS(x);$$

für jede Komponente F_j von F gilt also

$$F_j = \int_{\partial A} cx_3\nu_j(x) dS(x).$$

Dies ist ein Integral der Form $c \int_{\partial A} \langle f_j, \nu \rangle dS$, wobei

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist nach Gauß

$$F_j = c \int_{\partial A} \langle f_j(x), \nu(x) \rangle dS(x) = c \int_A \operatorname{div} f_j(x) dx = \int_A \frac{\partial x_3}{\partial x_j} dx.$$

Damit ist $F_1 = F_2 = 0$, während

$$F_3 = c \int_A 1 dx = c \operatorname{vol}(A)$$

ist. Der Körper erfährt also eine nach oben gerichtete Auftriebskraft, die gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.

LITERATUR

- [1] H. Amann, J. Escher. Analysis II. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [2] O. Forster. Analysis 2. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , gewöhnliche Differentialgleichungen Grundkurs Mathematik. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010.
- [3] H. Heuser. Lehrbuch der Analysis. Teil 2. Vieweg+Teubner Verlag. 13. Auflage 2004
- [4] W. Kaballo. Einführung in die Analysis II. Spektrum Akademischer Verlag 1997.
- [5] K. Königsberger. Analysis 2. . Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [6] K. Meyberg, P. Vachenauer. Höhere Mathematik I. Sechste Auflage. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001.
- [7] K. Meyberg, P. Vachenauer. Höhere Mathematik II. Vierte Auflage. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001.
- [8] W. Walter. Analysis 2. Springer-Verlag. Fünfte Auflage 2004.

Die Vorlesung folgt in großen Teilen dem Buch von Forster.