**Leibniz Universität Hannover**
Logik und Formale Systeme
Hausübungsblätter


| | | |
|---|---|---|
| Gruppenmitglied 01: | Holtermann, Lukas | Matrikelnummer: 10022034 |
| Gruppenmitglied 02: | Duc Nguyen, Nam | Matrikelnummer: 10006592 |
| Gruppenmitglied 03: | Lünsmann, Mario | Matrikelnummer: 10016353 |
| e-Mail 01: | Lukas.Holtermann@gmx.de | |
| e-Mail 02: | Y | |
| e-Mail 03: | mr.mpaotq@t-online.de | |


Übungsblattnummer: Hausübungsblatt 4

Status: Lösung 01

Punkte/Prozente:

Anmerkungen/Verbesserungsvorschläge:

# Logik und Formale Systeme

# Hausübungsblatt 4- Abgabetermin 27.05.2019

# 1 Hausübungen

## 1.1 Aufgabe 1

Zeigen, dass $\varphi$ unerfüllbar ist via Resolutionswiderlegung.
Es gilt: $\varphi := (q_4 \vee \neg q_2) \wedge (\neg q_4 \vee q_1) \wedge (q_3 \vee q_2) \wedge (\neg q_4 \vee \neg q_1) \wedge (\neg q_3 \vee q_2)$

Zu erst gilt: Umschreiben in Klauseln

$$\{\overbrace{\{q_4, \neg q_2\}}^{K1}, \overbrace{\{\neg q_4, q_1\}}^{K2}, \overbrace{\{q_3, q_2\}}^{K3}, \overbrace{\{\neg q_4, \neg q_1\}}^{K4}, \overbrace{\{\neg q_3, q_2\}}^{K5}\}$$

Nun gilt: Anwenden der Heuristik $h_{(q)} = |\{C \in \Gamma \mid q \in C\}| \cdot |\{C \in \Gamma \mid \neg q \in C\}| > 0$ bei dem Davis-Putnam-Algorithmus.

Somit gilt:

**1. Schritt:**

$$h_{(q_1)} = |\underbrace{\{K2\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K4\}}_{1}| = 1$$
$$h_{(q_2)} = |\underbrace{\{K3, K5\}}_{2}| \cdot |\underbrace{\{K1\}}_{1}| = 2$$
$$h_{(q_3)} = |\underbrace{\{K3\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K5\}}_{1}| = 1$$
$$h_{(q_4)} = |\underbrace{\{K1\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K2, K4\}}_{2}| = 2$$

Da gilt: Nehme den aussagenlogisch kleineren Wert der Variable q gilt somit:

Wähle $q_3$ da $q_3 > q_1$ mit $\varphi_0 = \{K1, K2, K3, K4, K5\}$

Daher gilt:

$\frac{K3 \qquad K5}{K6 = q_2}$ $\qquad \varphi_1 = \{K1, K2, K4, K6\}$

**2. Schritt:**

$$h_{(q_1)} = |\underbrace{\{K2\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K4\}}_{1}| = 1$$
$$h_{(q_2)} = |\underbrace{\{K6\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K1\}}_{1}| = 1$$
$$h_{(q_3)} = 0$$
$$h_{(q_4)} = |\underbrace{\{K1\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K2, K4\}}_{2}| = 2$$

Wähle $q_2$ da $q_2 > q_1$ mit $\varphi_1 = \{K1, K2, K4, K6\}$

Daher gilt:

$\frac{K6 \qquad K1}{K7 = q_4}$ $\qquad \varphi_2 = \{K2, K4, K7\}$

**3. Schritt:**

$h_{(q_1)} = |\underbrace{\{K2\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K4\}}_{1}| = 1$
$h_{(q_2)} = 0$
$h_{(q_3)} = 0$
$h_{(q_4)} = |\underbrace{\{K7\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K2, K4\}}_{2}| = 2$

Wähle $q_1$ mit $\varphi_2 = \{K2, K4, K7\}$

Daher gilt:

$\frac{K2 \qquad K4}{K8 = \neg q_4}$ $\qquad \varphi_3 = \{K7, K8\}$

**4. Schritt:**

$h_{(q_1)} = 0$
$h_{(q_2)} = 0$
$h_{(q_3)} = 0$
$h_{(q_4)} = |\underbrace{\{K7\}}_{1}| \cdot |\underbrace{\{K8\}}_{1}| = 1$

Wähle $q_4$ mit $\varphi_3 = \{K7, K8\}$

Daher gilt:

$\frac{K7 \qquad K8}{K9 = \emptyset}$

## 1.2 2

### 1.2.1 a)

Es gilt: Zeigen via Widerspruchsbeweis, dass folgendes *nicht* gilt:

$$\frac{C \cup \{p,q\} \qquad D \cup \{\neg p, \neg q\}}{C \cup D}$$

Da folgende Voraussetzung gilt: $C \cup \{p,q\}$ und $D \cup \{\neg p, \neg q\}$ gleichzeitig, gilt im Grunde folgendes:

$\varphi = C \cup D$

$\mathfrak{I} \models \varphi$ und somit gilt aufgrund von Voraussetzung s.o. folgendes:

$\varphi = TAUT$

Da aber Resolutionswiderlegung im Grunde die Unerfüllbarkeit einer aussagenlogischen Formelmenge bemisst, gilt im Grunde eher folgendes:

$\varphi \neq TAUT$, da gilt:

$\mathfrak{I} \not\models \varphi$

Dies geht darauf zurück, dass in einem Schritt nicht zwei Variablen gleichzeitig eliminiert werden können, daher würde auf jeden Fall immer das aussagenlogische negierte Äquivalent übrig bleiben, falls die Schlussregel s.o. gelten soll.

Das heißt es würde immer bspw. $\{\neg q, q\}$ oder $\{\neg p, p\}$ übrig bleiben was eine Tautologie impliziert, da beides immer bei so einer Belegung gilt und dies ist nach Resolutionswiderlegung ein sogenannter mathematischer Widerspruch $\lightning$.

Somit ist diese vermeintliche Abkürzung der Schlussregeln natürlich falsch dank Widerspruchsbeweis.

### 1.2.2 b)

Zeigen der folgenden Resolution via Resolutionswiderlegung:

$$\frac{C_1 \cup \{p,q\} \qquad C_2 \cup \{p,\neg q\} \qquad C_3 \cup \{\neg p,q\} \qquad C_4 \cup \{\neg p,\neg q\}}{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4}$$

Somit gilt:

$$\frac{\dfrac{C_1 \qquad C_2}{p} \qquad \dfrac{C_3 \qquad C_4}{\neg p}}{\varnothing}$$

Man sieht sofort:

Nacheinander lösen sich die Variablen auf und es bleibt im Endeffekt eine Resolutionswiderlegung, die durch diese Regel beide Variablen auf einmal auflöst, indem diese nacheinander aufgelöst werden, um dann die Unerfüllbarkeit einer bestimmten Formelmenge zu zeigen, wie s.o. mit der Resolutionswiderlegung.