Limites

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

existam, então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

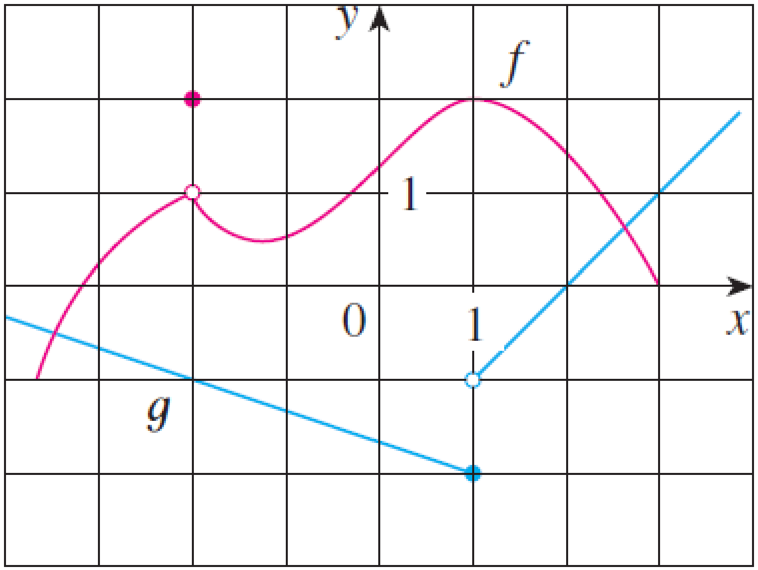
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 1 Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$



INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 1 Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(a) Dos gráficos de f e g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(pela Propriedade 1)} \\ &= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(pela Propriedade 3)} \\ &= 1 + 5(-1) = -4 \end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 1 Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

(b) Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Mas $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, pois os limites à esquerda e à direita são diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Assim, não podemos usar a Propriedade 4 para o limite solicitado. Mas *podemos* usar a Propriedade 4 para os limites laterais:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

Os limites à esquerda e à direita não são iguais, logo $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ não existe.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 1 Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

(c) Os gráficos mostram que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1{,}4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como o limite do denominador é 0, não podemos usar a Propriedade 5. O limite dado não existe, pois o denominador tende a 0, enquanto o numerador tende a um número diferente de 0.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

7. $\lim_{x \to a} c = c$

8. $\lim_{x \to a} x = a$

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo

(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo

[Se n for par, supomos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 2 Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

(b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 2 Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

(a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pelas Propriedades 2 e 1)} \\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(pela Propriedade 3)} \\
&= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)} \\
&= 39.
\end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 2 Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim_{x\to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

(b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x\to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2} (5 - 3x)}$$ (pela Propriedade 5)

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x}$$ (pelas Propriedades 1, 2 e 3)

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$ (pelas Propriedades 9, 8 e 7)

$$= -\frac{1}{11}$$

Cálculos usando propriedades de limites

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

EXEMPLO 3 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 3 Encontre $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

IMPORTANTE

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

quando x tende a 1, temos $x \neq 1$ e, assim, $x - 1 \neq 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Cálculos usando propriedades de limites

Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, desde que o limite exista.

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{x \to 1} g(x)$ onde

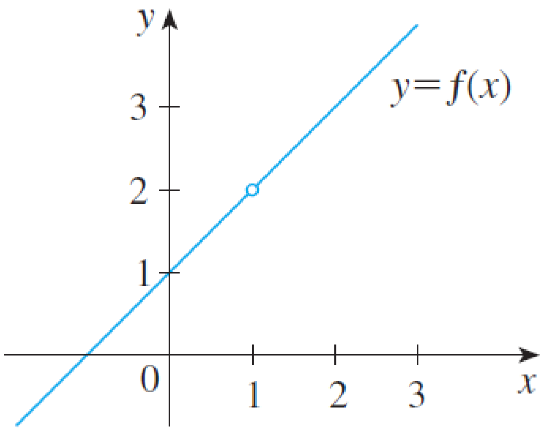
$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

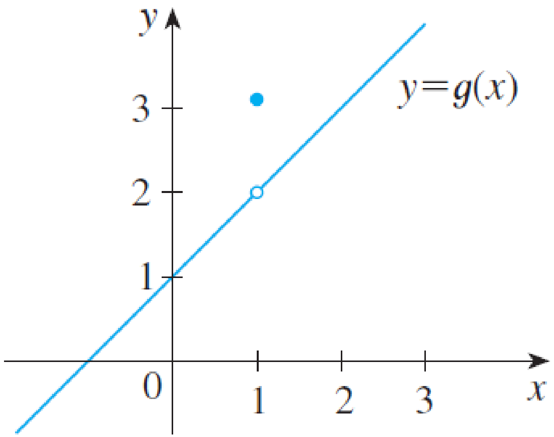
INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{x \to 1} g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$





SOLUÇÃO Aqui g está definida em $x = 1$ e $g(1) = \pi$, mas o valor de um limite, quando x tende a 1, não depende do valor da função em 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, temos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Lembre-se de que consideramos apenas $h \neq 0$ quando fazemos h tender a 0.) Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

Cálculos usando propriedades de limites

$\boxed{1}$ **Teorema** $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

EXEMPLO 7 Mostre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 7 Mostre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUÇÃO Lembre-se de que

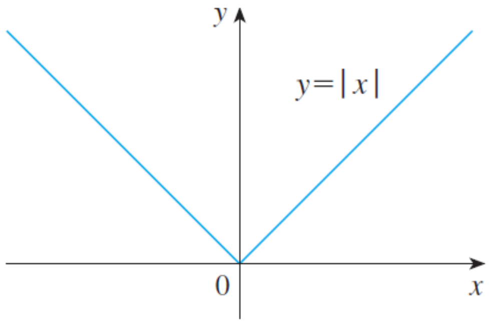
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Uma vez que $|x| = x$ para $x > 0$, temos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, temos $|x| = -x$ e, assim,

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$



$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 8 Demonstre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

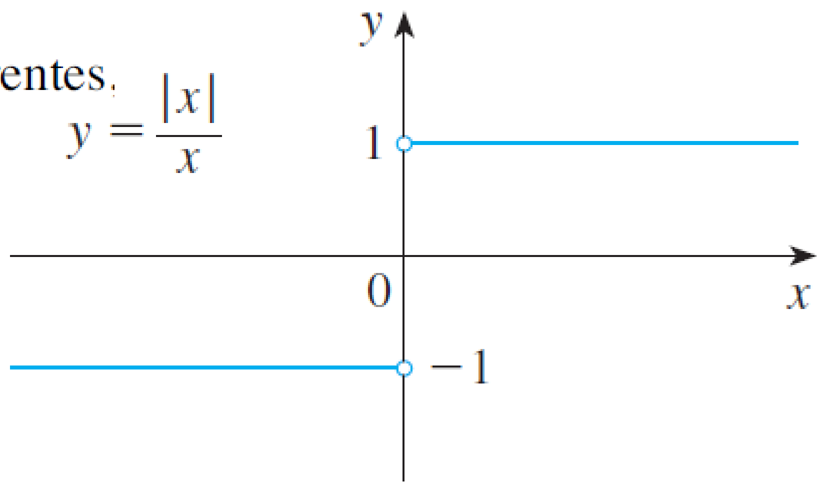
EXEMPLO 8 Demonstre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe.

SOLUÇÃO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes,



$\lim_{x \to 0} |x|/x$ não existe

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 9 Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{se } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

determine se $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 9 Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{se } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

determine se $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x > 4$, temos

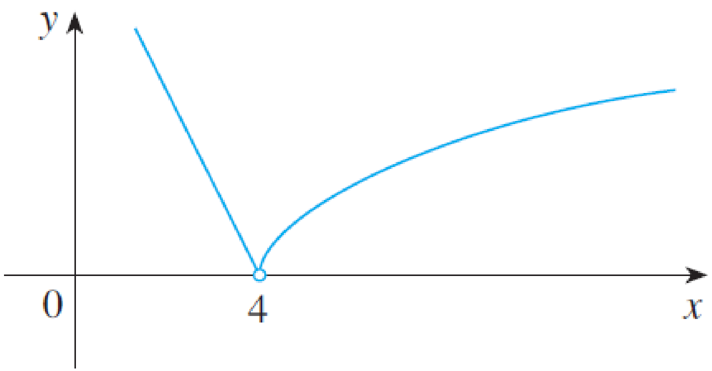
$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Uma vez que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, temos

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Os limites laterais (à esquerda e à direita) são iguais. Dessa forma, o limite existe e vale

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0.$$

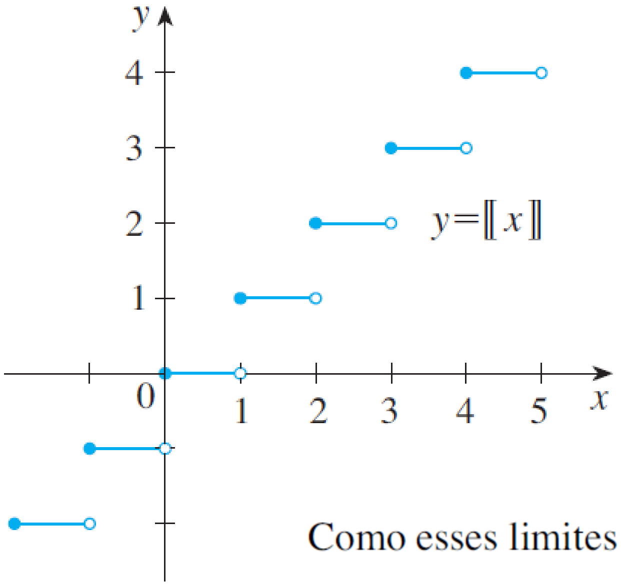


Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 10 A **função maior inteiro** é definida por $[\![x]\!]$ = o maior inteiro que é menor que ou igual a x. (Por exemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4{,}8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}\,]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Mostre que $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ não existe.

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 10 A **função maior inteiro** é definida por $[\![x]\!]$ = o maior inteiro que é menor que ou igual a x. (Por exemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4{,}8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}\,]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Mostre que $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ não existe.



$$\lim_{x\to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^+} 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^-} 2 = 2$$

Como esses limites laterais não são iguais, pelo Teorema 1, $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ não existe.

Cálculos usando propriedades de limites

2 Teorema Se $f(x) \leqslant g(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g, ambos existem quando x tende a a, então

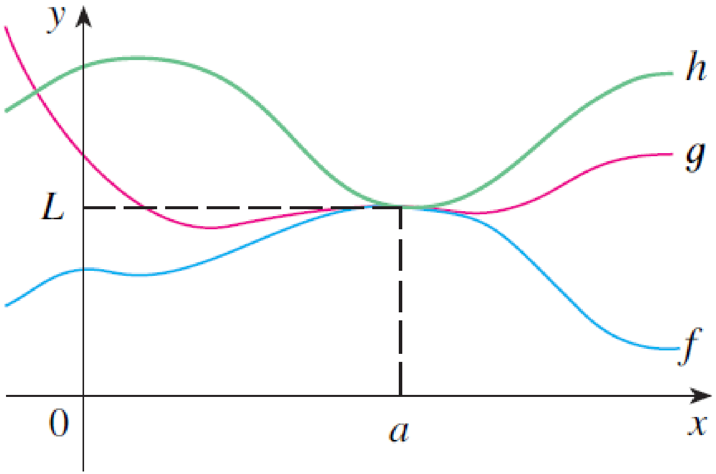
$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

Cálculos usando propriedades de limites

$\boxed{3}$ **Teorema do Confronto** Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quando x está próximo a a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$



INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 11 Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

EXEMPLO 11 Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que **não** podemos usar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe (veja o Exemplo 4 da Seção 2.2).

PROPRIEDADES NÃO SÃO VÁLIDAS PARA LIMITES QUE NÃO EXISTEM

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim

Cálculos usando propriedades de limites

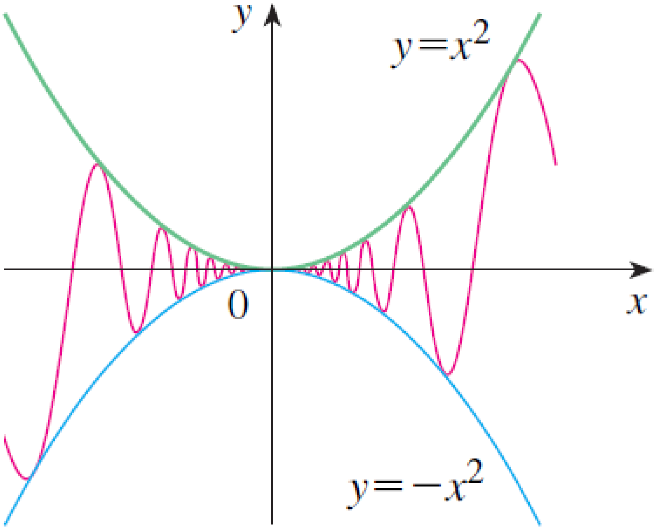
EXEMPLO 11 Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$



Listas 1

Stewart Páginas:98,99
Exercícios: 1,2,11, 13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,45,46,52

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

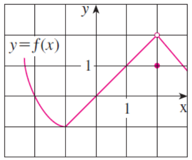
encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

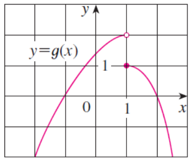
(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.





(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

11–32 Calcule o limite, se existir.

11. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

17. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

21. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

25. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \frac{1}{t}\right)$

31. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

41-46 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

45. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$ **46.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$

52. Seja $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to\pi/2} f(x)$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe?

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus
Cachoeiro de Itapemirim