INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

Grafos

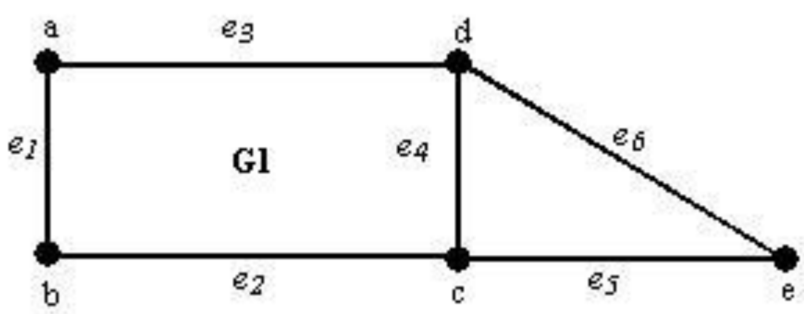
Prof. Victorio Albani de Carvalho

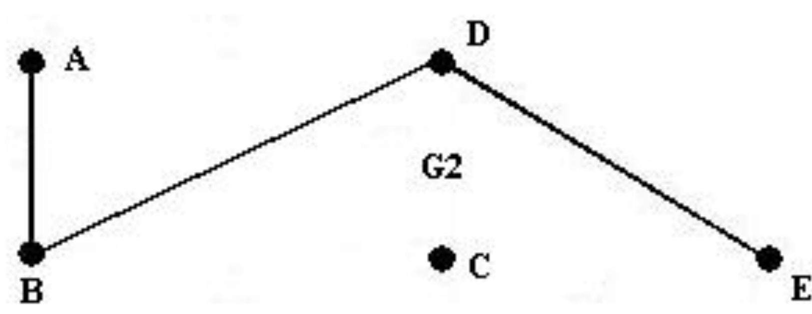
Definição

Grafo – Um grafo G é definido por G = (V,E), sendo que V representa o conjunto de nós e E, o conjunto de arestas (i, j), onde i, j ϵ V .

A Figura mostra dois exemplos de grafos:

- O grafo G1 consiste dos conjuntos V = {a, b, c, d, e} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6};
- O grafo G2 possui 1 nó que não é conectado com nenhum outro nó do grafo.

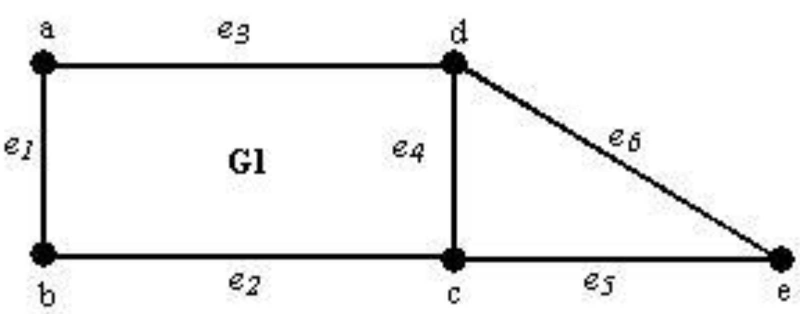


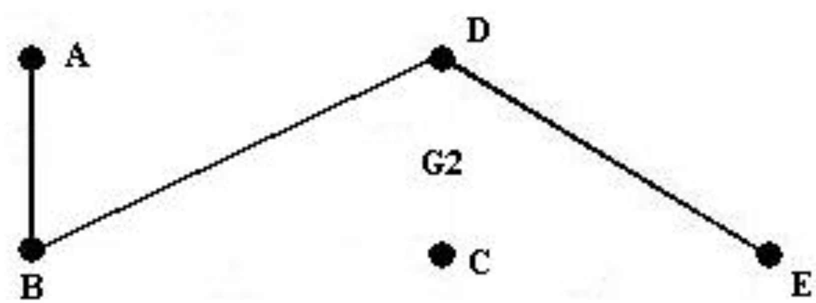


INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

Conceitos

Dois nós i, j são **vizinhos (ou adjacentes)**, denotado por i j, se eles estão conectados por uma aresta.



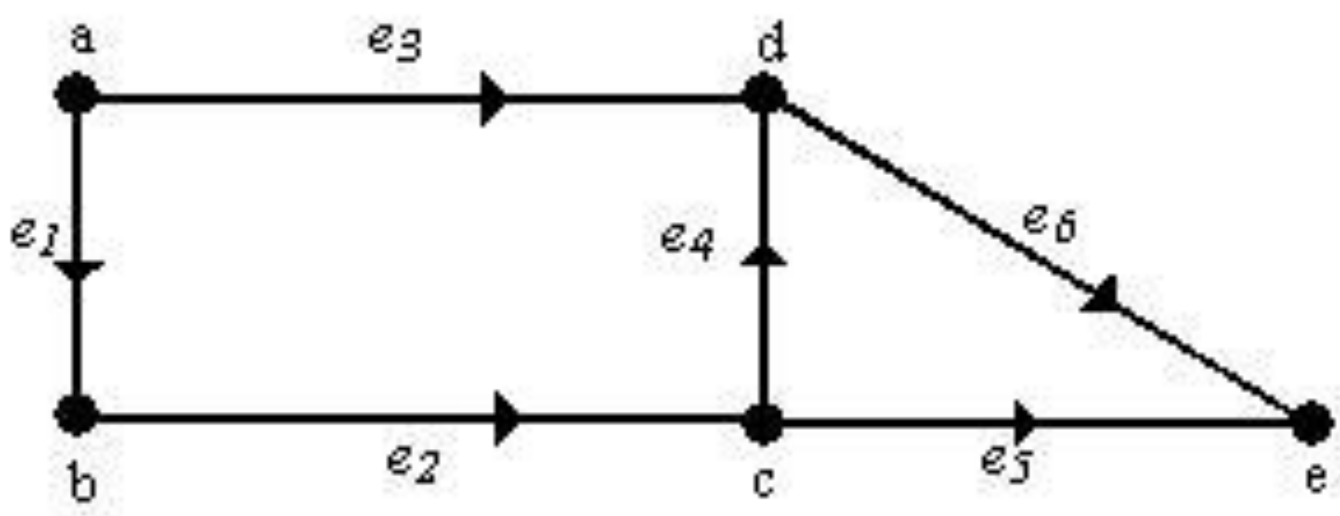


Conceitos

Ordem: número de vértices do grafo

Grau de um vértice: Número de arestas incidentes no vértice.

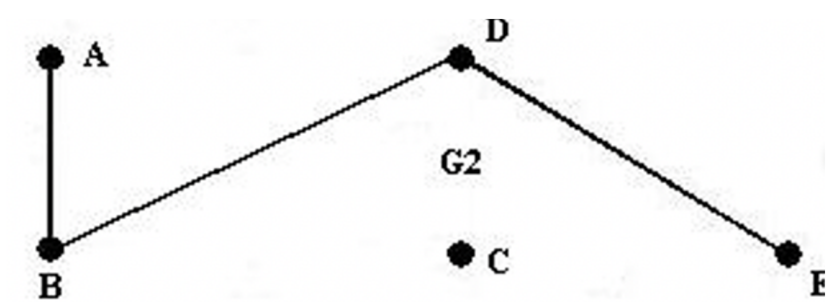
Grau de emissão e de **recepção**

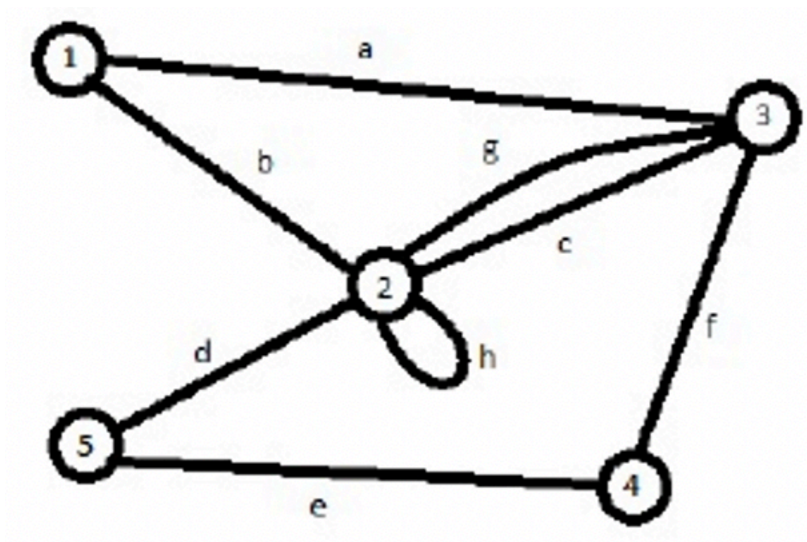


Conceitos

Sumidouro: vértice de grau zero

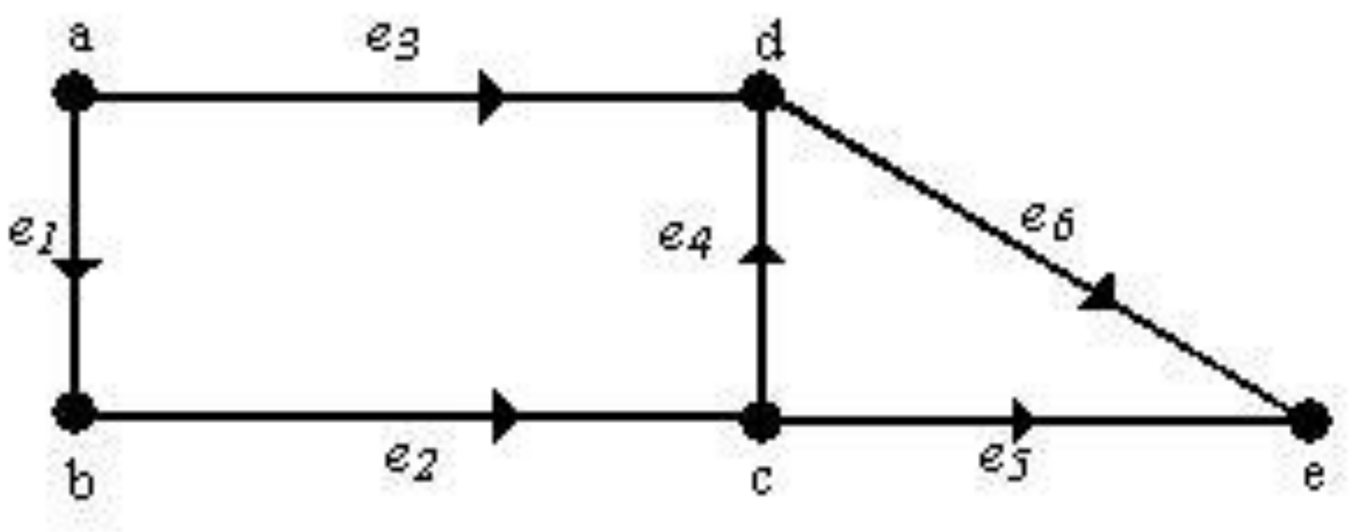
Laço: aresta que relaciona um vértice a ele próprio





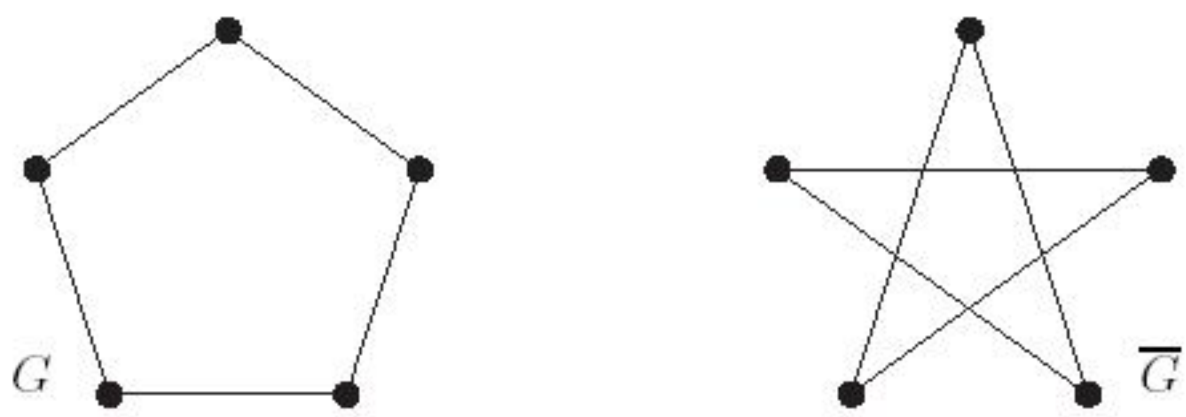
Grafo Orientado

Um grafo é dito orientado, ou dígrafro, quando é estabelecido um sentido (orientação) para as arestas.



Complemento Grafo

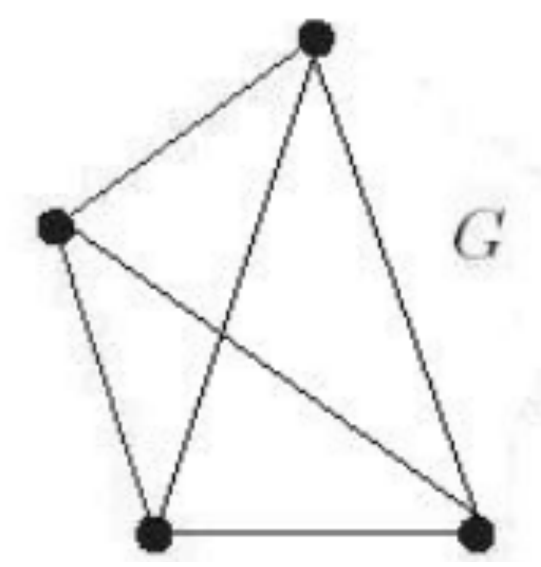
O complemento de um grafo G, representado por ~~G~~, é o grafo com o mesmo conjunto de vértices de G e tal que i j em ~~G~~ se eles não forem vizinhos em G.



(a) (b)

Grafo Completo

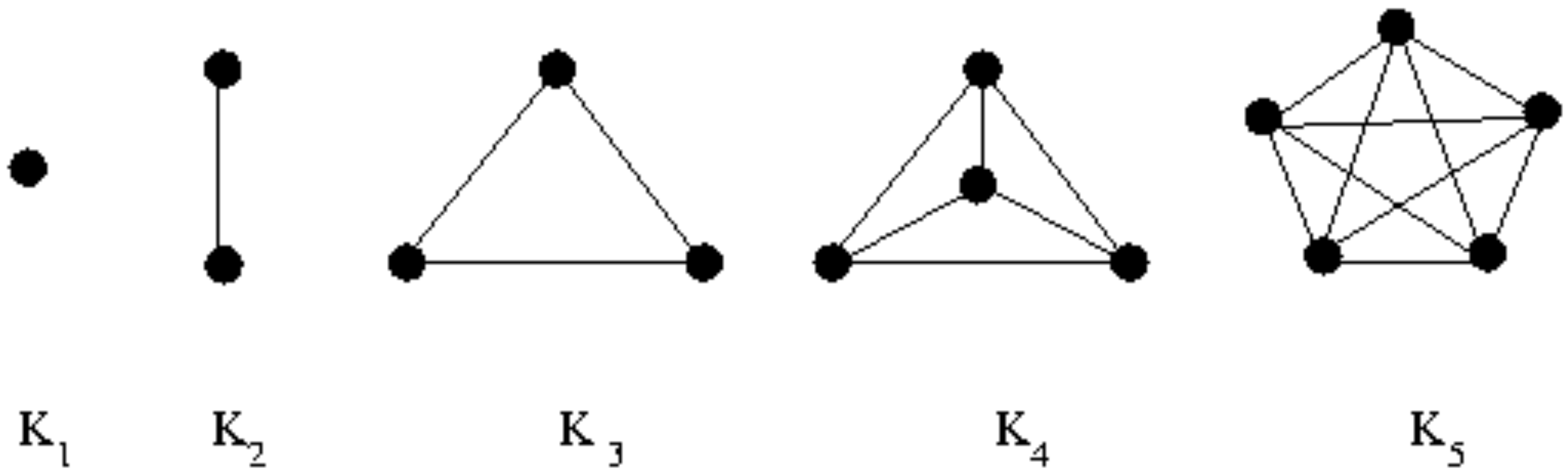
Se todos os vértices de G são mutuamente adjacentes, o grafo é dito completo



INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

Grafo Regular

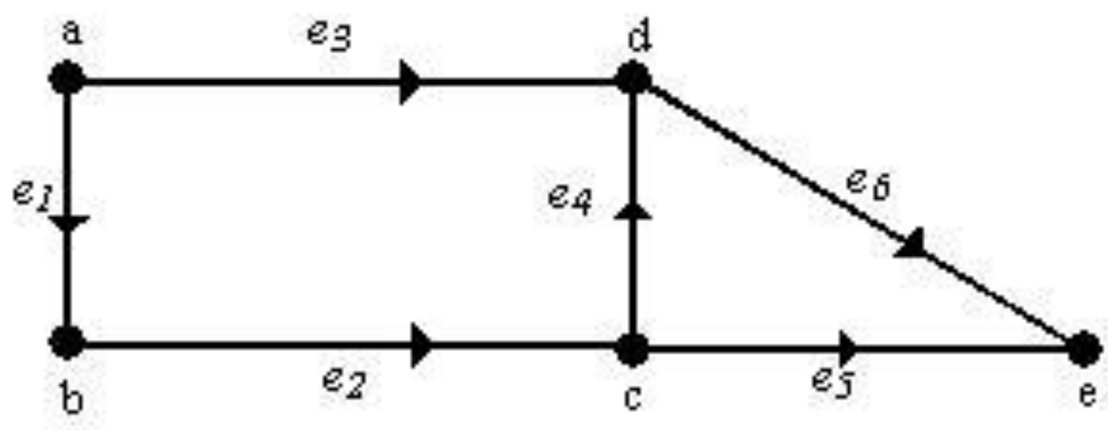
Grafo Regular: onde todos os vértices possuem mesmo grau (grau = número de arestas incidentes no vértice)



Conceitos

Cadeia: Sequência qualquer de arestas ligando dois vértices (independente do sentido).

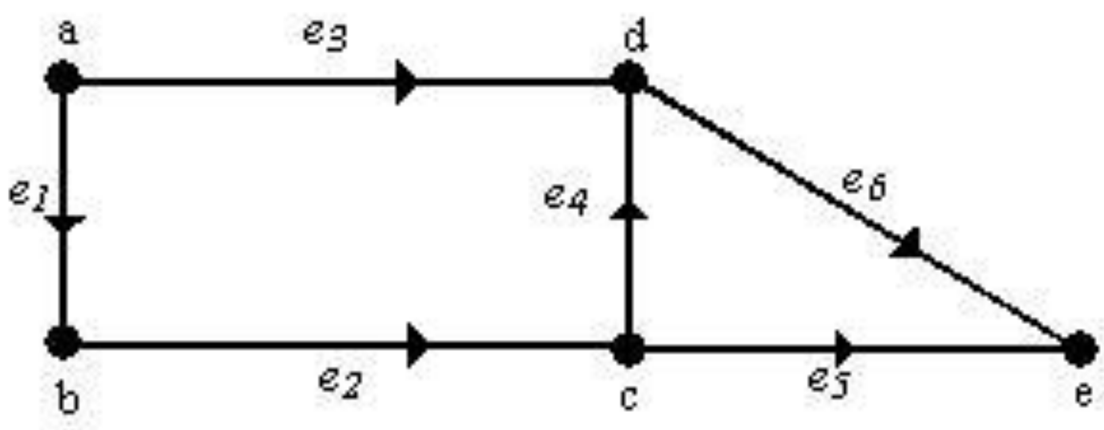
Cadeia Simples: Cadeia que não passa duas vezes pela mesma aresta.



Conceitos

Cadeia elementar: Cadeia que não passa duas vezes pelo mesmo vértice.

Cadeia fechada: Cadeia na qual o vértice inicial é também o vértice final.

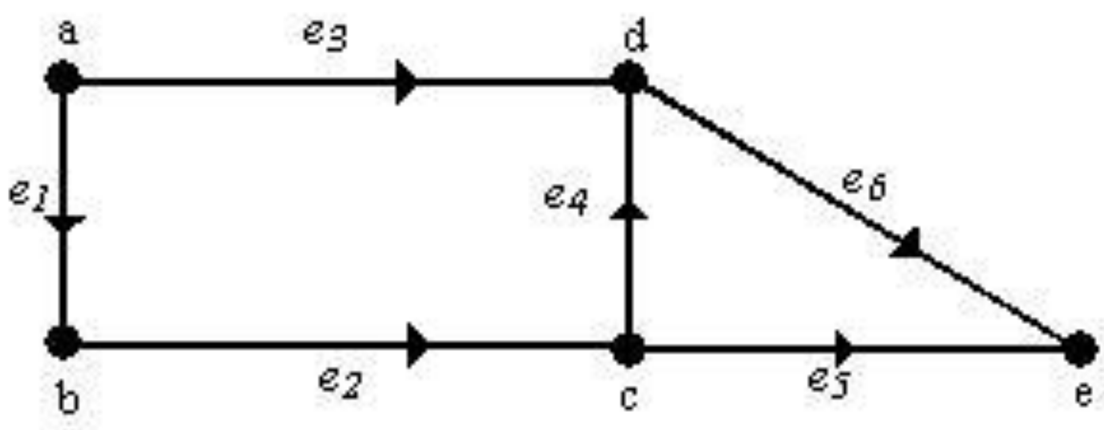


Conceitos

Ciclo: Cadeia simples e fechada.

Caminho: Cadeia na qual todos as arestas tem mesma orientação (só para grafos onrientados).

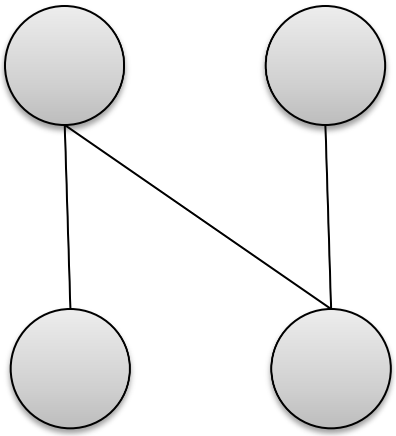
Circuito: Caminho simples e fechado

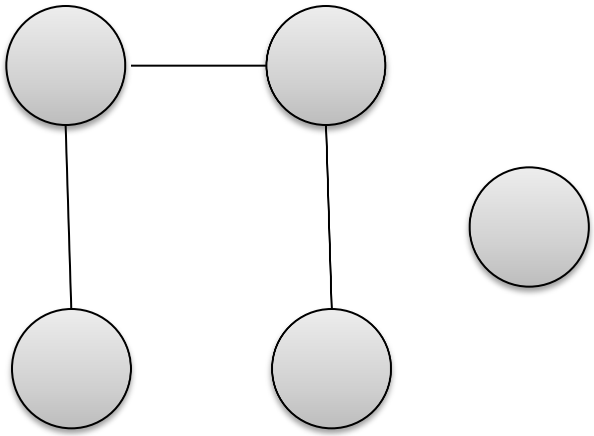


Grafo Tipos

Grafo Conexo: Existe ao menos uma cadeia ligando cada par de vértices

Grafo Desconexo: Há ao menos um par de vértices não ligados por nenhuma cadeia

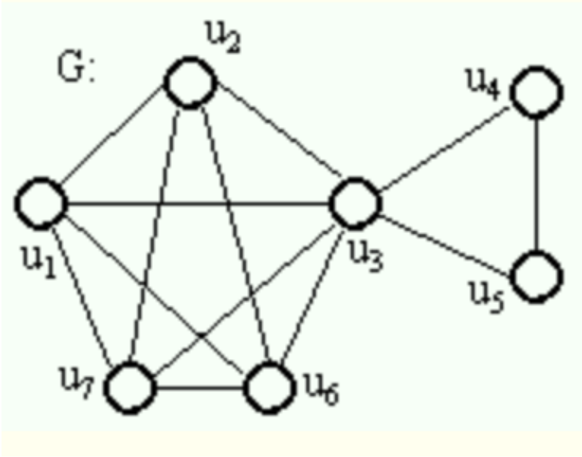


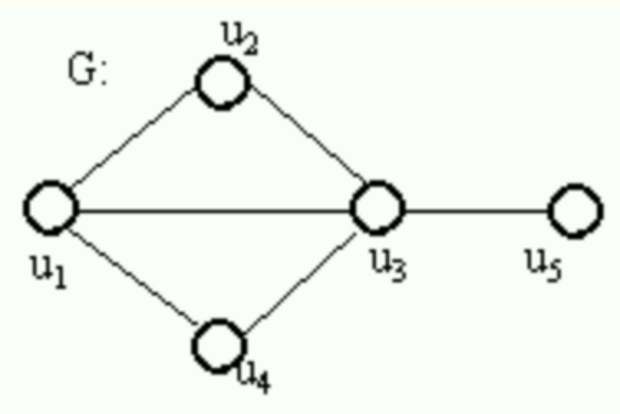


Grafo Tipos

Grafo Euleriano: Possui um ciclo que visita cada aresta apenas 1 vez. Esse ciclo é chamado ciclo Euleriano.

Teorema: Um grafo é Euleriano se e somente se é conexo e cada vértice tem grau par.

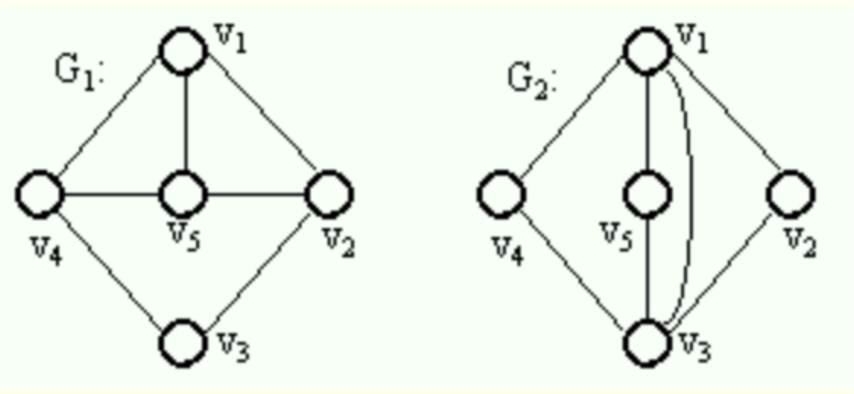




Grafo Tipos

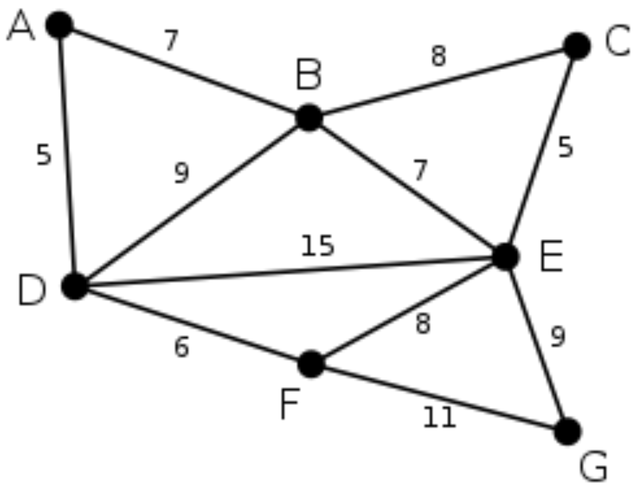
Grafo Hamiltoniano: Grafo que possui um ciclo que visita cada vértice apenas uma vez (ciclo Hamiltoniano)

Problema do Caixeiro Viajante



Grafo Ponderado

Em um grafo ponderado, um peso ou conjunto de pesos é associado a cada aresta, representado da forma w(i, j).

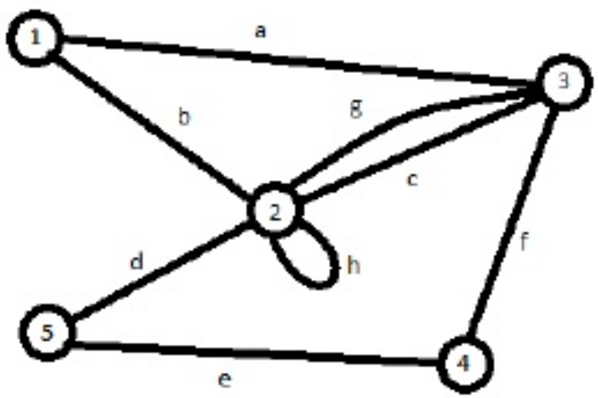


INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

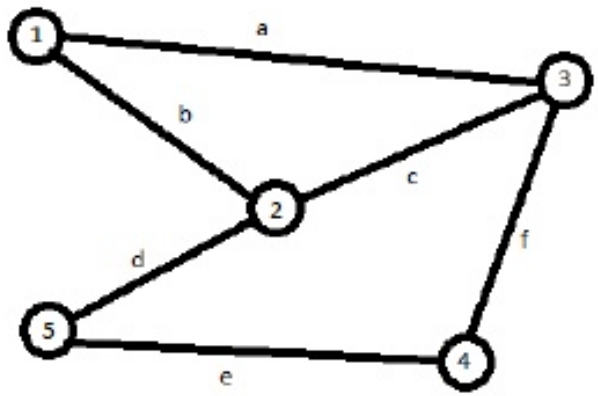
Grafo Tipos

Grafo Simples: Sem direcionamento, sem laços e sem arestas paralelas

Não Simples



Simples



Representação Computacional de Grafos

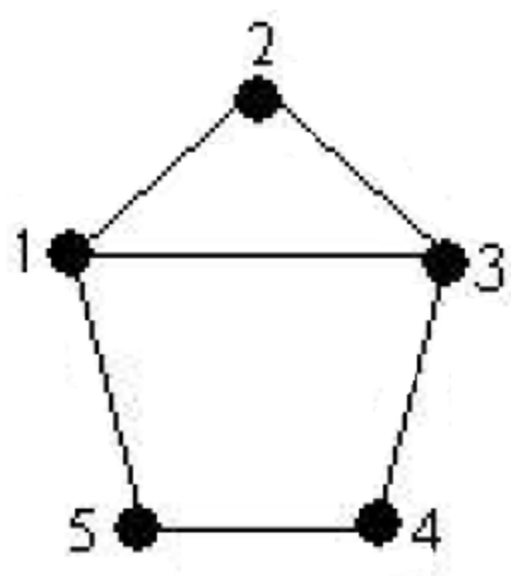
Matriz Adjacência

- Uma das formas mais utilizadas para representar grafos.

- Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$, onde n é o numero de nós de um grafo G = (V,E) qualquer. A matriz de adjacência A é construída da seguinte forma

Matriz Adjacência

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \sim j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



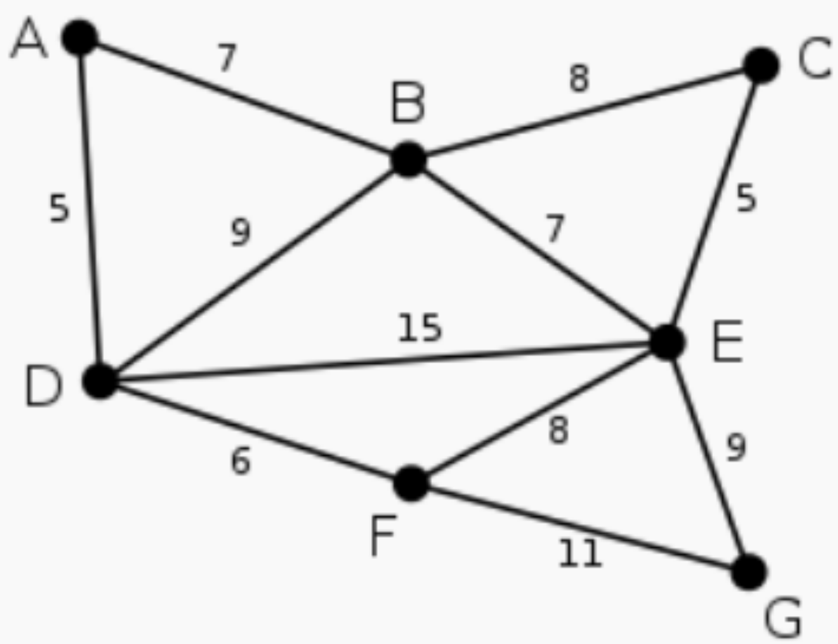
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Adjacência

- Quando o grafo é ponderado, a representação só fica completa quando também se indica a sua matriz de pesos, construída de maneira semelhante á matriz de adjacência (troca-se os uns pelos pesos).
- Em grafos não orientados serão geradas matrizes iguais a suas transpostas (os elementos abaixo da diagonal principal são desncessários).

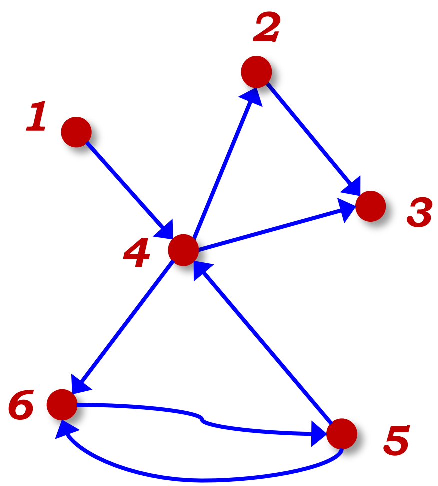
INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

Matriz Adjacência

Grafo valorado	Matriz de valores
	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 0 & 15 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 15 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 11 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Adjacência

- Para dígrafos (grafos dirigidos), é preciso observar o sentido do caminho entre os nós



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

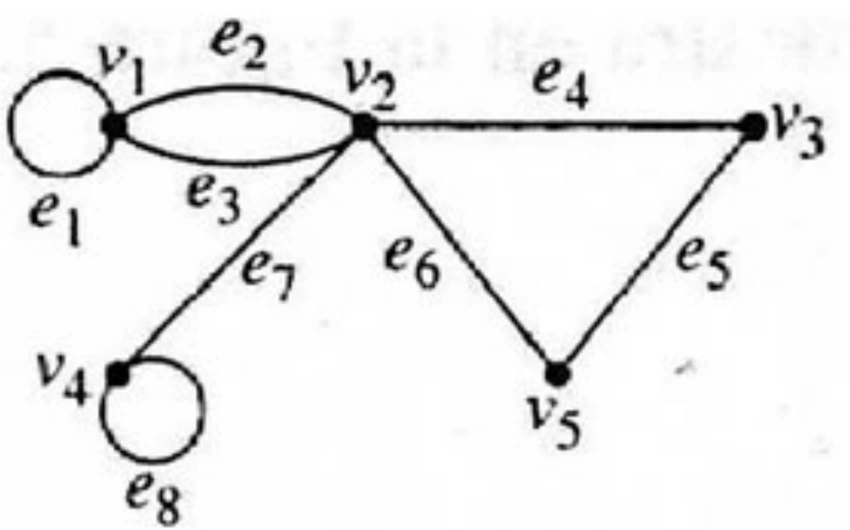
Matriz de Incidência

A matriz de incidência $B = [b_{ij}]$ de um grafo $G = (V,E)$, com $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $E = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$, é definida da seguinte forma:

$$B(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \in e_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Matriz de Incidência

Não direcionada



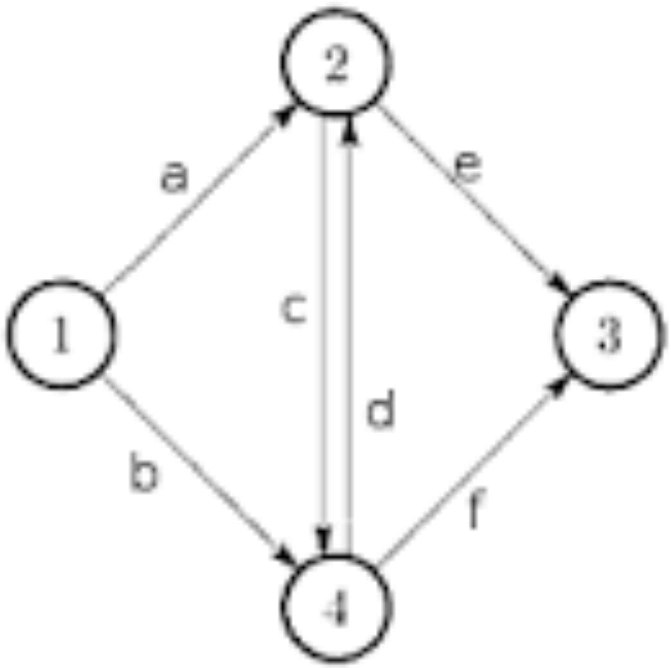
	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
V1	2	1	1	0	0	0	0	0
V2	0	1	1	1	0	1	1	0
V3	0	0	0	1	1	0	0	0
V4	0	0	0	0	0	0	1	2
V5	0	0	0	0	1	1	0	0

Matriz de Incidência

- Se G é um dígrafo, então $b_{ij} = +1$ se v_i está no início da seta e $b_{ij} = -1$, caso v_i esteja na cabeça da seta.
- Para grafos ponderados, vale também a mesma observação no que diz respeito á escolha de sinais para representar os arcos e seus pesos.

Matriz de Incidência

Direcionada

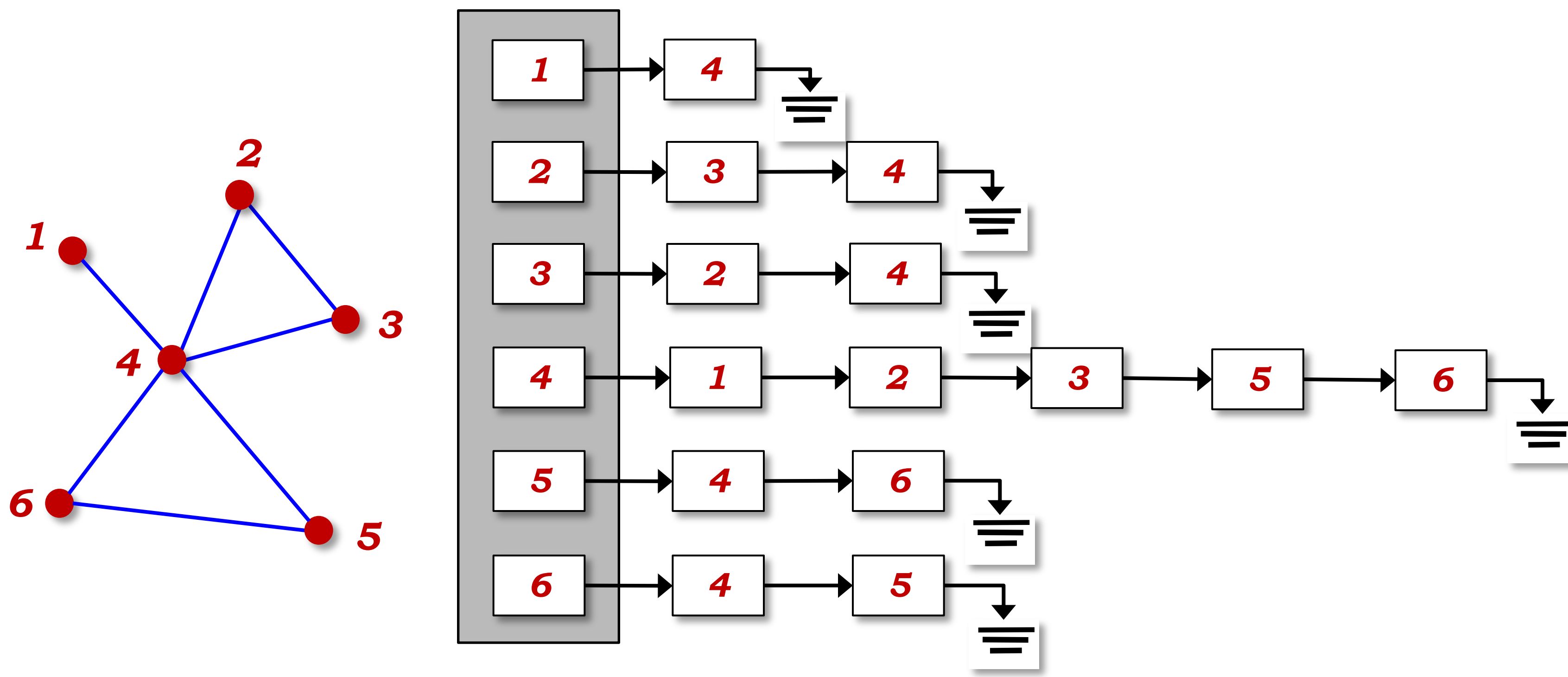


$$
\begin{array}{c}
\\
1\\ 2\\ 3\\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \;\;a\; & \;\;b\; & \;\;c\; & \;\;d\; & \;\;e\; & \;\;f\; \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

Representação Computacional de Grafos
Listas de adjacência

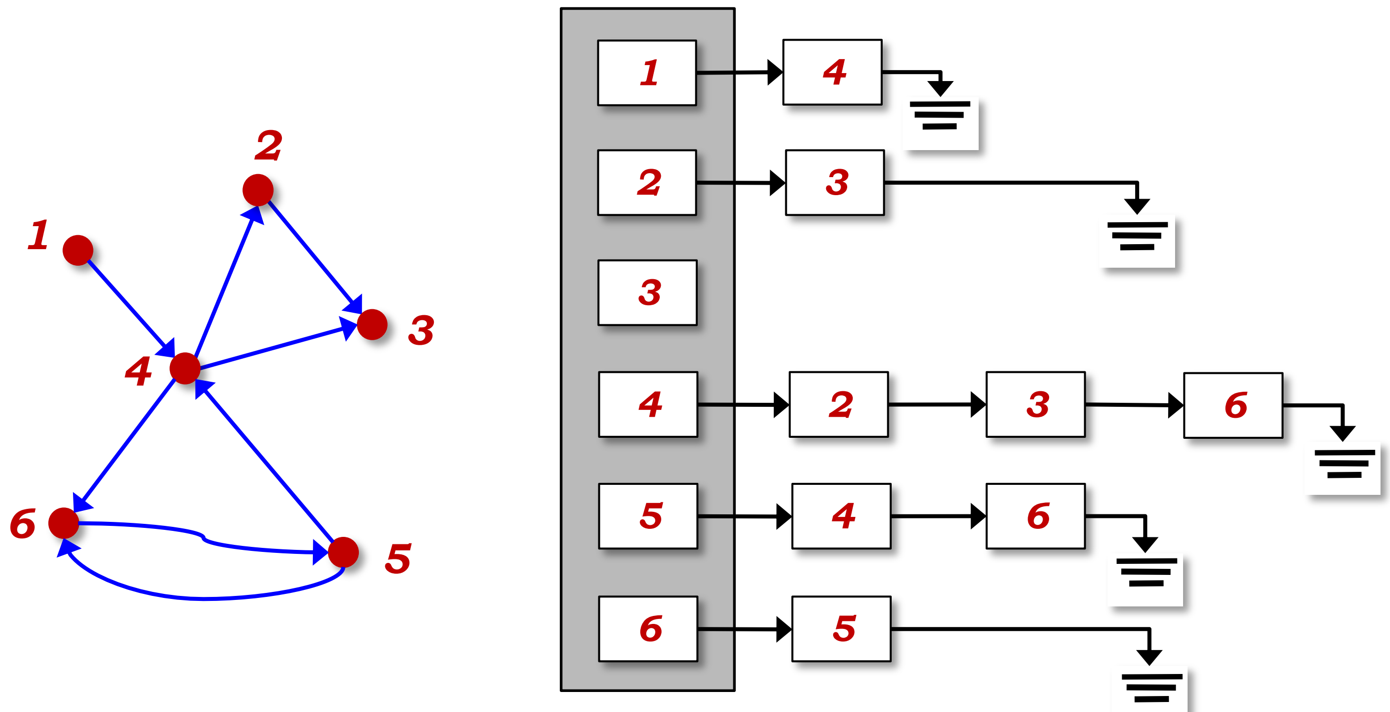
- *Tanto a matriz de adjacência como a matriz de incidência são representações que consomem muito espaço de memória, principalmente se o grafo representado é um grafo relativamente esparso. Uma estrutura mais conveniente e econômica é a lista de adjacência.*



INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

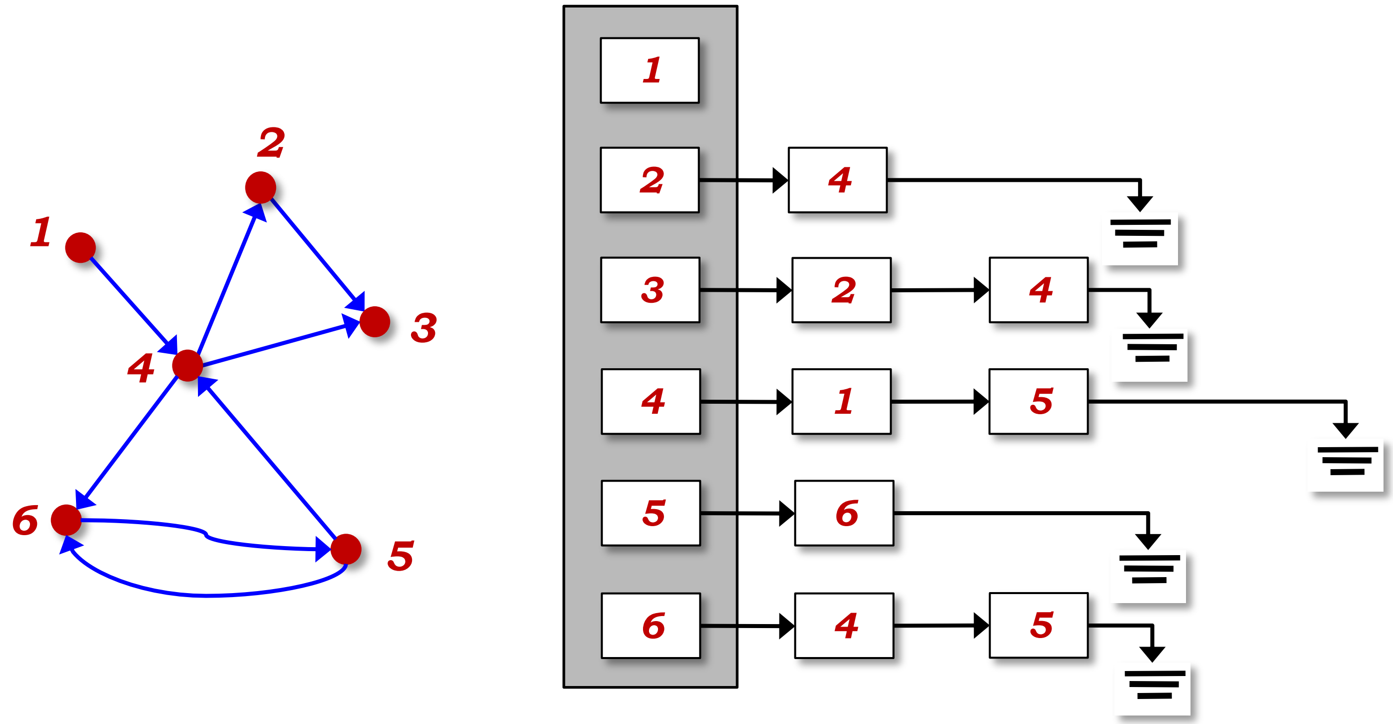
Representação Computacional de Grafos
Listas de adjacência

- *No caso direcionado, a representação mediante listas de adjacência pode ser realizada considerando o nós sucessores ou antecessores. No primeiro caso, a estrutura é denominada de "lista forward". No outro caso a estrutura é denominada de "lista backward".*



INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

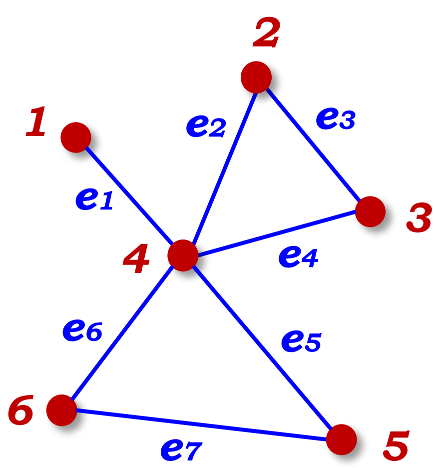
Representação Computacional de Grafos
Listas de adjacência



INSTITUTO FEDERAL
ESPIRITO SANTO
CAMPUS COLATINA

Representação Computacional de Grafos
Listas de Arestas (Arcos)

- *Outra representação útil no caso de grafos esparsos é aquela denominada listas de arestas (arcos).*



	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
Vértice A	1	2	2	3	4	4	5
Vértice B	4	4	3	4	5	6	6

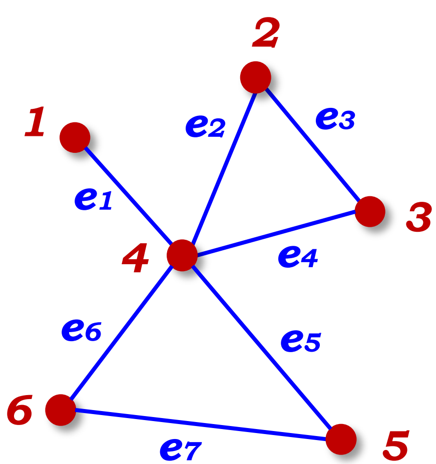
Representação Computacional de Grafos Estrela

- *A estrela é uma estrutura com dois componentes:*

  i) na primeira componente temos uma entrada para cada vértice e um ponteiro para uma posição na segunda componente que contém a lista de adjacências;

  ii) a segunda componente compreende as listas de adjacências de todos os vértices.
- *A estrutura é mais difícil de atualizar que as listas de adjacência simples.*
- *Explora melhor a "esparsidade" do grafo e ocupa menos espaço que outras estruturas de dados.*
- *Bastante útil em algoritmos que buscam arcos específicos a partir de um nó.*

Representação Computacional de Grafos Estrela



Vértice	Ponteiro
1	1
2	2
3	4
4	6
5	11
6	13
7	15

Ponteiro	Lista de Adjacência
1	4
2	3
3	4
4	2
5	4
6	1
7	2
8	3
9	5
10	6
11	4
12	6
13	4
14	5
15	0

Próximos Passos

- *Responder ao questionário no AVA*
- *Começar a tentar implementar uma estrutura de armazenamento de grafos*