

CAPÍTULO 2

Modelado de Sólidos

En términos generales puede decirse, que un modelo es un objeto construido artificialmente y que facilita la visualización del objeto del cual deriva. Para hacer esta visualización posible, los modelos de objetos físicos tridimensionales como edificios, barcos y automóviles, normalmente comparten las dimensiones relativas y la apariencia general de sus contrapartes, más no así su tamaño. Los modelos de moléculas utilizados en química por ejemplo, comparten una disposición relativa de varios átomos de la molécula respecto de otros, pero muy poco de sus otras propiedades. Los modelos matemáticos ampliamente usados en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, representan algunos

aspectos del comportamiento de los fenómenos modelados en términos de datos numéricos y ecuaciones.

El dibujo técnico, y otras técnicas de dibujo ampliamente utilizadas en ingeniería y diseño por ejemplo, pueden ser vistos también como modelos.

A través de una colección de imágenes bidimensionales, manipuladas por convenciones simbólicas, es posible representar dimensiones, tolerancias y características de superficie y de materiales entre otras.

Los modelos son útiles porque en ellos se pueden estudiar más fácilmente determinadas características de un objeto, basándose más en el modelo, que en su contraparte física o real, de hecho, es frecuente que esto suceda. Esto puede deberse a la facilidad que proporciona el trabajar con la representación del objeto, o debido a cierta imposibilidad de tener físicamente el objeto, ya sea por costo o por alguna otra razón - que no sea directamente observable por ejemplo -, o porque simplemente el objeto todavía no existe (lo cual es frecuente en el caso de los modelos físicos y los prototipos).

En cuanto a modelos, el dibujo técnico, que es el más usado en ingeniería, trata de anular esos problemas así como también el de ser de relativo propósito general: un dibujo puede ser utilizado para extraer información para una diversidad de tareas, incluyendo la producción de modelos físicos y matemáticos cuando éstos se necesiten. Tomando en cuenta esta "universalidad" se puede decir que estos modelos pueden actuar como un medio de comunicación entre la gente que participa en el diseño de un objeto [Mäntylä 1988]. Cabe mencionar también aquí, que los dibujos de modelos físicos y matemáticos también soportan interactividad derivada del diseño.

Los modelos físicos y matemáticos por otro lado, son herramientas que sirven para representar o analizar un objeto.

El objetivo de este capítulo, es el de presentar algunas de las características más importantes en el modelado de sólidos, así como el de proporcionar una visión general de algunos de los esquemas del modelado de sólidos más comunes.

2.1 Modelos generados por computadora.

Los modelos generados por computadora o simplemente modelos de computadora, consisten básicamente en conjuntos de datos almacenados en la memoria de la computadora. Estos datos también pueden estar almacenados en archivos para poder ser utilizados en algún procesamiento posterior.

2.1.1 Modelado geométrico.

La totalidad de los datos que pueden ser almacenados en un modelo de computadora, depende del tipo de "preguntas geométricas" o comandos que el modelo debe responder y, al menos *a priori*, no parece posible limitar la cantidad de datos potencialmente relevantes en este sentido. De primera instancia, esto último puede hacer parecer a los modelos de computadora poco atractivos, sin embargo, esto no es así.

Una observación clave que se debería tener en cuenta, es que muchos problemas que se intentan resolver a través de modelos son inherentemente geométricos [Mäntylä 1988]. Por ejemplo, el problema de calcular una imagen sombreada de un objeto, incluye problemas geométricos tales como los siguientes:

- ¿Qué partes del objeto son visibles al observador?
- ¿Qué color debería ser asignado a cada elemento de la imagen?

Si se puede representar la forma geométrica del objeto adecuadamente, sería posible proporcionar respuestas para estas preguntas, y para muchos otros problemas también. De hecho, parece que la geometría de un objeto es la parte más útil dentro del mundo de información potencialmente útil del mismo. Aún más, las técnicas para almacenar y procesar datos geométricos son relativamente independientes de aplicaciones específicas: esencialmente los mismos métodos son utilizados para construir modelos de máquinas, barcos, plantas químicas y contenedores de comida para bebé.

De lo anterior se sigue que tiene sentido separar los datos relacionados con la forma geométrica de un objeto, de otros datos no geométricos. En este enfoque, la totalidad de los

datos necesarios para un tipo particular de problemas es llamado *el modelo del objeto*, mientras que la parte puramente geométrica del mismo constituye un *modelo geométrico* [Aguilera 1998]. Un modelo geométrico es por supuesto, un subconjunto del modelo del objeto.

2.1.2 Modelado de sólidos.

El modelado de sólidos es una rama del modelado geométrico que hace énfasis en la aplicabilidad general de modelos, e insiste únicamente en la creación de representaciones "completas" de objetos físicos sólidos, esto es, representaciones que son adecuadas para la respuesta de preguntas geométricas arbitrarias de manera algorítmica.

El objetivo de la aplicabilidad general, separa al modelado de sólidos de otros tipos de modelado geométrico, los cuales están enfocados hacia propósitos especiales. Los *modelos gráficos* (*Graphical Models*) intentan describir un *dibujo* de un objeto más que el objeto en sí mismo. Los *modelos de forma* (*Shape Models*) representan una *imagen* de un objeto. Estos modelos pueden ser colecciones no estructuradas de elementos de imagen, o pueden tener alguna estructura interna para proporcionar operaciones de procesamiento de la imagen. Los *modelos de superficie* (*Surface Models*) proporcionan información detallada de una superficie curva, pero no siempre dan suficiente información para determinar todas las propiedades geométricas de un objeto limitado por la superficie.

En la siguiente sección se presentan algunos de los problemas que se tienen que enfrentar cuando se trabaja en el modelado de sólidos.

2.2 Problemas a tratar en el modelado de sólidos.

Los requerimientos de aplicabilidad general demandan mucho más de la completitud y exactitud de los modelos de sólidos. A continuación se presenta una breve descripción de los problemas a tratar dentro del modelado de sólidos.

2.2.1 Completitud.

Los tipos más simples de modelos de computadora de objetos físicos, transfieren los métodos tradicionales utilizados en dibujo para crear modelos gráficos bidimensionales a una computadora. Estos modelos consisten de objetos gráficos bidimensionales tales como líneas, arcos, texto y otras primitivas de graficado requeridas por alguna figura.

Los modelos gráficos son perfectamente apropiados para hacer la generación de dibujos técnicos más eficiente, así como para ampliar su calidad. Desafortunadamente, a diferencia de los seres humanos que son capaces de interpretar estos dibujos apropiadamente, las computadoras en general están aún muy lejos de desarrollar esa habilidad, por ello, los modelos gráficos en general no pueden servir como modelos de sólidos.

Uno de los problemas con los modelos gráficos, es que es perfectamente posible hacer dibujos que representen una forma cuya construcción sea imposible. Otro problema es la generación de algoritmos que permitan una representación tridimensional de objetos en un tiempo aceptable.

Con el aumento del poder de cómputo, los modelos gráficos bidimensionales pueden ser actualizados o transformados a sus contrapartes tridimensionales, por medio de la adición de información a través de la tercera coordenada, lo que resulta en una representación de sólidos comúnmente denominada como *modelo de alambres* [Foley et al. 1991]. Con el modelo de alambres, se vuelve posible almacenar únicamente un simple modelo tridimensional y generar cualquier vista tridimensional de él.

Desafortunadamente, aún una colección de líneas tridimensionales no es suficiente para representar una figura adecuadamente, porque algunas colecciones de líneas pueden tener muchas interpretaciones en términos de objetos sólidos [Mäntylä 1988]. Si se observa con cuidado la Figura 2-2 puede observarse que se utilizaría el mismo conjunto de líneas para representar la silueta de un cubo aunque le faltaran caras.

El problema de los modelos gráficos es que no ofrecen información geométrica suficiente de la forma de un objeto, información que podría ser suficiente para calcular y dar respuestas a preguntas geométricas arbitrarias. Con todo, los modelos gráficos son perfectos y funcionan bien para la tarea para la que originalmente fueron desarrollados, a saber, la generación y representación de dibujos.

2.2.2 Integridad.

Para resolver los problemas de líneas y superficies ocultas, un paradigma en la metodología de gráficas por computadora, es reemplazar los modelos gráficos por modelos de poliedros que proporcionen suficiente información para determinar las partes ocultas de los objetos. Estos modelos son construidos a partir de primitivas bidimensionales y caras poligonales en vez de sólo líneas.

Desafortunadamente surgen nuevos problemas en este rubro. Usualmente los algoritmos de eliminación de líneas ocultas por ejemplo, asumen que los polígonos no se intersecan unos con otros, excepto en aristas o vértices comunes. Obviamente, un modelo de poliedro de una forma física construido apropiadamente, no puede incluir polígonos que se intersequen, porque de otra forma, la superficie del objeto podría intersecarse consigo misma, por esto, es natural considerar únicamente modelos válidos de poliedros que no se intersequen pero ¿Cómo asegurar que los modelos satisfacen un criterio de completitud como este? La integridad de los modelos de sólidos trata con este tipo de problemas.

Se debe notar que el "simple" chequeo de la integridad (detección de intersecciones ilegales en la eliminación de líneas ocultas del ejemplo antes mencionado), es solamente una solución parcial al problema de integridad, porque el usuario debe salir al rescate para tomar una serie de acciones correctivas, y la práctica usual aquí es la de prueba y error.

La integridad absoluta podría anular este problema haciendo la generación de modelos incorrectos imposible, sin embargo, surge un nuevo problema: el proporcionar la integridad suficiente limita la facilidad de uso y la flexibilidad del sistema de modelado.

2.2.3 Complejidad.

El problema de la integridad está íntimamente relacionado con otro problema: el de la complejidad de generar un modelo de poliedros. Aún un objeto relativamente simple como el dibujo de una casa de regular complejidad, puede requerir cientos de polígonos. Por otro lado, la cobertura geométrica de un modelo de poliedros no es suficiente para tareas que requieren de un modelado más exacto como superficies o formas curvas que requieren el diseño de la carrocería de un automóvil por ejemplo. Desafortunadamente existe una relación intrínseca entre la dificultad de proporcionar una geometría de sólidos en una computadora, y la complejidad de las formulaciones matemáticas empleadas.

2.2.4 Geometría computacional.

En base al criterio inicial de una aplicabilidad general, se espera que los modelos de sólidos sean capaces de proporcionar algorítmicamente respuestas a preguntas geométricas usuales que surgen en aplicaciones de la ingeniería. Ejemplos de tales preguntas se listan a continuación [Mäntylä 1988]:

- ❑ ¿Como qué se ve el objeto?
- ❑ ¿Cuál es el peso, superficie, área, etc. del objeto?
- ❑ ¿Cuando este objeto se mueva colisionará con este otro?
- ❑ ¿Es el objeto lo suficientemente fuerte como para soportar esta carga?
- ❑ ¿Cómo puede ser el objeto manufacturado con determinados procesos de elaboración disponibles?

Obsérvese que el resultado de una pregunta geométrica puede ser una imagen, un número o una constante booleana (verdadero o falso). Además de esto último, las operaciones disponibles en el sistema de modelado deberían cumplir con la cerradura de modelos, en donde cualquier operación garantiza generar modelos consistentes y del mismo tipo.

2.3 Sistema de modelado de sólidos.

Una de las ideas subyacentes del modelado geométrico, es el que tiene sentido separar el modelado y las aplicaciones, y buscar técnicas de modelado que sean relativamente independientes de los objetos que están siendo modelados. Por esta razón es posible distinguir el sistema modelador de sólidos (Figura 2-1) –o modelador de sólidos para simplificar– de las aplicaciones. El modelador de sólidos es básicamente un software que "negocia" con los modelos de sólidos y proporciona respuestas a preguntas geométricas como las enunciadas en la sección de geometría computacional.

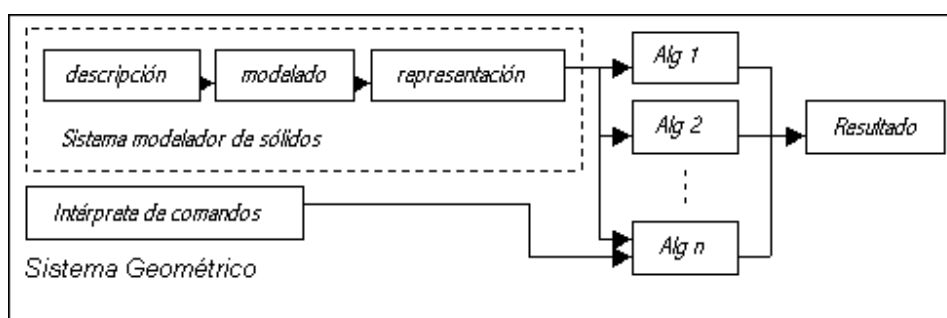


Figura 2-1 Componentes básicos de un Sistema de Modelado Geométrico.

En adición a los problemas de completitud, integridad y complejidad descritos previamente, existen muchos puntos que hacen que la construcción de un modelador de sólidos no sea una tarea sencilla. Para entender esto último se examinará de manera general los componentes funcionales de un modelador de sólidos y el papel que juega dentro de un sistema geométrico.

Inicialmente, los objetos son descritos por el modelador en términos de un lenguaje de descripción basado en los conceptos de modelado disponibles en el modelador de sólidos. El usuario puede introducir la descripción simplemente escribiendo texto o, preferiblemente a través de una interfaz de usuario con ayuda de interacción gráfica. Una vez proporcionada la información, la descripción de los objetos es traducida para crear la actual representación interna almacenada por el modelador. La relación entre el lenguaje de

descripción y la representación interna no necesita ser directa, dado que la representación interna puede emplear conceptos de modelado diferentes a la descripción original.

El modelador debe además proporcionar interfaces para la intercomunicación con otros sistemas. Estas interfaces son usadas para transmitir información para diferentes algoritmos, o quizá modelos de sólidos completos para otros sistemas de diseño. El modelador debe también incluir facilidades para el almacenamiento de la descripción de los objetos y otros datos almacenados por el modelador dentro de bases de datos.

Un modelador de sólidos debe necesariamente manejar datos geométricos en diferentes y coexistentes representaciones. Es importante mencionar que en sí mismo, el lenguaje de descripción constituye un modelo.

Con el propósito de calcular respuestas a preguntas geométricas, es necesaria una transformación de la descripción externa a la representación interna. De hecho, por eficiencia, un modelador de sólidos debe incluir algoritmos de conversión que puedan cambiar o transformar datos de una representación a otra.

2.4 Esquemas de representación de sólidos.

La capacidad de una representación para codificar cosas que parecen sólidos no quiere decir que la representación sea adecuada para representar sólidos. Obsérvese por ejemplo la Figura 2-2. Las líneas que constituyen dicha figura ¿definen un cubo sólido? Si se hace la suposición de que cada conjunto de cuatro líneas a los lados del objeto acota una cara cuadrada, la figura es un cubo. Sin embargo, no hay nada en la representación que indique dicha representación de las líneas, de hecho, se utilizaría el mismo conjunto de líneas para dibujar la misma figura aunque le faltaran caras.

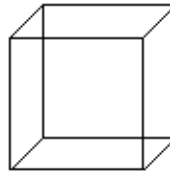


Figura 2-2 Modelo de alambres de un cubo compuesto por 12 aristas.

El dominio de la representación debe tener el tamaño suficiente para permitir la representación de un conjunto útil de objetos físicos. De manera ideal, la representación no debe ser ambigua, esto es, no deben existir dudas acerca de qué es lo que se está representando, y a su vez, una representación debe corresponder a un sólido y sólo uno. Cuando una representación es no ambigua, se dice que es una representación completa (completitud). Una representación es única, si se puede usar para codificar un sólido determinado en solamente una forma. Por otro lado, una representación precisa permite representar un objeto sin aproximaciones.

En teoría, un esquema de representación debe hacer imposible la creación de una representación inválida (que no corresponda a un sólido) como la de la Figura 2-3. Se requiere además que los objetos mantengan la cerradura bajo la rotación, la traslación, el escalamiento y otras operaciones, de tal manera que al aplicar alguna, o todas éstas operaciones sobre sólidos válidos, sólo deben obtenerse sólidos válidos también. Por último, una representación debe ser compacta para ahorrar espacio y debe permitir la utilización de algoritmos eficientes para calcular las propiedades físicas de los objetos representados.

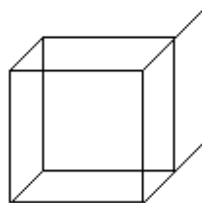


Figura 2-3 Modelo de alambres de un cubo con una cara adicional (cara "colgante").

El diseño de una representación con todas estas propiedades resulta difícil y la mayoría de las veces se tiene que conciliar. Estos detalles se analizarán en los diferentes tipos de esquemas de representación descritos más adelante.

Dada la gran utilidad del modelado de sólidos en diversas áreas de la ciencia, han surgido diferentes esquemas de representación de sólidos. A continuación se describen los más importantes seguidos de una muy breve descripción de cada uno de ellos, pero se puede consultar Aguilera [1998], Allen [1982], Foley et al. [1996], Foley et al. [1991], Mäntylä [1988] y Requicha [1980] para un estudio más profundo y un análisis detallado.

2.4.1 Representación de fronteras (*Boundary Representation - B-Rep*).

Aquí el objeto es descrito en términos de los elementos de su superficie: vértices, aristas y caras, los cuales conforman su frontera (Figura 2-4). Algunos esquemas de representación de fronteras están limitados a fronteras poligonales planas, y pueden requerir que las caras sean triángulos o polígonos convexos [Requicha 1980].

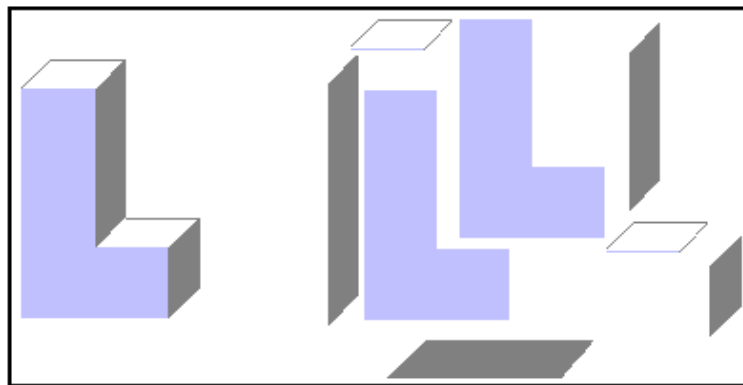


Figura 2-4 Representación de un sólido y su conjunto de caras en el esquema de representación de fronteras.

De esta manera, el elemento que define a un sólido es la frontera, dado que separa el interior y el exterior del sólido. Nótese que interior y exterior significa dos conjuntos separados por un tercero: la frontera [Aguilera 1998].

El esquema de representación de fronteras más ampliamente utilizado para los poliedros es el jerárquico, el cual contiene todas las coordenadas de los vértices junto con sus relaciones topológicas: las aristas que inciden en una cara y los vértices que conforman una arista.

Los esquemas de representación de fronteras no son ambiguos si las caras que conforman un objeto son representadas de una manera no ambigua, aunque generalmente no son únicos. Algunos esquemas de representación de fronteras pueden tener problemas con la propiedad de cerradura bajo las operaciones booleanas.

Finalmente, el esquema de representación de fronteras es uno en el que la información geométrica viene dada de una manera explícita, por lo que la mayoría de los algoritmos de visualización basados en polígonos, trabajan sin problemas en él.

2.4.2 Geometría de construcción de sólidos (*Constructive Solid Geometry - CSG*).

La geometría de construcción de sólidos es un esquema en donde objetos sólidos simples (primitivas) son combinados por medio de operaciones booleanas regularizadas incluidas directamente en la representación, para construir objetos más complejos a partir de objetos más simples.

Un objeto es almacenado como un árbol ordenado con operadores en los nodos internos y objetos simples en las hojas del árbol (Figura 2-5). Algunos nodos representan operadores booleanos, mientras que otros representan operaciones básicas, como las de traslación, rotación y escalamiento. Algo importante a mencionar es que, como las operaciones booleanas por lo general no son conmutativas, las aristas del árbol mantienen un cierto orden. Así, en la Figura 2-5 puede observarse que las operaciones indicadas son realizadas tomando como primer operando la rama izquierda del árbol, y como segundo operando la rama derecha del mismo.

Para determinar las propiedades físicas o para crear imágenes, se deben combinar las propiedades de las hojas del árbol para obtener las propiedades de la raíz. La estrategia

general de procesamiento es un recorrido en profundidad a lo largo del árbol [Foley et al. 1996].

En algunas implantaciones, las primitivas son sólidos simples como cubos o esferas, para asegurar que todas las operaciones sobre dichos objetos, produzcan sólidos válidos.

La geometría de construcción de sólidos no ofrece una representación única, esto es, al aplicar una misma operación a dos objetos que son inicialmente iguales se pueden generar resultados diferentes. No obstante, la capacidad de editar modelos a través de la eliminación, adición, reemplazo y modificación de sus subárboles, aunado a la forma relativamente compacta de almacenamiento de los modelos, han hecho de CSG una de las formas predominantes para el modelado de sólidos.

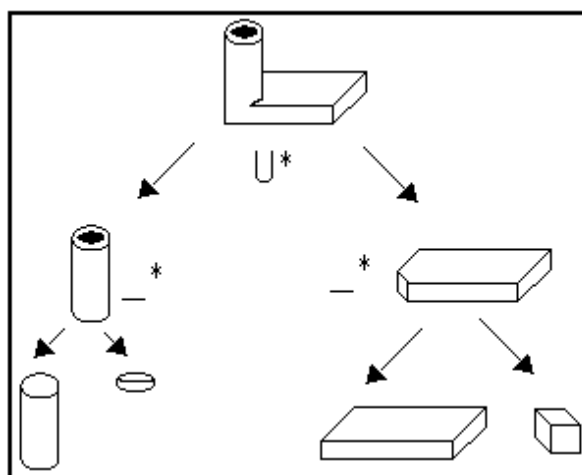


Figura 2-5 Objeto definido por CSG y su árbol [Foley et al. 1996].

2.4.3 Representaciones de partición espacial.

En este tipo de representaciones, un sólido es descompuesto en una colección de sólidos adjuntos pero que no se intersecan, y que son más simples que el sólido original aunque no necesariamente del mismo tipo, ya que las primitivas de éstos pueden variar en tamaño, posición y orientación. Los esquemas más comunes de representación de partición espacial son:

- ❑ Descomposición en celdas
- ❑ Enumeración de ocupación espacial
- ❑ Árboles octales.

A continuación se describen de manera general cada una de ellas.

2.4.3.1 Descomposición en celdas.

Esta es una de las formas más generales de partición espacial. Cada sistema de descomposición de celdas define un conjunto de celdas primitivas que por lo general se parametrizan y con frecuencia son curvas. Esta representación proporciona una conveniente forma para computar ciertas propiedades topológicas de los objetos [Aguilera 1998].

Debe mencionarse sin embargo, que la representación de descomposición en celdas es difícil de validar, dado que se debe evaluar cada par de celdas para determinar si hay intersecciones, no obstante es una representación importante para el análisis de elementos finitos.

Finalmente debe mencionarse también que, aunque la representación de descomposición en celdas no es ambigua, es posible que no sea única. Esto se ilustra mejor en la Figura 2-6. Las celdas presentadas en (a) se pueden transformar de distintas maneras para construir el mismo objeto que aparece en (b) y (c). Incluso un sólo tipo de celda es suficiente para ocasionar ambigüedad.

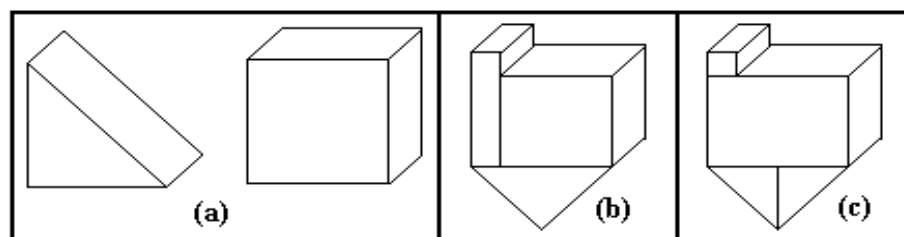


Figura 2-6 Representación de descomposición en celdas [Foley et al. 1996].

2.4.3.2 Enumeración de ocupación espacial.

La enumeración de ocupación espacial es un caso especial de la descomposición en celdas, en la cual el sólido se descompone en celdas idénticas dispuestas sobre una malla regular fija. Estas celdas se denominan voxes¹. En la Figura 2-7 se muestra un objeto representado con enumeración de ocupación espacial.

El tipo de celda más común es el cubo, y la representación del espacio como un arreglo regular de cubos se denomina cuberil [Foley et al. 1996]. Cuando se representa un objeto con enumeración de ocupación espacial, sólo se controla la presencia o ausencia de una celda en cada posición de la malla, de esta manera, un objeto se puede codificar como una lista única y no ambigua de celdas ocupadas.

No obstante todas sus ventajas, la enumeración de ocupación espacial tiene también sus desventajas: no existe el concepto de ocupación parcial, por lo que muchos sólidos, como el de la Figura 2-7, sólo pueden aproximarse. Si las celdas son cubos, los únicos objetos que se pueden representar con exactitud son aquellos cuyas caras son paralelas a los lados del cubo y cuyos vértices pertenecen a la malla.

Finalmente, el espacio se convierte también en un asunto de importancia, ya que se requieren hasta n^3 celdas para representar un objeto con una resolución de n elementos de volumen en cada una de las tres dimensiones.

2.4.3.3 Árboles octales.

Los árboles octales (*octrees*) constituyen una variante jerárquica de la enumeración de ocupación espacial, y fueron diseñados para mejorar los exigentes requisitos de almacenamiento de ésta, mismos que han sido delineados en el apartado anterior.

Los árboles octales se derivan de los árboles de cuadrantes (*quadtrees*), que es un formato de representación bidimensional utilizado para codificar imágenes.

¹ Los voxes son elementos de volumen, y se denominan así por analogía con los píxeles [Requicha 1980, Foley et al. 1996].

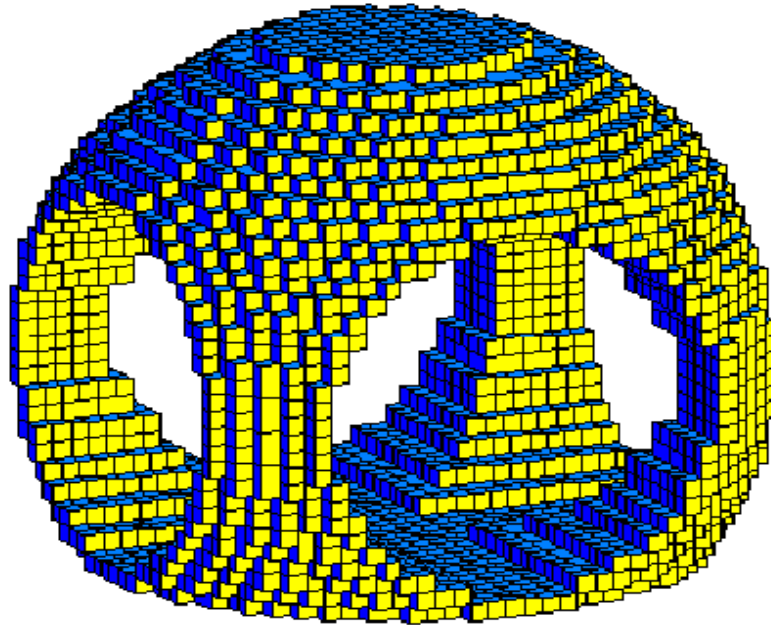


Figura 2-7 Un objeto representado con enumeración de ocupación espacial [Aguilera 1998].

El nombre de árboles octales viene del esquema tradicional de representación del mismo, ya que los árboles octales son representados por árboles en donde cada nodo (que representa un octante) tiene ocho ramificaciones (excepto las hojas).

En la Figura 2-8 se muestra la numeración realizada sobre los octantes, mismos que se indican con los números 0 a 7.

La idea que subyace detrás de este tipo de representación es la de "divide y vencerás", la cual ha sido ampliamente aprovechada para la elaboración de algoritmos.

Los árboles octales son un esquema de representación de sólidos muy versátil y no ambiguo, además, con unos parámetros de resolución bien definidos, la representación que proporcionan es también única.

Finalmente, debe decirse que el esquema de árboles octales también tiene sus inconvenientes, como el que los nodos que se encuentran cerca de la frontera del objeto que está siendo representado, tienen que ser muy pequeños en orden de modelar el sólido tan

bien como la resolución lo permita, por lo que el número de nodos es muy grande en la frontera del objeto. Esto último repercute en el tamaño de las estructuras de datos empleadas para dicha representación.

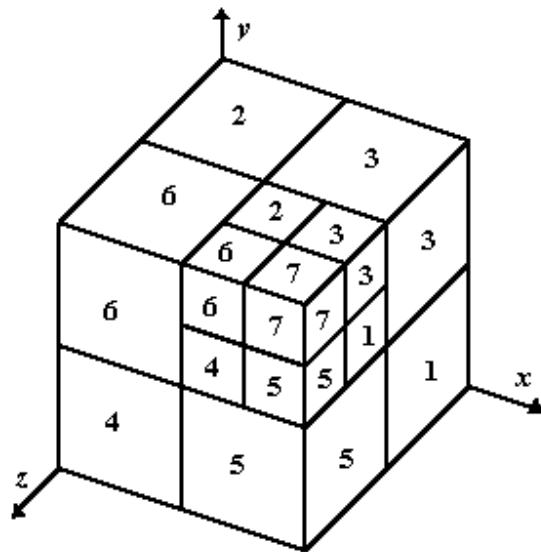


Figura 2-8 Numeración de un octante, el octante cero no es visible.

2.5 Notas del capítulo.

El presente capítulo ha delineado los aspectos más importantes del modelado de sólidos. También ha esbozado algunos de los principales esquemas de representación de sólidos más ampliamente utilizados. Así mismo, se describieron las principales ventajas y deficiencias subyacentes en dichos esquemas de representación.

En el capítulo siguiente se describe el modelo EVM (*Extreme Vertices Model*), el cual además de que puede ser utilizado como otro esquema de representación de sólidos, constituye, en buena medida, la parte medular del presente trabajo.
