

Programmiersprachen und Übersetzer

Übung 4

Ausgabe am: **Apr 30 2024**

Abgabe bis: **Mai 7 2024**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Betrachten Sie die verschiedenen scopes im folgenden Ausdruck

$(\lambda x. \lambda y. x(yx)) \ (\lambda z. w)$

und markieren Sie jeweils die freien und gebundenen Variablen in den Teilausdrücken.

Berechnen Sie anschliessend das Ergebnis des (kompletten) Ausdrucks durch β -Reduktion.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Die Notation für Church Booleans im λ Calculus ist wie folgt:

$$\begin{aligned} true &= \lambda t. \lambda f. t \\ false &= \lambda t. \lambda f. f \end{aligned}$$

und Church Numerals können wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda s. \lambda z. z \\ 1 &= \lambda s. \lambda z. s \ z \\ 2 &= \lambda s. \lambda z. s \ (s \ z) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Die Funktion *iszero* kann geschrieben werden als:

$$iszero = \lambda m. m(\lambda x. false) \ true$$

Aufgabe 1.

~~x~~
~~freie Variable: x~~
~~gebundene Variable: -~~

$\lambda y. x(y, x)$
freie Variable: x ✓
gebundene Variable: y

$\lambda x \lambda y. x(y, x)$
freie Variable: - ✓
gebundene Variable: y, x

~~$\lambda x \lambda y. x$~~
~~freie Variable: -~~
~~gebundene Variable: x, y~~

~~$(\lambda x \lambda y. x(y, x))$~~
~~freie Variable = -~~
~~gebundene Variable = x, y~~

~~w~~
~~freie Variable = w~~
~~gebunden = -~~

$\lambda z. w$
freie Variable = w ✓
gebundene z = z

$(\lambda x. \lambda y. x(y, x)) (\lambda z. w)$
freie Variable = w ✓
gebundene v = x, y, z

dasselbe

$$(\lambda x. \lambda y. x(yx))(\lambda z. w)$$

$$(\lambda x. \lambda y. x(yx))(\lambda z. w) \rightarrow_{\beta} (\lambda y. yy)(\lambda z. w)$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda z. w)(\lambda z. w)$$

$$\rightarrow_{\beta} w$$

gebundene Variable x wird durch gebundene Variable y ersetzt

Nein, so funktioniert β -Red. nicht.

$$(\lambda x. \lambda y. x(yx))(\lambda z. w) \quad [x \rightarrow (\lambda z. w)]$$

gebundene Variable y wird durch gebundene Variable z ersetzt

$$\beta \equiv (\lambda y. (\lambda z. w)(y(\lambda z. w))) \quad [z \rightarrow (y(\lambda z. w))]$$

$$\beta \equiv (\lambda y. w)$$

verschwindet.

(-2P).

Aufgabe 2

iszero 0 = true dann müssen wir zeigen, dass iszero \Rightarrow true

$$\text{iszero} = (\lambda m. m(\lambda u. \text{false}) \text{true})(\lambda s. \lambda z. z) \quad \checkmark$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda s. \lambda z. z)(\lambda u. \text{false}) \text{true} \quad \checkmark$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda z. z) \text{true} \quad \checkmark$$

$$\rightarrow_{\beta} \text{true} \quad \checkmark$$

iszero 2 = false dann müssen wir zeigen, dass iszero \Rightarrow false

$$\text{iszero} = (\lambda m. m(\lambda u. \text{false}) \text{true})(\lambda s. \lambda z. s(s z))$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda s. \lambda z. s(s z))(\lambda u. \text{false}) \text{true} \quad \checkmark$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda z. (\lambda u. \text{false}). ((\lambda u. \text{false}) z)) \text{true} \quad \checkmark$$

$$\rightarrow_{\beta} (\lambda z. \text{false}) \text{true} \quad \checkmark$$

$$\rightarrow_{\beta} \text{false} \quad \checkmark$$

Gelb markierte Variablen sind die gebundenen Variablen, die durch Orangemarkierte Variablen ersetzt wurden.

Orangemarkierte Variablen sind auch gebunden

Zeigen Sie, dass

$$\textit{iszero } 0 = \textit{true}$$

und

$$\textit{iszero } 2 = \textit{false}.$$

gilt.

Abgabe

Die Antworten können als beliebige allgemein lesbare Datei(en) (Textdatei, Scan als PDF, etc.) im bestehenden Repository **in einem neu zu erstellenden Verzeichnis "ex4"** eingereicht werden.