Limites

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

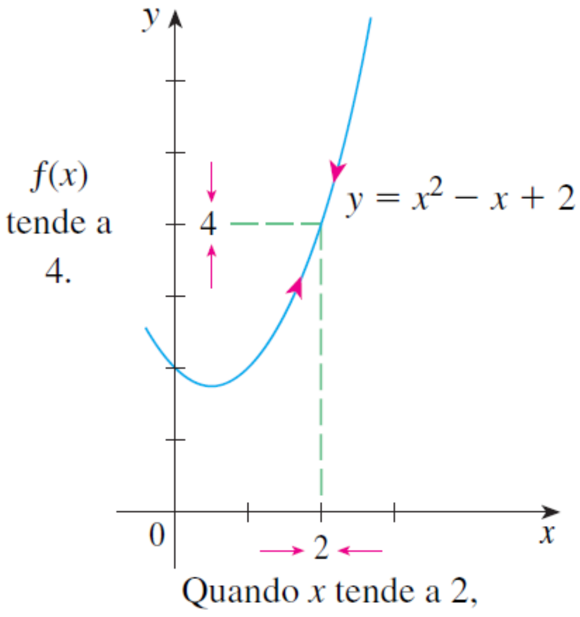
Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0		3,0	
1,5		2,5	
1,8		2,2	
1,9		2,1	
1,95		2,05	
1,99		2,01	
1,995		2,005	
1,999		2,001	

O Limite de uma função

A tabela a seguir fornece os valores de para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001



Definição intuitiva de limite

$\boxed{1}$ **Definição** Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

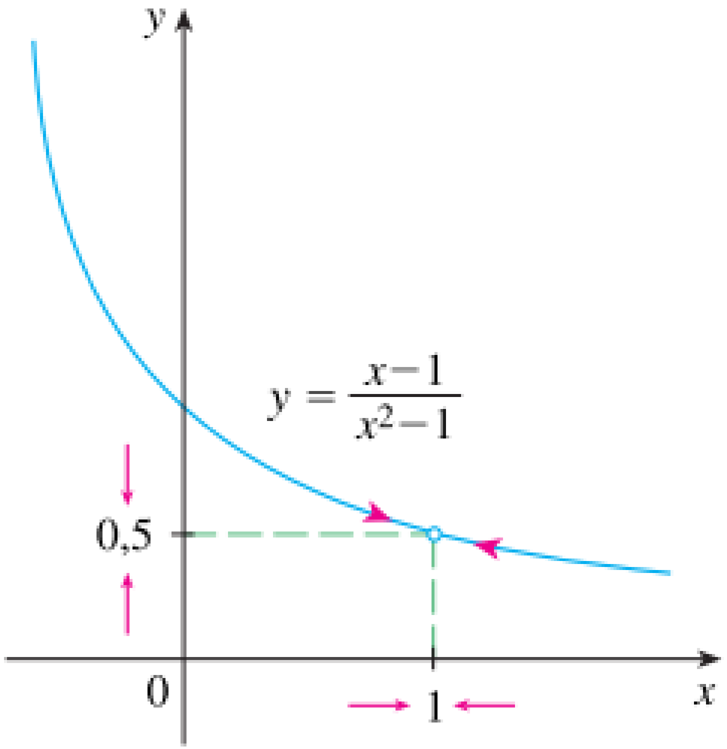
e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0,5	
0,9	
0,99	
0,999	
0,9999	

$x > 1$	$f(x)$
1,5	
1,1	
1,01	
1,001	
1,0001	



INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

O Limite de uma função

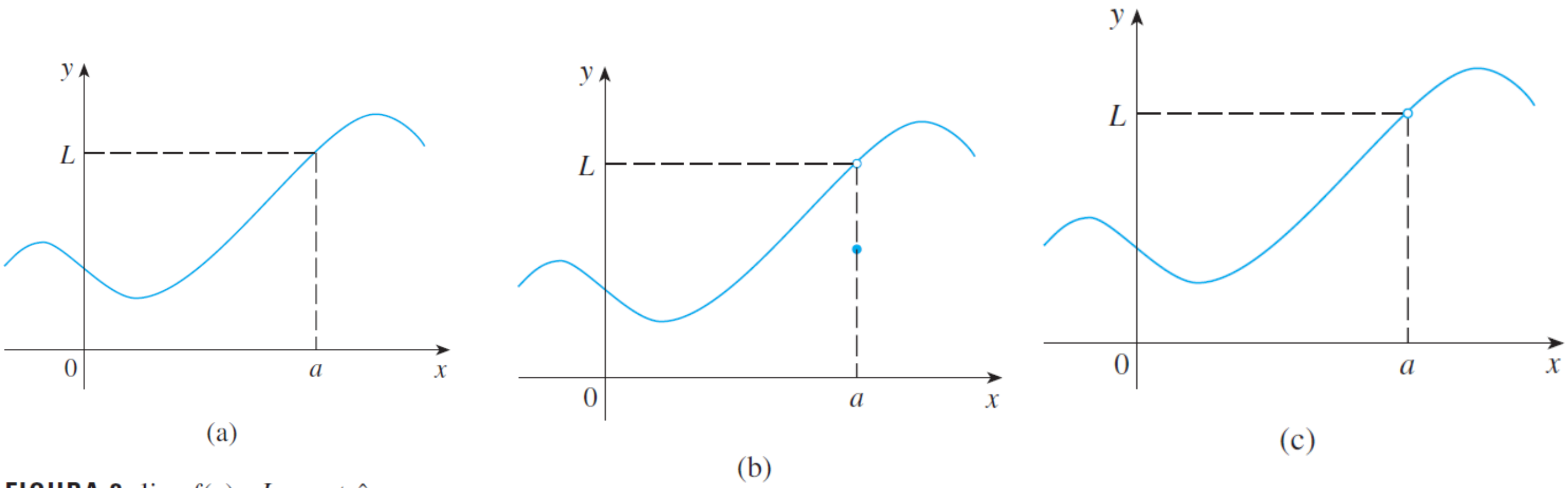


FIGURA 2 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ nos três casos

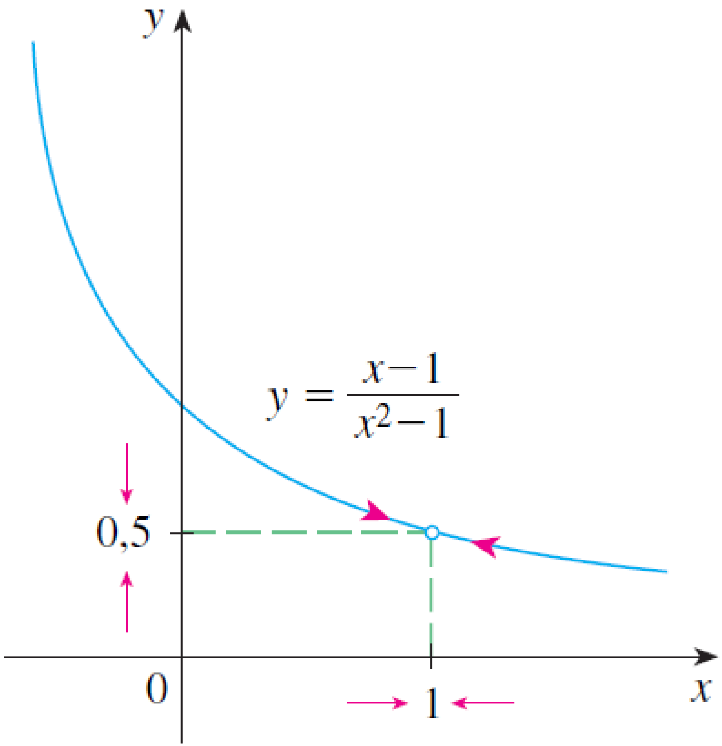
Observe a frase "mas $x \neq a$" na definição de limite. Isso significa que, ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a, nunca consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida *próximo de a*.

A Figura 2 mostra os gráficos de três funções. Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas, em cada caso, não importando o que acontece em a, é verdade que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

O Limite de uma função

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.



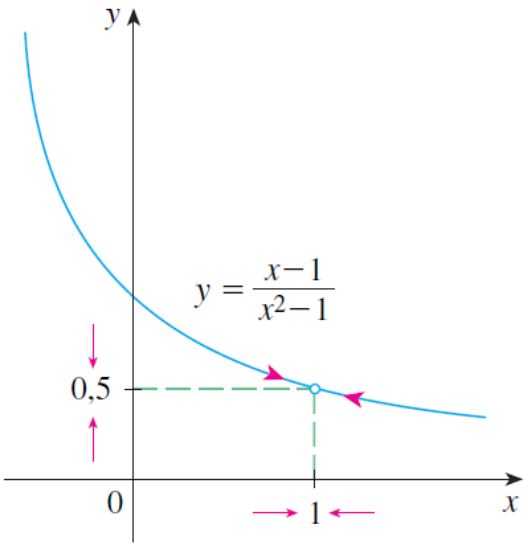
Agora, vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$.

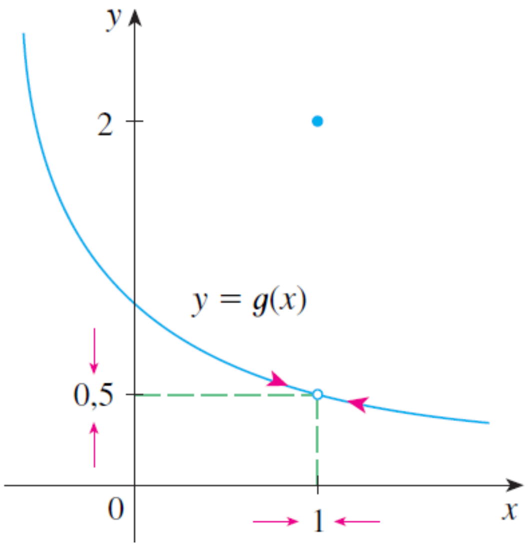
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

O Limite de uma função

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

Agora, vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$.





INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

O Limite de uma função

EXEMPLO 2 Estime o valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

O Limite de uma função

EXEMPLO 2 Estime o valor de $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

t	$\frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
$\pm 1,0$	0,16228
$\pm 0,5$	0,16553
$\pm 0,1$	0,16662
$\pm 0,05$	0,16666
$\pm 0,01$	0,16667

Podemos conjecturar que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

Mas será esse o valor do limite?

E ser aproximarmos mais?

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

O Limite de uma função

EXEMPLO 2 Estime o valor de $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 0{,}0005$	0,16800
$\pm 0{,}0001$	0,20000
$\pm 0{,}00005$	0,00000
$\pm 0{,}00001$	0,00000

Como veremos mais adiante, o valor desse limite será realmente 1/6.

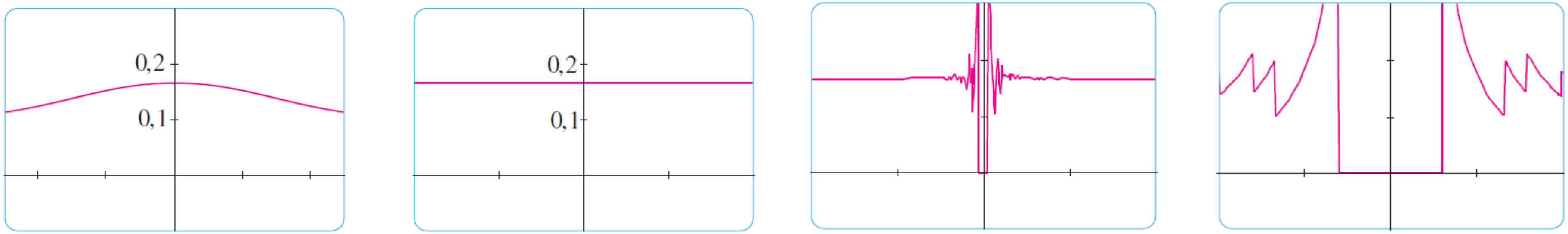
O que pode ter ocorrido com esses cálculos da tabela?

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

O Limite de uma função

EXEMPLO 2 Estime o valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

O problema é que a calculadora dá valores falsos, pois $\sqrt{t^2 + 9}$ fica muito próximo de 3 quando t é pequeno. (Na realidade, quando t é suficientemente pequeno, o valor obtido na calculadora para $\sqrt{t^2 + 9}$ é 3,000. . ., com tantas casas decimais quanto a calculadora for capaz de fornecer).



(a) $[-5, 5]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (b) $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0{,}1; 0{,}3]$

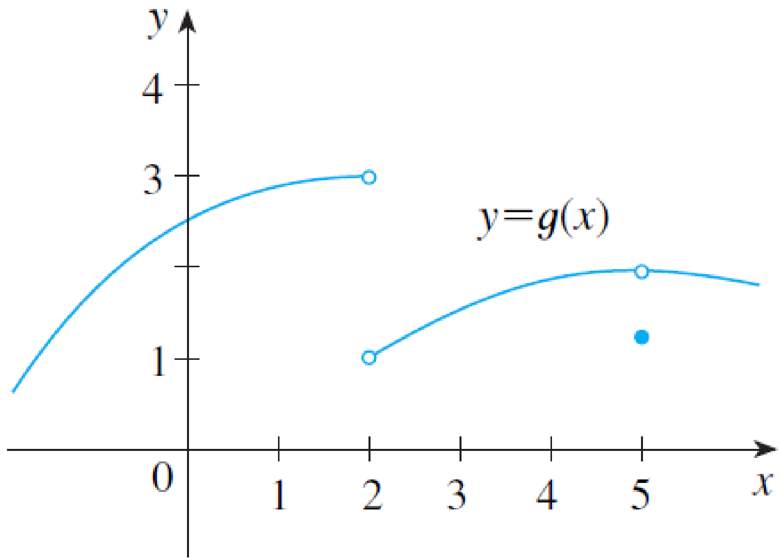
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Limites Laterais

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$



INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Limites Laterais

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g é apresentado na Figura 10. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 3$ e (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 1$

(c) $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

(d) $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x) = 2$ e (e) $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x) = 2$

(f) $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 2$

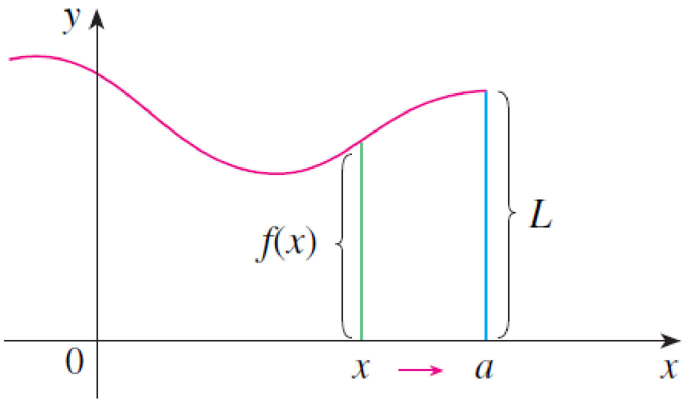
Limites Laterais

2 **Definição** Escrevemos

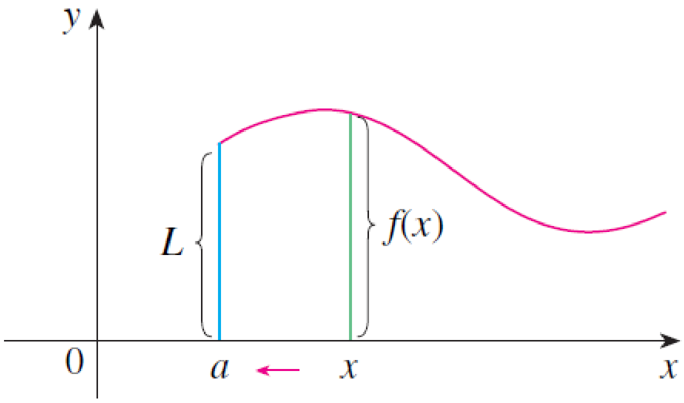
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda** de $f(x)$ **quando** x **tende a** a [ou o **limite d e** $f(x)$ **quando** x **tende a** a **pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Limites Laterais



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$



(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Limites Infinitos

EXEMPLO 8 Encontre $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$, se existir.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	
$\pm 0{,}5$	
$\pm 0{,}2$	
$\pm 0{,}1$	
$\pm 0{,}05$	
$\pm 0{,}01$	
$\pm 0{,}001$	

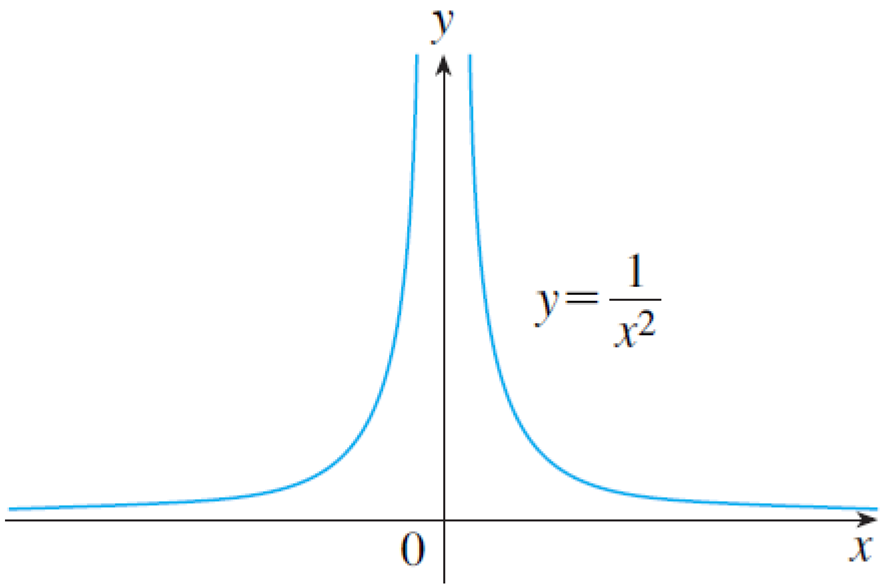
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Limites Infinitos

EXEMPLO 8 Encontre $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, se existir.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty}$$

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0,5$	4
$\pm 0,2$	25
$\pm 0,1$	100
$\pm 0,05$	400
$\pm 0,01$	10.000
$\pm 0,001$	1.000.000

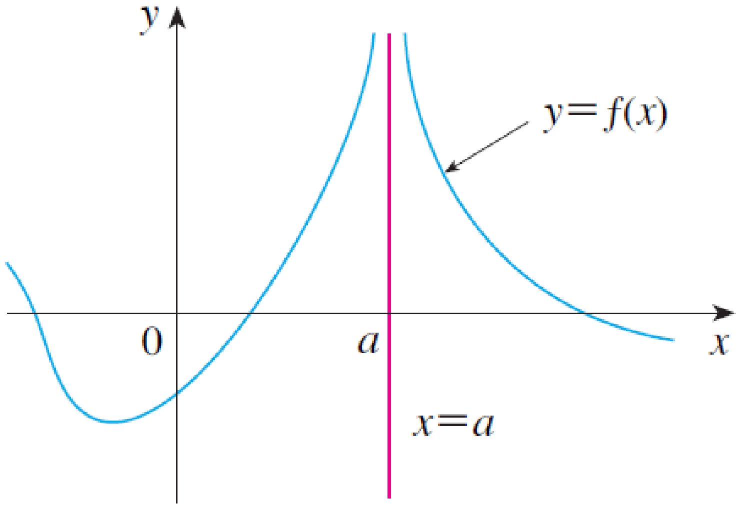


Limites Infinitos

4 Definição Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tornando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.



$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

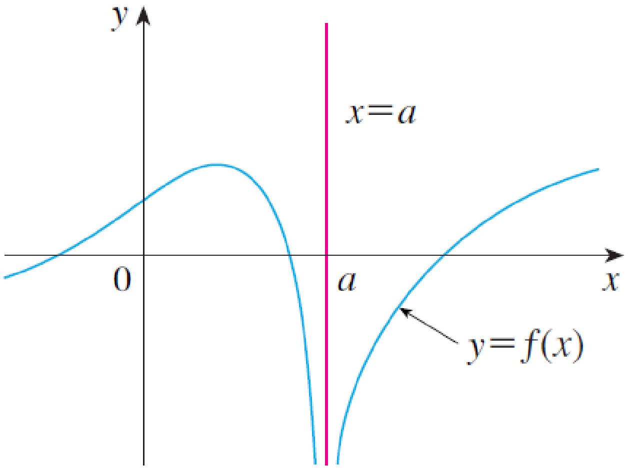
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Limites Infinitos

$\boxed{5}$ **Definição** Seja f definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tornarmos x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.



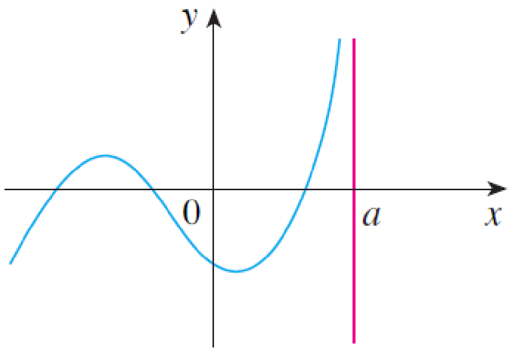
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Limites Infinitos

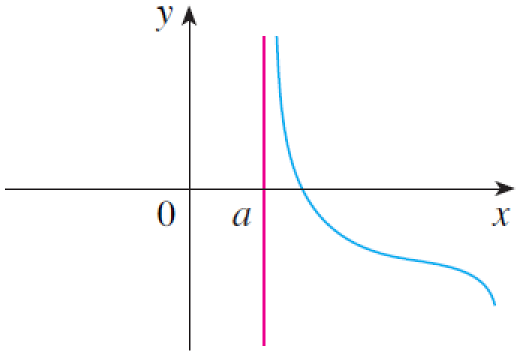
$\boxed{6}$ **Definição** A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

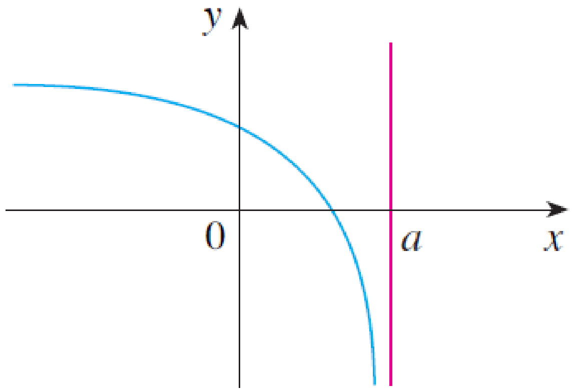


(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

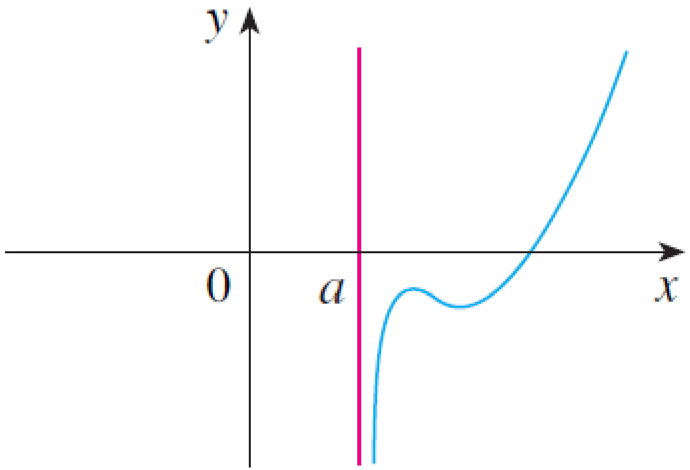


(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

Limites Infinitos



(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

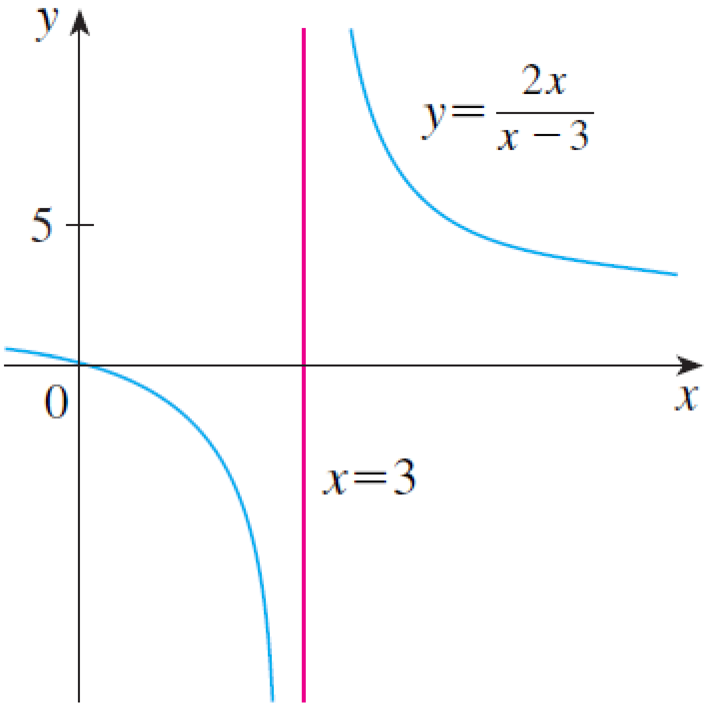
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Limites Infinitos

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.

Limites Infinitos

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.



$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

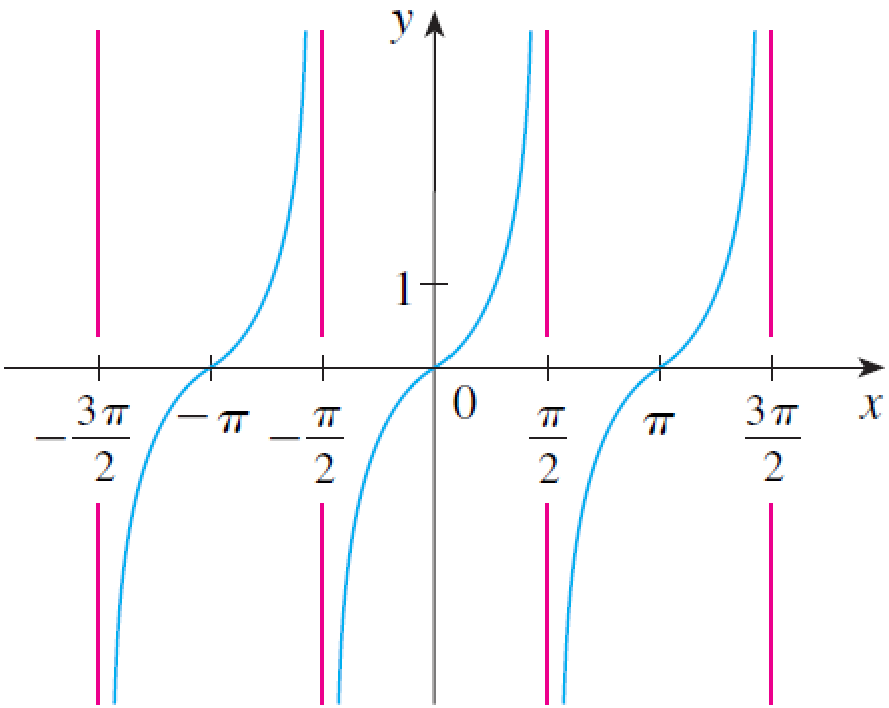
Limites Infinitos

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Limites Infinitos

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.



$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

$x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um número inteiro.

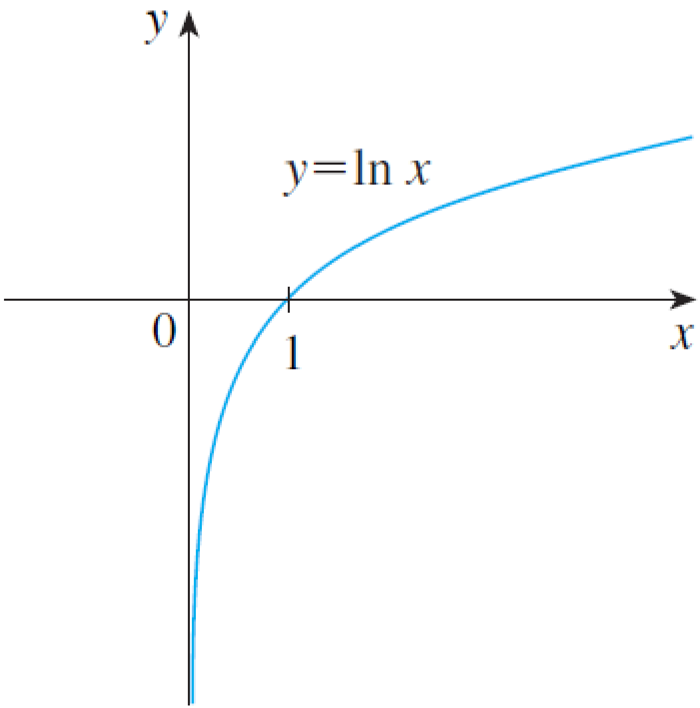
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Limites Infinitos

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$.

Limites Infinitos

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$.



$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

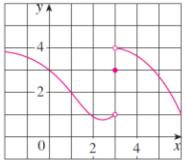
Listas 1

Stewart Páginas:88,89,90
Exercícios: 5,7,11,12,13,14,15,29,36,37,40.

5. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$

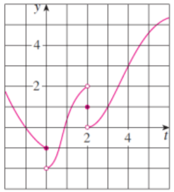


7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$



11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x > \pi \end{cases}$

13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

15. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$

29–37 Determine o limite infinito.

29. $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

36. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

37. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

40. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim